

УСТАНОВЛЕНИЕ ВОЛН ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ИМПУЛЬСНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Введение

Интерес к нестационарным электромагнитным процессам вызван, прежде всего, многочисленностью и важностью их практических приложений. Среди них можно выделить, например, использование ультракоротких импульсов в системах передачи информации, дистанционном зондировании объектов, оптоэлектронных структурах, где существенны ультрабыстрые электромагнитные переходные процессы.

Мощным и математически строгим методом для решения целого класса задач электродинамики является метод функции Грина. Этот метод развит и используется для волноводов и резонаторов различной геометрии [1–3]. Однако в основном рассматриваются гармонические источники и, соответственно, функции Грина в частотном представлении. В данной работе построены функции Грина во временном представлении для нахождения электромагнитных полей в круговых резонаторах, которые возбуждаются источниками с произвольной зависимостью от времени.

Круговые диэлектрические резонаторы в последнее время нашли широкое применение в оптике благодаря возможности поддерживать особый вид колебаний с очень высокой добротностью (волна шепчущей галереи). Использование этих колебаний в оптических фильтрах [4], биосенсорах [5], микролазерах с низким порогом генерации [6] существенно расширяет область применения таких резонаторов.

Пространственно-временная функция Грина для цилиндра

Рассмотрим однородный вдоль оси симметрии цилиндр с диэлектрической ϵ_1 и магнитной μ_1 проницаемостями, расположенный в однородной среде, параметры которой ϵ и μ соответственно. Источником электромагнитного поля является линейный ток, параллельный оси цилиндра.

В такой постановке задача является двумерной в поперечном сечении, т.е. ее можно формулировать как задачу о точечном источнике, возбуждающем поле в круговом резонаторе. Расположим в этом поперечном сечении полярную систему координат (ρ, φ) .

Как известно, электрическое поле, возбуждаемое источником $j(t, \vec{\rho})$, где вектор $\vec{\rho} = (\rho, \varphi)$, может быть найдено при помощи функции Грина $\hat{g}(t-t', \vec{\rho}-\vec{\rho}')$ по формуле

$$E(t, \vec{\rho}) = -\hat{g}(t-t', \vec{\rho}-\vec{\rho}') * \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t'} j(t', \vec{\rho}'), \quad (1)$$

здесь $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}'$ полярные координаты точки наблюдения и источника соответственно, c – скорость света в вакууме, $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} [F/m]$ – электрическая постоянная, знак $*$ означает свертку по временной и пространственным координатам.

Вначале найдем функцию Грина для безграничного пространства. Она является решением волнового уравнения с дельтаобразной правой частью, которое в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{g}(\vec{\rho}-\vec{\rho}', t-t') = -\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}')\delta(t-t'), \quad (2)$$

здесь $v_1 = c/\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$.

Если воспользоваться известными представлениями дельта-функции [7]

$$\delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}') = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \varphi')} \int_0^{\infty} s J_k(s\rho) J_k(s\rho') ds, \quad (3)$$

то решение уравнения (2) можно искать в виде

$$\hat{g}(\bar{\rho} - \bar{\rho}', t - t') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \varphi')} \int_0^{\infty} s J_k(s\rho) \bar{g}_k(s, \rho', t - t') ds. \quad (4)$$

После подстановки (3) и (4) в это уравнение получим

$$\left(s^2 v_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \bar{g}_k(s, \rho', \tau) = \frac{v_1^2}{2\pi} J_k(s\rho') \delta(\tau), \quad (5)$$

где $\tau = t - t'$.

Так как фундаментальным решением дифференциального уравнения с оператором $\frac{d^2}{d\tau^2} + \eta^2$ [8] является регулярная обобщенная функция $\sin \eta \tau / \eta \Theta(\tau)$, где $\eta > 0$, $\Theta(\tau)$ – единичная функция Хевисайда, то решение уравнения (2) можно записать в виде

$$\bar{g}_k(s, \rho', \tau) = \frac{v_1}{2\pi} J_k(s\rho') \frac{\sin s v_1 \tau}{s} \Theta(v_1 \tau). \quad (6)$$

Подстановка полученной функции в (4) и использование формул интегрирования [9, (8.530.2), (6.671.7)] дает выражение для функции Грина в безграничном пространстве:

$$\hat{g}(t - t', \bar{\rho} - \bar{\rho}') = \frac{v_1}{2\pi} \frac{\theta(v_1(t - t') - |\bar{\rho} - \bar{\rho}'|)}{\sqrt{v_1^2(t - t')^2 - |\bar{\rho} - \bar{\rho}'|^2}}. \quad (7)$$

В дальнейшем решение будет производиться в представлении преобразования Лапласа $\hat{G}(p) = \int_0^{\infty} \hat{g}(\tau) \exp(p\tau) d\tau$. Применяя его к (7) получим функцию Грина в этом представлении

$$\hat{G}(p, \bar{\rho} - \bar{\rho}') = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{p}{v_1} |\bar{\rho} - \bar{\rho}'|\right), \quad (8)$$

где $K_0(\dots)$ – модифицированная функция Бесселя.

Найдем теперь функцию Грина для ограниченной области. Кроме уравнения (2) она должна также удовлетворять граничным условиям таким же, как и для электрического поля. Эти условия сводятся к непрерывности на поверхности цилиндра функции и ее нормальной производной

$$\hat{G}^+ \Big|_{\rho=\rho_0} = \hat{G}^- \Big|_{\rho=\rho_0}; \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \hat{G}^+}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{G}^-}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (9)$$

здесь ρ_0 – радиус цилиндра, знак «+» соответствует внутренним точкам поверхности цилиндра, знак «-» – внешним.

Вид функции Грина для неоднородной среды определяется взаимным расположением точек $\bar{\rho}$ и $\bar{\rho}'$, в другой терминологии, – положением источника. В области источника, т.е. в области, в которой расположены обе точки $\bar{\rho}$ и $\bar{\rho}'$, решение следует искать в виде суперпозиции решения безграничной задачи и слагаемого, учитывающего влияние границы. В области, свободной от источников, т.е. в случае, когда $\bar{\rho}$ находится вне цилиндра, а $\bar{\rho}'$ принадлежит ему, решение строится только с учетом влияния границы.

Так, если источник расположен внутри цилиндра, функцию Грина следует искать в виде

$$\hat{G}^+ = \frac{1}{2\pi} K_0(\beta |\bar{\rho} - \bar{\rho}'|) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \varphi')} A_k(p) I_k(\beta\rho) I_k(\beta\rho'), \quad \rho < \rho_0, \quad (10)$$

$$\hat{G}^- = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \varphi')} B_k(p) K_k(\alpha\rho) I_k(\beta\rho'), \quad \rho > \rho_0, \quad (11)$$

где $\alpha = p/v$, $\beta = p/v_1$.

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_k(p)$ и $B_k(p)$ воспользуемся граничными условиями (9) и разложением

$$K_0\left(\frac{p}{v}|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi-\varphi')} \times \left[I_k\left(\frac{p}{v}\rho\right)K_k\left(\frac{p}{v}\rho'\right)\Theta(\rho'-\rho) + I_k\left(\frac{p}{v}\rho'\right)K_k\left(\frac{p}{v}\rho\right)\Theta(\rho-\rho') \right], \quad (12)$$

получим

$$A_k(p) = \frac{K_k(\beta\rho_0)K'_k(\alpha\rho_0) - Z/Z_1 K'_k(\beta\rho_0)K_k(\alpha\rho_0)}{Z/Z_1 I'_k(\beta\rho_0)K_k(\alpha\rho_0) - I_k(\beta\rho_0)K'_k(\alpha\rho_0)}, \quad (13)$$

$$B_k = \frac{1}{\alpha\rho_0} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{1}{Z/Z_1 I'_k(\beta\rho_0)K_k(\alpha\rho_0) - I_k(\beta\rho_0)K'_k(\alpha\rho_0)}. \quad (14)$$

Здесь $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$, $Z_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ – волновые импедансы сред.

Для случая возбуждения внешним источником функция Грина строится аналогичным образом:

$$\hat{G}_{cr}^+ = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi-\varphi')} \bar{A}_k(p) I_k(\beta\rho) K_k(\alpha\rho'), \quad \rho < \rho_0, \quad (15)$$

$$\hat{G}_{cr}^- = \frac{1}{2\pi} K_0(\alpha|\bar{\rho}-\bar{\rho}'|) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi-\varphi')} \bar{B}_k(p) K_k(\alpha\rho) K_k(\alpha\rho'), \quad \rho > \rho_0. \quad (16)$$

Коэффициенты $\bar{A}_k(p)$ и $\bar{B}_k(p)$ определяем из граничных условий

$$\bar{A}_k(p) = \frac{1}{\alpha\rho_0} \frac{1}{Z/Z_1 I'_k(\beta\rho_0)K_k(\alpha\rho_0) - I_k(\beta\rho_0)K'_k(\alpha\rho_0)}, \quad (17)$$

$$\bar{B}_k = \frac{I_k(\beta\rho_0)I'_k(\alpha\rho_0) - Z/Z_1 I'_k(\beta\rho_0)I_k(\alpha\rho_0)}{Z/Z_1 I'_k(\beta\rho_0)K_k(\alpha\rho_0) - I_k(\beta\rho_0)K'_k(\alpha\rho_0)}. \quad (18)$$

Выражения для изображения по Лапласу полей внутри и вне цилиндра могут быть получены после применения преобразования Лапласа к выражению (1) и подстановки соответствующей функции Грина

$$L^* = -\frac{1}{c^2\epsilon_0} \hat{G}(p, \bar{\rho}-\bar{\rho}') * pJ(p, \bar{\rho}), \quad (19)$$

где знак * обозначает свертку только по пространственным координатам.

Возбуждение цилиндра внешними импульсами

Рассмотрим линейный источник $\vec{j} = \hat{e}_z j(t)\delta(\bar{\rho}-\bar{\rho}_s)$ с зависимостью от времени $j(t) = \theta(t)$, расположенный вне резонатора, $\rho_s > \rho_0$. В однородной среде он излучает бегущую цилиндрическую волну, которая занимает область пространства $vt > |\bar{\rho}-\bar{\rho}'|$ и монотонно убывает после прохождения волнового фронта через точку наблюдения:

$$\bar{E}_0 = -\frac{v}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\sqrt{v^2 t^2 - |\bar{\rho}-\bar{\rho}'|^2}} \theta(vt - |\bar{\rho}-\bar{\rho}'|). \quad (20)$$

Поле источника с зависимостью от времени в виде прямоугольного импульса $j(t) = \theta(t) - \theta(t - \Delta t)$ представляет собой суперпозицию двух бегущих волн, одна из которых соответствует моменту включения, а другая – моменту выключения источника

$$\bar{E}_0 = -\frac{v}{2\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{1}{\sqrt{v^2 t^2 - |\bar{\rho}-\bar{\rho}'|^2}} \theta(vt - |\bar{\rho}-\bar{\rho}'|) - \frac{1}{\sqrt{v^2 (t-\Delta t)^2 - |\bar{\rho}-\bar{\rho}'|^2}} \theta(v(t-\Delta t) - |\bar{\rho}-\bar{\rho}'|) \right]. \quad (21)$$

Выражения для полей внутри и вне резонатора могут быть получены с помощью формулы (19) и соответствующей функции Грина. Обратное преобразование для этих функций основано на вычислении вычетов в особых точках функции-изображения и интеграла вдоль разреза, который проходит вдоль отрицательной полуоси $\text{Re}(p)$ комплексной плоскости p .

Особые точки, обусловлены нулями знаменателей (13), (14), (17), (18) и определяют собственные частоты резонатора. Все собственные частоты комплексные, действительная часть определяет частоту осцилляций, а мнимая – скорость затухания колебаний.

Для расчетов и графического представления результатов введем безразмерное время

$$T = \frac{c}{\rho_0} t. \text{ Коэффициент нормировки напряженности поля } N = \frac{v}{2\pi \epsilon_0 c^2}.$$

Рассмотрим немагнитный ($\mu_1 = 1$) резонатор, находящийся в вакууме ($\epsilon = \mu = 1$). Коэффициент преломления материала резонатора $n = \sqrt{\epsilon_1} = 3.4$. Пусть источник расположен вне резонатора в точке $(\rho_s = 2\rho_0, \varphi_s = 0)$, а точка наблюдения имеет координаты $(\rho = \rho_0/2, \varphi = 0)$.

Рис 1, а соответствует эволюции в зависимости от времени T действительной части z -компоненты нормированной напряженности электрического поля, возбуждаемого в резонаторе внешним ступенчатым током $j(T) = \theta(T)$.

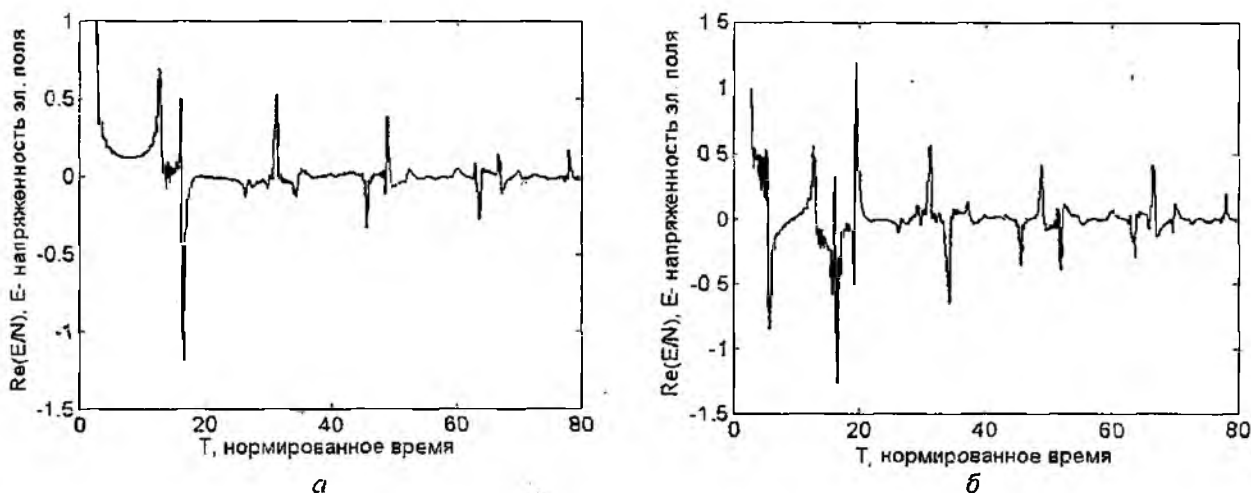


Рис 1

Рис 1, б соответствует эволюции поля в случае возбуждения прямоугольным импульсом $j(T) = \theta(T) - \theta(T - \Delta T)$. $\Delta T = 3$. Первый пик соответствует моменту включения источника, второй – моменту выключения, следующие пики соответствуют моментам прохождения через точку наблюдения волновых фронтов, отраженных от границы.

Возбуждение волн шепчущей галереи в круговом резонаторе

Явление высокочастотного резонанса волн шепчущей галереи в диэлектрических дисках и шарах основано на почти полном внутреннем отражении волны, распространяющейся вдоль вогнутой границы. В данной работе внимание сконцентрировано на собственных колебаниях, т.е. тех, которые могут существовать без внешнего источника. Поэтому рассматривается источник, работающий от момента включения до момента выключения, с частотой заполнения, равной частоте одной из волн шепчущей галереи:

$$j(t, \vec{\rho}) = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(\varphi - \varphi') e^{i\omega t} [\theta(t) - \theta(t - t_1)], \quad \rho' < \rho. \quad (22)$$

Включение и выключение источника порождают переходные процессы одинаковой длительности, связанные с возбуждением волн различных частот и добротностей.

Будем считать, что волна установилась, если ее амплитуда в 10 раз превышает амплитуды всех остальных возбуждаемых мод (шумов), и исследуем, какой промежуток времени должен работать источник, чтобы установился необходимый тип колебаний.

Выражения для полей могут быть получены из формулы (19) с использованием функций Грина (10),(11),(13),(14). Обращение во временную область осуществляем, вычисляя вычеты в особых точках и интеграл вдоль разреза.

Пусть $\omega_0 = \frac{\omega_0}{c} \rho_0$ – нормированная частота излучения источника, $\omega_e = \frac{\omega_e}{c} \rho_0$ – нормированная собственная частота резонатора. Время работы источника $T_s = \frac{2\pi}{\omega_0} M$ рассматривается в терминах количества периодов M колебаний источника. Время работы источника $t_s = 2\pi M / \omega_0 = \lambda M / c$ и для длины волны $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ составляет $t_s = 5.2M \text{ fs}$.

Резонатор возбуждается на частоте источника $\omega_0 = 3.8619$, совпадающей с действительной частью собственной частоты резонатора $\omega_e = 3.8619 + j \cdot 2.5 \cdot 10^{-7}$ волны шепчущей галереи $E_{10,1}$ (показатель преломления среды внутри резонатора $n_1 = 3.44$, распределение поля показано на вставке к рис. 2, а). Источник расположен между центром и границей резонатора, $\rho' = 0.5\rho_0$. Точка наблюдения расположена внутри резонатора вблизи границы $\rho = 0.95\rho_0$. На рис. 2, а представлена эволюция поля, возбужденного коротким импульсом ($M = 3$), что соответствует времени работы источника 15.6 fs , на раннем этапе процесса. Нормированное время $T = 100$ для радиуса резонатора $\rho_0 \approx 0.95 \mu\text{m}$ соответствует временному отрезку $t = \rho_0 T / c = 0.32 \text{ ps}$. Z-компонента полного электрического поля изображена пунктирной линией, сплошной линией изображена компонента, соответствующая ВШГ. Амплитуда полного поля сильно превосходит амплитуду соответствующей моды.

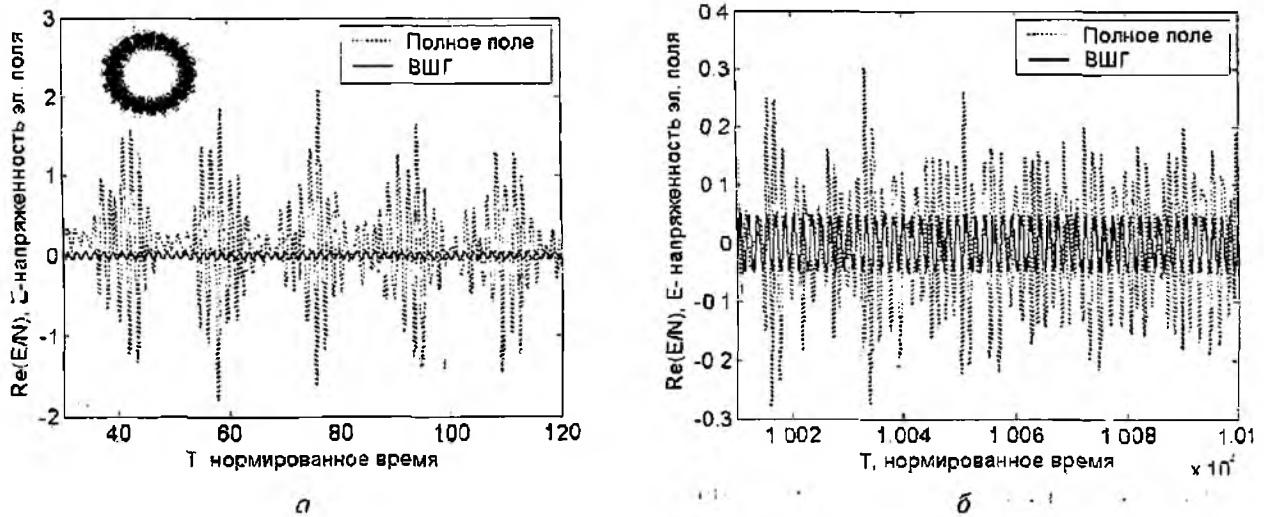


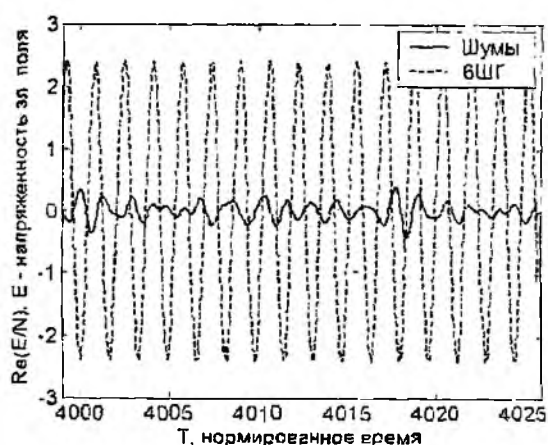
Рис 2

Рис 2, б соответствует более позднему промежутку времени. Амплитуда полного поля существенно снижается за счет излучения низкодобротных колебаний, однако она все равно превосходит амплитуду основной волны шепчущей галереи $E_{10,1}$. Это объясняется тем, что возбуждаются ВШГ с другими частотами и пространственным распределением с более высокой добротностью. Следовательно, короткий импульс не является эффективным для возбуждения ВШГ.

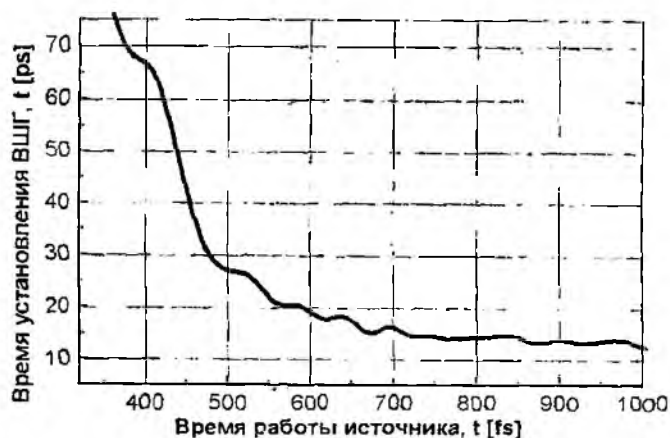
Рассмотрим возбуждение резонатора длинным импульсом ($M=150$). Для данных значений параметров время работы источника составляет 0.78 ps . Для получения явной картины извлекаем из полного поля компоненту, соответствующую ВШГ, и получаем в явном виде шумы. На рис. 3, а представлены ВШГ и шумы в случае возбуждения резонатора длинным

импульсом. На рис. 3, б представлена кривая установления во времени ВШГ $E_{\text{шг}}$ в зависимости от времени работы источника. Очевидно, что для установления данной ВШГ нужно, чтобы источник работал 700 fs. При этом волна устанавливается в пределах 15 ps.

Если источник работает в пределах 400 – 500 fs, время установления волны более продолжительно. Следует подчеркнуть, что если источник работает менее 300 fs, волна не устанавливается, т.е. не достигает того состояния, в котором амплитуда превышает шум в 10 раз. Зависимость времени установления ВШГ от времени работы источника имеет приблизительно экспоненциальный характер с выходом на режим насыщения.



а



б

Рис. 3

Выводы

Построены функции Грина, позволяющие рассматривать возбуждение резонатора источником с произвольной зависимостью от времени.

С помощью построенных функций Грина проведено численно-аналитическое исследование переходных процессов электромагнитных явлений в круговом резонаторе, который возбуждается внутренним или внешним источником импульсного характера.

Показано, что при возбуждении резонатора внешним источником поле в резонаторе представляет собой ряд экспоненциально убывающих импульсов, отраженных от границ резонатора.

Исследован механизм установления ВШГ при возбуждении резонатора импульсным током с частотой заполнения, совпадающей с действительной частью частоты ВШГ. Получена зависимость времени установления волны от времени работы источника возбуждения. Показано, что такая зависимость носит убывающий характер, с выходом на режим насыщения.

Список литературы: 1. *C T Tai* Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory. 2nd ed, New York Press, 1994. 2. *Y Rahmat-Samii* On the question of computation of the dyadic Green's function at the source region in waveguides and cavities // IEEE Transactions on Microwave Theory Tech. Vol. MTT-23, 1975, pp. 762-765. 3. *C Tokgoz, G Dural* Closed-Form Green's Functions for Cylindrically Stratified Media // IEEE Transactions on Microwave Theory Tech., Vol. 48, no. 1, January 2000, pp. 40-49. 4. *B E Little, S I Chu, H A Hans, J Foresi and J P Lam* Microring resonator channel dropping filters // J. Lightwave Technology, Vol. 15, pp. 998-1005, 1997. 5. *R. Boyd, J Heebner* Sensitive disk resonator photonic biosensor // Applied Optics, Vol. 40, pp. 5742-5747, 2001. 6. *T. Baba, D. Sano* Low-Threshold lasing and Purcell effect in microdisk lasers at room temperature // IEEE J Selected Topics on Quantum Electronics, Vol. 9, no. 15, pp. 1340-1346, 2003. 7. *Фелсен Л. Маркутин Н* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1.2. 8. *Кеч В. Теодореску П* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 520 с. 9. *Градиштейн И С, Рыжик И М* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1097 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 27.10.2008