

СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОСП и ММВ-АЛГОРИТМОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ЗАДАНИИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Причины возникновения априорной неопределенности о свойствах сигналов достаточно разнообразны. В частности, к ним можно отнести: отсутствие точных сведений о пространственном (угловом) положении источника сигнала (например, направление на источник сигнала известно с точностью до некоторого углового сектора); пространственные эволюции источника сигнала или, собственно, антенной решетки (АР) (объекта, на котором размещается АР); неточное знание несущей частоты сигнала (эффект Доплера); влияние среды и механизма распространения радиоволн (флуктуации направления прихода сигнала, объектовая многолучевость); отличия вследствие взаимного влияния антенных элементов (АЭ) и отражений от местных предметов, характеристик АР от соответствующих модельных предположений; флуктуации элементов АР, случайные изменения амплитуд и фаз токов на выходах АЭ и т.д. Гипотеза о наличии используемых при синтезе алгоритмов адаптивной пространственной обработки сигналов (АПОС) точных априорных данных практически никогда не выполняется на практике. В реальных условиях речь идет даже не о том, имеются ли ошибки в априорных данных, а скорее о том, какова величина этих ошибок и можно ли ими пренебречь.

Будем считать, что априорные данные о сигнале характеризуются выражениями

$$\begin{aligned} \|\vec{V}_y - \vec{V}_s\| &= \delta_1, \quad \|\vec{V}_y\| = \|\vec{V}_s\|, \\ \gamma_{sy} &= \angle(\vec{V}_s, \vec{V}_y) = \gamma_0, \end{aligned}$$

где $\|\vec{V}_y\| = \|\vec{V}_s\|$; $\|\cdot\|$ – обозначение евклидовой векторной нормы в N -мерном комплексном пространстве; $\delta_1 \in R_+ \cup 0$, $\gamma_{sy} = \arccos(\vec{V}_s^H \vec{V}_y / \|\vec{V}_y\| \|\vec{V}_s\|)$ – обобщенный угол между \vec{V}_y и \vec{V}_s ; $\gamma_0 \in R_+$.

На основании [1] запишем

$$\vec{W}_1 = \vec{W}_{МОСП} = \beta \mathbf{R}_{nu}^{-1} \vec{V}_y, \vec{W}_2 = \vec{W}_{МОСП} = \beta \mathbf{R}_{xx}^{-1} \vec{V}_y, \quad (1)$$

$$\vec{W}_3 = \vec{W}_{МВМ} = \beta \bar{Q}(\lambda_{\min}(\mathbf{R}_{nu})), \vec{W}_4 = \vec{W}_{МВМ} = \beta \bar{Q}(\lambda_{\min}(\mathbf{R}_{xx})), \quad (2)$$

где $\bar{Q}(\lambda_{\min}(\mathbf{R}_{xx}))$ – собственный вектор (СВ), соответствующий минимальному собственному числу (СЧ) матрицы \mathbf{R}_{xx} .

В выражениях (1), (2) векторы весовых коэффициентов (ВВК) определены с точностью до постоянного коэффициента, следовательно, не снижая общности, можно положить $\|\vec{W}_1\| = \|\vec{W}_2\| = \|\vec{W}_3\| = \|\vec{W}_4\|$. Очевидно, что при наличии точной априорной информации с сигнале $(\|\vec{V}_y - \vec{V}_s\| = \delta_1 = 0, \gamma_{sy} = 0)$ $\|\vec{W}_1 - \vec{W}_2\| = 0, \|\vec{W}_3 - \vec{W}_4\| > 0$ для любых сигнально-помеховых ситуаций и при этом $\eta(\vec{W}_1) > \eta(\vec{W}_3)$ ($\eta(\cdot)$ – отношение сигнал / (помеха+шум), (ОСПШ) на выходе АР). В случае полной априорной неопределенности о пространственной

структуре сигнала $\left(\delta_1 \in \left[\theta + 2\|\vec{V}_y\| \right], \gamma_{sy} \in \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \right)$ справедливо [1], что при выполнении условий $L < N$ для ВВК \vec{W}_1 и $L < (N-1)$ для ВВК \vec{W}_2 выполняются предельные соотношения

$$\lim_{(\sigma_{uu}^2/P_\Sigma) \rightarrow 0} \vec{W}_1 = \beta \vec{W}_3, \lim_{(\sigma_{uu}^2/P_\Sigma) \rightarrow 0} \vec{W}_2 = \beta \vec{W}_4, P_\Sigma = \sum_{k=1}^L P_k; P_{2\Sigma} = P_\Sigma + P_s.$$

Из этого следует, что при отсутствии априорной информации о направлении прихода сигнала и выполнении условия $P_{1\Sigma} \gg \sigma_{uu}^2$, $P_{2\Sigma} \gg \sigma_{uu}^2$ потенциальная эффективность ММВ и МОСП-алгоритмов практически одинакова: ВВК \vec{W}_1 и \vec{W}_3 осуществляют подавление помех, а ВВК \vec{W}_2 , \vec{W}_4 – сигнала и помех до уровня теплового шума. Заметим, что при невыполнении условия $P_{1\Sigma} \gg \sigma_{uu}^2$ ($P_{2\Sigma} \gg \sigma_{uu}^2$), $\|\vec{W}_1 - \vec{W}_3\| > 0$, $\|\vec{W}_2 - \vec{W}_3\| > 0$ и выходные отношения сигнал/шум, помеха/шум обратно пропорциональны соответствующим входным отношениям [1].

Рассмотрим более подробно случай частичной априорной неопределенности о направлении прихода сигнала ($\delta_1 \in [\theta + \alpha]$, $\alpha < 2\|\vec{V}_y\|$). При этом ограничимся только ВВК \vec{W}_1 , \vec{W}_2 , \vec{W}_3 , поскольку ВВК \vec{W}_4 может представлять интересы только в частном случае $L = N - 1$.

В случае отсутствия помех КМ $\mathbf{R}_{uu}, \mathbf{R}_{xx}$ имеют вид

$$\mathbf{R}_{uu} = \sigma_{uu}^2 \mathbf{I}, \mathbf{R}_{xx} = P_s \vec{V}_s \vec{V}_s^H + \sigma_{uu}^2 \mathbf{I}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получим

$$\vec{W}_1 = \beta \vec{V}_y, \vec{W}_2 = \beta \left(\left(\vec{V}_s^H \vec{V}_s + \sigma_{uu}^2 / P_s \right) \vec{V}_y - \rho_{sy} \vec{V}_s \right), \rho_{sy} = \vec{V}_s^H \vec{V}_y. \quad (4)$$

Вычисляя СВ $\bar{Q}(\lambda_{\min}(\mathbf{R}_{uu}))$ для случая (3) и, вводя условие нормировки $\|\bar{Q}(\cdot)\| = 1$, получим

$$\vec{W}_3 = \vec{C}_j, j = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где элементы c_{jk} вектора \vec{C}_j имеют вид: $c_{jk} = 1, k = j, c_{jk} = 0, k \neq j$.

Для определенности положим $j = 1$ и перепишем (5) в виде

$$\vec{W}_3 = \vec{C}_1. \quad (6)$$

Используя (4) – (6) и полагая $\|\vec{V}_y\| = \|\vec{V}_s\| = \sqrt{N}$, вычислим значения выходных ОСПШ

$$\eta(\bar{W}_1) = P_s / \sigma_{uu}^2 N (\cos \gamma_{sy})^2,$$

$$\eta(\bar{W}_2) = (P_s / \sigma_{uu}^2) \frac{N (\cos \gamma_{sy})^2 (\sigma_{uu}^2 / P_s)^2}{(N + \sigma_{uu}^2 / P_s) + N^2 (\cos \gamma_{sy})^2 - 2N(N + \sigma_{uu}^2 / P_s) \cos \gamma_{sy}}, \quad (7)$$

$$\eta(\bar{W}_3) = P_s / \sigma_{uu}^2, \quad (8)$$

где $\cos \gamma_{sy} = |\rho_{sy}| / \|\bar{V}_y\| \|\bar{V}_s\|$; $\gamma_{sy} = \angle(\bar{V}_s, \bar{V}_y)$. Решая уравнение $\eta(\bar{W}_1) = \eta(\bar{W}_3)$ относительно $\cos \gamma_{sy}$, получим выражение для пороговой функции ВВК \bar{W}_1 и \bar{W}_3 – границы области $\eta(\bar{W}_1) \geq \eta(\bar{W}_3)$

$$\cos \gamma_{sy} = 1 / \sqrt{N} (\gamma_{sy} = \arccos(1 / \sqrt{N})) \quad (9)$$

Аналогично, приравнявая между собой выражения (7), (8), получим квадратное уравнение

$$\cos^2 \gamma_{sy} N^2 \left(\left(\frac{\sigma_{uu}^2}{P_s} \right)^2 - 1 \right) + \cos \gamma_{sy} 2N(N + \sigma_{uu}^2 / P_s) - (N + \sigma_{uu}^2 / P_s) = 0. \quad (10)$$

Решения $\cos \gamma_{1,2}$ этого уравнения (пороговые функции) определяют пороговый интервал $[\gamma_1, \gamma_2]$ (область значений обобщенного угла γ_{sy} для которых $\eta(\bar{W}_3) \geq \eta(\bar{W}_2)$). Разность углов определяет ширину порогового интервала. Решая (10), получим

$$\gamma_{1,2} = \arccos \left(\frac{\sigma_{uu}^2}{P_s} - N \right) \pm \sqrt{D} / N \left(\left(\frac{\sigma_{uu}^2}{P_s} \right)^2 - 1 \right), \quad (11)$$

где $D = (N + \sigma_{uu}^2 / P_s) \left(N + \sigma_{uu}^2 / P_s + \left(\frac{\sigma_{uu}^2}{P_s} \right)^2 - 1 \right)$.

Из (9) и (11) видно, что при отсутствии помех граница области $\eta(\bar{W}_{МОСП}) \geq \eta(\bar{W}_{ММВ})$ определяется размерностью пространственного фильтра (ПФ) (ВВК \bar{W}_1 и \bar{W}_3) и размерностью ПФ и входным отношениям сигнал/шум (ВВК \bar{W}_2 и \bar{W}_3). Очевидно, что при заданной структуре ПФ (количестве АЭ и межэлементном расстоянии) γ_{sy} однозначно определяется ошибкой в задании угла прихода сигнала. Следовательно, выражения (9), (11) позволяют определить максимальное значение ошибок в задании направления прихода сигнала, при которых удовлетворяется неравенство $\eta(\bar{W}_{МОСП}) \geq \eta(\bar{W}_{ММВ})$. При наличии помех, в частности, при $L = 1$,

$$\mathbf{R}_{uu} = P_1 \bar{V}_1 \bar{V}_1^H + \sigma_{uu}^2 \mathbf{I}; \mathbf{R}_{xx} = P_s \bar{V}_s \bar{V}_s^H + P_1 \bar{V}_1 \bar{V}_1^H + \sigma_{uu}^2 \mathbf{I}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в выражение (1) и используя лемму об обращении матриц, получим [2]

$$\bar{W}_1 = \beta \left(\left(\bar{V}_1^H \bar{V}_1 + \sigma_{uu}^2 / P_1 \right) \bar{V}_y - \rho_{1y} \bar{V}_1 \right), \quad \rho_{1y} = \bar{V}_1^H \bar{V}_y, \quad (13)$$

$$\bar{W}_2 = \beta \left(\mathbf{R}_{nu}^{-1} - \frac{P_s \mathbf{R}_{nu}^{-1} \bar{V}_s \bar{V}_s^H \mathbf{R}_{nu}^{-1}}{1 + P_s \bar{V}_s^H \mathbf{R}_{nu}^{-1} \bar{V}_s} \right) \bar{V}_y, \quad (14)$$

где $\mathbf{R}_{nu}^{-1} = \alpha \left((\sigma_u^2 + P_1 \bar{V}_1^H \bar{V}_1) \mathbf{I} - P_1 \bar{V}_1 \bar{V}_1^H \right)$; $\alpha = 1 / \left(\sigma_u^2 (\sigma_u^2 + P_1 \bar{V}_1^H \bar{V}_1) \right)$. После преобразований с учетом $\|\bar{V}_y\| = \|\bar{V}_s\| = \|\bar{V}_1\| = \sqrt{N}$ выражение (14) можно представить в виде [1]

$$\bar{W}_2 = A \bar{V}_y - P_1 \rho_{1y} \bar{V}_1 - \alpha \frac{NA - P_1 |\rho_{s1}|^2 (A \bar{V}_y - P_1 \rho_{1y} \bar{V}_1)}{NA - P_1 |\rho_{s1}|^2}, \quad (15)$$

где $A = \sigma_u^2 + P_1 \bar{V}_1^H \bar{V}_1$; $\rho_{s1} = \bar{V}_s^H \bar{V}_1$.

Учитывая, что КМ \mathbf{R}_{nu} в (12) представляет собой сумму матрицы единичного ранга $(P_1 \bar{V}_1 \bar{V}_1^H)$ и диагональной матрицы $\sigma_u^2 \mathbf{I}$, а нормированные СВ матриц \mathbf{D} и $\mathbf{B} = \mathbf{D} + \alpha \mathbf{I}$ тождественны, положим $\sigma_u^2 = 0$ и запишем выражение для матрицы, присоединенной к \mathbf{R}_{nu} ,

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{I} - \frac{1}{\bar{V}_1^H \bar{V}_1} \bar{V}_1 \bar{V}_1^H. \quad (16)$$

Из (16) следует существование $N-1$ линейно независимых СВ $\bar{Q}(\lambda_{\min}(\mathbf{R}_{nu}))$. Ограничившись первым столбцом (16) имеем

$$\bar{W}_3 = \bar{C}_1 - \frac{1}{\bar{V}_1^H \bar{V}_1} \bar{V}_1. \quad (17)$$

При использовании ВВК (13), (17) ОСПШ на выходе ПФ можно представить в виде

$$\eta(\bar{W}_1) = \frac{P_s \left(\alpha^2 |\rho_{sy}|^2 + |\rho_{1y}|^2 |\rho_{s1}|^2 - 2\alpha \operatorname{Re} \{ \rho_{sy} \rho_{1y} \rho_{s1} \} \right)}{P_1 \left(\alpha^2 |\rho_{1y}|^2 + |\rho_{1y}|^2 N^2 - 2\alpha |\rho_{1y}|^2 N^2 \right) + \sigma_u^2 \left(\alpha^2 N + N |\rho_{1y}|^2 - 2\alpha |\rho_{1y}|^2 \right)}, \quad (18)$$

$$\eta(\bar{W}_3) = \left(P_s / \sigma_u^2 \right) \frac{1 + \frac{1}{N^2} |\rho_{1y}|^2 - \frac{2}{N} \operatorname{Re}(\rho_{1y})}{2 + \frac{2}{N}}, \quad a = N + \sigma_u^2 / P_1. \quad (19)$$

Приравнивая выражения (18) и (19), аналогично (10) получим квадратное уравнение относительно $|\rho_{sy}| (\cos \gamma_{sy})$. Однако при этом в отличие от (11) от ошибок в априорных данных о сигнале зависит не только $|\rho_{sy}| (\cos \gamma_{sy})$, но и слагаемое $2a \operatorname{Re} \{ \rho_{sy} \rho_{1y} \rho_{s1} \}$. Решая

уравнение $\eta(\vec{W}_1) = \eta(\vec{W}_3)$, можно найти пороговые функции $\cos\gamma_1, \cos\gamma_2$ и определить соответствующий пороговый интервал для ВВК \vec{W}_1 и \vec{W}_3 .

Из (18) и (19) видно, что ширина порогового интервала зависит от размерности ПФ, входного отношения помеха/шум, обобщенных углов между векторами \vec{V}_y и \vec{V}_s , \vec{V}_y и \vec{V}_1 , \vec{V}_s и \vec{V}_1 , а также взаимных комбинаций векторов \vec{V}_s , \vec{V}_y и \vec{V}_1 . Таким образом, характер функциональной зависимости ширины порогового интервала от параметров сигнально-помеховой обстановки более сложен по сравнению со случаем, когда расчет ВВК осуществляется при отсутствии помех.

Аналогично, используя (15) и решая уравнение $\eta(\vec{W}_2) = \eta(\vec{W}_3)$, можно получить выражение для пороговых функций ВВК \vec{W}_2, \vec{W}_3 и определить соответствующий пороговый интервал. Очевидно, что в этом случае $\Delta\gamma$, наряду с указанными выше факторами, будет зависеть также от входного отношения сигнал/шум, а характер зависимости $\Delta\gamma$ от данных комбинаций векторов \vec{V}_s , \vec{V}_y и \vec{V}_1 существенно усложняется.

В качестве примера на рис. 1 – 4 показаны полученные путем математического моделирования зависимости ширины порогового интервала от входного отношения помеха/шум (рис. 1, 2) и угла прихода помехи (рис. 3, 4). При моделировании рассматривалась трехэлементная линейная эквидистантная антенная решетка, состоящая из изотропных и невзаимодействующих АЭ, разнесенных в пространстве на $d = m_0/2$ и использовались следующие предположения о сигнально-помеховой обстановке (числе помех L , входных отношениях сигнал/шум $P_s/\sigma_{ш}^2$, углах прихода сигнала Θ_s и помех Θ_l):

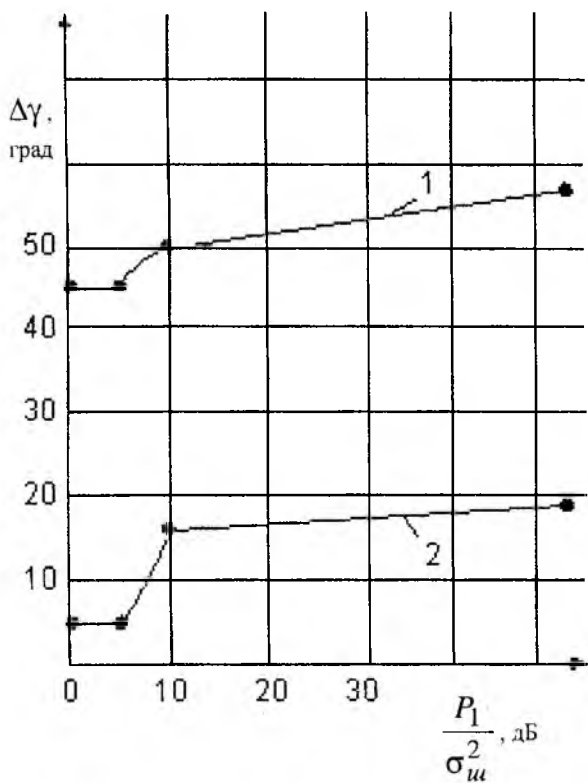


Рис. 1

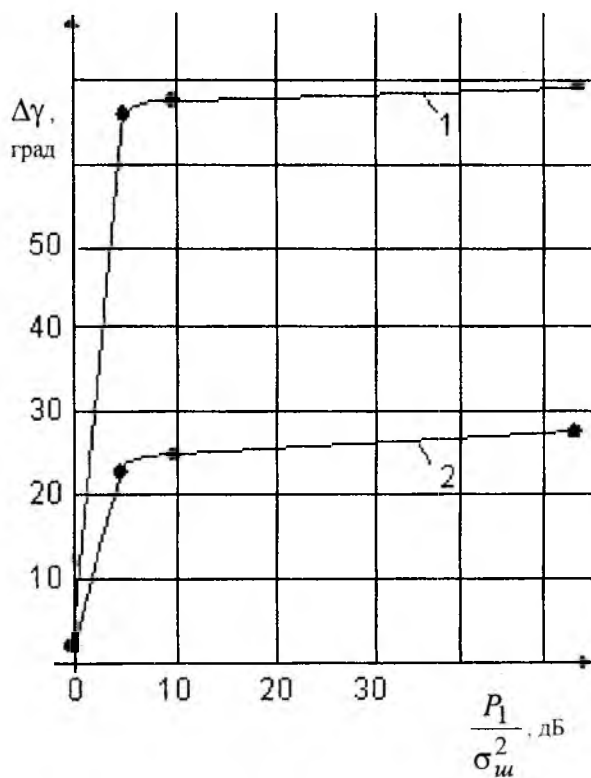


Рис. 2

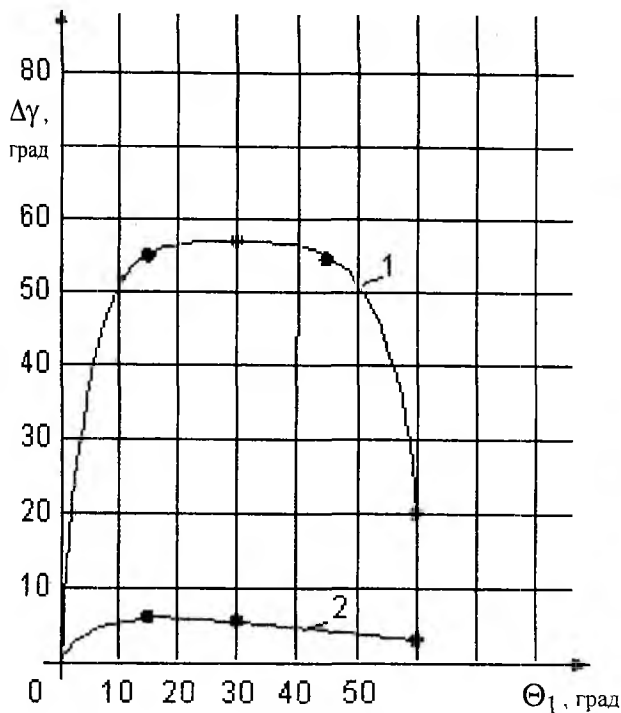


Рис. 3

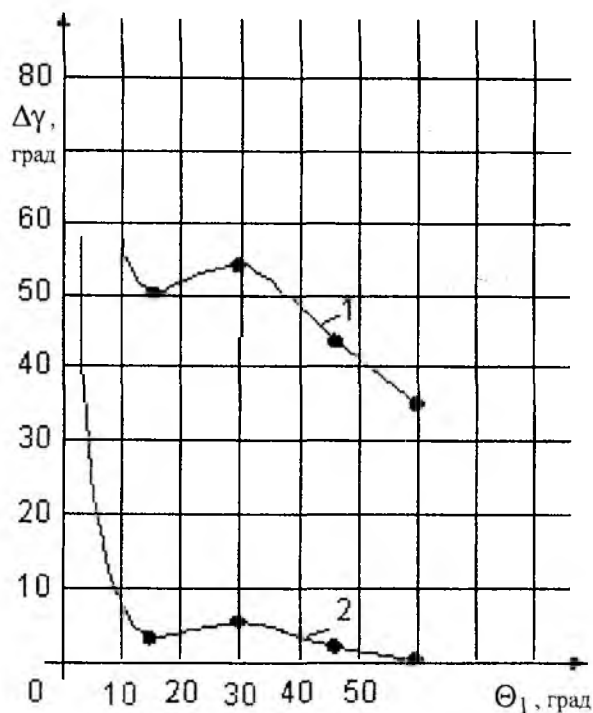


Рис. 4

- рис. 1 - $L=1, \Theta_s=0^\circ, \Theta_1=20^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_{ш}^2)=10\text{дБ}$;

- рис. 2 - $L=2, \Theta_s=0^\circ, \Theta_1=20^\circ, \Theta_2=10^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_\phi^2)=10\lg(P_s/\sigma_\phi^2)=10\text{дБ}$;

- рис. 3 - $L=1, \Theta_s=0^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_{ш}^2)=10\lg(P_1/\sigma_{ш}^2)=10\text{дБ}$;

- рис. 4 - $L=2, \Theta_s=0^\circ, \Theta_1=30^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_{ш}^2)=10\lg(P_1/\sigma_{ш}^2)=17\text{дБ}$;

$10\lg(P_2/\sigma_{ш}^2)=15\text{дБ}$. (Кривые, обозначенные на рис. 1 - 4 цифрой 1, соответствуют ВВК \bar{W}_1 , цифрой 2 - ВВК \bar{W}_2).

Из графиков (рис. 1 - 4) видно, что в случае ВВК \bar{W}_1, \bar{W}_3 пороговый интервал существенно шире, чем в случае ВВК \bar{W}_2, \bar{W}_3 , и в меньшей степени зависит от параметров сигнально-помеховой обстановки.

Таким образом, во всех случаях, когда априорные данные о сигнале (структуре ПФ) известны неточно, алгоритмы, реализующие критерий МОСП, более предпочтительны, чем ММВ-алгоритмы только при выполнении условия $\gamma_{sy} \in [\gamma_1, \gamma_2]$. Границы γ_1, γ_2 для обоих алгоритмов являются функциями структуры ПФ, ошибки в априорных данных, мощностей и углов прихода помех. Вследствие существенно большей ширины порогового МОСП-алгоритмы, реализующие ВВК \bar{W}_1 , более предпочтительны для использования в условиях частичной априорной неопределенности о пространственной структуре сигнала, чем соответствующие процедуры, реализующие ВВК \bar{W}_2 . Более того, алгоритмы, реализующие ВВК \bar{W}_2 , фактически мало чем отличаются от соответствующих ММВ-процедур (даже в рассматриваемых простых примерах ширина порогового интервала чрезвычайно мала). Следовательно, о практическом применении МОСП-алгоритмов в условиях частичной априорной неопределенности речь может идти только в том случае, когда имеется возможность расчета ВВК при отсутствии на входе АР полезного сигнала (сигналы с

пассивной паузой). Однако и в этом случае возможны ситуации, когда МОСП-алгоритмы уступают по качеству алгоритмам, реализующим критерий ММВ.

Список литературы: 1. *Марчук Л.А.* Адаптивная пространственная фильтрация при частичной и полной априорной неопределенности о параметрах сигналов // *Радиоэлектроника.* 1996. Т.39, № 9. С.61-66 Изв. высш. учеб. заведений. 2. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 16.01.02