ПРО ОДИН ПІДХІД ДО НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРОЕКЦІЙ І СКІНЧЕННИХ СУМ ФУР'Є

Литвин О.М., Литвин О.Г.
Українська інженерно-педагогічна академія
Харківський національний університет радіоелектроніки

Litvin O.M., Litvin O.G. The method of approaching of bursting functions, which describe the underlying structure of 2D body with the help of projections which act from a computer tomograph, is probed. It is suggested to use bursting splines two variables for the automatic finding of lines of break and method of O.M. Litvin's calculation of of Fourier factors functions two variables by periodic bursting splines of one variable and projections.

Литвин О.М., Литвин О.Г. Досліджується метод наближення розривних функцій, що описують внутрішню структуру 2D тіла з допомогою проекцій, які поступають з комп'ютерного томографа. Пропонується використовувати розривні сплайни двох змінних для знаходження ліній розриву та метод О.М. Литвина обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з допомогою періодичних розривних сплайнів однієї змінної і проекцій.

Досліджується наближення функції $f(x,y)$ за відомими проекціями - інтегралами γ_p вздовж прямих L_p, які перетинають об'єкт дослідження:

$$\int_{L_p} f(x,y)dl = \gamma_p,\ p=\overline{1,M}\ .$$

Для розв'язання цієї задачі подаємо функцію $f(x,y)$ у вигляді суми трьох функцій: розривної функції $sp(x,y)$, яка має такі ж розриви, як і функція $f(x,y)$; неперіодичної функції $\psi(x,y)$, яка має на границі області $D=[0,1]^2$ сліди, що задовольняють співвідношення $\psi(0,y)-\psi(1,y)\neq 0,\ y\in[0,1]$, $\psi(x,0)-\psi(x,1)\neq 0,\ x\in[0,1]$; неперервної функції $\tilde{f}(x,y)$, періодичної з періодом 1 за змінними x та y.

$$f(x,y)=sp(x,y)+\psi(x,y)+\tilde{f}(x,y)$$

Вважаємо, що $\tilde{f}(x,y)$ можна розкласти в ряд Фур'є.

1. Побудова розривної функції $sp(x,y)$, яка має такі ж розриви, як і функція $f(x,y)$.

Для випадку, коли досліджувана функція описує зображення поверхні деякого об'єкта, повністю розміщеного в $D=[0,1]^2$, такого, що має розриви першого роду на лініях $\Gamma_s : w_s(x,y)=0$, запропоновано метод побудови сплайн - функцій зі стрибками на вказаних лініях, які дорівнюють стрибкам $f(x,y)$.

В даному пункті роботи вважаємо, що функція $f(x,y)$ є періодичною з періодом 1 за змінними x та y і має розриви першого роду на $\Gamma_s : w_s(x,y)=0$.

Для побудови функції $sp(x,y)$ використовуємо узагальнення формули (1.9) з роботи [5, с. 8] на випадок двох змінних, коли розриви функції $f(x,y)$ задаються не на лініях $x-x_s=0$, а на Γ_s.

2., 3. Виділення неперіодичної і періодичної частин.

Якщо функція $F(x,y)=f(x,y)-sp(x,y)$, є неперіодичною, неперервною функцією, то функція

$$\psi(x,y)=F(0,y)(1-x)+F(1,y)x+F(x,0)(1-y)+F(x,1)y-$$
$$-\left[F(0,0)(1-y)+F(0,1)y\right](1-x)-\left[F(1,0)(1-y)+F(1,1)y\right]x$$

буде неперервною неперіодичною функцією, такою, що функція

$$\widetilde{f}(x,y)=f(x,y)-sp(x,y)-\psi(x,y),$$

є періодичною з періодом 1 за обома змінними, якщо її періодично продовжити на всю площину Oxy.

Для виділення неперіодичної частини скористаємось наступною теоремою.

Теорема 1. Якщо функція $f(x,y)$ неперіодична і має розриви першого роду лише на лініях всередині області $[0,1]^2$, то

Функція

$$\widetilde{f}(x,y)=f(x,y)-sp(x,y)-\psi(x,y),$$
$$\psi(x,y)=F(0,y)(1-x)+F(1,y)x+F(x,0)(1-y)+F(x,1)y-$$
$$-\left[F(0,0)(1-y)+F(0,1)y\right](1-x)-\left[F(1,0)(1-y)+F(1,1)y\right]x,$$

де

$$F(x,y)=f(x,y)-sp(x,y),$$

є періодичною з періодом 1 за обома змінними, якщо її періодично продовжити на всю площину Oxy.

4. Наближене знаходження коефіцієнтів Фур’є функції $\widetilde{f}(x,y)$, за допомогою проекцій функції $f(x,y)$.

Відмітимо, що коли стрибки функції на вказаних лініях не дорівнюють нулю, то її розклад в скінченні суми Фур’є супроводжується явищем Гіббса. Для цього випадку в працях Готліба і Густавсона [3, 4] наведені різні методи побудови скінченних сум Фур’є, коефіцієнти Фур’є у яких помножаються на відповідні множники. У даній роботі пропонується задачу наближення функцій з використанням скінченних сум Фур’є розв’язувати наступним чином. Подаємо $f(x,y)$ у вигляді суми розривного сплайна $sp(x,y)$, який має такі ж односторонні границі на лініях розриву, як і наближувана функція $f(x,y)$, і скінченної суми Фур’є $T_N(x,y)$, яка наближує різницю між функцією $f(x,y)$ і вказаним сплайном. Якщо функція $f(x,y)$ неперіодична, то треба врахувати також функцію $\psi(x,y)$, описану у попередньому пункті.

Сформулюємо тепер загальний алгоритм наближення розривної функції $f(x,y)$ з допомогою розривних сплайнів та проекцій, що надходять з комп’ютерного томографа, вважаючи відомими лінії розриву і односторонні границі.

Крок 1. Будуємо розривний сплайн у вигляді функції $sp(x,y)$, вважаючи відомими також односторонні границі функції $f(x,y)$ $f_s^+(x,y)$ та $f_s^-(x,y)$.
Крок 2. Знаходимо різницю

$$F(x,y) = f(x,y) - sp(x,y).$$

Крок 3. Для функції $F(x,y)$ знаходимо

$$\widetilde{f}(x,y) = F(x,y) - \psi(x,y),$$

Крок 4. Подаємо функцію $f(x,y)$ у вигляді суми

$$f(x,y) = sp(x,y) + \psi(x,y) + \widetilde{f}(x,y). \quad (1)$$

Зауваження. У формулі (1) перші два доданки є неперіодичною розривною на вказаній системі ліній складовою функції $f(x,y)$, третій доданок є складовою функції $f(x,y)$, яка допускає періодичне продовження на всю площину Oxy. Оскільки $\widetilde{f}(x,y)$ є неперервною, періодичною, то її можна наближено подати у вигляді скінченної суми Фур'є, коефіцієнти Фур'є у якій знаходяться за допомогою проекцій методом О.М. Литвина [1], який для обчислення коефіцієнтів Фур'є використовує лише проекції. Зауважимо, що з комп'ютерного томографа надходять проекції від невідомої функції $f(x,y)$, тому проекції від функції $\widetilde{f}(x,y)$ будуть знаходитися за формулою

$$\int\limits_{kx+ly=t_p} \widetilde{\varphi}(x,y)ds =$$
$$= \int\limits_{kx+ly=t_p} f(x,y)ds - \int\limits_{kx+ly=t_p} \left[sp(x,y) + \psi(x,y)\right]ds.$$

Висновки.
1. Для випадку, коли відомі лінії розриву функції $f(x,y)$ та відомі односторонні граничні функції $f^-{}_k(x,y), f^+{}_k(x,y)$ у роботі запропоновано загальний метод наближення невідомої функції $f(x,y)$ за допомогою проекцій, які надходять з комп'ютерного томографа.
2. Для використання запропонованого методу до практики автори планують розробку та дослідження методу знаходження ліній розриву та односторонніх границь невідомої функції $f(x,y)$ на вказаних лініях.

Література

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії / Системний аналіз, управління і інформаційні технологіїї: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірка наукових праць. Випуск 125.–Харків: ХДПУ, 2000.–С. 27– 35.

2. Литвин О. М. Підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних. Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2016.−№6(1178). – 155 с. – 43-46 с.

*3. Gottlieb D. On the Gibbs Phenomenon and its Resolution / D. Gottlieb, C.W. Shu // SIAM Review. – 1997. – **39**, № 4. – P. 644–668.*

4. Gustafsson B. Mathematics for Computer Tomography / B. Gustafsson // Physica Scripta. – 1996. – ***T61****. – P. 38–43.*

5. Литвин О.М., Рвачов В.Л. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. К: Наукова думка, 1973, 123 с.

6. Литвин О. М., Литвин О.Г. Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра. Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 10–12 березня 2016 р.). – Полтава: ПУЕТ, 2016. . – 362 с.--186-189 с.

7. Литвин О.М., Литвин О.Г. Оптимізація кількості експериментальних даних у методі обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проекцій. Інформатика та системні науки (ІСН – 2017) : матеріали VIII Все української науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. Ємця О. О. – Полтава : ПУЕТ, 2017. – 333 с.--175-179 с.