

АДАПТИВНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ

В литературе анализ качества алгоритмов адаптивной пространственной обработки сигналов (АПОС) обычно проводится с использованием целого ряда упрощающих предположений. В сугубо теоретическом плане такие предположения, безусловно, необходимы, так как в противном случае мы не смогли бы сопоставить полученные решения ни между собой, ни с известными теоретическими результатами. Однако реальные условия применения АПОС всегда отличаются от используемых при анализе идеализированных условий. В частности, при технической реализации адаптивной антенной решетки (ААР) речь может идти только о «малости» тех или иных ограничений, но ни в коем случае об их отсутствии. Следовательно, необходимым условием технической реализации, а значит и необходимым условием применения алгоритмов АПОС с неточно известными параметрами, является их «работоспособность» при наличии реализационных ограничений. Поэтому в данной статье будет проанализирована чувствительность синтезированных алгоритмов к одному из реализационных ограничений – объему выборки и, на основании такого анализа, будут разработаны предложения и определены требования к соответствующим ААР.

Определим чувствительность к объему выборки G -робастных алгоритмов АПОС. В общем случае такие алгоритмы можно представить в виде

$$\hat{W}_p = \bar{Q}(\lambda_{\max}(F\{\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{yy}\})), \quad (1)$$

где $F\{\cdot\}$ – сжимающий оператор, обеспечивающий заданное качество обработки; $\bar{Q}(\lambda_{\max}(\cdot))$ – собственный вектор (СВ), соответствующий минимальному собственному числу (СЧ); $\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \bar{X}_{(i)} \bar{X}_{(i)}^H$ – оценка корреляционной матрицы (КМ); K – размерность выборки; \mathbf{R}_{yy} – КМ, сформированная при наличии априорных данных.

Полагая в (1) $\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{R}_{ss}$ приходим к заключению, что оператор $F\{\cdot\}$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\eta(\bar{W}_p) \geq \eta_o - \Delta\eta, \quad (2)$$

где $\eta(\bar{W}_p)$ – реальное отношение сигнал/(помеха+шум) (ОСПШ); η_o – потенциальное ОСПШ; $\Delta\eta$ – допустимое отклонение ОСПШ.

Оценим теперь отличия алгоритма (1) от соответствующего вектора весовых коэффициентов (ВВК), обусловленные конечным объектом выборки

$$\bar{W}_p = \bar{Q}(\lambda_{\max}(F\{\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{yy}\})). \quad (3)$$

При этом, учитывая, что алгоритмы типа (1) различаются между собой только конкретной структурой сжимающих операторов, а пучок $L_1(\lambda)$ можно рассматривать как частный случай пучка $L_2(\lambda)$, для конкретизации положим

$$\bar{W}_p = \bar{Q}(\lambda_{\max}(\mathbf{R}_{yy} - \hat{\lambda}_N \hat{\mathbf{D}})), \quad (4)$$

$$\bar{W}_p = \bar{Q}(\lambda_{\max}(\mathbf{R}_{yy} - \lambda_N \mathbf{D})), \quad (5)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{R}_{xx} - \lambda_0 \mathbf{A}$; $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{R}}_{xx} - \lambda_0 \mathbf{A}$; $\hat{\lambda}_N, \lambda_N$ – максимальные СЧ пучков $\hat{L}_2(\lambda) = \mathbf{R}_{yy} - \lambda \hat{\mathbf{D}}$; $\lambda_0 \in R_+$; \mathbf{A} – центрально-симметричная матрица.

Положим также $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – симметричная матрица, трактуемая как аддитивное возмущение \mathbf{R}_{xx} , и обозначим $\hat{\lambda}_N, \hat{Q}_i$ – i -е СЧ и i -й СВ пучка $\hat{L}_2(\lambda)$. Тогда можно записать

$$\mathbf{R}_{yy} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{U}} \hat{\Lambda}, \hat{\mathbf{U}}^H \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{I}, \quad (6)$$

где $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{Q}_1 \dots \hat{Q}_N]$; $\hat{\Lambda} = \text{diag}\{\hat{\lambda}_1 \dots \hat{\lambda}_N\}$.

Аналогичным образом для пучка $L_2(\lambda)$ имеем

$$\mathbf{R}_{yy} \mathbf{U} = \mathbf{D} \mathbf{Q} \Lambda, \mathbf{U}^H \mathbf{D} \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad (7)$$

где $\mathbf{U} = [\bar{Q}_1 \dots \bar{Q}_N]$; $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_N\}$; \bar{Q}_i, λ_i – i -й собственный вектор и i -е СЧ пучка $L_2(\lambda)$; $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{E}$.

Заметим, что поскольку \mathbf{U} и $\hat{\mathbf{U}}$ невырожденные, то существует невырожденная матрица \mathbf{P} такая, что $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \mathbf{P}$ [1] и, подставляя (6) в (7), получим

$$\hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{U}} \hat{\Lambda} \mathbf{P} = (\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{E}) \mathbf{U} \mathbf{P} \Lambda. \quad (8)$$

Перемножая (8) с обеих сторон на матрицу $\hat{\mathbf{U}}^H$ и используя (6), приходим к выражению

$$\hat{\Lambda} \mathbf{P} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{E}) \mathbf{P} \Lambda. \quad (9)$$

Представляя матрицу \mathbf{P} в виде $\mathbf{P} = [\bar{P}_1 \dots \bar{P}_N]$, перепишем (9):

$$\hat{\Lambda} \mathbf{P} = \lambda_0 (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{E} \hat{\mathbf{U}}) \bar{P}_i, i = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что λ_i, \bar{P}_i есть не что иное, как i -е СЧ и i -й собственный вектор пучка $\hat{L}_{21}(\lambda) = \hat{\Lambda} - \lambda (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{E} \hat{\mathbf{U}})$.

Введем обозначение $\mathbf{P}' = [\bar{P}'_1 \dots \bar{P}'_N]$, где $\bar{P}'_i \hat{\Lambda}^{-1} = \hat{\Lambda}^{1/2} \bar{P}_i, i = \overline{1, N}$, и перепишем (9) в виде

$$\mathbf{P}' = [\hat{\Lambda}^{-1} - \hat{\Lambda}^{-1/2} \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{E} \hat{\mathbf{U}} \hat{\Lambda}^{-1/2}] \mathbf{P}' \Lambda = \mathbf{C} \mathbf{P}' \hat{\Lambda}, \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = \hat{\Lambda}^{-1} - \hat{\Lambda}^{-1/2} \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{E} \hat{\mathbf{U}} \hat{\Lambda}^{-1/2}. \quad (12)$$

Умножая (11) справа на матрицу $\hat{\Lambda}^{-1}$, имеем

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}' \Lambda^{-1}. \quad (13)$$

Из (13) видно, что пару $(1/\lambda_i, \bar{P}_i)$ можно рассматривать как СЧ и соответствующий СВ симметричной, положительно определенной матрицы \mathbf{C} (12). Следовательно, процедуру получения $\hat{\mathbf{U}}, \Lambda^{-1}$ из известных матриц $\hat{\mathbf{U}}, \hat{\Lambda}$ и \mathbf{E} можно представить в виде совокупности последовательно выполняемых операций:

1. Вычисление матрицы $\mathbf{C} = \hat{\Lambda}^{-1} - \hat{\Lambda}^{-1/2} \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{E} \hat{\mathbf{U}} \hat{\Lambda}^{-1/2}$.

2. Вычисление СЧ и собственных векторов матрицы \mathbf{C} (получение матриц \mathbf{P}' и $\mathbf{M} = \text{diag}\{\hat{\lambda}_i(\mathbf{C}), i = \overline{1, N}\}$).

3. Определение матрицы $\mathbf{P} = \hat{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{P}'$.

4. Вычисление матриц $\mathbf{\Lambda}$ и \mathbf{U} как $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}$ и $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \mathbf{P}$.

Далее введем обозначения $\mathbf{C}_1 = \hat{\Lambda}^{-1}$, $\mathbf{C}_2 = \hat{\Lambda}^{-1/2} \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{E} \hat{\mathbf{U}} \hat{\Lambda}^{-1/2}$ и положим, что для некоторого $\epsilon > 0$ справедливо неравенство $|(\mathbf{E})_{ij}| \leq \epsilon$.

Тогда согласно [2] соответствующий элемент матрицы \mathbf{C}_2 ограничен как

$$|(\mathbf{C}_2)_{ij}| \leq \epsilon_1, \epsilon_1 = N\epsilon \max_{ij} \frac{\|\hat{\mathbf{Q}}_i\| \|\hat{\mathbf{Q}}_j\|}{\sqrt{\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j}}. \quad (14)$$

Вместе с тем, поскольку λ_i^{-1} , $\hat{\lambda}_i^{-1}$ являются i -ми собственными числами соответственно матрицы \mathbf{C} (12) и матрицы \mathbf{C}_1 , то на основании (14) приходим к двустороннему неравенству

$$\frac{\hat{\lambda}_i}{1 + N\epsilon_1 \hat{\lambda}_i} \leq \lambda_i \leq \frac{\hat{\lambda}_i}{1 - N\epsilon_1 \hat{\lambda}_i}. \quad (15)$$

Полагая, что ϵ_1 достаточно мало, так что $1 - N\epsilon_1 \hat{\lambda}_i > 0$, из (15) в свою очередь получим

$$|\lambda_i^{-1} - \hat{\lambda}_i^{-1}| \leq N\epsilon_1. \quad (16)$$

Выражение (16) определяет интервал, в котором находятся собственные числа пучков $L_2(\lambda)$, $\hat{L}_2(\lambda)$. В свою очередь для обобщенного угла между ВВК (4), (5) на основании [3] имеем

$$\left| \sin \angle(\bar{W}_p, \hat{W}_p) \right| \leq \frac{\|\mathbf{E}\|_{l_2}}{\lambda_N - \hat{\lambda}_{N-1}}, \quad (17)$$

где λ_N – максимальное собственное число пучка $L_2(\lambda)$; $\hat{\lambda}_{N-1}$ – второе по абсолютной величине СЧ пучка $\hat{L}_2(\lambda)$. Используя (16) и учитывая, что $\|\mathbf{E}\|_{l_2} \leq N\epsilon$, на основании (16) приходим к неравенству

$$\left| \sin \angle(\bar{W}_p, \hat{W}_p) \right| \leq \frac{N\epsilon}{\lambda_{N-1} - N\epsilon}, \quad (18)$$

где λ_{N-1} – второе по абсолютной величине СЧ пучка $L_2(\lambda)$.

Выражение (18) устанавливает взаимосвязь между максимальным значением элемента возмущающей матрицы \mathbf{E} и верхней оценкой модуля обобщенного угла между ВВК (4), (5). Следовательно, остается только установить связь значения ϵ с размерностью выборки и параметрами, характеризующими текущую сигнально-помеховую обстановку (СПО). Для этого, полагая для краткости $L = 1$, запишем выражение для выборочной КМ

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}(1) = \alpha(\bar{S}(1)\bar{S}^H(1) + \bar{P}_1(1)\bar{P}_1^H(1) + \mathbf{E}_\Sigma(1)), \quad (19)$$

где $\mathbf{E}_\Sigma(1) = \bar{U}(1)\bar{U}^H(1) + \bar{S}(1)\bar{P}_1^H(1) + \bar{P}(1)\bar{S}^H(1) + \bar{S}(1)\bar{U}^H(1) + \bar{U}(1)\bar{S}^H(1) + \bar{P}_1(1)\bar{U}^H(1) + \bar{U}(1)\bar{P}^H(1)$; α – нормировочный коэффициент.

При известных законах распределения сигнала $s(t)$, помехи $\rho_1(t)$ и шума $u(t)$, задаваясь значениями $E\{s(t)\}$, $E\{\rho_1(t)\}$, $E\{u(t)\}$, $\text{var}\{s(t)\}$, $\text{var}\{\rho_1(t)\}$, $\text{var}\{u(t)\}$, $P(\mathbf{E}_\Sigma(1))_{ij} \geq \varepsilon$ ($P(\cdot)$ – обозначение вероятности), на основании (19) мы всегда можем определить значение ε . В свою очередь, полагая отсчеты входных сигналов взаимно независимыми, для случая K – выборка сразу же приходим к условию

$$P\left(\left(\mathbf{E}_\Sigma(K)\right)_{ij} \geq \varepsilon\right) = P\left(\left(\mathbf{E}_\Sigma(1)\right)_{ij} \geq \varepsilon\right)^K. \quad (20)$$

Аналогичным образом, задаваясь произвольным значением ε , мы всегда можем определить значения вероятностей $P\left(\left(\mathbf{E}_\Sigma(1)\right)_{ij} \geq \varepsilon\right)$ и $P\left(\left(\mathbf{E}_\Sigma(K)\right)_{ij} \geq \varepsilon\right)$. Очевидно, что рассмотренная методика естественным образом обобщается на случай $L \geq 2$ (единственное отличие заключается в увеличении числа слагаемых в (19)).

В качестве иллюстрации на рис. 1 показаны построенные с использованием предложенной методики зависимости вероятности $P(\rho \in [0.5 + 2])$ от числа итераций. При построении зависимостей предполагалось, что антенная решетка состоит из изотропных и невзаимодействующих антенных элементов, разнесенных в пространстве на $d = m_0/2$. Кроме того, постулировалось, что шум является гауссовским случайным процессом, а сигнал и помеха полагались центрированными и распределенными по закону Рэлея.

Кривые, обозначенные на рис. 1 цифрами 1-5, были получены, соответственно, при следующих исходных данных:

- 1- $N = 3, L = 1, \Theta_s = 20^\circ, \Theta_1 = 90^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_u^2) = 10\text{дБ}, 10\lg(P_1/\sigma_u^2) = 10\text{дБ};$
- 2- $N = 3, L = 1, \Theta_s = 20^\circ, \Theta_1 = 35^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_u^2) = 10\text{дБ}, 10\lg(P_1/\sigma_u^2) = 20\text{дБ};$
- 3- $N = 5, L = 1, \Theta_s = 20^\circ, \Theta_1 = 90^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_u^2) = 10\text{дБ}, 10\lg(P_1/\sigma_u^2) = 10\text{дБ};$
- 4- $N = 5, L = 1, \Theta_s = 20^\circ, \Theta_1 = 35^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_u^2) = 10\text{дБ}, 10\lg(P_1/\sigma_u^2) = 20\text{дБ};$
- 5- $N = 5, L = 2, \Theta_s = 20^\circ, \Theta_1 = 50^\circ, \Theta_2 = 70^\circ, 10\lg(P_s/\sigma_u^2) = 10\text{дБ}, 10\lg(P_1/\sigma_u^2) = 10\text{дБ},$
 $10\lg(P_2/\sigma_u^2) = 20\text{дБ}.$

Для сравнения на рис. 2 представлены аналогичные зависимости, построенные с использованием ВВК, оптимального по критерию максимума отношения сигнал/(помеха+шум) (МОСП). Из графиков видно, что при прочих равных условиях для выполнения условия $P(\rho \in [0.5 + 2]) = \alpha (\alpha \in]0 + 1])$ в случае G - робастного алгоритма (4) требуется меньшее число отсчетов входных сигналов, чем в случае МОСП – алгоритма. При фиксированном значении K вероятность $P(\rho \in [0.5 + 2])$ возрастает при увеличении входных отношений сигнал/шум, помеха/шум и увеличении углового расстояния между источниками сигнала и помех.

В заключение можно отметить, что G – робастные алгоритмы принципиально менее чувствительны к «эффектам» конечной разрядности, чем традиционные процедуры АПОС, оптимальные по критерию МОСП. Поэтому можно утверждать, что представленные в литературе рекомендации (10-16 разрядов для осуществления аналогово-цифрового преобразования, 32 разряда для внутреннего представления данных при выполнении операций в формате с фиксированной точкой) являются достаточными (оценками «сверху») для случая цифровой реализации G – робастных алгоритмов АПОС.

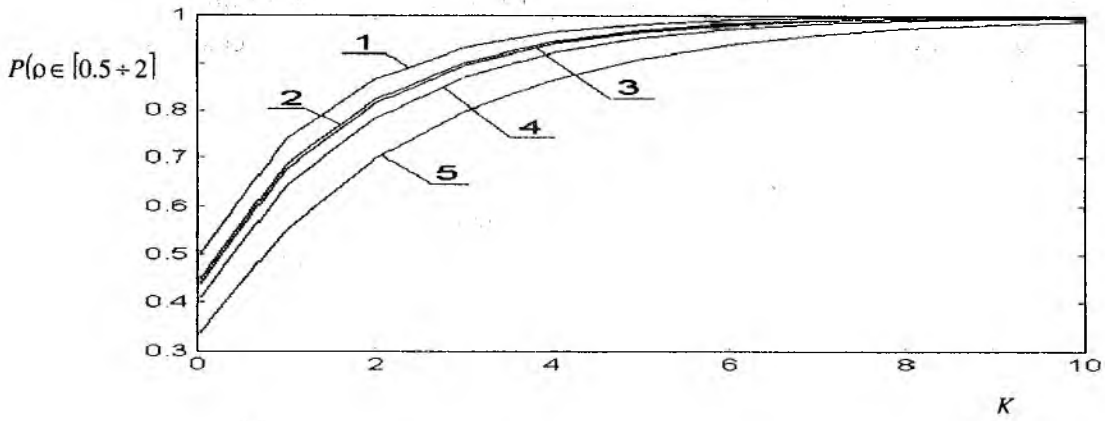


Рис. 1

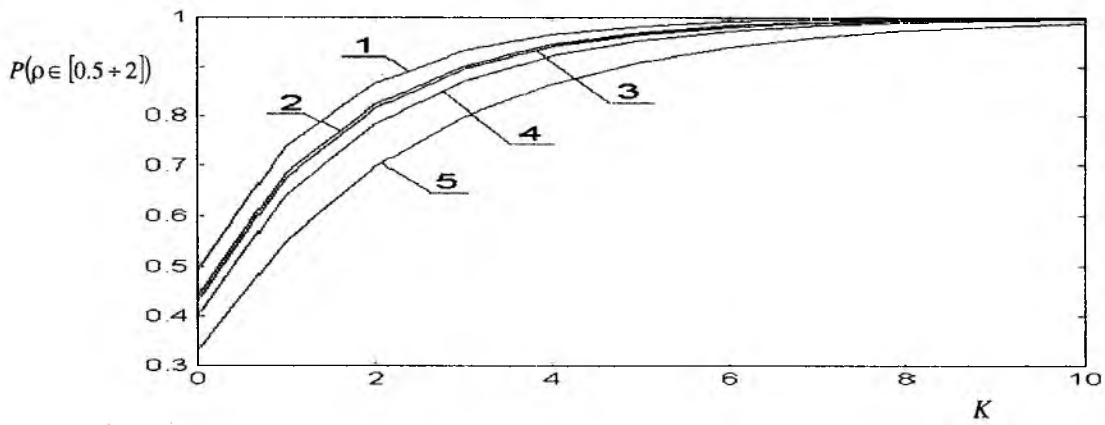


Рис. 2

Список литературы: 1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. 1988. С. 552. 2. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений: Пер. с англ. – М.: Наука. 1970. С. 564. 3. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ. – М.: Мир. 1983. С. 254.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 26.02.2002