УДК 510.62

Г. Г. ЧЕТВЕРИКОВ, канд. техн. наук, *И. Ю. ШУБИН*

АЛГОРИТМ МИНИМИЗАЦИИ СЛАБООПРЕДЕЛЕННЫХ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

В работе [1] поставлена каноническая задача дизъюнктивной минимизации формул алгебры конечных предикатов, в [1] предложены обобщенные на случай алгебры конечных предикатов алгоритмы канонической минимизации дизъюнктивных нормальных форм конечных предикатов. Данная работа посвящена вопросу минимизации формул алгебры конечных предикатов для случая слабоопределенных конечных предикатов.

Во многих лингвистических задачах большое число признаков (переменных в уравнениях) не определено, т. е. не известно значение некоторых аргументов конечного предиката. Будем говорить, что конечный предикат является слабоопределенным, если он обладает следующими свойствами: число переменных n велико; мощность объединения единичной V_1 и нулевой V_0 областей намного меньше общего числа возможных значений предиката.

Отметим, что единичную и нулевую области образуют наборы аргументов, в которых конечный предикат принимает значение 0 и 1 соответственно.

Пусть задан конечный предикат $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Набор аргументов $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ интерпретируем как вершину n-мерного гиперкуба. Вершины упорядочим по ярусам: в i-й ярус входят $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ вершин ($\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ — число сочетаний из n по i), которым соответствуют наборы, содержащие i одинаковых значений аргументов. Считаем, что вершины соединены ребром, если соответствующие им наборы аргументов отличаются в одном и только одном разряде:

Пример. Конечный предикат задан таблицей:

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—	0	1
x_2	0	1	0	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	2	—
x_3	0	0	2	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	2	—	—
f	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Знак «—» показывает, что значение данного аргумента или значение предиката на некотором наборе аргументов не определены. В данном примере вершинами, соединенными ребрами, например, с вершиной 5, являются 2, 3, 4, 8.

При большом количестве аргументов и большом числе неопределенных наборов, модифицируем способ записи конечного предиката: обозначим $f^1=1$ множество наборов аргументов предиката, когда $f=1$, и $f^1=0$ — в противном случае; $f^0=1$ — множество наборов, на которых $f=0$. В примере множество f^1 состоит из наборов 1, 3, 6, 7, 12, 13, 14, 17, 18, 20.

Вершины гиперкуба, в которых $f(x_1, x_2, ..., x_n)=1$, объединим в единичный интервал конечного предиката. Единичный интервал I_a конечного предиката назовем максимальным, если не найдется единичный интервал I_b, включающий I_a. В примере единичные интервалы {6, 7} {12, 13, 14}, {17, 18}.

Множество вершин гиперкуба, на которых конечный предикат равен нулю и которые образуют гиперкуб, назовем нулевой областью.

Минимизацию слабоопределенных конечных предикатов начнем с построения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы. Стратегия минимизации слабоопределенных формул конечных предикатов в классе ДНФ состоит из двух этапов. Выделение максимальных интервалов, построение сокращенной ДНФ предиката — первый этап. Вторым этапом является переход от сокращенной ДНФ $\tilde{f}$ к множеству тупиковых ДНФ данного предиката и выделение из тупиковых ДНФ минимальной формы.

Сокращенную ДНФ слабоопределенных конечных предикатов будем строить с помощью таблиц различий. Таблицей различий назовем двумерную таблицу размерности $n\times|V_0|$, каждой строке которой соответствует разряд рассматриваемого единичного интервала, столбцу — нулевой интервал, а на пересечении i-й строки и j-го столбца находится результат операции

$$i\oplus j=\begin{cases}1, \text{ если } i\neq j \text{ и } i,\ j\neq -;\\ 0, \text{ если } i=j \text{ или } j\vee i=-.\end{cases}$$

В качестве первого аргумента будем брать значение i-го разряда единичного интервала, а в качестве второго — значение i-го разряда нулевого интервала, соответствующего j-му столбцу.

Выделение максимальных интервалов сводится к покрытию столбцов строками таблицы различий. Покрытием столбцов строками в двумерной таблице называется множество строк, при котором для каждого столбца найдется хотя бы одна строка из этого множества, на пересечении с которой этот столбец имеет единицу, причем при вычеркивании хотя бы одного элемента из этого множества строк указанное свойство не выполняется. В самом деле, максимальные интервалы в слабоопределенных конечных предикатах состоят из вершин единичной и неопределенной областей. Единица в клетке (i, j) таблицы различий показывает, что если оставить i-й разряд в конъюнкции, то j-й нулевой интервал не входит в гиперкуб, соответствующий этой конъюнкции. Следовательно, покрытие столбцов строками порождает максимальный единичный интервал рассматриваемого конечного предиката f.

В результате получим сокращенную дизъюнктивную нормальную форму конечного предиката $\tilde{f}$, являющуюся уже полностью определенной. Единичная область $\tilde{V}_1$ функции $\tilde{f}$ содержит единичную область V_1 предиката f $\tilde{V}_1 \supset V_1$, нулевая область $\tilde{V}_0$ функции $\tilde{f}$ — нулевую область V_0 предиката f.

Выделение максимальных интервалов, построение сокращенной ДНФ конечного предиката — первый этап минимизации. Вторым этапом является переход от сокращенной ДНФ $\bar{f}$ к тупиковой ДНФ данного предиката.

Тупиковую ДНФ можно получить в результате покрытия столбцов строками импликантной таблицы (двумерной таблицы, каждой строке которой взаимно-однозначно соответствует максимальный интервал, столбцу — единичный интервал, а на пересечении i-строки и j-столбца находится 1, если j-й единичный интервал входит в i-й максимальный интервал, в противном случае на пересечении находится 0).

Теоретически число тупиковых ДНФ конечного предиката $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при росте n растет как 2^{2^n}. Практически же количество тупиковых ДНФ увеличивается значительно медленнее из-за неопределенных вершин гиперкуба. Перебор всех тупиковых ДНФ конечного предиката определяет выбор минимальной формы данного предиката.

Для примера рассмотрим нахождение минимальной ДНФ конечного предиката $f^1(x_1, x_2, \ldots, x_7)$:

$$f^1(x_1, x_2, \ldots, x_7) = \begin{cases} 1 \text{ на наборах } 10\text{—}0\text{—}22;\ 0\text{—}0\text{—}2\text{—}0; \\ \qquad\qquad \text{—}2\text{——}1\text{—}2; \\ 0 \text{ на наборах } 10\text{—}2\text{—}01;\ 00\text{——}10\text{—}; \\ \qquad\qquad 1101\text{—}2\text{—}. \end{cases}$$

Строим таблицы различий:

Единичный интервал	Нулевые интервалы		
	10-2-01	00--10-	1101-2-
0	0	0	0
—	0	0	0
2	0	1	0
—	0	0	0
0	1	0	0

Единичный интервал	Нулевые интервалы		
	10-2-01	00--10-	1101-1-
1	0	1	0
0	0	0	1
—	0	0	0
0	1	0	0
—	0	0	0
2	1	1	0
2	1	0	0

Покрытием этой таблицы будет интервал 0 — — — 2 — —, которому соответствует простая импликанта $x_1^0 x_5^2$. Аналогично для второго единичного интервала строим вторую таблицу.

Имеется несколько покрытий данной таблицы, минимальное представлено интервалом —0— — — —2—, соответствующая ему простая импликанта $x_2^0 x_6^2$. Остальные покрытия: $x_1^1 x_2^0 x_7^2$ (интервал 1 0 — — — — 2) и $x_1^1 x_2^0 x_4^0$ (1 0 — 0 — — —).

Для третьего единичного интервала получим покрытие x_2^2 (интервал —2——————).

В результате получили сокращенную ДНФ конечного предиката, являющуюся уже полностью определенной:

$$\tilde{f}^1(x_1, x_2, \ldots, x_7) = x_1^0 x_5^2 \vee x_1^1 x_2^0 x_7^2 \vee x_1^1 x_2^0 x_4^0 \vee x_2^2.$$

Вторым этапом минимизации является переход от сокращенной ДНФ предиката к тупиковой ДНФ этого предиката. Построим для рассматриваемого примера импликантную таблицу.
Тупиковые ДНФ, полученные из покрытия таблицы:

$$\tilde{f} = \begin{cases} x_2^2 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^0; \\ x_2^2 \vee x_1^1 x_2^0 x_7^2. \end{cases}$$

Таким образом, предложенный метод минимизации слабоопределенных конечных предикатов привел нас от неполностью определенных наборов аргументов к полностью определенным тупиковым ДНФ. Из примера видно, что эффективность метода минимизации не зависит от значности переменных, и может работать при разнородной значности переменных.

Покрытие таблицы различий	Единичные интервалы		
	0-0-2-0	10-0-22	-2---2
0---2--	1	0	0
10----2	0	1	0
10-0---	0	1	0
—2-----	1	0	1

Приведенный метод минимизации слабоопределенных формул алгебры конечных предикатов может быть использован при построении систем обработки речи, особенно в системах речевого ввода информации в ЭВМ, где невозможно избежать потери части информации.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Математические средства. Х., 1984. 144 с. 2. *Глушков В. М.* Синтез цифровых автоматов. М., 1962. 96 с.

Поступила в редколлегию 12.03.8

УДК 510.62