УДК 621.391.268

ПРИМЕНЕНИЕ КУМУЛЯНТНОГО АНАЛИЗА В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

С.А. Епишкин
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

У статті отримані співвідношення між вищими моментними і кумулянтними функціями для сукупності гаусових стаціонарних і стаціонарно-зв'язаних, а також телеграфних сигналів.

In the article ratios between the higher moment and cumulant functions for set Gaussian stationary and stationarily-connected random process and also telegraphic signals are received.

В статье получены соотношения между высшими моментными и кумулянтными функциями для совокупности гауссовых стационарных и стационарно-связанных, а также телеграфных сигналов.

Введение

Исследование и решение ряда проблем в теории телекоммуникаций (анализ антенных решеток, MIMO–систем, измерение корреляционных (ковариационных) функций (КФ) и др.) связано с необходимостью определения высших моментных функций (ВМФ) многомерных случайных процессов. При этом, для наглядности физической интерпретации получаемых результатов, желательно выразить названные ВМФ через функции низших порядков, например, корреляционные (ковариационные). При совместно-гауссовых многомерных процессах подобная задача решается относительно просто. Однако в случае, когда исходные процессы подвергаются нелинейному преобразованию, возникают сложности математического характера.

Указанные проблемы могут быть преодолены с помощью иного подхода к анализу случайных процессов – с помощью кумулянтов (семиинвариантов) и кумулянтных (обобщенных корреляционных) функций, являющихся нелинейными комбинациями статистических средних [1]. Подобный подход обладает рядом преимуществ, поскольку кумулянтные функции имеют четко выраженный самостоятельный статистический смысл и могут быть заданы в определенной степени независимо друг от друга. Это позволяет достаточно просто выражать различные статистические средние нелинейно–преобразованных процессов через кумулянтные функции исходных переменных. Кроме того, учет кумулянтных функций высших порядков позволяет просто описать любую степень негауссовости случайных процессов. В этой связи основное преимущество кумулянтное описание имеет именно для негауссовых процессов.

Определение высших моментных функций

Рассмотрим систему совместно-гауссовых стационарных (и стационарно-связанных) случайных процессов с нулевым средним, представленную в виде вектора:

$$\Upsilon(t)=\left\| Y_1(t)\ \ Y_2(t)\ \ Y_3(t)\ \ Y_4(t)\right\|^T, \tag{1}$$

где T – знак транспонирования.

Математические модели вида (1) нашли широкое применение в практических приложениях. Допустим, необходимо определить смешанные (четырехмерные) моментные функции 4-го и 8-го порядка вида:

$$\alpha_{1111}=\left\langle Y_1(t)Y_2(t)Y_3(t)Y_4(t)\right\rangle \ \text{ и } \ \alpha_{2222}=\left\langle Y(t)_1^2Y(t)_2^2Y(t)_3^2Y(t)_4^2\right\rangle, \tag{2}$$

где $\langle . \rangle$ – знак математического ожидания (моментная скобка [1]).

Технически корреляционная обработка наиболее просто реализуется в знаковой форме. При этом исходные процессы $Y_i(t), i=1...4$ подвергаются нелинейному преобразованию с помощью жестких амплитудных ограничителей. Поэтому решение задачи определения функций α_{1111} и α_{2222} целесообразно рассмотреть для двух случаев: полномасштабной обработки (2) и знаковой, т.е.

$$\alpha_{1111огр}=\left\langle Y_{1огр}(t)Y_{2огр}(t)Y_{3огр}(t)Y_{4огр}(t)\right\rangle \text{ и } \alpha_{2222огр}=\left\langle Y(t)_{1огр}^2Y(t)_{2огр}^2Y(t)_{3огр}^2Y(t)_{4огр}^2\right\rangle. \tag{3}$$

В дальнейшем рассматривается случай симметричного ограничения на уровне $a=\pm1$, поэтому преобразование, выполняемое ограничителем, может быть описано следующим образом:

$$f\{Y_i(t)\}=\begin{cases} +1, Y_i(t)\ge 0; \\ -1, Y_i(t)<0. \end{cases} \tag{4}$$

Известно [2], что при этом стационарность процессов сохраняется, а совокупность телеграфных сигналов, получаемых в результате ограничения компонентов вектора $\Upsilon(t)$ (1) распределена по закону бинарной альтернативы соответствующей размерности. Можно показать [3], что статистика перемены знака при этом определяется распределением до ограничителя, а математическое ожидание и дисперсия процессов $Y(t)_i^{\,огр}$ соответственно равны:

$$\left\langle Y_{i\,огр}(t)\right\rangle=0;\ \sigma_{огр}^2=1. \tag{5}$$

Если известны одномерные моментные функции соответствующего порядка, то, применяя метод формального дифференцирования [4], можно получить необходимые соотношения для совместных многомерных функций того же порядка. Применяя данный подход, воспользуемся соотношением для α_{211} [1] и определим моментную функцию α_{1111} (2). Учитывая, что для совокупности процессов (1) кумулянтные функции первого порядка (математические ожидания) $\chi_{1000}=\chi_{0100}=\chi_{0010}=\chi_{0001}=0$, получим

$$\alpha_{211}=\chi_{211}+\chi_{200}\chi_{011}+2\chi_{110}\chi_{101}. \tag{6}$$

По аналогии с [4] запишем это равенство в виде:

$$\alpha\left[Y_1^2 Y_3 Y_4\right] = \chi\left[Y_1^2 Y_3 Y_4\right] + \chi\left[Y_1^2\right]\chi\left[Y_3 Y_4\right] + 2\chi\left[Y_1 Y_3\right]\chi\left[Y_1 Y_4\right] \quad (7)$$

и применим формальный оператор $Y_2 \dfrac{\partial}{\partial Y_1}$. В (7) и далее аргументы у $Y_i(t)$ для краткости опущены. В результате для α_{1111} получим:

$$\alpha_{1111} = \chi_{1111} + \chi_{1100}\chi_{0011} + \chi_{0110}\chi_{1001} + \chi_{1010}\chi_{0101}. \quad (8)$$

Используя аппарат кумулянтных скобок [1], равенство (8) можно переписать в следующей форме, имеющей более наглядный статистический смысл:

$$\langle Y_1 Y_2 Y_3 Y_4\rangle = \langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle + \langle Y_1, Y_2\rangle\langle Y_3, Y_4\rangle + \langle Y_2, Y_3\rangle\langle Y_1, Y_4\rangle + \langle Y_1, Y_3\rangle\langle Y_2, Y_4\rangle. \quad (9)$$

Воспользуемся выражением для восьмого одномерного момента [4] и получим ряд соотношений, определяющих смешанные моментные функции данного порядка, но иной размерности (в данном случае – двумерные):

$$\begin{aligned}\alpha_{71} &= \chi_{71} + 21\chi_{51}\chi_{20} + 7\chi_{60}\chi_{11} + 35\chi_{41}\chi_{30} + 21\chi_{50}\chi_{21} + 35\chi_{40}\chi_{31} + \\ &+ 105\chi_{31}\chi_{20}^2 + 105\chi_{40}\chi_{20}\chi_{11} + 210\chi_{30}\chi_{21}\chi_{20} + 70\chi_{30}^2\chi_{11} + 105\chi_{20}^3\chi_{11};\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{62} &= \chi_{62} + 15\chi_{42}\chi_{20} + 12\chi_{51}\chi_{11} + \chi_{60}\chi_{02} + 20\chi_{32}\chi_{30} + 30\chi_{41}\chi_{21} + 6\chi_{50}\chi_{12} + \\ &+ 20\chi_{31}^2 + 15\chi_{40}\chi_{22} + 45\chi_{22}\chi_{20}^2 + 120\chi_{31}\chi_{20}\chi_{11} + 30\chi_{40}\chi_{11}^2 + 15\chi_{40}\chi_{20}\chi_{02} + \\ &+ 90\chi_{21}^2\chi_{20} + 60\chi_{30}\chi_{12}\chi_{20} + 120\chi_{30}\chi_{21}\chi_{11} + 10\chi_{02}\chi_{30}^2 + 90\chi_{20}^2\chi_{11}^2 + 15\chi_{20}^3\chi_{02};\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{53} &= \chi_{53} + 10\chi_{33}\chi_{20} + 15\chi_{42}\chi_{11} + 3\chi_{51}\chi_{02} + 10\chi_{23}\chi_{30} + 30\chi_{32}\chi_{21} + 15\chi_{41}\chi_{12} + \\ &+ \chi_{50}\chi_{03} + 30\chi_{31}\chi_{22} + 5\chi_{40}\chi_{13} + 15\chi_{13}\chi_{20}^2 + 90\chi_{22}\chi_{20}\chi_{11} + 60\chi_{31}\chi_{11}^2 + \\ &+ 30\chi_{31}\chi_{20}\chi_{02} + 15\chi_{40}\chi_{11}\chi_{02} + 90\chi_{21}\chi_{12}\chi_{20} + 90\chi_{21}^2\chi_{11} + 10\chi_{30}\chi_{03}\chi_{20} + \\ &+ 60\chi_{30}\chi_{12}\chi_{11} + 30\chi_{30}\chi_{21}\chi_{02} + 45\chi_{20}^2\chi_{11}\chi_{02} + 60\chi_{20}\chi_{11}^3;\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{44} &= \chi_{44} + 6\chi_{24}\chi_{20} + 16\chi_{33}\chi_{11} + 6\chi_{42}\chi_{02} + 4\chi_{14}\chi_{30} + 24\chi_{23}\chi_{21} + 24\chi_{32}\chi_{12} + \\ &+ 4\chi_{41}\chi_{03} + 18\chi_{22}^2 + 16\chi_{31}\chi_{13} + \chi_{40}\chi_{04} + 3\chi_{04}\chi_{20}^2 + 48\chi_{13}\chi_{20}\chi_{11} + 72\chi_{22}\chi_{11}^2 + \\ &+ 36\chi_{22}\chi_{20}\chi_{02} + 48\chi_{31}\chi_{11}\chi_{02} + 3\chi_{40}\chi_{02}^2 + 36\chi_{12}^2\chi_{20} + 24\chi_{21}\chi_{03}\chi_{20} + \\ &+ 144\chi_{21}\chi_{12}\chi_{11} + 36\chi_{21}^2\chi_{02} + 16\chi_{30}\chi_{03}\chi_{11} + 24\chi_{30}\chi_{12}\chi_{02} + 9\chi_{20}^2\chi_{02}^2 + \\ &+ 72\chi_{20}\chi_{11}^2\chi_{02} + 24\chi_{11}^4.\end{aligned} \quad (13)$$

Известно [5], что для гауссовых случайных величин (процессов) одномерные четные моменты (моментные функции) порядка n определяются следующим образом:

$$\alpha_n = (n-1)!!\,\sigma^n, \text{ откуда } \alpha_8 = 105\sigma^8,$$

где $(n-1)!!$ означает произведение всех нечетных чисел от 1 до $(n-1)$.

Если в полученных соотношениях (10)-(13) для двумерных α_{ij}, полученных для совокупности процессов $\{Y_1 Y_2\}$, положить $Y_1 \equiv Y_2$ и учесть, что при нормальном распределении кумулянтные функции выше второго порядка равны нулю, приходим к такому же результату.

Используя (13) и последовательно «повышая» размерность моментных функций описанным способом, получим соотношения для трех– и четырехмерных α восьмого порядка:

$$\begin{aligned}\alpha_{431} = {} & \chi_{431}+6\chi_{231}\chi_{200}+12\chi_{321}\chi_{110}+4\chi_{330}\chi_{101}+3\chi_{411}\chi_{020}+3\chi_{420}\chi_{011}+\\
&+4\chi_{131}\chi_{300}+18\chi_{221}\chi_{210}+6\chi_{230}\chi_{201}+12\chi_{311}\chi_{120}+12\chi_{320}\chi_{111}+\chi_{401}\chi_{030}+\\
&+3\chi_{410}\chi_{021}+18\chi_{220}\chi_{211}+4\chi_{301}\chi_{130}+12\chi_{310}\chi_{121}+\chi_{400}\chi_{031}+3\chi_{031}\chi_{200}^{2}+\\
&+36\chi_{121}\chi_{200}\chi_{110}+12\chi_{130}\chi_{200}\chi_{101}+36\chi_{211}\chi_{110}^{2}+36\chi_{220}\chi_{110}\chi_{101}+\\
&+18\chi_{211}\chi_{200}\chi_{020}+18\chi_{220}\chi_{200}\chi_{011}+12\chi_{301}\chi_{110}\chi_{020}+12\chi_{310}\chi_{101}\chi_{020}+\\
&+24\chi_{310}\chi_{110}\chi_{011}+3\chi_{400}\chi_{020}\chi_{011}+36\chi_{120}\chi_{200}\chi_{111}+6\chi_{201}\chi_{030}\chi_{200}+\\
&+18\chi_{210}\chi_{021}\chi_{200}+36\chi_{201}\chi_{120}\chi_{110}+72\chi_{210}\chi_{111}\chi_{110}+36\chi_{210}\chi_{120}\chi_{101}+\\
&+18\chi_{210}\chi_{201}\chi_{020}+18\chi_{210}^{2}\chi_{011}+12\chi_{300}\chi_{021}\chi_{110}+4\chi_{300}\chi_{030}\chi_{101}+\\
&+12\chi_{300}\chi_{111}\chi_{020}+12\chi_{300}\chi_{120}\chi_{011}+9\chi_{200}^{2}\chi_{020}\chi_{011}+36\chi_{200}\chi_{110}\chi_{101}\chi_{020}+\\
&+36\chi_{200}\chi_{110}^{2}\chi_{011}+24\chi_{110}^{3}\chi_{101}\ ;\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{422} = {} & \chi_{422}+6\chi_{222}\chi_{200}+8\chi_{312}\chi_{110}+8\chi_{321}\chi_{101}+\chi_{402}\chi_{020}+4\chi_{411}\chi_{011}+\\
&+\chi_{420}\chi_{002}+4\chi_{122}\chi_{300}+12\chi_{212}\chi_{210}+12\chi_{221}\chi_{201}+4\chi_{302}\chi_{120}+16\chi_{311}\chi_{111}+\\
&+4\chi_{320}\chi_{102}+2\chi_{401}\chi_{021}+2\chi_{410}\chi_{012}+12\chi_{211}^{2}+6\chi_{220}\chi_{202}+8\chi_{301}\chi_{121}+\\
&+8\chi_{310}\chi_{112}+\chi_{400}\chi_{022}+3\chi_{022}\chi_{200}^{2}+24\chi_{112}\chi_{200}\chi_{110}+24\chi_{121}\chi_{200}\chi_{101}+\\
&+12\chi_{202}\chi_{110}^{2}+48\chi_{211}\chi_{110}\chi_{101}+12\chi_{220}\chi_{101}^{2}+6\chi_{202}\chi_{200}\chi_{020}+24\chi_{211}\chi_{200}\chi_{011}+\\
&6\chi_{220}\chi_{200}\chi_{002}+8\chi_{301}\chi_{101}\chi_{020}+16\chi_{301}\chi_{110}\chi_{011}+16\chi_{310}\chi_{101}\chi_{011}+8\chi_{310}\chi_{110}\chi_{002}+\\
&+2\chi_{400}\chi_{011}^{2}+\chi_{400}\chi_{020}\chi_{002}+24\chi_{111}^{2}\chi_{200}+12\chi_{120}\chi_{200}\chi_{102}+12\chi_{201}\chi_{021}\chi_{200}+\\
&+12\chi_{210}\chi_{012}\chi_{200}+48\chi_{201}\chi_{111}\chi_{110}+24\chi_{201}\chi_{120}\chi_{101}+24\chi_{210}\chi_{102}\chi_{110}+\\
&+48\chi_{210}\chi_{111}\chi_{101}+6\chi_{201}^{2}\chi_{020}+24\chi_{210}\chi_{201}\chi_{011}+6\chi_{210}^{2}\chi_{002}+8\chi_{300}\chi_{012}\chi_{110}+\\
&+8\chi_{300}\chi_{021}\chi_{101}+4\chi_{300}\chi_{102}\chi_{020}+16\chi_{300}\chi_{111}\chi_{011}+4\chi_{300}\chi_{120}\chi_{002}+6\chi_{200}^{2}\chi_{011}^{2}+\\
&+3\chi_{200}^{2}\chi_{020}\chi_{002}+48\chi_{200}\chi_{110}\chi_{101}\chi_{011}+12\chi_{200}\chi_{110}^{2}\chi_{002}+24\chi_{110}^{2}\chi_{101}^{2}+\\
&+12\chi_{200}\chi_{101}^{2}\chi_{020};\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{3122} = {} & \chi_{3122}+3\chi_{1122}\chi_{2000}+3\chi_{2022}\chi_{1100}+6\chi_{2112}\chi_{1010}+2\chi_{3012}\chi_{0110}+6\chi_{2121}\chi_{1001}+\\
&+2\chi_{3021}\chi_{0101}+\chi_{3102}\chi_{0020}+4\chi_{3111}\chi_{0011}+\chi_{3120}\chi_{0002}+\chi_{0122}\chi_{3000}+3\chi_{2100}\chi_{1022}+\\
&+6\chi_{1112}\chi_{2010}+6\chi_{1110}\chi_{2012}+6\chi_{1121}\chi_{2001}+6\chi_{1101}\chi_{2021}+3\chi_{2102}\chi_{1020}+\chi_{3002}\chi_{0120}+\\
&+12\chi_{2111}\chi_{1011}+4\chi_{3011}\chi_{0111}+3\chi_{2120}\chi_{1002}+\chi_{3020}\chi_{0102}+2\chi_{3101}\chi_{0021}+2\chi_{3110}\chi_{0012}+\\
&+12\chi_{2011}\chi_{1111}+3\chi_{1120}\chi_{2002}+3\chi_{1102}\chi_{2020}+6\chi_{2101}\chi_{1021}+2\chi_{3001}\chi_{0121}+\\
&+6\chi_{2110}\chi_{1012}+2\chi_{3010}\chi_{0112}+\chi_{3100}\chi_{0022}+3\chi_{2000}\chi_{1100}\chi_{0022}+6\chi_{0112}\chi_{2000}\chi_{1010}+\\
&+12\chi_{1100}\chi_{1012}\chi_{1010}+6\chi_{1012}\chi_{2000}\chi_{0110}+6\chi_{0121}\chi_{2000}\chi_{1001}+12\chi_{1100}\chi_{1021}\chi_{1001}+\\
&+6\chi_{1021}\chi_{2000}\chi_{0101}+6\chi_{1102}\chi_{1010}^{2}+6\chi_{1010}\chi_{0110}\chi_{2002}+24\chi_{1111}\chi_{1010}\chi_{1001}+\\
&+12\chi_{2011}\chi_{0110}\chi_{1001}+12\chi_{2011}\chi_{1010}\chi_{0101}+6\chi_{1120}\chi_{1001}^{2}+6\chi_{1001}\chi_{0101}\chi_{2020}+\\
&+3\chi_{1102}\chi_{2000}\chi_{0020}+3\chi_{1100}\chi_{2002}\chi_{0020}+12\chi_{1111}\chi_{2000}\chi_{0011}+12\chi_{1100}\chi_{2011}\chi_{0011}+\end{aligned}$$

$$+3\chi_{1120}\chi_{2000}\chi_{0002}+3\chi_{1100}\chi_{2020}\chi_{0002}+6\chi_{2101}\chi_{1001}\chi_{0020}+2\chi_{3001}\chi_{0101}\chi_{0020}+$$
$$+12\chi_{2101}\chi_{1010}\chi_{0011}+4\chi_{3001}\chi_{0110}\chi_{0011}+12\chi_{2110}\chi_{1001}\chi_{0011}+4\chi_{3010}\chi_{0101}\chi_{0011}+$$
$$+6\chi_{2110}\chi_{1010}\chi_{0002}+2\chi_{3010}\chi_{0110}\chi_{0002}+2\chi_{3100}\chi_{0011}^2+\chi_{3100}\chi_{0020}\chi_{0002}+$$
$$+12\chi_{1011}\chi_{0111}\chi_{2000}+12\chi_{1100}\chi_{1011}^2+3\chi_{0120}\chi_{2000}\chi_{1002}+6\chi_{1100}\chi_{1020}\chi_{1002}+$$
$$+3\chi_{1020}\chi_{2000}\chi_{0102}+6\chi_{1101}\chi_{2000}\chi_{0021}+6\chi_{1100}\chi_{2001}\chi_{0021}+6\chi_{1110}\chi_{0012}\chi_{2000}+$$
$$+6_{1100}\chi_{2010}\chi_{0012}+24\chi_{1101}\chi_{1011}\chi_{1010}+12\chi_{2001}\chi_{0111}\chi_{1010}+12\chi_{2001}\chi_{1011}\chi_{0110}+$$
$$+12\chi_{1101}\chi_{1020}\chi_{1001}+6\chi_{2001}\chi_{0120}\chi_{1001}+6\chi_{2001}\chi_{1020}\chi_{0101}+12\chi_{1110}\chi_{1002}\chi_{1010}+$$
$$+6\chi_{2010}\chi_{0102}\chi_{1010}+6\chi_{2010}\chi_{1002}\chi_{0110}+24\chi_{1110}\chi_{1011}\chi_{1001}+12\chi_{2010}\chi_{0111}\chi_{1001}+$$
$$+12\chi_{2010}\chi_{1011}\chi_{0101}+6\chi_{2001}\chi_{1101}\chi_{0020}+12\chi_{1110}\chi_{2001}\chi_{0011}+12\chi_{1101}\chi_{2010}\chi_{0011}+$$
$$+6\chi_{2010}\chi_{1110}\chi_{0002}+6\chi_{2100}\chi_{0012}\chi_{1010}+2\chi_{3000}\chi_{0012}\chi_{0110}+6\chi_{2100}\chi_{0021}\chi_{1001}+$$
$$+2\chi_{3000}\chi_{0021}\chi_{0101}+3\chi_{2100}\chi_{1002}\chi_{0020}+\chi_{3000}\chi_{0102}\chi_{0020}+12\chi_{2100}\chi_{1011}\chi_{0011}+$$
$$+4\chi_{3000}\chi_{0111}\chi_{0011}+3\chi_{2100}\chi_{1020}\chi_{0002}+\chi_{3000}\chi_{0120}\chi_{0002}+6\chi_{2000}\chi_{1100}\chi_{0011}^2+$$
$$+3\chi_{2000}\chi_{1100}\chi_{0020}\chi_{0002}+24\chi_{1100}\chi_{1010}\chi_{1001}\chi_{0011}+12\chi_{2000}\chi_{0110}\chi_{1001}\chi_{0011}+$$
$$+12\chi_{2000}\chi_{1010}\chi_{0101}\chi_{0011}+6\chi_{1100}\chi_{1010}^2\chi_{0002}+6\chi_{1010}\chi_{0110}\chi_{2000}\chi_{0002}+$$
$$+12\chi_{1010}\chi_{0110}\chi_{1001}^2+12\chi_{1001}\chi_{0101}\chi_{1010}^2+6\chi_{1100}\chi_{1001}^2\chi_{0020}+6\chi_{1001}\chi_{0101}\chi_{2000}\chi_{0020}\;; \tag{16}$$

$$\alpha_{2222}=\chi_{2222}+\chi_{0222}\chi_{2000}+4\chi_{1100}\chi_{1122}+\chi_{0200}\chi_{2022}+4\chi_{1212}\chi_{1010}+4\chi_{2112}\chi_{0110}+$$
$$+4\chi_{1221}\chi_{1001}+4\chi_{2121}\chi_{0101}+\chi_{2202}\chi_{0020}+4\chi_{2211}\chi_{0011}+\chi_{2220}\chi_{0002}+2\chi_{2100}\chi_{0122}+$$
$$+2\chi_{1200}\chi_{1022}+2\chi_{0212}\chi_{2010}+8\chi_{1110}\chi_{1112}+2\chi_{0210}\chi_{2012}+2\chi_{0221}\chi_{2001}+$$
$$+8\chi_{1101}\chi_{1121}+2\chi_{0201}\chi_{2021}+2\chi_{1202}\chi_{1020}+2\chi_{2102}\chi_{0120}+8\chi_{1211}\chi_{1011}+8\chi_{2111}\chi_{0111}+$$
$$+2\chi_{1220}\chi_{1002}+2\chi_{2120}\chi_{0102}+2\chi_{2201}\chi_{0021}+2\chi_{2210}\chi_{0012}+8\chi_{1111}^2+4\chi_{2011}\chi_{0211}+$$
$$+\chi_{0220}\chi_{2002}+4\chi_{1102}\chi_{1120}+\chi_{0202}\chi_{2020}+4\chi_{1201}\chi_{1021}+4\chi_{2101}\chi_{0121}+4\chi_{1210}\chi_{1012}+$$
$$+4\chi_{2110}\chi_{0112}+\chi_{2200}\chi_{0022}+2\chi_{1100}^2\chi_{0022}+\chi_{2000}\chi_{0200}\chi_{0022}+8\chi_{1100}\chi_{1010}\chi_{0112}+$$
$$+4\chi_{0112}\chi_{2000}\chi_{0110}+4\chi_{0200}\chi_{1012}\chi_{1010}+8\chi_{1100}\chi_{0110}\chi_{1012}+8\chi_{1100}\chi_{1001}\chi_{0121}+$$
$$+4\chi_{0121}\chi_{2000}\chi_{0101}+4\chi_{0200}\chi_{1021}\chi_{1001}+8\chi_{1100}\chi_{1021}\chi_{0101}+2\chi_{0202}\chi_{1010}^2+$$
$$+8\chi_{1010}\chi_{0110}\chi_{1102}+2\chi_{0110}^2\chi_{2002}+8\chi_{0211}\chi_{1010}\chi_{1001}+16\chi_{1111}\chi_{0110}\chi_{1001}+$$
$$+16\chi_{1111}\chi_{1010}\chi_{0101}+8\chi_{2011}\chi_{0110}\chi_{0101}+2\chi_{0220}\chi_{1001}^2+8\chi_{1001}\chi_{0101}\chi_{1120}+$$
$$+2\chi_{0101}^2\chi_{2020}+\chi_{0202}\chi_{2000}\chi_{0020}+4\chi_{1102}\chi_{1100}\chi_{0020}+\chi_{0200}\chi_{2002}\chi_{0020}+$$
$$+4\chi_{0211}\chi_{2000}\chi_{0011}+16\chi_{1100}\chi_{1111}\chi_{0011}+4\chi_{0200}\chi_{2011}\chi_{0011}+\chi_{0220}\chi_{2000}\chi_{0002}+$$
$$+4\chi_{1120}\chi_{1100}\chi_{0002}+\chi_{0200}\chi_{2020}\chi_{0002}+4\chi_{1201}\chi_{1001}\chi_{0020}+4\chi_{2101}\chi_{0101}\chi_{0020}+$$
$$+8\chi_{1201}\chi_{1010}\chi_{0011}+8\chi_{2101}\chi_{0110}\chi_{0011}+8\chi_{1210}\chi_{1001}\chi_{0011}+8\chi_{2110}\chi_{0101}\chi_{0011}+$$
$$+4\chi_{1210}\chi_{1010}\chi_{0002}+4\chi_{2110}\chi_{0110}\chi_{0002}+2\chi_{2200}\chi_{0011}^2+\chi_{2200}\chi_{0020}\chi_{0002}+4\chi_{0111}^2\chi_{2000}+$$
$$+16\chi_{1011}\chi_{0111}\chi_{1100}+4\chi_{0200}\chi_{1011}^2+4\chi_{1100}\chi_{0120}\chi_{1002}+2\chi_{0120}\chi_{2000}\chi_{0102}+$$
$$+2\chi_{0200}\chi_{1020}\chi_{1002}+4\chi_{1100}\chi_{1020}\chi_{0102}+2\chi_{0201}\chi_{2000}\chi_{0021}+8\chi_{1100}\chi_{1101}\chi_{0021}+$$
$$+2\chi_{0200}\chi_{2001}\chi_{0021}+16\chi_{1101}\chi_{1011}\chi_{0110}+2\chi_{0210}\chi_{0012}\chi_{2000}+8\chi_{1100}\chi_{1110}\chi_{0012}+$$
$$+2\chi_{0200}\chi_{2010}\chi_{0012}+8\chi_{0201}\chi_{1011}\chi_{1010}+16\chi_{1101}\chi_{0111}\chi_{1010}+8\chi_{2001}\chi_{0111}\chi_{0110}+$$
$$+4\chi_{0201}\chi_{1020}\chi_{1001}+8\chi_{1101}\chi_{0120}\chi_{1001}+8\chi_{1101}\chi_{1020}\chi_{0101}+4\chi_{2001}\chi_{0120}\chi_{0101}+$$
$$+4\chi_{0210}\chi_{1002}\chi_{1010}+8\chi_{1110}\chi_{0102}\chi_{1010}+8\chi_{1110}\chi_{1002}\chi_{0110}+4\chi_{2010}\chi_{0102}\chi_{0110}+$$

$$+8\chi_{0210}\chi_{1011}\chi_{1001}+16\chi_{1110}\chi_{0111}\chi_{1001}+16\chi_{1110}\chi_{1011}\chi_{0101}+8\chi_{2010}\chi_{0111}\chi_{0101}+$$
$$+4\chi_{1101}^2\chi_{0020}+2\chi_{2001}\chi_{0201}\chi_{0020}+4\chi_{0210}\chi_{2001}\chi_{0011}+16\chi_{1101}\chi_{1110}\chi_{0011}+$$
$$+4\chi_{0201}\chi_{2010}\chi_{0011}+4\chi_{1110}^2\chi_{0002}+2\chi_{2010}\chi_{0210}\chi_{0002}+4\chi_{1200}\chi_{0012}\chi_{1010}+$$
$$+4\chi_{2100}\chi_{0012}\chi_{0110}+4\chi_{1200}\chi_{0021}\chi_{1001}+4\chi_{2100}\chi_{0021}\chi_{0101}+2\chi_{1200}\chi_{1002}\chi_{0020}+$$
$$+2\chi_{2100}\chi_{0102}\chi_{0020}+8\chi_{1200}\chi_{1011}\chi_{0011}+8\chi_{2100}\chi_{0111}\chi_{0011}+2\chi_{1200}\chi_{1020}\chi_{0002}+$$
$$+2\chi_{2100}\chi_{0120}\chi_{0002}+4\chi_{1100}^2\chi_{0011}^2+2\chi_{2000}\chi_{0200}\chi_{0011}^2+2\chi_{1100}^2\chi_{0020}\chi_{0002}+$$
$$+\chi_{2000}\chi_{0200}\chi_{0020}\chi_{0002}+8\chi_{0200}\chi_{1010}\chi_{1001}\chi_{0011}+16\chi_{1100}\chi_{0110}\chi_{1001}\chi_{0011}+$$
$$+16_{1100}\chi_{1010}\chi_{0101}\chi_{0011}+8\chi_{2000}\chi_{0110}\chi_{0101}\chi_{0011}+2\chi_{0200}\chi_{1010}^2\chi_{0002}+$$
$$+8\chi_{1010}\chi_{0110}\chi_{1100}\chi_{0002}+2\chi_{0110}^2\chi_{2000}\chi_{0002}+4\chi_{0110}^2\chi_{1001}^2+$$
$$+16\chi_{1010}\chi_{0110}\chi_{1001}\chi_{0101}+4\chi_{0101}^2\chi_{1010}^2+2\chi_{0200}\chi_{1001}^2\chi_{0020}+$$
$$+8\chi_{1001}\chi_{0101}\chi_{1100}\chi_{0020}+2\chi_{0101}^2\chi_{2000}\chi_{0020}\,. \tag{17}$$

Коэффициенты, стоящие перед комбинациями χ_{ijkl}, могут быть определены путем решения кумулянтных уравнений [1]:

$$\frac{\partial\langle\Psi(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)\rangle}{\partial\chi_{p_1,p_2,p_3,p_4}^{Y_1Y_2Y_3Y_4}}=\frac{1}{p_1!p_2!p_3!p_4!}\left\langle\frac{\partial^{p_1+p_2+p_3+p_4}}{\partial Y_1^{p_1}\partial Y_2^{p_2}\partial Y_3^{p_3}\partial Y_4^{p_4}}\Psi(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)\right\rangle; \tag{18}$$

$$\frac{\partial^{k+l}\langle\Psi(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)\rangle}{\left[\partial\chi_{p_1,p_2,p_3,p_4}^{Y_1Y_2Y_3Y_4}\right]^k\left[\partial\chi_{q_1,q_2,q_3,q_4}^{Y_1Y_2Y_3Y_4}\right]^l}=\frac{1}{[p_1!p_2!p_3!p_4!]^k[q_1!q_2!q_3!q_4!]^l}\times$$
$$\times\left\langle\frac{\partial^{(p_1+p_2+p_3+p_4)k+(q_1+q_2+q_3+q_4)l}}{\partial Y_1^{p_1k+q_1l}\partial Y_2^{p_2k+q_2l}\partial Y_3^{p_3k+q_3l}\partial Y_4^{p_4k+q_4l}}\Psi(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)\right\rangle, \tag{19}$$

где $\Psi(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)$ определяется искомой моментной функцией совокупности (1). В частности, при определении α_{211} имеет место $\Psi(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)=Y_1^2Y_3Y_4$.

Заметим, что полученные соотношения (8), (10)-(17) справедливы при произвольном законе распределения исследуемой совокупности процессов с нулевым средним. Если система (1) распределена по гауссовому закону (полномасштабная обработка), то $\chi_{ijkl}\equiv 0$ при $i+j+k+l>2$, и из (8) и (17) получим:

$$\alpha_{1111}=\chi_{1100}\chi_{0011}+\chi_{0110}\chi_{1001}+\chi_{1010}\chi_{0101}\,, \tag{20}$$

$$\alpha_{2222}=4\chi_{1100}^2\chi_{0011}^2+2\chi_{2000}\chi_{0200}\chi_{0011}^2+2\chi_{1100}^2\chi_{0020}\chi_{0002}+\chi_{2000}\chi_{0200}\chi_{0020}\chi_{0002}+$$
$$+8\chi_{0200}\chi_{1010}\chi_{1001}\chi_{0011}+16\chi_{1100}\chi_{0110}\chi_{1001}\chi_{0011}+16\chi_{1100}\chi_{1010}\chi_{0101}\chi_{0011}+$$
$$+8\chi_{2000}\chi_{0110}\chi_{0101}\chi_{0011}+2\chi_{0200}\chi_{1010}^2\chi_{0002}+8\chi_{1010}\chi_{0110}\chi_{1100}\chi_{0002}+$$
$$+2\chi_{0110}^2\chi_{2000}\chi_{0002}+4\chi_{0110}^2\chi_{1001}^2+16\chi_{1010}\chi_{0110}\chi_{1001}\chi_{0101}+4\chi_{0101}^2\chi_{1010}^2+$$
$$+2\chi_{0200}\chi_{1001}^2\chi_{0020}+8\chi_{1001}\chi_{0101}\chi_{1100}\chi_{0020}+2\chi_{0101}^2\chi_{2000}\chi_{0020}\,. \tag{21}$$

Используя кумулянтные скобки, выражения (20) и (21) можно представить в виде:

$$\alpha_{1111}=\langle Y_1Y_2Y_3Y_4\rangle=\langle Y_1,Y_2\rangle\langle Y_3,Y_4\rangle+\langle Y_2,Y_3\rangle\langle Y_1,Y_4\rangle+\langle Y_1,Y_3\rangle\langle Y_2,Y_4\rangle, \tag{22}$$

$$\alpha_{2222} = \left\langle Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2 Y_4^2 \right\rangle = 4\langle Y_1, Y_2\rangle^2 \langle Y_3, Y_4\rangle^2 + 2\langle Y_1, Y_1\rangle\langle Y_2, Y_2\rangle\langle Y_3, Y_4\rangle^2 +$$
$$+ 2\langle Y_1, Y_2\rangle^2 \langle Y_3, Y_3\rangle\langle Y_4, Y_4\rangle + \langle Y_1, Y_1\rangle\langle Y_2, Y_2\rangle\langle Y_3, Y_3\rangle\langle Y_4, Y_4\rangle +$$
$$+ 8\langle Y_2, Y_2\rangle\langle Y_1, Y_3\rangle\langle Y_1, Y_4\rangle\langle Y_3, Y_4\rangle + 16\langle Y_1, Y_2\rangle\langle Y_2, Y_3\rangle\langle Y_1, Y_4\rangle\langle Y_3, Y_4\rangle +$$
$$+ 16\langle Y_1, Y_2\rangle\langle Y_1, Y_3\rangle\langle Y_2, Y_4\rangle\langle Y_3, Y_4\rangle + 8\langle Y_1, Y_1\rangle\langle Y_2, Y_3\rangle\langle Y_2, Y_4\rangle\langle Y_3, Y_4\rangle +$$
$$+ 2\langle Y_2, Y_2\rangle\langle Y_1, Y_3\rangle^2 \langle Y_4, Y_4\rangle + 8\langle Y_1, Y_3\rangle\langle Y_2, Y_3\rangle\langle Y_1, Y_2\rangle\langle Y_4, Y_4\rangle +$$
$$+ 2\langle Y_2, Y_3\rangle^2 \langle Y_1, Y_1\rangle\langle Y_4, Y_4\rangle + 4\langle Y_2, Y_3\rangle^2 \langle Y_1, Y_4\rangle^2 + 4\langle Y_2, Y_4\rangle^2 \langle Y_1, Y_3\rangle^2 +$$
$$+ 16\langle Y_1, Y_3\rangle\langle Y_2, Y_3\rangle\langle Y_1, Y_4\rangle\langle Y_2, Y_4\rangle + 2\langle Y_2, Y_2\rangle\langle Y_1, Y_4\rangle^2 \langle Y_3, Y_3\rangle +$$
$$+ 8\langle Y_1, Y_4\rangle\langle Y_2, Y_4\rangle\langle Y_1, Y_2\rangle\langle Y_3, Y_3\rangle + 2\langle Y_2, Y_4\rangle^2 \langle Y_1, Y_1\rangle\langle Y_3, Y_3\rangle . \quad (23)$$

Как видно из (20)-(23), ВМФ совокупности процессов (1) удалось выразить через кумулянтные функции второго порядка, т.е. выполнить операцию размыкания моментных скобок вида $\langle Y_1 Y_2 Y_3 Y_4\rangle$ и $\left\langle Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2 Y_4^2\right\rangle$. Определение совместных высших моментных функций совокупности случайных процессов, подвергшихся нелинейному преобразованию при жестком амплитудном ограничении (знаковая обработка), представляет собой более сложную математическую задачу. Ее можно упростить, если учесть, что кумулянтные функции процессов, прошедших амплитудное ограничение, до второго порядка включительно исследованы достаточно подробно [1, 3, 6, 7].

В частности, связь между знаковой корреляционной функцией $R(\tau)$ и нормированной КФ исходных процессов $\rho(\tau)$ имеет вид:

$$R(\tau) = \frac{2}{\pi} \mathbf{arcsin}\, \rho(\tau) \quad \text{или} \quad \chi_{11\,огр} = \frac{2}{\pi} \mathbf{arcsin}\, \chi_{11} .$$

Поэтому, если компоненты вектора $\mathbf{Y}(t)$ (1), подвергшегося ограничению, рассматривать как новую исходную, но уже негауссовую, совокупность $\{Y_{1огр} Y_{2огр} Y_{3огр} Y_{4огр}\}$, то определение ВМФ сводится к поиску среднего

$$\left\langle \Psi\left(Y_{1огр}, Y_{2огр}, Y_{3огр}, Y_{4огр}\right)\right\rangle$$

при известных кумулянтных функциях аргументов, т.е. размыканию моментной скобки более простой структуры, где $\Psi(.)$, как и ранее, определяется искомой моментной функцией (18), (19).

Для определения ВМФ при знаковой обработке воспользуемся некоторыми свойствами кумулянтных скобок [1], в частности

1) $\langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle = \langle Y_2, Y_3, Y_4, Y_1\rangle = \langle Y_3, Y_4, Y_1, Y_2\rangle = \mathbf{.....}$;

2) $\langle Y_1, Y_2, Y_3, C\rangle = \langle C, Y_1, Y_2, Y_3\rangle = \mathbf{...} = 0$, где C – константа.

При фиксированном уровне ограничения $Y_1^2 = Y_2^2 = Y_3^2 = Y_4^2 = C$, поэтому для телеграфного сигнала $\left\langle Y_1^2, \vartheta(Y_2, Y_3, Y_4)\right\rangle = \left\langle Y_2^2, \vartheta(Y_1, Y_3, Y_4)\right\rangle = \mathbf{...} = 0$, где $\vartheta(.)$ – произвольная функция соответствующих аргументов.

Кроме того, учтем, что кумулянтные функции нечетного порядка для данного типа сигналов также равны нулю. На основании перечисленных свойств телеграфных сигналов, зная кумулянтные функции второго порядка, можно определить названные функции более высоких порядков, т.е. выполнить операцию размыкания кумулянтных скобок. Затем данные функции могут быть использованы для определения ВМФ по общим формулам (8) и (17). Для расчета входящих в (8) и (17) кумулянтных функций χ_{ijkl} при $i+j+k+l>2$ используем формулу размыкания кумулянтных скобок вида:

$$\langle x_1, x_2,..., x_i, uv\rangle = \langle x_1, x_2,..., x_i, u, v\rangle + \sum_{j=0}^{i} Q_i^j \left\{\langle x_1, x_2,..., x_{i-j}, u\rangle\langle x_{i-j+1},..., x_i, v\rangle\right\}_S, \qquad (24)$$

где x_i, u, v – случайные процессы (величины), Q_i^j – биномиальные коэффициенты, $\{.\}_S$ – скобки симметризации [1]. Коэффициенты Q_i^j в (24) показывают количество слагаемых, получающееся в результате раскрытия данных скобок.

Размыкание при $i = 2...4$ выполнено в [1]. Для $i = 5...6$ получим:

для $i = 5$

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, uv\rangle = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u, v\rangle + \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u\rangle\langle v\rangle +$$
$$+\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, v\rangle\langle u\rangle + 5\{\langle x_1, x_2, x_3, x_4, u\rangle\langle x_5, v\rangle\}_S + 5\{\langle x_1, x_2, x_3, x_4, v\rangle\langle x_5, u\rangle\}_S +$$
$$+10\{\langle x_1, x_2, x_3, u\rangle\langle x_4, x_5, v\rangle\}_S + 10\{\langle x_1, x_2, x_3, v\rangle\langle x_4, x_5, u\rangle\}_S, \qquad (25)$$

для $i = 6$

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, uv\rangle = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u, v\rangle +$$
$$+\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u\rangle\langle v\rangle + \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v\rangle\langle u\rangle + 6\{\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u\rangle\langle x_6, v\rangle\}_S +$$
$$+6\{\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, v\rangle\langle x_6, u\rangle\}_S + 15\{\langle x_1, x_2, x_3, x_4, u\rangle\langle x_5, x_6, v\rangle\}_S +$$
$$+15\{\langle x_1, x_2, x_3, x_4, v\rangle\langle x_5, x_6, u\rangle\}_S + 20\{\langle x_1, x_2, x_3, u\rangle\langle x_4, x_5, x_6, v\rangle\}_S. \qquad (26)$$

Поскольку для телеграфных сигналов

$$\langle u\rangle = \langle v\rangle = \langle x_i, x_j, u\rangle = \langle x_i, x_j, v\rangle = \langle x_i, x_j, x_k, x_l, u\rangle = \langle x_i, x_j, x_k, x_l, v\rangle = 0,$$

то скобки симметризации, содержащие кумулянтные функции данного порядка, равны нулю.

Оставшиеся скобки можно раскрыть следующим образом:

$$6\{\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u\rangle\langle x_6, v\rangle\}_S = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u\rangle\langle x_6, v\rangle +$$
$$+\langle x_6, x_2, x_3, x_4, x_5, u\rangle\langle x_1, v\rangle + \langle x_1, x_6, x_3, x_4, x_5, u\rangle\langle x_2, v\rangle + \langle x_1, x_2, x_6, x_4, x_5, u\rangle\langle x_3, v\rangle +$$
$$+\langle x_1, x_2, x_3, x_6, x_5, u\rangle\langle x_4, v\rangle + \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, u\rangle\langle x_5, v\rangle; \qquad (27)$$

$$20\{\langle x_1, x_2, x_3, u\rangle\langle x_4, x_5, x_6, v\rangle\}_S = \langle x_1, x_2, x_3, u\rangle\langle x_4, x_5, x_6, v\rangle +$$
$$+\langle x_4, x_2, x_3, u\rangle\langle x_1, x_5, x_6, v\rangle + \langle x_1, x_4, x_3, u\rangle\langle x_2, x_5, x_6, v\rangle +$$
$$+\langle x_1, x_2, x_4, u\rangle\langle x_3, x_5, x_6, v\rangle + \langle x_5, x_2, x_3, u\rangle\langle x_4, x_1, x_6, v\rangle +$$
$$+\langle x_1, x_5, x_3, u\rangle\langle x_4, x_2, x_6, v\rangle + \langle x_1, x_2, x_5, u\rangle\langle x_4, x_3, x_6, v\rangle +$$
$$+\langle x_6, x_2, x_3, u\rangle\langle x_4, x_5, x_1, v\rangle + \langle x_1, x_6, x_3, u\rangle\langle x_4, x_5, x_2, v\rangle +$$

$$+\langle x_1,x_2,x_6,u\rangle\langle x_4,x_5,x_3,v\rangle+\langle x_4,x_5,x_3,u\rangle\langle x_1,x_2,x_6,v\rangle+$$
$$+\langle x_1,x_4,x_5,u\rangle\langle x_2,x_3,x_6,v\rangle+\langle x_4,x_2,x_5,u\rangle\langle x_1,x_3,x_6,v\rangle+$$
$$+\langle x_5,x_6,x_3,u\rangle\langle x_1,x_2,x_4,v\rangle+\langle x_1,x_5,x_6,u\rangle\langle x_2,x_3,x_4,v\rangle+$$
$$+\langle x_5,x_2,x_6,u\rangle\langle x_1,x_3,x_4,v\rangle+\langle x_4,x_6,x_3,u\rangle\langle x_1,x_2,x_5,v\rangle+$$
$$+\langle x_1,x_4,x_6,u\rangle\langle x_2,x_3,x_5,v\rangle+\langle x_4,x_2,x_6,u\rangle\langle x_1,x_3,x_5,v\rangle+$$
$$+\langle x_4,x_5,x_6,u\rangle\langle x_1,x_2,x_3,v\rangle. \tag{28}$$

Скобка $6\{\langle x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,v\rangle\langle x_6,u\rangle\}_S$ раскрывается аналогично (27).

На основании перечисленных выше свойств кумулянтных функций телеграфных сигналов и используя (24)-(28) в (8) и (17) можно получить:

$$\alpha_{1111огр}=\chi_{1100огр}\chi_{0011огр}+\chi_{0110огр}\chi_{1001огр}+\chi_{1010огр}\chi_{0101огр}-2\chi_{1100огр}\chi_{1010огр}\chi_{1001огр}, \tag{29}$$

$$\alpha_{2222огр}=\chi_{2000огр}\chi_{0200огр}\chi_{0020огр}\chi_{0002огр}. \tag{30}$$

При введенных ранее условиях (4) $\alpha_{2222огр}=1$.

Выводы

Таким образом, на основе положений кумулянтного анализа (в частности, кумулянтных уравнений, аппарата моментных и кумулянтных скобок) получены явные соотношения, устанавливающие связь между высшими моментными и корреляционными функциями совокупностей случайных процессов.

Результаты получены для гауссовых стационарных и стационарно-связанных процессов, а также для порождаемых ими в случае жесткого амплитудного ограничения телеграфных сигналов.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа антенных решеток, MIMO-систем, решения ряда задач электромагнитной совместимости и других практических приложениях.

Список литературы:

1. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.

2. *Дубков А.А., Малахов А.Н.* О взаимосвязях кумулянтных функций телеграфного случайного процесса.– Радиотехника и электроника. – 1979. – №5. – С. 1077–1078.

3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Т.1. – М.: Сов. радио, 1974. –552 с.

4. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений. – М.: Наука, 1966. – 735 с.

5. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

6. *Мирский Г.Я.* Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. – М.: Энергоиздат, 1982. – 320 с.

7. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника.– М.: Сов. радио, 1982. – 624 с.