МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ISSN 0555-2656

БИОНИКА ИНТЕЛЛЕКТА

ИНФОРМАЦИЯ, ЯЗЫК, ИНТЕЛЛЕКТ

№ 2 (73) 2010

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1967 г.

Тематический выпуск
по материалам семинара
«МОЗГОПОДОБНЫЕ СТРУКТУРЫ»

Свидетельство о государственной регистрации КВ № 12072-943 ПР от 07.12.2006

Журнал включен в список специальных изданий ВАК Украины
по техническим наукам
(приложение к постановлению ВАК Украины № 1-05/7 от 04.07.2006)

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 519.7

МОДЕЛЬ РАВЕНСТВА ИДЕЙ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Рассмотрены проблемы построения эффективного математического аппарата для формализации и моделирования систем искусственного интеллекта. В качестве такого аппарата предложен абстрактный эквивалент алгебры конечных предикатов – алгебра идей. На основе алгебра идей получены некоторые результаты в области формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности человека.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение

Вычислительная техника быстро развивается. Все чаще пишут о появлении искусственного интеллекта. Но так ли уж велики успехи интеллектуализации вычислительной техники, если их оценивать по большому счету? Совершенный автоматический перевод так и не получился. Распознавание образов увязает в огромных трудностях. Как достичь понимания речи машиной – никто не знает. Естественный язык машина по-настоящему не освоила. Общение с ЭВМ для человека попрежнему остается неудобным и нелегким делом. Если трезво оценивать создавшееся положение, то приходится признать, что никакого искусственного интеллекта еще нет. Термин “искусственный интеллект” выражает пока лишь систематически не сбывающиеся надежды.

Характеристика ЭВМ как “ученых идиотов”, данная Шенноном на заре развития вычислительной техники, остается пока в силе и сегодня. Основные проблемы, перед которыми разработчики искусственного интеллекта остановились в 50-е годы, до сих пор не преодолены. Машины пока не мыслят, и нет надежд на то, что у них в обозримом будущем появятся проблески разума, если события и дальше будут развиваться подобным образом. Ощущение такое, что техника искусственного интеллекта стоит перед неприступной стеной, обход которой совершенно невозможен. И дело здесь не в слабости технических возможностей современных компьютеров. Причины трудностей в другом – слишком уж несовершенна функциональная организация существующих систем искусственного интеллекта.

Можно ли надеяться на кардинальные сдвиги в области искусственного интеллекта в обозримом будущем? История развития науки свидетельствует о том, что качественным сдвигам после длительного периода застоя обычно предшествует изменение точки зрения на предмет исследования. Думается, что и в области искусственного интеллекта прорыв может быть обеспечен при новом подходе к проблеме. Такой новый подход, по нашему мнению, может дать бионика. До сих пор умственные способности машины развивались почти исключительно посредством новых технических решений. Разработчики аппаратных средств лишь в крайне незначительной степени используют уже существующие в природе механизмы и явления интеллектуальной деятельности. Однако при сложившемся положении недостаточно опираться только на изобретательство, инженерную деятельность при создании систем искусственного интеллекта. Надо опираться также и на те решения, которые накопила природа, изучать закономерности естественного интеллекта. Ведь все те умственные способности, которые желательно привить машине, уже имеются у человека, причем в достаточно развитом виде, и неразумно пренебрегать этой подсказкой природы. Любая область техники опирается на изучение соответствующих законов природы, а техника искусственного интеллекта этого не делает и на этом сильно проигрывает. До тех пор, пока положение кардинально не изменится, и наука не обратится к серьезным систематическим исследованиям человеческого интеллекта, дело создания искусственного интеллекта вряд ли сдвинется с мертвой точки. Такие исследования, конечно, потребуют огромных усилий и средств, однако и в других областях науки и техники охотно идут на это и находят такой способ действий очень выгодным.

1. Алгебра конечных предикатов и задачи теории интеллекта

Наука, изучающая механизмы естественного интеллекта с целью использования добытых знаний для создания систем искусственного интеллекта, называется *теорией интеллекта* [1, с. 3]. Один из пионеров в области искусственного интеллекта Нильсон писал: “Если бы такую теорию интеллекта можно было бы создать, то с ее помощью можно было бы направленно вести разработку интеллектуальных машин” [4, с. 12]. Теория интеллекта – это не техника, это область естествознания, физики. Имеется физический объект – человек с его интеллектом. Требуется математически описать законы, управляющие интеллектуальной деятельностью человека. Как достичь прогресса в разработке теории интеллекта, в каких направлениях ее развивать? Чтобы ответить на эти вопросы, полезно учесть опыт физики. Первое, что бросается в глаза, – это то, что физика пользуется хорошо развитым математическим аппаратом, который специально для нее разрабатывается целой армией математиков. Открываемые в физике законы описываются в виде математических уравнений, которыми задаются определенные отношения. Кроме того, математики разрабатывают методы решения уравнений. Решая уравнения относительно тех или иных переменных, инженеры получают функции, описывающие интересующие их физические процессы. Аналогично этому в теории интеллекта можно ставить задачу разработки специального математического аппарата уравнений для описания законов интеллекта и аппарата функций для описания интеллектуальной деятельности.

Представляется, что для теории интеллекта, прежде всего, необходим математический аппарат. Быть может, для нее подойдет математический аппарат, используемый в физике? А там используется непрерывная (континуальная) математика. Для каких-то периферийных задач теории интеллекта континуальная математика наверняка подойдет. Так, например, на языке интегрального исчисления удобно описывать работу органов чувств [3, с. 114]. Однако ясно, что главной опорой для теории интеллекта такой аппарат стать не может. Дело в том, что интеллект – инструмент универсальный, и для своего формального описания он, естественно, нуждается в универсальном математическом аппарате. Аппарат же вещественных функций, дифференциального и интегрального исчисления, созданный для нужд физики, весьма специален, он явно не обладает свойством универсальности. Но может быть, подойдет аппарат дискретной (счетной) математики, разработанный теорией алгоритмов и автоматов? Однако этот математический аппарат тоже неуниверсален, о чем свидетельствует теорема Геделя о неполноте. Об эту теорему в свое время разбилась программа Гильберта создания теории доказательств на базе счетной математики. Теорию доказательств Гильберт понимал как науку о правилах, согласно которым действует наше мышление, то есть по существу как теорию интеллекта.

Означает ли это, что универсальный математический аппарат, необходимый для теории интеллекта, вообще невозможен? Гильберт с таким выводом не соглашается. Он пишет: «...возникшее на определенное время мнение, будто из результатов Геделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением. Этот результат на самом деле показывает только то, что "...финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом..."» [5, с. 19]. В этом высказывании мы усматриваем призыв к переходу от счетной математики к конечной. В другом месте [6, с. 364] Гильберт пишет: "Общий вывод таков: бесконечное нигде не реализуется. Его нет в природе, и оно недопустимо как основа нашего разумного мышления, – здесь мы имеем замечательную гармонию между бытием и мышлением".

Теорема Геделя о неполноте на конечную математику не распространяется, поэтому последняя свободна от ограничений, которым подвержена счетная математика. Отсюда принудительно вытекает вывод: именно конечная математика представляет собой тот единственно возможный универсальный язык формального описания, который так необходим для теории интеллекта. Сказанное вовсе не означает, что континуальная или счетная математика неприменима в теории интеллекта. Она применима, но не в качестве универсального средства формального описания интеллектуальной деятельности человека. Так, например, с помощью интегралов можно описать преобразование зрительной системой человека светового излучения в цветовое ощущение. Однако это описание будет не вполне точным, поскольку в нем не учитывается факт конечной чувствительности органа зрения. Чтобы его учесть, необходимо перейти на язык конечной математики.

С прикладной точки зрения язык конечной математики тоже представляется вполне приемлемым, так как любые системы искусственного интеллекта имеют конечную сложность. С их помощью можно практически воспроизвести лишь те интеллектуальные процессы, которые допускают математическое описание на языке конечной математики. Итак, остановимся на конечной математике в роли универсального языка теории интеллекта. Но в виде какой конкретной алгебраической системы она должна использоваться в теории интеллекта? Для этой цели можно использовать алгебру конечных предикатов [1, с. 15]. Эта рекомендация основывается на факте полноты алгебры конечных предикатов. На языке алгебры конечных предикатов можно записать любое конечное отношение и любую конечную функцию. Это означает, что на языке алгебры конечных предикатов можно выразить любой закон интеллекта и любую интеллектуальную деятельность, реализуемую на ЭВМ.

Все то, что можно выразить на языке алгебры конечных предикатов, можно также практически воспроизвести на ЭВМ. И обратно, все то, что можно реализовать на ЭВМ, можно также записать на языке алгебры конечных предикатов. Таким образом, существует точное соответствие между описательными возможностями алгебры конечных предикатов и возможностями вычислительных машин фактически реализовать описания этой алгебры. Вывод о приемлемости для теории интеллекта алгебры конечных предикатов подкрепляется еще и тем, что к алгебре конечных предикатов ведут буквально все пути. Так, если язык теории графов дополнить формульным аппаратом, то в результате получаем алгебру конечных предикатов. Если алгебру логики обобщить и перейти от двоичных переменных к буквенным, тоже получаем алгебру конечных предикатов. Если многозначную логику дополнить языком для записи отношений, – снова приходим к алгебре конечных предикатов. Наконец, если взять конечный фрагмент логики предикатов и алгебраизировать его, то и в этом случае приходим к той же алгебре конечных предикатов.

Очень важно то, что алгебра конечных предикатов служит для теории интеллекта не только формальным языком описания законов интеллекта и интеллектуальной деятельности человека. Ее роль оказывается гораздо более значительной. Без преувеличения можно сказать, что алгебра конечных предикатов в действии – это и есть интеллект. Структуры алгебры конечных предикатов выражают самую суть интеллектуальных процессов и явления, они допускают непосредственную интерпретацию в психологических терминах. Так, формулы алгебры конечных предикатов можно непосредственно интерпретировать как фразы естественного языка; предикаты, обозначаемые формулами, – как мысли человека; операции над предикатами – как мыслительную деятельность человека. Уравнения алгебры конечных предикатов интерпретируются как законы мышления. Минимизация формул непосредственно связывается с лаконизмом речи. Декомпозиция формул соответствует расчленению текста на отдельные предложения в процессе речи.

Предикаты различных порядков соответствуют понятиям различного уровня абстрактности. Решение уравнений алгебры конечных предикатов можно трактовать как творческую деятельность человека. Благодаря наличию такой широкой содержательной интерпретации, даже чисто математическая разработка алгебры конечных предикатов позволяет вместе с тем продвигать вперед разработку теории интеллекта. Минимизация, декомпозиция, решение уравнений, тождественное преобразование формул – это важные задачи теории интеллекта. В данной области уже сейчас имеются существенные результаты.

Другая важная проблема теории интеллекта, которая также поддается сравнительно легкой и быстрой разработке, заключается в формальном описании математических понятий, используемых людьми в своей интеллектуальной деятельности. Любое математическое понятие, любой математический знак при переводе на язык алгебры конечных предикатов немедленно становятся доступными для систем искусственного интеллекта. Объем исследований в этой области предстоит выполнить очень большой. Оказывается, что даже самые простые понятия математики, такие как принадлежность элемента множеству, равенство и включение множеств, декартово произведение множеств, исчерпывающим образом еще не описаны на языке конечной математики. Работы в этой области уже начаты и получены первые результаты. Описание же таких математических объектов как непрерывность, интеграл, производная, то есть понятий континуальной математики, практически еще не начиналось. Выражение понятий континуальной и счетной математики на языке конечной математики вполне осуществимо. О возможности этого в свое время писал еще Гильберт [6, с. 356]. В этой области также предстоит выполнить огромный объем исследований. Когда все эти работы будут доведены до конца, вычислительные системы смогут оперировать математическими понятиями столь же легко и свободно, как это делает человек.

Алгебра конечных предикатов приносит свои плоды и в такой, казалось бы, устоявшейся области как синтез схем ЭВМ [2]. До сих пор математической основой такого синтеза служила двоичная алгебра логики. Оказывается, синтез схем можно вести также и на базе буквенной алгебры конечных предикатов. При этом появляются ценные дополнительные возможности. Схемы получаются широко распараллеленными, их структура весьма напоминает строение нейронных ансамблей, которые нейрофизиологи находят в мозге животных и человека. Возникает множество интересных задач, связанных с разработкой методов синтеза схем на базе алгебры конечных предикатов. К ним, в частности, относятся синтез схем, реализующих частичные алфавитные операторы, синтез вполне конечных автоматов, разработка специализированных схем для автоматической обработки текстов.

Алгебра конечных предикатов наводит на определенные размышления и по поводу методов программирования будущих вычислительных машин. Если мысли – это конечные предикаты, а мыслительная деятельность – процесс решения уравнений алгебры конечных предикатов, то отсюда вытекает возможность полного отказа от внешнего программирования вычислительных машин. Для того, чтобы человек мог решать определенные задачи, например, школьник мог решать задачи по физике, нет надобности каждый раз снабжать его специальной программой действия. Школьнику лишь сообщаются условия задачи: например, из пункта А в пункт В выехал велосипедист, расстояние такое-то, время такое-то и так далее., то есть школьнику сообщаются только связи, присутствующие в задаче, иными словами, ему задается некоторая система отношений. Эти отношения школьник переводит на язык алгебраических уравнений, а затем решает полученные уравнения и таким способом приходит к решению задачи. У школьника имеется “внутреннее программное обеспечение” в виде умения составлять уравнения и решать их. А больше ему для решения задачи ничего и не требуется.

Если следовать этой аналогии, то вычислительную машину достаточно будет снабдить только внутренним программным обеспечением, которое могло бы переводить условия задачи, поступающее в машину, с естественного языка, удобного человеку, на язык уравнений, удобный машине, и могло бы решать получаемые уравнения. При этом никакие другие программы пользователю ЭВМ не потребуются. Пользователь должен сообщить машине на удобном ему языке лишь условия задачи и что именно требуется найти. Остальное машина сможет сделать сама. При таком подходе мощь систем машинного интеллекта будет определяться лишь тем, какова предельная сложность уравнений алгебры конечных предикатов, которые способны эффективно обработать данная система машинного интеллекта.

Описанный подход к программированию порождает массу интереснейших задач. Нужно, к примеру, научиться выражать на языке алгебры конечных предикатов отношения, заключенные во фразах естественного языка, а также смысл слов и понятий, которыми пользуется человек. Важна и обратная задача – научиться переводить выражения алгебры конечных предикатов на естественный язык, транслировать формулы с высокого уровня абстракции на более низкий и наоборот.

Одна из важнейших задач теории интеллекта состоит в том, чтобы суметь добраться физическими методами до субъективных состояний человека. Мысли человека, его ощущения, восприятия, представления – все это субъективные состояния. Но субъективные состояния человека идеальны, они бестелесны, их не пощупаешь как физический предмет, непосредственно не измеришь как массу тела или силу тока. Если окажется, что мысли, восприятия и представления человека недоступны объективному, то есть строго научному, исследованию, то вся теория интеллекта повисает в воздухе, становится бездоказательной. Например выше утверждалось, что мысли – это не что иное как конечные предикаты. Но если этого нельзя будет доказать физическим экспериментом, то все подобные заявления останутся всего лишь беспочвенными предположениями.

К счастью, теория интеллекта располагает общим методом вполне объективного физического изучения психологических состояний человека, в том числе его ощущений, восприятий, представлений, понятий и мыслей. Это – *метод сравнения* [3, с. 85], который основан на понятии конечного предиката. Согласно этому методу сам человек выполняет роль экспериментальной установки. В опыте испытуемому предъявляются внешние физические предметы – зрительные картины, звуки, фразы, тексты и тому подобное. Испытуемый их воспринимает и реагирует на них двоичным ответом “да” или “нет”, руководствуясь специальным заданием исследователя. Этим своим поведением испытуемый реализует некоторый конечный предикат. Свойства этого предиката экспериментально изучаются и математически формулируются. Исследователь всегда может дать такое задание испытуемому, чтобы из свойств реализуемого им предиката можно было путем специального математического анализа чисто логически вывести математическое описание изучаемых субъективных состояний испытуемого, а также найти вид функции, лежащей в основе преобразования физических предметов в порождаемые ими субъективные образы.

Таким образом, параметры внутреннего мира человека могут быть объективно измерены, правда, это будут не прямые измерения, а косвенные, но от этого их сила не уменьшается. Именно таким путем было, например, установлено, что цветовые ощущения человека можно формально представить в виде трех чисел, которые получаются в результате интегрирования спектров соответствующих световых излучений с определенными весовыми функциями. Точно так же можно доказать, что наши мысли – это конечные предикаты вполне определенного вида. Этим же методом можно будет найти вид функции, преобразующей тексты в соответствующие им мысли и тому подобное.

2. Модель равенства идей. Формальное представление идей

Занимаясь формальным описанием закономерностей интеллектуальной деятельности на языке алгебры конечных предикатов, мы обнаружили, что кроме этой алгебры для теории интеллекта необходим еще и некий абстрактный эквивалент этой алгебры, называемый нами *алгеброй идей*. Выбор такого названия обусловлен тем, что элементы множества – носителя алгебры идей, как будет показано ниже, естественным образом интерпретируется как *идеи* интеллекта (то есть мысли, понятия, вообще – любые субъективные состояния человека), а операции алгебры идей над этими элементами – как действия интеллекта над идеями.

Развивая алгебру идей, одновременно с этим будем продвигаться вперед и в деле формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности человека. Это будет достигаться посредством *психологической интерпретации* понятий и законов алгебры идей. Правомерность такой интерпретации будет обосновываться в каждом конкретном случае путем экспериментального изучения соответствующих свойств поведения испытуемого. Под *испытуемым* мы подразумеваем того конкретного человека, интеллектуальная деятельность которого подвергается формализации. В этой статье вводится *носитель алгебры идей*. С содержательной точки зрения он представляет собой множество всех идей испытуемого с заданным на нем предикатом равенства.

В роли прототипа алгебры идей будем использовать *алгебру одноместных k-ичных предикатов первого порядка* [1, с. 10] (Об *алгебре конечных предикатов произвольного порядка* см. [3, с. 6]). Обратим внимание на то, что в роли прототипа алгебры идей нами принимается не самый общий вариант алгебры конечных предикатов, как, казалось бы, надо сказать, а, напротив, весьма частный ее случай. Дело в том, что при переходе от конкретной алгебры к ее абстрактному эквиваленту частное и общее меняются местами. Поэтому наиболее частный вариант алгебры конечных предикатов порождает алгебру идей самого общего вида. Оказывается, что именно алгебра одноместных k-ичных предикатов первого порядка приводит к нужному нам предельно общему определению алгебры идей. Абстрактные аналоги более общих алгебр конечных предикатов (многоместных и произвольного порядка) получаются просто детализацией исходной алгебры идей.

Одноместные k-ичные предикаты первого порядка вводятся следующим образом [1, с. 12]. Пусть $A_k=\{a_1, a_2,..., a_k\}$ – множество, состоящее из k *букв* $a_1, a_2,..., a_k$. Все буквы пронумерованы, каждая имеет свой порядковый номер. На множестве A_k задана переменная x, называемая *буквенной*. Вводим множество $\Sigma=\{0,1\}$, состоящее из *логических констант* 0 и 1, называемых соответственно *нулем* и *единицей*. На множестве Σ задана переменная y, называемая *логической*. *Одноместным k-ичным предикатом первого порядка* называется каждая функция $y=P(x)$, отображающая множество A_k в множестве Σ. Будем говорить, что предикат P задан на множестве A_k. Множество всех одноместных k-ичных предикатов первого порядка обозначаем символом M_k. Пусть $N_0(k)$– число всех предикатов, входящих в состав множества M_k. Оно равно

$$N_0(k)=2^k. \tag{1}$$

Рассмотрим, к примеру, троичные предикаты ($k=3$), заданные на множестве $A_3=\{a, b, c\}$. Всевозможные такие предикаты $P_0 \div P_7$ представлены в табл. 1. Всего имеется $N_0(3)=2^3=8$ троичных предикатов. Если читать снизу вверх колонку логических констант, соответствующую в табл. 1 предикату P_i ($i\in\{0,1,...,7\}$), интерпретируя логические константы как двоичные цифры, то каждому предикату можно поставить в соответствие некоторый двоичный код.

Таблица 1

x	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
a	0	1	0	1	0	1	0	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	0	0	0	1	1	1	1

Число i, соответствующее этому коду, принимаем в качестве *номера предиката* P_i. Например предикату P_3 соответствует код 001, представляющий собой число 3. В данном случае в роли множества всех предикатов выступает множество $M_3=\{P_0, P_1,..., P_7\}$.

Построение алгебры идей начнем с введения ее носителя – *множества всех идей*. Обозначим символом S_k множество, состоящее из 2^k различных элементов $s_0, s_1..., s_{2^k-1}$. Принимаем множество S_k в роли *носителя алгебры идей* размерности k. Элементы множества S_k называем идеями размерности k. Прототипами элементов множества S_k для нас служат одноместные k-ичные предикаты первого порядка. Число элементов 2^k множества S_k выбрано с таким расчетом, чтобы оно совпадало с числом всех одноместных k-ичных предикатов первого порядка. Множество S_k назовем k-мерным *пространством идей*. Вопрос о конкретном значении числа k оставляем открытым. Пока же будем считать, что в роли k может быть выбрано любое натуральное число $k=1, 2,...$. Заметим, что при любом значении k множество S_k не пусто. В некоторых задачах нас будет интересовать не все множество S_k, а лишь какая-то его часть N. Число элементов в множестве N может быть произвольным, но оно должно быть меньше, чем 2^k. Множество N будем называть *неполным множеством идей*, а множество S_k – *полным*.

Введем биекцию Φ: $S_k \to M_k$, устанавливающую взаимно-однозначное соответствие между всеми идеями размерности k и всеми k-ичными предикатами, заданными на множестве A_k. Это всегда можно сделать, поскольку множества S_k и M_k содержат одинаковое число элементов. Биекцию Φ можно выбрать даже многими способами. Всего существует $2^k!$ различных вариантов выбора биекций Φ, заданных на множестве S_k, что соответствует числу всех перестановок из 2^k различных элементов. Например при $k=3$ существует $2^3!=40320$ различных вариантов выбора биекции Φ. Предикат $P=\Phi(x)$ будем называть *предикатом, соответствующим идее x*, а идею $x=\Phi^{-1}(P)$ – *идеей, соответствующей предикату* P. В таблицах 2 и 3 приведены два примера биекций Φ' и Φ''.

Биекция $\Phi': S'_k \to M_k$ определена на трехмерном пространстве идей $S'_3 = \{s'_0, s'_1, \ldots, s'_7\}$, биекция $\Phi'': S''_k \to M_k$ на пространстве $S''_3 = \{s''_0, s''_1, \ldots, s''_7\}$ той же размерности.

Таблица 2

x'	s'_0	s'_1	s'_2	s'_3	s'_4	s'_5	s'_6	s'_7
$\Phi'(x')$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7

Таблица 3

x''	s''_0	s''_1	s''_2	s''_3	s''_4	s''_5	s''_6	s''_7
$\Phi''(x'')$	P_4	P_5	P_7	P_1	P_6	P_0	P_3	P_2

Символ x' обозначает переменную, заданную на множестве S'_3, символ x'' – переменную, заданную на множестве S''_3. Множества S'_3 и S''_3 можно рассматривать как разные системы обозначений для одних и тех же трехмерных идей. Элементы множества S_k будем психологически интерпретировать как *мысли* какого-нибудь конкретного человека, которого в дальнейшем будем именовать *испытуемым*. Человека, изучающего интеллектуальную деятельность испытуемого, будем называть *исследователем*. Проводя опыты, исследователь формирует в уме испытуемого ту или иную мысль, предъявляя испытуемому для восприятия специально подобранный физический сигнал, выполняющий в данном случае роль *имени мысли*. Мысль, порождаемую каким-либо именем, будем называть *смыслом* этого *имени*. Таким образом, между *мыслью исследователя* и возбуждаемой ею *мыслью испытуемого* всегда имеется неизбежный посредник – некоторый физический сигнал, обозначающий мысль исследователя и являющийся вместе с тем именем мысли испытуемого.

Мысли от одного человека к другому передаются с помощью *высказываний*. Любое высказывание имеет вид *повествовательного предложения* или последовательности повествовательных предложений – *текста*. Мысль, заключенную в том или ином высказывании, будем называть *смыслом высказывания*. Высказывание выполняет роль имени мысли. Любое повествовательное предложение, являющееся именем некоторой мысли, будем считать высказыванием. Именем мысли может быть не только высказывание, но и любой другой физический сигнал. Например красный свет семафора передает машинисту электровоза мысль “Путь закрыт”. И, тем не менее, высказывания как средства передачи мыслей в некотором смысле *незаменимы*: человек не сможет понять смысл неречевого сигнала до тех пор, пока ему не объяснят его с помощью высказываний. Так, машинист электровоза должен быть предварительно обучен тому, что свет семафора означает запрещение проезда. Как средство передачи мыслей высказывания *универсальны*. Любую мысль каждый психически здоровый человек может сформулировать в виде высказывания. Если человек этого сделать не может, то у окружающих его лиц может возникнуть убеждение, что данной мысли у него попросту нет. Высказываний больше, чем мыслей. Одну и ту же мысль можно выразить различными высказываниями. Высказывания, выражающие одну и ту же мысль, будем называть *тождественными*.

Не каждое повествовательное предложение может быть высказыванием. Например фраза, написанная на непонятном для испытуемого языке, не несет ему никакой мысли. Чтобы повествовательное предложение могло возбудить в уме испытуемого какую-то мысль, оно должно быть им *понято*. Одно и то же предложение для одного испытуемого может быть понятным, а для другого непонятным. Предложение может оказаться непонятным, даже будучи записанным или произнесенным на языке, которым владеет испытуемый. Это может случиться, если предложение имеет неправильную грамматическую структуру или в нем встречаются непонятные для испытуемого слова. Текст, взятый из руководства по незнакомой области знаний, будет испытуемому непонятен. Но после того, как испытуемый освоит эту область знаний, тот же самый текст станет ему понятным. Таким образом, вопрос о том, признать ли данную фразу высказыванием или нет, решается только применительно к конкретному испытуемому, причем на находящемуся на вполне определенной стадии своего развития. Вместе с тем, можно говорить, что данное предложение является высказыванием относительно целой группы лиц, но только в том случае, если все они понимают смысл этого предложения, причем одинаково.

У исследователя нет прямого способа удостовериться в том, что мысль испытуемого совпадает с его собственной мыслью. Это обстоятельство может послужить причиной неправильного понимания исследователя испытуемым. Предъявляя фразу, исследователь рассчитывает, что она возбудит в уме испытуемого именно ту мысль, которую он в нее вложил. Но испытуемый может расшифровать фразу как совершенно иную мысль или мысль, не вполне совпадающую с той, которую имел ввиду исследователь. О том, что такое возможно, свидетельствует постоянно встречающиеся в жизни случаи неточной передачи мыслей от человека к человеку и проистекающие от этого недоразумения. Одна и та же фраза, в зависимости от меняющихся побочных обстоятельств, может быть воспринята испытуемым по-разному. Так, цитата, вырванная из контекста и вставленная в другой текст, зачастую приобретает совершенно иной смысл. Это явление может нарушить стабильность формирования исследователем мыслей в уме испытуемого.

Проводя эксперименты на испытуемом, исследователь обязан позаботиться о том, чтобы возбуждаемые в уме испытуемого мысли всегда однозначно определялись предъявленным ему высказываниями. Смысл имени всегда должен однозначно соответствовать имени. Выполнение этого требования, которое мы называем *условием повторяемости*, совершенно обязательно для доброкачественности опытов. Эксперимент не пострадает, если исследователь вызовет в уме испытуемого не ту мысль, которую намеревался получить, лишь бы повторное предъявление высказывания порождало в сознании испытуемого ту же самую мысль. Но опыт не удастся, если при его проведении не будет обеспечена повторяемость при формировании мыслей, то есть если при различных предъявлениях одного и того же высказывания в сознании испытуемого будут возникать различные мысли. Требование повторяемости предъявляется не только к описываемым здесь психофизическим экспериментам, его выполнение необходимо также и в любом грамотном физическом эксперименте. Если условие повторяемости в экспериментах нарушается, то мысли, предъявляемые испытуемому, становятся неконтролируемыми, а результаты опытов – неопределенными.

Для борьбы с нестабильностью мыслей исследователь должен тщательно учитывать все обстоятельства, сопутствующие высказываниям в момент их предъявления испытуемому, и выявлять те из них, которые приводят к искажению мыслей. Помощь исследователю в этом деле может оказать сам испытуемый, указывая случаи изменения смысла высказывания при появлении того или иного обстоятельства. Например испытуемый легко обнаруживает изменение смысла фразы, вызванное сменой контекста, сопутствующего этой фразе. Факторы, влияющие на смысл высказывания, должны исключаться из условий опыта или же стабилизироваться. Так, например, фразу можно предъявить, не связывая ее ни с каким контекстом. Если же это по каким-либо причинам неприемлемо, то каждое предъявление данной фразы следует сопровождать одним и тем же контекстом. Стабилизируемые в опыте обстоятельства необходимо включать в характеристику высказывания, которому эти обстоятельства сопутствуют. Так, в протоколе испытания надо указывать не только саму предъявленную фразу, но также и сопровождающий ее контекст.

Предикат P (речь идет об одноместных k-ичных предикатах первого порядка), принимающий для всех букв $x \in A_k$ нулевое значение $P(x) = 0$, назовем *тождественно ложным*. Предикат P, принимающий для всех букв $x \in A_k$ единичное значение $P(x) = 1$, назовем *тождественно истинным*. Обозначаем эти предикаты соответственно символами 0 и 1. Предикат 0 имеет номер 0, предикат 1 – номер $2^k - 1$. В табл. 1 в роли предиката 0 выступает предикат P_0, а в роли предиката 1 – предикат P_7.

Идею, соответствующую тождественно ложному предикату 0, будем называть *ложью*, обозначая ее тем же самым символом 0. Идею, соответствующую тождественно истинному предикату 1, будем называть *истиной*, обозначая ее символом 1. Таким образом:

$$\Phi^{-1}(0) = 0, \tag{2}$$

$$\Phi^{-1}(1) = 1. \tag{3}$$

Символом $^{-1}$ обозначена операция обращения биекции Φ. Обратим внимание на омографичность знаков 0 и 1. В роли аргументов функции Φ^{-1} они обозначают предикаты, то есть элементы множества M_k, а в роли значений функции Φ^{-1} они обозначают идеи, то есть элементы множества S_k. Это обстоятельство, однако, не будет приводить к недоразумениям, поскольку истинный смысл знаков 0 и 1 легко определяется по контексту. Для примера, найдем по таблицам 2 и 3 идеи 0 и 1 в множествах S'_3 и S''_3. В обеих таблицах в роли предиката 0 выступает предикат P_0, в роли предиката 1 – предикат P_7. По табл. 2 находим $\Phi'^{-1}(P_0) = s'_0$, $\Phi'^{-1}(P_7) = s'_7$. Таким образом, для множества S'_3 имеем $0 = s'_0$, $1 = s'_7$. По табл. 3 находим $\Phi''^{-1}(P_0) = s''_5$, $\Phi'^{-1}(P_7) = s'_2$. Таким образом, для множества S''_3 имеем $0 = s''_5$, $1 = s''_2$. Высказывание, выражающее ложь, назовем *противоречием*. Высказывание, выражающее истину, назовем *тавтологией*.

3. Предикат равенства идей

Рассмотрим *предикат равенства* $\mathsf{D}_k(P, Q)$ *предикатов* P и Q, заданный на декартовом квадрате множества M_k всех одноместных k-ичных предикатов первого порядка. Он определяется равенством [1, с. 92]:

$$\mathsf{D}_k(P, Q) = \forall x (P(x) \sim Q(x)), \tag{4}$$

справедливым для любых $P, Q \in M_k$. Здесь выражение $\forall x$ означает квантор общности, который берется по переменной $x \in A_k$. Символ $\sim$ обозначает операцию эквивалентности логических констант [1, с. 91]. Предикат D_k ставит в соответствие равным предикатам P и Q логическую константу 1, неравным – 0.

В табл. 4 в виде примера приведен предикат равенства предикатов $\mathsf{D}_3(P, Q)$, заданный на декартовом квадрате множества $M_3 = \{P_0, P_1, \ldots, P_7\}$ всех троичных одноместных предикатов первого порядка.

Уравнение $\mathsf{D}_k(P, Q) = 1$ задает *отношение равенства* $P = Q$ *предикатов* $P, Q \in M_k$. Отношение равенства предикатов можно рассматривать как диагональное отношение, заданное на декартовом квадрате множества M_k, то есть как множество всех пар вида $(P,\ P)$, где $P \in M_k$. В нашем примере отношением равенства предикатов служит множество $\{(P_0,\ P_0),\ (P_1,\ P_1),...,\ (P_7,\ P_7)\}$. Уравнение $\mathsf{D}_k(P,\ Q)=0$ задает *отношение неравенства* $P \neq Q$ *предикатов* P и Q. Отношение неравенства предикатов можно рассматривать как антидиагональное отношение [9, с. 18], заданное на декартовом множестве M_k.

Таблица 4

P \ Q	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0	1	0	0	0	0	0	0	0
P_1	0	1	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	1	0	0	0	0	0
P_3	0	0	0	1	0	0	0	0
P_4	0	0	0	0	1	0	0	0
P_5	0	0	0	0	0	1	0	0
P_6	0	0	0	0	0	0	1	0
P_7	0	0	0	0	0	0	0	1

$\mathsf{D}_k(P,\ Q)$

Введем на множестве $S_k \times S_k$ *предикат равенства идей* D_k, определяя его для любых $x,\ y \in S_k$ следующим образом:

$$D_k(x,\ y) = \mathsf{D}_k(\Phi(x),\ \Phi(y)). \quad (5)$$

Здесь Φ – биекция, отображающая множество S_k на множество M_k. Предикат $D_k(x,\ y)$ отображает множество $S_k \times S_k$ на множество Σ. Отправляясь от определения (5) и используя отношения равенства и неравенства предикатов, предикат D_k можем представить в виде

$$D_k(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } \Phi(x) \neq \Phi(y), \\ 1, \text{ если } \Phi(x) = \Phi(y). \end{cases} \quad (6)$$

Под символами 0 и 1 понимаются логические константы. Очевидно, что при любом выборе биекции Φ зависимости (5) и (6) задают один и тот же предикат D_k. Для примера таблицами 5 и 6 заданы предикаты равенства идей D'_3 и D''_3, найденные по выражению (6) при $\Phi = \Phi'$ и $\Phi = \Phi''$. Здесь Φ' и Φ'' – биекции, заданные таблицами 2 и 3. Предикат $D'_3(x',\ y')$ определен на множестве $S'_3 \times S'_3$, а предикат $D''_3(x'',\ y'')$ – на множестве $S''_3 \times S''_3$.

Отношение равенства $x = y$ *идей* x и y определяем следующим образом: $x = y$ в том и только в том случае, если $\Phi(x) = \Phi(y)$. Можно сказать и иначе: отношение $x = y$ задается уравнением $D_k(x,\ y) = 1$. *Отношение неравенства идей* $x \neq y$ имеет место в том и только в том случае, когда $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Иными словами, отношение $x \neq y$ задается уравнением $D_k(x,\ y) = 0$. Таким образом, для любых $x,\ y \in S_k$ можно записать:

$$D_k(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \neq y, \\ 1, \text{ если } x = y. \end{cases} \quad (7)$$

Предикатам D'_3 и D''_3, рассмотренным в ранее приведенном примере, соответствуют разные отношения равенства идей

$$\{(s'_0,\ s'_0),\ (s'_1,\ s'_1),...,\ (s'_7,\ s'_7)\} \text{ и }$$

$$\{(s''_0,\ s''_0),\ (s''_1,\ s''_1),...,\ (s''_7,\ s''_7)\},$$

поскольку эти предикаты заданы на различных множествах $S'_k \times S'_k$ и $S''_k \times S''_k$.

Рассмотрим две модели [8, с. 47] $\langle S_k,\ D_k \rangle$ и $\langle M_k,\ D_k \rangle$. Первая из них представляет собой множество S_k вместе с заданным на его декартовом квадрате предикатом D_k, другая – множеством M_k вместе с заданным на его декартовом квадрате предикатом D_k. Равенство (5) означает, что модели $\langle S_k,\ \mathsf{D}_k \rangle$ и $\langle M_k,\ \mathsf{D}_k \rangle$ изоморфны [8, с. 49] друг другу.

Таблица 5

x' \ y'	s'_0	s'_1	s'_2	s'_3	s'_4	s'_5	s'_6	s'_7
s'_0	1	0	0	0	0	0	0	0
s'_1	0	1	0	0	0	0	0	0
s'_2	0	0	1	0	0	0	0	0
s'_3	0	0	0	1	0	0	0	0
s'_4	0	0	0	0	1	0	0	0
s'_5	0	0	0	0	0	1	0	0
s'_6	0	0	0	0	0	0	1	0
s'_7	0	0	0	0	0	0	0	1

$\mathsf{D}'_3(x',\ y')$

Таблица 6

x'' \ y''	s''_0	s''_1	s''_2	s''_3	s''_4	s''_5	s''_6	s''_7
s''_0	1	0	0	0	0	0	0	0
s''_1	0	1	0	0	0	0	0	0
s''_2	0	0	1	0	0	0	0	0
s''_3	0	0	0	1	0	0	0	0
s''_4	0	0	0	0	1	0	0	0
s''_5	0	0	0	0	0	1	0	0
s''_6	0	0	0	0	0	0	1	0
s''_7	0	0	0	0	0	0	0	1

$\mathsf{D}''_3(x'',\ y'')$

Отношение изоморфизма моделей есть эквивалентность [9, с. 54], поэтому любые две модели, изоморфные третьей, изоморфны друг другу. Возьмем модели $\langle S'_k,\ D'_k \rangle$ и $\langle S''_k, D''_k \rangle$. Обе они изоморфны модели $\langle M_k,\ \mathsf{D}_k \rangle$, следовательно, изоморфны друг другу.

Отсюда вытекает существование биекции $\Omega\colon S'_k \to S''_k$, для которой при любых $x,\ y \in S'_k$ имеет место равенство

$$D'_k(x,\ y)=D''_k(\Omega(x),\ \Omega(y)). \qquad (8)$$

Выражение (8) означает, что в абстрактном смысле предикаты равенства идей, а следовательно и отношения равенства идей, фигурирующие в любых алгебрах идей одной и той же размерности, неотличимы друг от друга. Несущественное с математической точки зрения различие заключается лишь в конкретном способе обозначения элементов множества S'_k и множества S''_k носителей этих алгебр. Если заменить имена элементов множества S'_k именами элементов множества S''_k с помощью биекции Ω, то предикат равенства идей D'_k, заданный на множестве $S'_k \times S''_k$ превратится в предикат равенства идей D''_k, заданный на множестве $S''_k \times S''_k$. В рассмотренном выше примере предикат D'_3 переводится в предикат D'_3 при помощи биекции Ω, указанной в табл. 7. Биекция Ω выражается через биекции Φ' и Φ'', введенные ранее, следующим образом: $\Omega(x)=\Phi''^{-1}(\Phi'(x))$.

Таблица 7

x	s'_0	s'_1	s'_2	s'_3	s'_4	s'_5	s'_6	s'_7
$\Omega(x)$	s''_0	s''_1	s''_2	s''_3	s''_4	s''_5	s''_6	s''_7

Переходим к *психологической интерпретации предиката равенства идей.* Предикат равенства $D_k(x,\ y)$ идей x и y испытуемым практически реализуется в серии опытов. Каждый опыт состоит в том, что исследователь предлагает испытуемому две мысли $x=a$ и $y=b$, которые предъявляются в определенном порядке, так что испытуемый всегда знает, какая из них первая, а какая – вторая. Исследователь дает испытуемому специальное *задание:* сравнить предъявленные ему мысли и установить, равны они или нет. В случае полного совпадения мыслей a и b, то есть при их идентичности, испытуемый реагирует ответом 1 в виде некоторого физического сигнала (неважно какого), доступного внешнему наблюдению. Это может быть, например, звуковой ответ “да”, утвердительный кивок головы, высказывание “Мысль a совпадает с мыслью b”. Если предъявленные мысли хоть в чем-то различаются, то испытуемый должен реагировать на них ответом 0. Он произносит слово “нет”, делает отрицательное движение головой, записывает высказывание “Мысль a не совпадает с мыслью b” и тому подобное.

Опыт показывает, что испытуемый признаёт две мысли равными во всех тех и только тех случаях, когда выражающие эти мысли высказывания логически *равносильны.* Например мысли, выраженные высказываниями “Идет дождь, и светит солнце” и “Светит солнце, и идет дождь”, равны, идентичны друг другу. Вместе с тем, из первого высказывания логически следует второе, а из второго – первое. Таким образом, эти высказывания логически равносильны. Встречаются, правда, случаи, когда два высказывания с точки зрения исследователя являются логически равносильными, а испытуемый не может установить равенство мыслей, предъявленных этими высказываниями. Так, для испытуемого может быть непосредственно неочевидной логическая равносильность двух достаточно сложных математических утверждений. Неочевидность равенства мыслей может сохраниться даже после того, как испытуемый изучил доказательство логической равносильности соответствующих высказываний.

Итак, наличие доказательства равносильности двух высказываний еще не означает равенства соответствующих мыслей для данного испытуемого. Заключение о равенстве мыслей в конечном счете основывается на ясном и несокрушимом непосредственном свидетельстве сознания испытуемого, удостоверяющего идентичность двух мыслей. Доказательство логической равносильности соответствующих высказываний, конечно, необходимы, но оно может оказаться недостаточным, если испытуемый неспособен его осмыслить и усвоить в совершенстве. Математик, владеющий своим предметом непосредственно, без каких бы то ни было доказательств, “чувствует” логическую равносильность даже самых сложных из относящихся к его компетенции математических утверждений. Мы полагаем, что неспособность испытуемого установить идентичность равных (с точки зрения исследователя) мыслей свидетельствует не о неравенстве мыслей, а лишь о том, что эти мысли (по крайней мере, одна из них) не сформировались в его уме достаточно ясно и четко. Иными словами, испытуемый в полной мере не владеет этими мыслями.

Определяя алгебру идей формально, мы сначала ввели множество всех идей S_k и лишь после этого задали на нем предикат равенства $D_k(x,\ y)$ для любых идей $x,\ y \in S_k$. При содержательном же введении *алгебры мыслей* (то есть такой алгебры идей, у которой в роли идей выступают мысли человека) приходится делать наоборот: сначала ввести предикат равенства мыслей, а затем уже с его помощью – множество всех мыслей. Исследователь не имеет непосредственного доступа к мыслям испытуемого. Поэтому он вынужден отыскивать множество мыслей испытуемого, опираясь исключительно на результаты наблюдения поведения испытуемого.

Исследователь может поступить следующим образом. Он предъявляет испытуемому различные пары физических сигналов, которые с точки зрения исследователя могут выполнять роль имен мыслей, и предлагает испытуемому установить, равны или нет соответствующие этим сигналам мысли. При этом исследователь, во-первых, должен выяснить, способен ли испытуемый вообще реагировать на те или иные пары сигналов. Если испытуемый затрудняется это сделать в ответ на предъявление какой-то конкретной пары сигналов, то исследователь должен прийти к заключению, что, по крайней мере, одному из предъявленных сигналов не соответствует никакой мысли. Если исследователь не может определить, к какому из двух сигналов, предъявленных испытуемому, это относится, то ему следует до выяснения этого вопроса воздержаться от включения в множество S_k обоих сигналов.

Если же оказывается, что испытуемый на некоторую пару входных сигналов всегда реагирует вполне определенным ответом, то исследователь должен установить, будет ли реакция испытуемого на эту пару сигналов однозначной. С этой целью исследователь случайным образом, вперемежку между другими парами сигналов, многократно предъявляет одну и ту же интересующую его пару сигналов. Если же на эту пару сигналов испытуемый один раз реагирует ответом 0, а другой раз – ответом 1, то сигналы такой пары также не следует включать в состав множества S_k в качестве имен мыслей. Наблюдаемая в опытах нестабильность реакции испытуемого свидетельствует о том, что при различных предъявлениях испытуемый воспринимает одни и те же мысли то как различные, то как одинаковые. При таком положении дела нельзя считать, что обе предъявленные исследователем мысли воспринимаются испытуемым четко и ясно.

Все физические сигналы, которые удовлетворяют двум указанным требованиям, исследователь включает в состав множества S_k. Итак, используя предикат равенства как инструмент, исследователь с его помощью формирует множество всех мыслей для данного испытуемого. Нужно уточнить, что на самом деле исследователь собирает в множество S_k не мысли испытуемого, а имена этих мыслей. Если для какой-то мысли было использовано в опытах несколько различных имен, то исследователь отбирает лишь одно из них (безразлично какое). Если исследователь ставит перед собой какие-либо частные задачи, то он может ограничиться выявлением не всех мыслей: испытуемого, а лишь некоторой интересующей его части мыслей, например мыслей математического характера.

При практическом использовании описанного в предыдущем пункте способа формирования множества всех мыслей сразу же обнаруживается, что в это множество попадают не только мысли в узком смысле этого слова, но и многие другие *субъективные состояния* испытуемого. К ним относятся ощущения, восприятия, представления, понятия, эмоции, чувства, желания. В самом деле, человек легко отличает зрительные ощущения от слуховых, эмоции от понятий, представления от восприятий, отличает друг от друга всевозможные цвета и так далее. Поэтому множество идей, которые испытуемый способен отождествлять и различать, оказывается гораздо шире, чем это нами молчаливо предполагалось вначале.

Как отнестись к этому факту? Следует ли включать в множество всех идей лишь то, что выражается высказываниями, или же все субъективные состояния, которые испытуемый способен отождествлять и различать? Иными словами, нужно ли с самого начала ограничиться входными сигналами только в виде высказываний и не рассматривать другие виды воздействий на человека, такие как зрительные картины, музыка и тому подобное? А может быть, следует включить в множество S_k все субъективные состояния испытуемого, которые он способен четко дифференцировать друг от друга? Ведь субъективные состояния человека – это такие же идеальные объекты, как и наши мысли, их все Платон причислил к разряду идей. Если же оказывается, что они и не являются мыслями в прямом смысле этого слова, то все же субъективные состояния будут чем-то родственны мыслям. Во всяком случае ясно, что все субъективные состояния человека принимают участие в его интеллектуальной деятельности, по крайней мере, существенно влияют па нее.

В настоящее время, когда теория интеллекта находится еще в начальной стадии развития, нет возможности обоснованно ответить на поставленные вопросы. Пока не ясно, как конкретно те или иные субъективные состояния человека связаны с мыслями, какова степень родства с ними. Очевидно, что и ощущения, и эмоции, и понятия в какой-то мере могут быть выражены в форме высказываний. Так, например, фраза “Я вижу зеленую лампу” дает характеристику (правда, весьма неполную) переживаемых человеком ощущений, фраза “Мне скучно и грустно” в какой-то степени характеризует эмоциональное состояние человека, фраза “Идея – высшая ступень развития понятия, присущая только человеческому мозгу и характеризующая отношение людей к окружающему их объективному миру”, взятая нами из словаря, описывает некоторые стороны понятия идеи.

Если бы удалось показать, что все субъективные состояния человека допускают полное и точное описание посредством высказываний, то это послужило бы веским доводом в пользу включения их в множество S_k. Но может ли человек исчерпывающим образом описать словами увиденное им бушующее море или дать полную характеристику своего душевного состояния в минуты тревоги? Вряд ли. Но, с другой стороны, все ли, что человек видит и чувствует, он помнит настолько долго, чтобы иметь возможность успеть перевести на язык высказываний? Быть может, многое из увиденного и пережитого почти сразу исчезает из памяти, так что человек не может выразить высказываниями лишь те субъективные состояния, которых фактически уже нет? Не исключено и то, что человек не располагает достаточно развитым языком для описания любых субъективных состояний. Например не так-то просто выразить словами любые различные оттенки цвета, когда их насчитывают до 10 млн.

Ответы на все эти вопросы, как нам представляется, придут со временем в результате систематического и планомерного развития теории интеллекта. Пока же мы будем чисто условно различать две задачи теории интеллекта – *узкую и расширенную*. При постановке узкой задачи под элементами множества S_k будем понимать лишь те субъективные состояния, которые можно выразить в форме высказываний. При таком подходе мы существенно сужаем сферу действия теории интеллекта. Но вместе с тем мы будем стараться не упускать из виду и расширенную задачу, получаемую в случае включения в множество S_k каких-нибудь других видов субъективных состояний человека. Одновременное рассмотрение в одной задаче всех субъективных состояний представляется нам преждевременным, ибо это привело бы к необъятной области исследований и, как следствие, к неоправданному распылению ограниченных сил на огромное число объектов. Это могло бы сильно замедлить темпы разработки теории интеллекта на главном направлении, каковым мы считаем формальное описание моделей, заключенных в высказываниях, и операций над ними.

Произведем некоторые уточнения введенной терминологии. *Идеями* будем называть, во-первых, *математические объекты* – элементы множества S_k, во-вторых, *психологические объекты* – любые субъективные состояния человека. Во втором смысле термин *идея* будем употреблять лишь при расширенной постановке задач теории интеллекта. *Мыслями* будем называть психологические объекты – все те субъективные состояния человека, которые можно выразить в форме высказываний. Сигналы, предъявляемые испытуемому во время проведения опытов, будем называть *физическими стимулами*. Будем говорить, что физические стимулы служат *прообразами идей,* а идеи являются *образами физических стимулов*. При постановке узкой задачи в роли физических стимулов будут выступать только высказывания, а в роли их образов – только мысли. При постановке расширенной задачи, стимулами могут быть любые *физические объекты*.

Наконец, обсудим ту роль, которую играет предикат равенства идей в механизме интеллекта. Роль эта нам представляется фундаментальной и весьма значительной. Тот факт, что человек может удостовериться в равенстве каких-либо двух своих идей, означает, что он имеет доступ к мельчайшим деталям этих идей, способен сравнивать эти детали друг с другом и устанавливать их идентичность. Таким образом, эффективное действие предиката равенства предполагает полный анализ структуры идей. Никакие другие операции над идеями, сколь бы сложными они ни были, не смогут проникнуть в структуру идей глубже, чем это способен сделать предикат равенства идей.

Возможность сравнивать между собой все идеи человека и устанавливать их равенство и неравенство лежит, на наш взгляд, в основании механизма, обеспечивающего единство человеческой личности, единство того, что называют нашим "Я". Представим, что множество всех идей какой-то личности распалось на две не связанные друг с другом части, и теперь независимо на каждой из них действует свой собственный предикат равенства. Ясно, что единство этих двух частей нарушится, и произойдет то, что в психиатрии называют расщеплением или раздвоением личности. Две различные человеческие личности разделены психологическим барьером именно вследствие того, что каждая из них имеет непосредственный доступ только к своим собственным субъективным состояниям, их идеи не объединяет единый предикат равенства. Допустим, что такой, общий для двух личностей, предикат равенства идей каким-то образом удалось практически ввести. Наличие такого предиката явилось бы предпосылкой к слиянию двух личностей в одну. Можно ожидать, что единая в двух телах личность смотрела бы на мир "в четыре глаза", имела бы единую волю и общие мысли.

4. Свойства предиката равенства идей

Рассмотрим свойства предиката D_k. Предикат D_k подчиняется *закону рефлексивности:* для любого $P \in M_k$ $\mathsf{D}_k(P,\ P) = 1$. Действительно, согласно определению (4), для каждого предиката $P \in M_k$ имеем: $\mathsf{D}_k(P, P) = \forall x\,(P(x) \sim P(x)) = \forall x\,(1) = 1$. Предикат D_k подчиняется также закону, который называют [7, с. 46] *законом подстановочности*: для любых $P, Q \in M_k$ если $\mathsf{R}(P) = 1$ и $\mathsf{D}_k(P,\ Q) = 1$, то $\mathsf{R}(Q) = 1$. Здесь $\mathsf{R}(P)$ – произвольно выбранный предикат, заданный на множестве предикатов M_k. Доказательство закона подстановочности: если $P, Q \in M_k$ таковы, что $P = Q$, то

$$\mathsf{R}(P) \wedge \mathsf{D}_k(P, Q) \supset \mathsf{R}(Q) = \mathsf{R}(P) \wedge \mathsf{D}_k(P, P) \supset$$
$$\supset \mathsf{R}(P) = \mathsf{R}(P) \cdot 1 \supset \mathsf{R}(P) = \mathsf{R}(P) \supset \mathsf{R}(P) = 1.$$

Если же $P \neq Q$, то

$$\mathsf{R}(P) \wedge \mathsf{D}_k(P, Q) \supset \mathsf{R}(Q) = \mathsf{R}(P) \wedge \forall x(P(x) \sim$$
$$\sim Q(x)) \supset \mathsf{R}(Q) = \mathsf{R}(P) \cdot 0 \supset \mathsf{R}(Q) = 0 \supset \mathsf{R}(Q) = 1.$$

Предикат D_k удовлетворяет *закону симметричности:* для любых $P,\ \ Q \in M_k$, если $\mathsf{D}_k(P,\ Q) = 1$, то $\mathsf{D}_k(Q,\ P) = 1$. Действительно,

$$\mathsf{D}_k(P,Q) \supset \mathsf{D}_k(Q,P) = \forall x(P(x) \sim Q(x)) \supset \forall x(Q(x) \sim \sim P(x)) = \forall x(P(x) \sim Q(x)) \supset \forall x(P(x) \sim Q(x)) = 1.$$

Предикат D_k подчиняется *закону транзитивности*: для любых $P, Q, R \in M_k$ если $\mathsf{D}_k(P,\ Q) = \mathsf{D}_k(Q,\ R) = 1$, то $\mathsf{D}_k(P,\ Q) = 1$. В самом деле, для любых $P, Q, R \in M_k$ по закону подстановочности находим: если $\mathsf{R}(Q) = \mathsf{D}_k(P,\ Q) = 1$ и $\mathsf{D}_k(Q,\ R) = 1$, то $\mathsf{R}(R) = \mathsf{D}_k(P,\ R) = 1$.

Предикат равенства идей D_k подчиняется *закону рефлексивности*: для любого $x \in S_k$ имеет место равенство $D_k(x,x) = 1$. Действительно, согласно определению (5), имеем: $D_k(x,x) = \mathsf{D}_k(\Phi(x),\Phi(x)) = 1$. Предикат D_k подчиняется также *закону подстановочности*: для любого предиката R, заданного на множестве S_k, и для любых $x, y \in S_k$, если $R(x) = 1$ и $D_k(x,y) = 1$, то $R(y) = 1$. В самом деле, пусть $P = \Phi(x)$, $Q = \Phi(y)$, $\mathsf{R}(P) = R(\Phi^{-1}(P))$, $\mathsf{D}_k(P,Q) = D_k(\Phi^{-1}(P),\Phi^{-1}(Q))$. Тогда по закону подстановочности предиката равенства предикатов имеем: $\mathsf{R}(P) = 1$ и $\mathsf{D}_k(P,Q) = 1$ влечет $\mathsf{R}(Q) = 1$. Иными словами, $R(\Phi^{-1}(P)) = 1$ и $D_k(\Phi^{-1}(P),\ \Phi^{-1}(Q)) = 1$ влечет $R(\Phi^{-1}(Q)) = 1$. Учитывая, что $\Phi^{-1}(P)) = x$, $\Phi^{-1}(Q)) = y$, приходим к закону подстановочности для предиката равенства идей. Аналогично выводятся для предиката D_k *закон симметричности*: для любых $x, y \in S_k$, если $D_k(x,y) = 1$, то $D_k(y,x) = 1$, и *закон транзитивности*: для любых $x, y, z \in S_k$, если $D_k(x,y) = D_k(y,z) = 1$, то $D_k(x,z) = 1$.

В формальной записи законы рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности имеют вид следующих логических уравнений:

$$\forall x D_k(x,\ x) = 1, \tag{9}$$

$$\forall x \forall y\,(D_k(x,\ y) \supset D_k(y,\ x)) = 1, \tag{10}$$

$$\forall x \forall y \forall z\,(D_k(x,\ y) \wedge D_k(y,\ z) \supset D_k(x,\ z)) = 1, \tag{11}$$

$$\forall R_k \forall x \forall y\,(R_k(x) \wedge D_k(x,\ y) \supset R_k(y)) = 1. \tag{12}$$

Здесь переменные x, y, z заданы на множестве всех идей S_k; переменная R_k задана на множестве всех предикатов, которые определены на множестве S_k. Символом D_k обозначен переменный предикат, связываемый логическими уравнениями (9)-(12). Символы $\wedge$ и $\supset$ означают операции конъюнкции и импликации логических констант.

Выше мы определили предикат равенства идей D_k и вывели его четыре свойства, отправляясь от предиката равенства предикатов (4) и пользуясь выражением (5). Однако хотелось бы построить теорию равенства идей на основаниях, не зависящих от понятия конечного предиката, которое в нашем изложении выполняет лишь вспомогательную роль прототипа понятия идеи. Как доказывается в приведенной ниже теореме, это можно сделать, опираясь на свойства (9)-(12) предиката равенства идей как на аксиомы. Ценность теоремы состоит в том, что она дает аксиоматическое определение предиката равенства идей.

Теорема 1. *Для того чтобы предикат D_k, заданный на множестве $S_k \times S_k$, был представим в форме* (5), *необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности.*

Доказательство. Выше мы показали, что предикат D_k, определенный выражением (6), удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности. Таким образом, необходимость уже доказана. Доказываем достаточность. Пусть на $S_k \times S_k$ задан предикат D_k, удовлетворяющий условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности. Для каждого $x \in S_k$ образуем множество T_x всех y таких, что $D_k(x,\ y) = 1$. В силу рефлексивности предиката D_k имеем $D_k(x) = 1$, поэтому $x \in T_x$. Таким образом, множество T_x содержит в своем составе хотя бы один элемент x.

Вместе с тем, других элементов множество T_x не имеет. В самом деле, предположим противное: для некоторого $x \in S_k$ существуют не совпадающие друг с другом элементы y_1 и y_2 такие, что $y_1,\ y_2 \in T_x$. Это означает, что $D_k(x,\ y_1) = 1$ и $D_k(x,\ y_1) = 1$. Из предпоследнего равенства по свойству симметричности предиката D_k получаем $D_k(\,y_1, x) = 1$. Из двух последних равенств по свойству транзитивности предиката D_k выводим $D_k(\,y_1, y_2) = 1$. Выберем предикат R_k, фигурирующий в условии подстановочности для предиката D_k, с таким расчетом, чтобы $R_k(\,y_1) = 1$, но $R_k(\,y_2) = 0$. Поскольку предикат R_k можно взять произвольным, то такой выбор всегда возможен. По свойству подстановочности предиката D_k из равенства $R_k(\,y_1) = 1$ и $D_k(\,y_1, y_2) = 1$ выводим $R_k(\,y_2) = 1$. Получили противоречие. Итак, мы доказали, что в множестве T_x нет других элементов, кроме элемента x, то есть что $T_x = \{x\}$.

Докажем теперь, что равенство (5) выполняется при любых $x, y \in S_k$. Рассмотрим случай, когда x и y таковы, что $D_k(x,y) = 1$. Это значит, что $y_2 \in T_x$, $y = \{x\}$, $x = y$, $\Phi(x) = \Phi(y)$, $\mathsf{D}_k(\Phi(x),\Phi(y)) = 1$. Когда же x и y таковы, что $D_k(x,y) = 0$, то $y \notin T_x$ $y \neq \{x\}$, $x \neq y$, $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, $\mathsf{D}_k(\Phi(x),\Phi(y)) = 0$. Теорема доказана.

Выводы

Проанализированы перспективы науки и техники в области создания систем искусственного интеллекта и обоснована необходимость развития теории интеллекта и соответствующего математического аппарата. В качестве последнего предложена алгебра конечных предикатов. Рассмотрен ряд задач, решаемых с помощью предложенного подхода.

Для моделирования интеллекта человека и формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности на языке алгебры конечных предикатов необходим абстрактный эквивалент этой алгебры, названный алгеброй идей. В роли прототипа алгебры идей в работе использована алгебра одноместных k-ичных предикатов первого порядка. Разработана аксиоматика алгебры идей.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко.* – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984. – 144 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Технические средства [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко.* – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. – 136 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко.* – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. – 59 с. 4. *Нильсон Н.* Принципы искусственного интеллекта [Текст] / *Н. Нильсон* // М.: Радио и связь, 1985. – 210 с. 5. *Гильберт Д.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики [Текст] / *Д. Гильберт, П. Бернайс.* – М.: Наука, 1979. – 619 с. 6. *Гильберт Д.* Основания геометрии [Текст] / *Д. Гильберт.* – М.; Л.: Гостехиздат. 1948. – 394 с. 7. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и математику алгебры. – М.: Наука, 1967. – 338 с. 8. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 476 с. 9. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971. – 190 с.

Поступила в редколлегию 03.03.2010

УДК 519.7

Модель рівності ідей / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 3–15.

На основі алгебри скінченних предикатів запропоновано абстрактний аксіоматичний підхід до проблеми побудови математичного апарату для формалізації та ефективного моделювання систем штучного інтелекту.

Табл. 7. Бібліогр.: 9 найм.

UDC 519.7

Ideas equality model / Bondarenko M.F., Shabanov-Kushnarenko S.Yu., Shabanov-Kushnarenko Yu.P. // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 3–15.

The abstract axiomatic approach to mathematical apparatus construction problem for systems of an artificial intellect formalisation and effective modelling on the basis of final predicates algebra is offered.

Tab. 7. Ref.: 9 items.

УДК 519.7

АЛГЕБРА ИДЕЙ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Рассмотрены интерпретации аксиом абстрактного эквивалента алгебры конечных предикатов - алгебры идей. Получено аксиоматическое задание предиката равенства идей, рассмотрены вопросы полноты и однозначности аксиоматики и связанный с ними вопрос изоморфизма моделей.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ РАВЕНСТВА, ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. Здесь рассмотрены интерпретации свойств предиката равенства идей и его аксиоматическое задание; вопросы изоморфизма моделей равенства идей и экономности системы аксиом предиката равенства идей. Предложено модифицированное понятие модели, которое больше соответствует потребности теории интеллекта, чем классическое алгебраическое понятие модели.

1. Интерпретации свойств предиката равенства идей

Теорема 1 [1] позволяет задать *предикат равенства идей* аксиоматически в виде следующего определения: любой предикат D_k, заданный на $S_k \times S_k$ и подчиняющийся законам рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности, есть предикат равенства идей. Множество S_k вместе с заданным на его декартовом квадрате предикатом равенства идей D_k, то есть пару $\langle S_k, D_k \rangle$, назовем *моделью равенства идей*.

Переходим к психологической интерпретации свойств предиката равенства идей. Сначала рассмотрим *психологическую интерпретацию закона симметричности* (10) [1]. В содержательной формулировке закон *симметричности* гласит: если испытуемый признал мысли x и y идентичными, то он обязательно признает идентичными также и мысли y и x. Факты, которые бы опровергали закон симметричности, не удается обнаружить. Из закона симметричности следует, что области задания для переменных x и y предиката $D_k(x, \ y)$ совпадают, а это означает, что множество T, на котором определен предикат D_k, можно представить, причем единственным образом, в виде декартова квадрата некоторого множества Q, то есть $T = Q \times Q$. Множество Q мы примем в роли *носителя алгебры идей* S_k.

Несколько сложнее будет обстоять дело с выполнением закона симметричности, если мы захотим распространить понятие идеи не только на мысли, но и на ощущения. Известны такие опыты из области психофизики ощущений, которые, казалось бы, опровергают закон симметричности для предиката D_k. Опишем один из таких опытов [2, с. 232]. Испытуемому предъявляются два коротких звука, имеющих специально подобранные спектры и следующих друг за другом с секундным интервалом. Предлагается установить, равны ли они по громкости. Для тех случаев, когда громкости оказываются одинаковыми, звуки меняют местами и снова предъявляют испытуемому. Оказывается, что теперь первый звук слышится громче, чем второй. Описанный эффект, однако, легко объясняется маскирующим действием первого звука на второй, снижающим слышимую громкость последнего. Здесь мы имеем неконтролируемый побочный фактор, нарушающий условие повторяемости. Громкость одного и того же физического звука меняется в зависимости от наличия или отсутствия предшествующего звука. К закону симметричности это не имеет никакого отношения.

Переходим к *психологической интерпретации закона рефлексивности* (9) [1]. В содержательной формулировке *закон рефлексивности* гласит: равные мысли должны восприниматься испытуемым как равные. Иными словами, на равные мысли испытуемый всегда должен реагировать положительным ответом. В такой формулировке закон рефлексивности выглядит как довольно бессодержательное утверждение. Действительно, если с самого начала две мысли принимаются равными, то как они после этого могут оказаться неравными? И все же, в законе рефлексивности содержится нечто такое, что требует экспериментального подтверждения. Дело в том, что мысли фактически могут быть равными, однако испытуемый недоброкачественно их проанализирует и в результате вместо положительного выработает отрицательный ответ.

Закон рефлексивности, по существу, представляет собой требование корректности проведения эксперимента: при выработке двоичного ответа, сигнализирующего о равенстве или неравенстве мыслей, испытуемый не должен ошибиться. При фактическом равенстве мыслей он обязан отреагировать положительным ответом. Ясно, что из-за невнимательности или по злому умыслу испытуемый это требование вполне может нарушить. Отметим, что закон рефлексивности весьма близок к *закону тождества*, который рассматривается в курсах формальной логики [4, с. 77]. Закон тождества требует, чтобы в процессе рассуждения все понятия оставались равными самим себе, нельзя производить подмены понятий. Закон тождества в формальной логике расценивается как одно из важнейших требований, без выполнения которого интеллектуальная деятельность человека становится невозможной.

Далее рассмотрим *психологическую интерпретацию закона транзитивности* (11) [1]. В содержательной формулировке закон транзитивности гласит: если для некоторого испытуемого мысль x равна мысли y, а мысль y равна мысли z, то мысль x тем же испытуемым должна восприниматься как равная мысли z. В применении к смыслам фраз закон транзитивности выполняется на практике безупречно. Когда люди замечают, что кто-то из них нарушает закон транзитивности, то это неизменно квалифицируется ими как сбой в мыслительной деятельности. В практике математических доказательств встречаются длинные ряды равносильных друг другу высказываний, и при этом всегда оказывается, что первое высказывание в ряду равносильно последнему. Если же это не так, то всегда может быть обнаружена ошибка в доказательстве.

Несколько сложнее обстоит дело с выполнением закона транзитивности в случае с ощущениями. Известен следующий опыт, который обычно приводится для опровержения закона транзитивности. Испытуемому предъявляется световое излучение красного цвета определенной мощности. К красному цвету предлагается подравнять по видимой яркости (светлоте) оранжевый цвет путем регулирования мощности вызывающего его светового излучения. Далее к оранжевому цвету подравнивается по светлоте желтый цвет, а затем то же проделывается с салатным, зеленым, лазурным, голубым, синим, фиолетовым и сиреневым цветами. Наконец, к сиреневому цвету подравнивается по светлоте исходный красный цвет. В итоге оказывается, что мощность исходного светового излучения, как правило, не совпадает с мощностью излучения, полученного в конце процесса подравнивания.

Опровергает ли этот опыт закон транзитивности? Мы полагаем, что нет. Если описанный опыт выполнить многократно с одними и теми же цветами и одной и той же исходной мощностью излучения, то результирующая мощность светового излучения не получается в разных опытах одной и той же, но меняется случайным образом от опыта к опыту. При этом она колеблется вокруг первоначальной мощности излучения, то приближаясь к ней, то удаляясь от нее в сторону увеличения или уменьшения. И чем больше опытов проведено, тем более среднее значение результирующей мощности, вычисленное по всем опытам, будет приближаться к исходной мощности светового излучения. Этот факт можно истолковать таким образом, что светлота световых излучений, предъявляемых испытуемому, не остается стабильной и испытывает небольшие случайные колебания. При движении по длинному ряду цветов эти колебания светлоты накапливаются (опять-таки случайным образом), и в результате появляется заметное различие начальной и конечной светлот. Так что в этом и в любых других подобных опытах нарушается не закон транзитивности, а условие повторяемости.

Нам осталось рассмотреть психологическую интерпретацию закона подстановочности (12) [1]. Но прежде чем сделать это, мы должны предварительно выяснить психологический смысл предиката $R_k(x)$, фигурирующего в формулировке этого закона. Символом $R_k(x)$ обозначен произвольный одноместный предикат, заданный на множестве всех идей S_k. Предикат $R_k(x)$ задает исследователь, а испытуемый реализует его своим поведением. Задать предикат $R_k(x)$ можно в виде фразы, смысл которой заключается в том, что мысль x удовлетворяет специально подобранному условию. Если предъявленная испытуемому мысль x удовлетворяет этому условию, то он должен отреагировать на нее сигналом $R_k(x)=1$, если не удовлетворяет – сигналом $R_k(x)=0$. Например исследователь задает режим поведения испытуемого (то есть реализуемый им предикат $R_k(x)$) фразой «Из высказывания x логически следует высказывание «Идет дождь»». Если после этого исследователь предъявит испытуемому мысль x в форме конкретного высказывания «Идет дождь, и светит солнце», то последний должен дать ответ 1, поскольку из высказывания «Идет дождь, и светит солнце» на самом деле логически следует высказывание «Идет дождь». Если же испытуемому будет предъявлено высказывание «Светит солнце», то он обязан ответить сигналом 0, так как из высказывания «Светит солнце» логически не вытекает высказывание «Идет дождь».

В условии (12) [1] фигурирует произвольный предикат $R_k(x)$, поэтому для исчерпывающей экспериментальной проверки закона подстановочности необходимо, чтобы исследователь имел возможность задать любой желаемый режим поведения испытуемого, иными словами, мог настроить испытуемого на реализацию любого одноместного предиката. Сделать это можно следующим способом. Предположим, что исследователь сообщает испытуемому фразу: «Мысль x логически равносильна мысли a». Здесь x – мысль, предъявляемая исследователем испытуемому после его настройки, a – мысль, указываемая во фразе в форме конкретного высказывания. Например, если мысль a задана высказыванием «Идет дождь», то фраза, посредством которой исследователь настраивает испытуемого, запишется в виде: «Мысль x логически равносильна мысли «Идет дождь». Реализуя своим поведением фразу «Мысль x логически равносильна мысли a», испытуемый будет реагировать ответом 1 на одну-единственную мысль $x = a$, на любую же другую мысль $x \neq a$ он ответит сигналом 0. Таким образом, испытуемый реализует предикат x^a узнавания [4, с. 17] буквы a.

Предположим теперь, что исследователь хочет сформировать фразу, которая задавала бы произвольно выбранный предикат $R_k(x)$. Пусть требуется, чтобы этот предикат обращался в 1 при всех $x \in \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, где $a_1, a_2, ..., a_r$ – произвольно выбранные мысли. Для всех же остальных элементов множества S_k предикат R_k должен обращаться в 0. Такой предикат можно записать в виде формулы [4, с. 88]:

$$R_k(x) = x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee ... \vee x^{a_r}.$$

Его, очевидно, можно задать фразой: «Мысль x логически равносильна мысли a_1 или мысли a_2 ... или мысли a_r». Таким образом, исследователь имеет возможность настроить испытуемого на режим воспроизведения им любого конкретного одноместного предиката, заданного на множестве S_k. Следовательно, имеется возможность экспериментально проверить закон, подстановочности на любом интересующем исследователя предикате $R_k(x)$.

Переходим к *психологической интерпретации, закона подстановочности* (12) [1]. В содержательной формулировке *закон подстановочности* гласит: если какая-нибудь мысль x для некоторого испытуемого обладает свойством R_k, то тем же свойством для этого испытуемого будет обладать и любая мысль y, равная мысли x. Рассмотрим пример, иллюстрирующий содержание закона подстановочности. Предикат $R_k(x)$ задаем условием «Из высказывания x логически следует высказывание «Идет дождь»». В роли x берем смысл высказывания «Идет дождь, и светит солнце», в роли y – смысл высказывания «Светит солнце, и идет дождь». Последние два высказывания логически равносильны, так что $x = y$. Производя подстановку в исходное условие вместо x высказывания «Идет дождь, и светит солнце», получаем тавтологию «Из высказывания «Идет дождь, и светит солнце» логически следует высказывание «Идет дождь»», при этом $R_k(x) = 1$. Заменяя в исходном условии x на y и подставляя вместо y высказывание «Светит солнце, и идет дождь», получаем высказывание «Из высказывания «Светит солнце, и идет дождь» логически следует высказывание «Идет дождь»». В строгом соответствии с требованием закона подстановочности оно также является тавтологией, при этом $R_k(x) = 1$.

Как в повседневной речи, так и особенно в математике люди постоянно пользуются законом подстановочности, и нет никаких свидетельств, чтобы это приводило к каким-либо сбоям в мышлении. Отметим, что закон подстановочности родственен правилу подстановки, которое рассматривается в курсах исчисления высказываний. Это правило формулируют следующим образом: «Пусть А – формула, содержащая букву A. Тогда, если А – истинная формула в исчислении высказываний, то, заменяя в ней букву A всюду, где она входит, произвольной формулой В, мы также получим истинную формулу».

2. Аксиоматическое задание предиката равенства идей

В [1] мы сформулировали четыре свойства предиката равенства идей – рефлексивность, симметричность, транзитивность и подстановочность. Возникает вопрос – *полна* ли эта система свойств, иными словами, определяет ли она характеризуемый ею объект – предикат D_k единственным образом? Оказывается, – да, определяет. Правда, требование единственности предиката D_k нельзя понимать слишком буквально. Дело в том, что мысли испытуемого идеальны, бестелесны, их нельзя собрать в множество S_k. Множество S_k можно образовать только из имен мыслей. А в выборе имен мыслей имеется известный произвол. Так, одну и ту же мысль можно представить в виде различных по виду, но тождественных по смыслу высказываний. Таким образом, в зависимости от выбора способа обозначения одних и тех же мыслей, мы приходим к тому или иному множеству идей S_k. Поэтому и предикаты равенства идей получаются разными.

Однако ясно, что способ обозначения мыслей не имеет существенного значения для характеристики предиката равенства идей. Конечно, мысли должны быть как-то обозначены, но каким именно способом – это несущественно. Поэтому разумнее говорить о единственности задания предиката равенства идей его свойствами лишь с точностью до обозначения мыслей. В математике так понимаемую единственность объекта характеризуют с помощью понятия *изоморфизма моделей.* Любая *модель* представляет собой некоторое множество S_k с заданными на его декартовых степенях одноместными или многоместными предикатами $A_1, A_2, ..., A_t$, которые отображают соответствующую декартову степень множества M на множество Σ. Записывают модель в виде $\langle M, \ \{A_1, A_2, ..., A_t\} \rangle$. В нашем случае в роли множества M выступает множество S_k – носитель алгебры идей, а в роли предикатов $A_1, A_2, ..., A_t$ – единственный двуместный предикат равенства идей D_k. Заметим, что в математике, кроме понятия модели, используют также понятие алгебры [5, с. 47]. Основная задача этого раздела статьи состоит в том, чтобы ввести носитель алгебры идей и отношение равенства на нем.

Пусть S'_k и S''_k – произвольно выбранные множества имен мыслей испытуемого, D'_k и D''_k – предикаты равенства, вводимые на декартовых квадратах этих множеств поведением испытуемого. Модели $\langle S'_k,\ D'_k \rangle$ и $\langle S''_k,\ D''_k \rangle$ будут изоморфны друг другу, если найдется такая биекция Ω: $S'_k \to S''_k$, для которой при любых $x, y \in S'_k$ имеет место равенство (8) [1]. Это равенство означает, что если имена мыслей, содержащиеся в множестве S'_k, заменить с помощью биекции Ω именами тех же мыслей, содержащимися в множестве S''_k, то предикат D''_k совпадет с предикатом $R_k(y)$.

Таким образом, если, при наличии изоморфизма моделей равенства идей, каждый раз производить пересчет реакций испытуемого от произвольной системы обозначений мыслей к некой стандартной системе, то обнаружится, что испытуемый при любом способе обозначения мыслей реализует своим поведением по существу один и тот же предикат равенства идей. Доказанные ранее равенство (8) [1] и теорема 1 [1] свидетельствуют, что если предикаты D'_k и D''_k заданы на декартовых квадратах равномощных множеств S'_k и S''_k и обладают свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности, то биекция Ω, для которой имеет место равенство (8) [1], существует. Следовательно, система свойств (9)-(12) [1] предиката равенства идей действительно полна. Мы видим, что понятие полноты системы аксиом модели (это понятие применимо также и к алгебрам) тесно связано с понятием изоморфизма моделей. Если все равномощные модели данного типа удовлетворяют одной и той же системе аксиом и при этом оказываются изоморфными друг другу, то такая система аксиом по определению считается *полной*. Она полна в том смысле, что ее нельзя пополнить независимыми аксиомами без того, чтобы эта система не стала противоречивой.

В опытах над испытуемым свойства (9)-(12) [1] предиката равенства идей выступают в роли экспериментально проверяемых *постулатов* или *аксиом*. Для того чтобы опыты имели доказательную силу, необходимо, чтобы система всех проверяемых в эксперименте аксиом была полна. Объем фактически выполняемой экспериментальной работы желательно иметь минимальным, поэтому к системе аксиом предъявляется еще и требование *экономности*. Экономность системы аксиом достигается в том случае, если, во-первых, система не содержит лишних аксиом, и, во-вторых, каждая аксиома до предела упрощена. Под *лишними* понимаются такие аксиомы, исключение которых из системы не лишает ее полноты. *Простота аксиомы* понимается в том смысле, что ее экспериментальная проверка требует минимума труда. Сокращение до минимума числа аксиом в системе при сохранении ею свойства полноты достигается исключением из системы *зависимых аксиом*, то есть таких аксиом, которые могут быть логически выведены из совокупности оставшихся аксиом. После исключения всех зависимых аксиом из системы оставшиеся аксиомы становятся *независимыми* друг от друга, и дальнейшее уменьшение числа аксиом в системе становится невозможным. Такую систему аксиом называют *несократимой*.

Являются ли независимыми друг от друга аксиомы рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности? Оказывается, нет. Аксиомы симметричности и транзитивности можно вывести из аксиомы подстановочности. Выводим симметричность.

Если $x = y$, то $D_k(x, y) \supset D_k(y, x) = D_k(x, x) \supset D_k(x, x) = 1$. Если же $x \neq y$, то, полагая $R_k(x) = 1$ и $R_k(y) = 0$ и решая уравнение (12) [1], находим $D_k(x, y) = 0$. Заменяя в уравнении (12) [1] x на y и y на x и полагая $R_k(x) = 0$ и $R_k(y) = 1$, находим $D_k(y, x) = 0$. Следовательно, и в этом случае $D_k(x, y) \supset D_k(y, x) = 0 \supset 0 = 1$. Выводим транзитивность. В роли $R_k(y)$ принимаем предикат $D_k(x, y)$, где x – произвольно фиксированный элемент множества S_k. По закону подстановочности для любых $y, z \in S_k$ из $R_k(y) = D_k(x, y) = 1$ и $D_k(y, z) = 1$ выводим $R_k(z) = D_k(x, z) = 1$. Итак, мы приходим к более экономному аксиоматическому заданию *предиката равенства идей*: любой предикат D_k, заданный на множестве $S_k \times S_k$ и подчиняющийся законам рефлексивности и подстановочности, есть предикат равенства идей.

Независимость аксиом, в общем случае связывающих переменные предикаты $A_1, A_2, ..., A_t$, доказывают *методом интерпретаций*. Суть этого метода состоит в том, что пытаются подобрать такие фиксированные предикаты $A_{11}, A_{21}, ..., A_{t1}$, которые после подстановки $A_1 = A_{11}$, $A_2 = A_{21}, ...,$ $A_t = A_{t1}$ обращают первую аксиому в противоречие, а остальные аксиомы – в тождества. Затем пытаются подобрать предикаты $A_{12}, A_{22}, ..., A_{t2}$, которые после такой же подстановки обращают вторую аксиому а противоречие, а остальные – в тождества, и так далее. Если для каждой аксиомы рассматриваемой системы удается подобрать предикаты с только что указанным свойством, то такая система аксиом будет несократимой. Ни одну из аксиом этой системы невозможно вывести из совокупности остальных.

Докажем методом интерпретаций независимость друг от друга аксиом рефлексивности (9) [1] и подстановочности (12) [1]. Подставляем вместо переменного предиката D_k, фигурирующего в указанных аксиомах, тождественно ложный предикат 0. В результате уравнение (9) [1] обращается в противоречие вида 0=1, а уравнение (12) [1] – в тождество вида 1=1. Подставляя же вместо D_k тождественно истинный предикат 1, находим, что он удовлетворяет условию рефлексивности, но не удовлетворяет условию подстановочности. Чтобы убедиться в последнем, достаточно обратить внимание на то, что всегда существуют такие значения переменных R_k, x и y, для которых $R_k(x)=1$ и $R_k(y)=0$.

Можно ли из аксиом рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности образовать другие полные несократимые системы аксиом, отличные от системы, образованной аксиомами рефлексивности и подстановочности? Оказывается, нельзя. В самом деле, исключим из исходной системы четырех аксиом аксиому рефлексивности. Оставшимся трем аксиомам симметричности (10), транзитивности (11) и подстановочности (12) [1] удовлетворяет, кроме предиката равенства, еще и тождественно ложный предикат 0. Таким образом, любые системы, образованные из оставшихся аксиом, будут неполными. Исключим теперь из исходной системы аксиому подстановочности. Оставшимся трем аксиомам рефлексивности (9), симметричности (10) и транзитивности (11) [1] удовлетворяет, кроме предиката равенства, еще и тождественно истинный предикат 1. Следовательно, любая система, образованная из аксиом рефлексивности, симметричности или транзитивности, будет неполной. Итак, мы видим, что ни одна полная система, образованная из имеющихся в нашем распоряжении четырех аксиом или меньшего их числа, не может обойтись без аксиом рефлексивности и подстановочности. Следовательно, из аксиом исходной системы можно образовать единственную полную несократимую систему аксиом, а именно – систему, состоящую из аксиом рефлексивности и подстановочности.

Нам нужно еще рассмотреть вопрос о существовании предиката D_k, задаваемого аксиоматически. Имеет ли система уравнений (9) и (12) [1] хотя бы одно решение относительно предикатной переменной D_k, иначе говоря, является ли она *непротиворечивой*? Оказывается, что решение для каждого множества S_k существует. В самом деле, возьмем в роли D_k *диагональный предикат*, определяемый следующим образом:

$$D_k(x,y)=\begin{cases}0, \text{ если } x\neq y,\\ 1, \text{ если } x=y,\end{cases}$$

Когда $x=y$, то $D_k(x,y)=1$, следовательно, условие (9) [1] выполняется. Докажем выполнение условия (12) [1]. Пусть $x\neq y$. Тогда $D_k(x,y)=0$, откуда следует, что $R_k(x)\wedge D_k(x,y)\supset R_k(y)=1$. Рассмотрим оставшийся случай, когда $x=y$. Возможны два варианта: либо $R_k(x)=R_k(y)=0$, либо $R_k(x)=R_k(y)=1$. Оба они приводят к равенству $R_k(x)\wedge D_k(x,y)\supset R_k(y)=1$. Таким образом, условие (12) [1] тоже выполняется. Итак, система, состоящая из аксиом рефлексивности и подстановочности, непротиворечива. Докажем единственность решения системы уравнений (9) и (12) [1]. Из условия (9) [1] следует, что при $x=y$ $R_k(y)$. Если же $x\neq y$, то, принимая $R_k(x)=1$ и $R_k(y)=0$, из (12) [1] выводим $1\cdot D_k(x)\supset 0=1$. Решая последнее уравнение, получаем $D_k(x,y)=0$.

Мы рассмотрели четыре свойства предиката равенства идей и установили, что из них можно составить единственную полную и несократимую систему аксиом, образованную из аксиом рефлексивности и подстановочности. Можно ли утверждать, что найденная система аксиом – простейшая из всех возможных? Нет, нельзя. Дело в том, что не исключено существование других свойств предиката равенства, из которых можно было бы образовать более экономные полные системы. В связи с этим возникает задача отыскания новых свойств предиката равенства и образования из них (быть может, с привлечением уже рассматривавшихся ранее аксиом) полных и несократимых систем аксиом. Ниже показывается, что возможности в этом направлении еще не исчерпаны.

Аксиоматическое задание предиката равенства идей можно получить на базе единственного закона, родственного закону подстановочности. Следующее утверждение называют *законом экстенсиональности* [6, с. 196]: для любого предиката R_k, заданного на множестве S_k, и для любых $x,y\in S_k$ равенство $D_k(x,y)=1$ равносильно высказыванию «$R_k(x)$ эквивалентно $R_k(y)$». Закон экстенсиональности можно записать формально в виде следующего логического уравнения:

$$\forall x\forall y(D_k(x,y)\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y)))=1. \qquad (1)$$

Здесь имеется в виду, что переменные x и y заданы на множестве S_k, а квантор общности распространяется на систему всех предикатов y, заданных на множестве S_k.

Докажем, что диагональный предикат является решением уравнения (1). Когда $x=y$, то $D_k(x,y)=1$ и $R_k(x)=R_k(y)$ при любых x,y и R_k. Таким образом, условие (1) выполняется. Когда же $x\neq y$, то x, и всегда найдется такой предикат R_k, для которого $R_k(x)\neq R_k(y)$. Следовательно $\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=0$. Итак, условие (1) снова выполняется. Докажем единственность решения уравнения (1). Если $x=y$, то $\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=1$, и из уравнения (1) находим $D_k(x,y)=1$. Если же $x\neq y$, то $\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=0$, и из (1) выводим $D_k(x,y)=0$.

Итак, *предикат равенства идей* можно аксиоматически определить следующим образом: любой предикат D_k, заданный на $S_k\times S_k$ и подчиняющийся закону экстенсиональности, есть предикат равенства идей. Выражение (1) позволяет дать *прямое определение предиката равенства идей* D_k: для любых $x,y\in S_k$

$$D_k(x, y) = \forall R_k(R_k(x) \sim R_k(y)). \qquad (2)$$

Действительно, если $x, y \in S_k$ таковы, что $D_k(x, y) = 0$, то, решая уравнение (1), находим $R_k(x) \sim R_k(y) = 0$. Если же $D_k(x, y) = 1$, то из (1) выводим $R_k(x) \sim R_k(y) = 1$. Определение предиката D_k с помощью систем аксиом (в частности, – уравнением (1)) будем называть *косвенным*.

Остановимся на *психологической интерпретации закона экстенсиональности* (1). В содержательной формулировке *закон экстенсиональности* гласит: если какие-нибудь мысли x и y для некоторого испытуемого равны, то любое свойство R_k будет либо одновременно выполняться для этих мыслей, либо одновременно не выполняться относительно данного испытуемого, то есть всегда должно иметь место равенство $R_k(x) = R_k(y)$. Рассмотрим пример, иллюстрирующий содержание закона экстенсиональности. Берем высказывания $x =$«Идет дождь, и светит солнце» и $y =$«Светит солнце, и идет дождь». Смыслы этих высказываний совпадают $x = y$. Предикат $R_k(x)$ задаем условием «Из высказывания x логически следует высказывание «Идет дождь»». Рассматриваем высказывание «Из высказывания «Идет дождь, и светит солнце» логически следует высказывание «Идет дождь»» и «Из высказывания «Светит солнце, и идет дождь» логически следует высказывание «Идет дождь»», которые получаются в результате подстановки x и y в исходное условие. Мы видим, что оба высказывания тавтологичны, следовательно, в обоих случаях условие R_k выполняется. Это означает, что $R_k(x) = R_k(y) = 1$. Рассматриваем, далее, высказывания «Из высказывания «Идет дождь» логически следует высказывание «Идет дождь, и светит солнце»» и «Из высказывания «Идет дождь» логически следует высказывание «Светит солнце, и идет дождь»», которые получаются в результате подстановки высказываний «Идет дождь, и светит солнце» и «Светит солнце, и идет дождь» вместо x в условие «Из высказывания «Идет дождь» логически следует высказывание x». Мы видим, что в обоих высказываниях из посылки не следует заключение. Следовательно, в обоих случаях исходное условие не выполняется, то есть $R_k(x) = 0$. Итак, в рассмотренных примерах закон экстенсиональности соблюдается.

Закон экстенсиональности воплощает *принцип Лейбница* [6, с. 194] о тождестве неразличимых: если нельзя указать никакого свойства R_k, по отношению к которому объекты x и y различны, то x и y тождественны. Если x и y – это один и тот же элемент, то любые свойства элементов x и y обязательно совпадут, откуда $R_k(x) = R_k(y)$. С другой стороны, если x и y – различные элементы, то обязательно найдутся свойства, которые их «разделяют», то есть такие, что $R_k(x)$ истинно, когда $R_k(y)$ ложно, и наоборот, так что равенство $R_k(x) = R_k(y)$, будет иметь место не при любом R_k. Нам неизвестны такие литературные данные, в которых бы принцип Лейбница ставился под сомнение. Не дает поводов к сомнению и обыденная практика мышления людей.

Можно ли предложить еще какие-нибудь полные несократимые системы аксиом, задающие предикат равенства идей? На этот вопрос мы пока не можем ответить. Продвижение вперед по этому направлению нам представляется важным. Мы располагаем лишь некоторыми «заготовками» на эту тему. Ниже приводятся четыре свойства предиката равенства, которые еще не удалось использовать в какой-нибудь полной несократимой системе аксиом:

$$\forall x \forall y \forall z (D_k(x,y) \wedge D_k(x,z) \supset D_k(y,z)) = 1, \qquad (3)$$

$$\forall x \forall y \forall z (D_k(x,y) \sim (D_k(x,z) \sim D_k(y,z))) = 1, \qquad (4)$$

$$\forall x \forall y (D_k(x,y) \sim \exists z (D_k(x,z) \wedge D_k(y,z)) = 1, \qquad (5)$$

$$\begin{gathered} \forall x \forall x_1 \forall y \forall y_1 (D_k(x, y_1) \wedge \\ \wedge D_k(x_1, y_1) \wedge D_k(x_1, y) \supset D_k(x, y)) = 1. \end{gathered} \qquad (6)$$

Знак $\exists$ означает квантор существования.

Представляется интересным следующий вопрос: можно ли образовать для предиката равенства полную систему из аксиом, не содержащих предикатную переменную R_k? Если бы это удалось сделать, то появилась бы возможность существенно сократить объем экспериментов, необходимых для обоснования наличия у испытуемого способности различать и отождествлять мысли. Если же будет доказано, что без предикатной переменной в аксиоматике равенства идей обойтись невозможно, то при этом мы кое-что узнаем о тех осложнениях, которые встают на пути исследований механизма интеллекта человека.

Поиск новых свойств предиката равенства идей интересен не только для образования новых полных несократимых систем аксиом. Каждое такое свойство представляет собой постулат, допускающий непосредственную проверку в эксперименте. Каждый же новый постулат выводит исследователя на какие-то неизвестные ранее факты, расширяя его знания о проявлениях человеческого интеллекта. Кроме того, задание математических моделей интеллекта (в данном случае – модели равенства идей) избыточным числом постулатов дает возможность более надежно эти модели экспериментально обосновать.

Заметим, что непротиворечивость, полноту и независимость аксиом предиката равенства идей мы доказывали не вполне строго, поскольку вели рассуждения относительно одной модели $\langle S_k, D_k \rangle$ с фиксированным значением индекса k. На самом же деле имеется не одна модель равенства идей, а целое их семейство. Разным значениям индекса k соответствуют, строго говоря, различные модели равенства идей. Какой же из этих моделей придется воспользоваться на практике при исследовании интеллекта конкретного испытуемого, заранее неизвестно. Поэтому возникает необходимость строить аксиоматическую теорию сразу для всех возможных моделей равенства идей, а это требует обращения к методу математической индукции, без которой мы до сих пор обходились. Этот вопрос по нашему мнению весьма важен, он нуждается в специальной разработке.

Докажем методом математической индукции, что предикат D_k, определяемый законом экстенсиональности (1), существует. Имеется в виду, что предикат D_k задан на декартовом квадрате множества $A_k = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, содержащего k элементов. Здесь A_k играет роль неполного множества идей N. При $k = 1$ предикат D_k определяем равенством $D_1(a_1, a_1)$. Если предикат D_{k-1} уже определен, то предикат D_k определяем следующим образом. В случае, когда $x, y \in A_{k-1}$, принимаем $D_k(x,y) = D_{k-1}(x,y)$ и $D_k(x, a_k) = D_{k-1}(a_k, y) = 0$. В оставшемся случае полагаем $D_k(a_k, a_k) = 1$. Проверяем выполнение закона экстенсиональности (1) для так определенного предиката D_k. Для этого сначала убеждаемся в справедливости этого закона при $k = 1$. В данном случае переменные x и y уравнения (1) принимают единственное значение a_1 из множества $A_1 = \{a_1\}$. В роли значений переменной R_1 могут выступать всего два предиката $R'_1(a_1) = 0$ и $R''_1(a_1) = 1$. Имеем: $D_1(x,y) \sim \forall R_1(R_1(x) \sim R_1(y)) = D_1(a_1, a_1) \sim (R'_1(a_1) \sim R'_1(a_1) \wedge (R_1''(a_1) \sim R''_1(a_1)) = 1 \sim (0 \sim 0)(1 \sim 1) = 1 \sim 1 \bullet 1 = 1$. Таким образом, предикат D_k, удовлетворяющий уравнению (1), при $k = 1$ существует.

Предположим теперь, что закон экстенсиональности выполняется для предиката D_{k-1}. Это означает, что для всех $x, y \in A_{k-1}$ справедливо равенство

$$D_{k-1}(x,y) \sim \forall R_{k-1}(R_{k-1}(x) \sim R_{k-1}(y)) = 1. \quad (7)$$

Фигурирующий в этом равенстве квантор общности распространяется на семейство M_{k-1} всех предикатов, заданных на множестве A_{k-1}. Нам нужно доказать выполнение закона экстенсиональности для предиката D_k, то есть установить, что равенство

$$D_k(x,y) \sim \forall R_k(R_k(x) \sim R_k(y)) = 1 \quad (8)$$

выполняется при любых $x, y \in A_k$. В последнем равенстве квантор общности распространяется на семейство M_k всех предикатов, заданных на множестве A_k.

Каждому предикату $R_{k-1}(x)$, принадлежащему семейству M_k поставим в соответствие предикаты $R'_k(x)$ и $R''_k(x)$ из семейства M_k, определяя их следующим образом:

$$R'_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = a_k, \\ R_{k-1}(x), & \text{если } x \in A_{k-1}, \end{cases} \quad (9)$$

$$R''_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = a_k, \\ R_{k-1}(x), & \text{если } x \in A_{k-1}, \end{cases} \quad (10)$$

Класс всех предикатов вида (9) обозначим символом M'_k, вида (10) символом M''_k. Очевидно, что, вместе взятые, предикаты $R'_k(x)$ и $R''_k(x)$ исчерпывают все предикаты, которые можно задать на множестве A_k, иными словами, $M'_k \cup M''_k = M'_k$. Сказанное позволяет записать следующее равенство, справедливое при любых $x, y \in M_k$:

$$\forall R_k(R_k(x) \sim R_k(y)) = (\bigwedge_{R'_k \in M'_k} (R'_k(x) \sim R'_k(y))) \wedge (\bigwedge_{R''_k \in M''_k} (R''_k(x) \sim R''_k(y))). \quad (11)$$

Доказываем, что при любых $x, y \in A_k$ – равенство (8) справедливо. Если $x = y = a_k$, то $D_k(a_k, a_k) \sim \forall R_k(R_k(a_k) \sim R_k(a_k)) = 1 \sim 1 = 1$, и равенство (8) выполняется. Пусть теперь $x \in A_{k-1}$, а $y = a_k$. Тогда $D_k(x, a_k) = 0$. Кроме того, по (9)-(11) имеем:

$$\forall R_k(R_k(x) \sim R_k(a)) = (\bigwedge_{R'_k \in M'_k} (R'_k(x) \sim R'_k(a_k))) \wedge$$
$$\wedge (\bigwedge_{R''_k \in M''_k} (R''_k(x) \sim R''_k(a_k))) = (\bigwedge_{R_{k-1} \in M_{k-1}} (R_{k-1}(x) \sim 0)) \wedge$$
$$\wedge (\bigwedge_{R_{k-1} \in M_{k-1}} (R_{k-1}(x) \sim 1))) = (\bigwedge_{R_{k-1} \in M_{k-1}} \overline{R_{k-1}(x)}) \wedge$$
$$\wedge (\bigwedge_{R_{k-1} \in M_{k-1}} R_{k-1}(x)) = \bigwedge_{R_{k-1} \in M_{k-1}} \overline{R_{k-1}(x)} R_{k-1}(x) = 0.$$

Таким образом, и в этом случае равенство (8) выполняется.

При $x = a_k$ и $y = M_{k-1}$ справедливость равенства (8) доказывается аналогично. Осталось рассмотреть случай, когда $x, y \in A_{k-1}$. Теперь $D_k(x, y) = D_{k-1}(x, y)$. Вместе с тем

$$\forall R_k(R_k(x) \sim R_k(y)) = (\bigwedge_{R'_k \in M'_k} (R'_k(x) \sim R'_k(y))) \wedge$$
$$(\bigwedge_{R''_k \in M''_k} (R''_k(x) \sim R''_k(y))) = (\bigwedge_{R_{k-1} \in M_{k-1}} (R_{k-1}(x) \sim R_{k-1}(y))) \wedge$$
$$(\bigwedge_{R_{k-1} \in M_{k-1}} (R_{k-1}(x) \sim R_{k-1}(y))) = (\bigwedge_{R_{k-1} \in M_{k-1}} (R_{k-1}(x) \sim R_{k-1}(y)) =$$
$$= \forall R_{k-1}(R_{k-1}(x) \sim R_{k-1}(y)).$$

Итак, условие (8) мы привели к условию (7), которое верно по предположению. Мы доказали для любого k существование предиката $D_k(x, y)$, являющегося решением уравнения (1). Другими словами, доказана непротиворечивость условия экстенсиональности для случая, когда переменные x и y заданы на произвольном конечном множестве A_k.

Докажемдлялюбого k единственностьпредиката D_k, заданного на множестве $A_k \times A_k$ и определяемого условием экстенсиональности (1). При $k = 1$ имеем: $D_1(a_1, a_1) \sim \forall R_1(R_1(a_1) \sim (R_1(a_1)) = D_1(a_1, a_1) \sim 1 = D_1(a_1, a_1)$. Следовательно, согласно условию экстенсиональности, $D_1(a_1,a_1)=1$, и единственность предиката D_1 обеспечена. Предположим теперь, что условие (7) определяет единственный предикат D_{k-1} и выведем отсюда единственность предиката D_k, удовлетворяющего условию (8). Пусть $x=y=a_k$. Тогда условие (8) определяет значение предиката D_k единственным образом. В самом деле, $D_k(a_k,a_k) \sim \forall R_k(R_k(a_k) \sim R_k(a_k)) = D_k(a_k,a_k)$, поэтому $D_k(a_k,a_k)=1$.

Если $x \in A_{k-1}$ и $y=a_k$, то согласно доказанному выше, $D_k(x,a_k) \sim \forall R_k(R_k(a_k) \sim R_k(a_k)) = D_{k-1}(x,a_k) \sim 0 = \overline{D_{k-1}}(x,a_k)$. Следовательно, $\overline{D_{k-1}}(x,a_k)=1$, т.е $D_{k-1}(x,a_k)=0$ и единственность значений предиката D_k обеспечена и в этом случае. Случай, когда $x=A_k$ и $y=A_{k-1}$, рассматривается аналогично. Осталось рассмотреть случай, когда $x,y \in A_{k-1}$. Согласно доказанному ранее, имеем: $D_k(x,y) \sim \forall R_k(R_k(x) \sim (R_k(y)) = D_k(x,y) \sim \forall R_{k-1}(R_{k-1}(x) \sim \sim (R_{k-1}(y))$. Таким образом,

$$D_k(x,y) \sim \forall R_{k-1}(R_{k-1}(x) \sim (R_{k-1}(y))=1. \qquad \text{(e)}$$

Из (a) и (e), пользуясь свойствами симметричности и транзитивности операции эквивалентности логических констант, выводим равенство $D_k(x,y) = D_{k-1}(x,y)$, справедливое для всех $x,y \in M_{k-1}$. Поскольку, в силу индуктивного предположения, предикат $D_{k-1}(x,y)$ единственен, то и значение предиката $D_k(x,y)$ тоже единственное при любом выборе $x,y \in A_{k-1}$. Итак, единственность предиката $D_k(x,y)$, рассматриваемого в роли решения уравнения (1), доказана для любого k.

В заключение заметим, что предикат равенства идей D_k, реализуемый испытуемым в процессе установления им совпадения или различия предъявляемых ему идей, можно было бы изучать чисто эмпирически, не прибегая к формулировке никаких законов (аксиом). Можно было бы изучать не законы интеллектуального поведения испытуемого, а только само поведение. Для этого достаточно было бы просто составить таблицу двоичных ответов испытуемого на всевозможные пары идей. Однако, как показал многовековой опыт развития исследований в физике, такой эмпирический подход менее эффективен, он используется обычно только на начальной стадии работы, чтобы накопить достаточное число исходных фактов, необходимых для последующего построения теории. Так, например, формулировке движения небесных тел в науке предшествовало составление таблиц местонахождения планет на небесной сфере в различные моменты времени. Аксиоматическое представление явлений природы (то есть описание законов, лежащих в их основе) обычно оказывается неизмеримо более экономным, удобным и лучше проникающим в суть изучаемых процессов, чем непосредственное описание самих процессов.

Итак, придерживаясь аксиоматического метода, мы ввели в этой главе множество идей S_k и задали на его декартовом квадрате предикат равенства D_k, отображающий множество $S_k \times S_k$ в множество Σ. С помощью предиката D_k в [1] введено отношение равенства идей, этим сделан первый шаг на пути создания алгебры идей. По каким направлениям развивать алгебру идей дальше? Одной из важнейших задач, на наш взгляд, является аксиоматическое введение *предиката следования* $E_k(x,y)$ *идей* x и y. Предикат $E_k(x,y)$ содержательно определяется следующим образом. Исследователь предъявляет испытуемому две идеи x и y, взятые из множества S_k, и предлагает ему отреагировать положительным ответом, если из идеи x логически следует идея y ($E_k(x,y)=1$), и отрицательным – если не следует ($E_k(x,y)=0$). С помощью предиката $E_k(x,y)$ вводим *отношение следования* $x \Rightarrow y$ и *отношение неследования* $x \not\Rightarrow y$ *идей* x и y. Полагаем: $x \Rightarrow y$, если $E_k(x,y)=1$, и $x \not\Rightarrow y$, если $E_k(x,y)=0$. Имеется в виду, что предикат $E_k(x,y)$ задан на множестве $S_k \times S_k$.

Другая, столь же важная, задача заключается в том, чтобы аксиоматически *определить операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции идей*. На практике отрицание идеи может быть задано с помощью частицы «не». Например, отрицание идеи «Идет дождь» задается высказыванием «Не идет дождь». Конъюнкция идей может быть задана союзом «и», дизъюнкция – союзом «или» (понимаемым в соединительном смысле «или также»). Будем писать: $y=\bar{x}$, если идея y является отрицанием идеи x; $z=x \wedge y$, если идея z является конъюнкцией идей x и y; $z=x \vee y$, если идея z является дизъюнкцией идей x и y. Записанные равенства можно рассматривать как *отношение отрицания идей* x, y и *отношения конъюнкции и дизъюнкции идей* x, y, z.

Отношение отрицания идей экспериментально вводим с помощью *предиката отрицания идей* ОТР(x, y), задаваемого на множестве $S_k \times S_k$. Предикат отрицания идей реализуется поведением испытуемого, который настраивается на выполнение следующего задания: если $y=\bar{x}$, то ОТР(x, y)=1; если же $y \neq \bar{x}$, то ОТР(x, y)=0. Отношение конъюнкции идей вводим с помощью *предиката конъюнкции идей* КОН(x, y, z), задаваемого на множестве $S_k \times S_k \times S_k$. Предикат конъюнкции идей практически воспроизводится испытуемым при следующей его настройке: если $z=x \wedge y$, то КОН(x, y, z)=1; если же $z \neq x \wedge y$, то КОН(x, y, z)=0. Отношение дизъюнкции идей в эксперименте задается *предикатом дизъюнкции идей* ДИЗ(x, y, z), определяемым на множестве $S_k \times S_k \times S_k$. При этом испытуемый должен руководствоваться в своих действиях следующим заданием: если $z=x \vee y$, то при предъявлении идей x, y, z им формируется положительный ответ (ДИЗ(x, y, z)=1);

если же $z \neq x \vee y$, то отрицательный (ДИЗ(x, y, z)=0). Проблема состоит в том, чтобы связать предикаты отрицания, конъюнкции и дизъюнкции идей полной системой аксиом, которую можно было бы затем принять в качестве формального определения операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции идей.

3. Модификация понятия модели

Выше мы рассмотрели модель равенства идей. Эта модель выступает в роли основного результата исследования: она формально описывает способность человека устанавливать равенство и неравенство идей. Для модели равенства идей формулируются обосновывающие ее аксиомы. Эти аксиомы выступают в роли законов интеллекта, они допускают непосредственную проверку в эксперименте на испытуемом. Модель равенства идей служит тем центром, вокруг которого группируются различные данные о способности человека идентифицировать идеи. Экстраполируя это наблюдение, мы можем ожидать, что и при дальнейшем развитии теории интеллекта в роли ее основной продукции будут выступать модели различных сторон интеллекта человека. Возникает впечатление, что понятие модели – это основной инструмент познания механизма интеллекта.

Модель мы вводили в виде пары $\langle S_k, D_k \rangle$. В роли первого компонента этой пары выступает множество всех идей S_k, в роли второго компонента – бинарный предикат равенства идей $t = D_k(x, y)$, значение t которого определяется идеями x и y. Предикат D_k задан на множестве $S_k \times S_k$. В самом общем смысле под термином «идея» нами содержательно понимается субъективное состояние человека. К идеям относятся ощущения, восприятия, представления, понятия, мысли, эмоции, чувства, желания человека. Вместо множества всех идей S_k можно брать любое его подмножество N.

Так, например, было введено множество N' мыслей, являющихся смыслами всевозможных высказываний. Предикат равенства идей $D'(x, y)$, входящий в состав модели $\langle N', D' \rangle$, содержательно интерпретируется как логическая равносильность мыслей x и y. Выше рассматривалось равенство цветовых ощущений, фактически шла речь о модели $\langle N'', D'' \rangle$, у которой N'' есть множество всевозможных цветов, а D'' – предикат равенства, введенный на этом множестве. Заметим, что мысли и цвета являются субъективными состояниями человека, так что множества N' и N'' – это подмножества множества S_k.

Каждая из трех только что введенных пар $\langle S_k, D_k \rangle$, $\langle N', D' \rangle$, $\langle N'', D'' \rangle$, если ее брать изолированно от других пар, может быть подведена под общее понятие модели, которое мы находим в учении об алгебраических системах [2, с. 46]. Моделью там называют систему $\langle A, \pi \rangle$, состоящую из произвольно выбранного множества A и совокупности $\pi = \{P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \dots, P_r^{n_r}\}$ предикатов $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \dots, P_r^{n_r}$. Числа $n_1, n_2, \dots, n_r$ обозначают *арности предикатов* $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \dots, P_r^{n_r}$, то есть количество переменных, от которых каждый из этих предикатов зависит. Все переменные предикатов $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \dots, P_r^{n_r}$ заданы на множестве A. Набор чисел ($n_1, n_2, \dots, n_r$) называют *типом модели* $\langle A, \pi \rangle$, а множество π – *сигнатурой модели*. Число r всех предикатов в множестве π называют *порядком модели* $\langle A, \pi \rangle$. Множество A называют *основным множеством модели* $\langle A, \pi \rangle$ или ее *носителем*. Число элементов k в множестве A называют *мощностью модели* $\langle A, \pi \rangle$. В каждой из рассмотренных выше трех моделей $\langle S_k, D_k \rangle$, $\langle N', D' \rangle$, $\langle N'', D'' \rangle$ сигнатура состоит только из одного предиката. Исходя из общего определения модели, следовало бы указывать в приведенных моделях не сам предикат, а множество, состоящее из одного этого предиката, то есть, к примеру, вместо $\langle S_k, D_k \rangle$ писать $\langle S_k, \{D_k\} \rangle$.

Исследователь, получивший модели $\langle N', \{D'\} \rangle$ и $\langle N'', \{D''\} \rangle$ в результате изучения поведения испытуемого, естественно, захочет соединить их вместе. Но как это сделать? Казалось бы, вместо этих двух моделей можно ввести одну модель вида $\langle N, \{D', D''\} \rangle$. Однако возникает затруднение: неясно, какое множество следует взять в роли N. Если мы возьмем в роли N множество всех идей, то получим модель $\langle S_k, \{D', D''\} \rangle$, которая нас не может удовлетворить. Это вызвано тем, что в ней действие предикатов D' и D'' автоматически распространяется на множество всех идей S_k. При этом искажается фактическое положение, поскольку на самом деле предикат D' можно распространить лишь на область N', а предикат D'' – лишь на область N''. Не помогает делу и введение каких-либо других вариантов моделей $\langle N' \cup N'', \{D', D''\} \rangle$, $\langle S_k, \{D_k\} \rangle$, $\langle N' \cup N'', \{D_k\} \rangle$, поскольку все они так или иначе искажают информацию об объекте исследования.

Можно было бы пойти по другому пути и просто образовать систему $\{\langle N', \{D'\} \rangle, \langle N'', \{D''\} \rangle\}$ исходных моделей $\langle N', \{D'\} \rangle$ и $\langle N'', \{D''\} \rangle$. Но и при таком способе действий теряется важная информация об объекте исследования. А именно, в образованной системе моделей не находит отражения тот факт, что множества N' и N'' являются подмножествами одного и того же множества S_k. Из-за этого обе модели в системе воспринимаются как совершенно изолированные друг от друга. На самом же деле они взаимосвязаны, поскольку описывают различные стороны интеллекта одного и того же испытуемого.

Все сказанное приводит нас к выводу, что при исследовании интеллекта нельзя ограничиться использованием приведенного выше общего понятия модели. Главное обстоятельство, которое препятствует этому, заключается в том, что исследователь вынужден, кроме множества всех идей S_k привлекать еще и различные его подмножества. Если не позволить ему это делать, то исследователь не будет иметь возможности расчленять чрезвычайно сложную и поэтому непосильную общую задачу исследования интеллекта человека на более мелкие подзадачи. При этом эффективное изучение механизма интеллекта человека станет невозможным. В приведенном же выше общем понятии модели фигурирует только одно множество A, а его подмножества не вводятся. Поэтому в пределах этого понятия модели нет возможности одновременно рассматривать несколько предикатов, заданных на различных подмножествах множества всех идей.

Все сказанное вынуждает нас ввести новый вариант понятия модели, определяя его с таким расчетом, чтобы оно удовлетворяло запросам теории интеллекта в большей мере, чем классическое общее понятие модели, приведенное выше. *Моделью* над *универсумом букв* $\mathsf{A}=(a_1,\ a_2,...,\ a_k)$ и *универсумом переменных* $\mathsf{B}=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$ назовем любую пару $\langle M, P\rangle$, у которой в роли первого компонента выступает какое-нибудь подмножество M n-ной декартовой степени множества A, то есть $M\subseteq\mathsf{A}^n$, а роль второго компонента выполняет какой-либо n-местный предикат $P=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$, заданный на A^n. Первый компонент модели $\langle M, P\rangle$ назовем ее *носителем* или *основным множеством модели*. Число элементов в множестве M называем *мощностью модели*. Второй компонент P называем *предикатом модели* $\langle M, P\rangle$. Множество A^n назовем *универсальным пространством размерности* n. Оно состоит из всевозможных n-компонентных наборов букв, взятых из множества A. *Мощностью пространства* A^n назовем число k^n содержащихся в нем наборов букв. Для различения введенного нами понятия модели с классическим модели только что описанного вида будем называть *модифицированными*.

Только что введенное понятие модифицированной модели фактически основывается на универсальной алгебре, описанной в работе [4, с. 62]. Задавая множества A и B, мы, на самом деле, ввели алфавит букв и алфавит переменных универсальной алгебры. Именно на языке универсальной алгебры в дальнейшем будут записываться множество M и предикат P модели $\langle M, P\rangle$. Подобно тому, как это было принято в универсальной алгебре, будем считать алфавиты A и B настолько обширными, чтобы в них содержались все нужные знаки для формального описания интересующих нас моделей. О числах k и n будем предполагать известным лишь то, что они неопределенно велики, но конечны. При таком подходе не представляется возможным перечислить все буквы и переменные алфавитов A и B, однако такое перечисление и не потребуется. Если бы мы при определении понятия модифицированной модели $\langle M, P\rangle$ не ввели алфавиты A и B, то лишились бы возможности записывать в виде математических выражений компоненты M и P модели $\langle M, P\rangle$.

Было бы неправильным утверждать, что введенное нами понятие модифицированной модели является обобщением классического понятия модели. На самом деле, оба эти понятия являются различными обобщениями одного частного случая понятия модели, а именно – модели $\langle A, P\rangle$, в сигнатуре которой содержится всего лишь один предикат P. Запросы учения об алгебраических системах обусловили введение такого обобщения понятия модели, при котором предикат P заменяется системой предикатов $\{P_1^{n_1}, P_2^{n_2},..., P_r^{n_r}\}$. Потребности же теории интеллекта вынуждают нас ввести другое обобщение понятия модели, при котором область задания A^n предиката P ограничивается некоторым произвольно выбираемым подмножеством M. При первом варианте обобщения неприкосновенным сохраняется первый компонент A исходной модели, а при втором – ее второй компонент P.

Нетрудно было бы ввести, далее, такое обобщение понятия модели, которое охватывало как классическое, так и модифицированное понятия модели. А именно, моделью над A и B можно было бы назвать пару $\left\langle M, \{P_1^{n_1}, P_2^{n_2},..., P_r^{n_r}\}\right\rangle$, у которой роль первого компонента выполняет какое-нибудь множество $M\subseteq\mathsf{A}^n$, а вторым компонентом служит система каких-либо предикатов $P_1^{n_1}, P_2^{n_2},..., P_r^{n_r}$, арности которых $n_1, n_2,..., n_r$ не превышают числа переменных, содержащихся в множестве B. Однако этой возможностью мы не воспользуемся, поскольку такое обобщенное понятие модели нам не понадобится. Дело в том, что, как будет показано ниже, только что упомянутое обобщенное понятие модели создает лишь видимость обобщения. На самом же деле оно обладает той же описательной силой, что и введенное нами понятие модифицированной модели. Оказывается, что любую «обобщенную» модель можно выразить в виде равносильной ей модифицированной модели.

Может возникнуть вопрос, почему при определении понятия модифицированной модели предикат P задается на множестве A^n, а не на области M, указанной в модели $\langle M, P\rangle$. Ведь фактически исследователь находит опытным путем лишь те значения предиката $P(x_1, x_2,..., x_n)$, реализуемого испытуемым, которые определяются наборами $(x_1, x_2,..., x_n)$ значений аргументов предиката P, принадлежащими области M. Для наборов же, выходящих за пределы области M, исследователь значений предиката P не знает. Искусственно приписывая предикату P значения за пределами области M, мы тем самым закладываем в модель $\langle M, P\rangle$ заведомо ложную информацию, которая не соответствует фактическому положению дела. Это неизбежно приводит к несоответствию модели физическому объекту, который она призвана формально описать.

Все сказанное верно, и тем не менее приходится задавать предикат P на всем множестве A^n, а не на его части M. Это диктуется спецификой формульного выражения любых зависимостей, от которой при всем желании не удается избавиться. Если в формуле присутствуют переменные, то ничто не мешает подставлять вместо каждой из них любое значение из универсума букв A. Поэтому у нас нет практического средства ограничить область определения предиката P. Из-за этого обстоятельства предикат P, хотим мы этого или нет, принудительно определяется на всем множестве A^n. Хотя нет способа ограничить сферу действия предиката P, однако все же имеется возможность все наборы $(x_1, x_2, ..., x_n)$, содержащиеся в множестве A^n, разделить на два класса. В один класс помещаем все те наборы, для которых значения предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ соответствуют фактическим реакциям испытуемого. Во второй класс помещаем все те наборы, для которых предикат P формирует вымышленные значения.

Сделать это можно следующим образом. Подбираем предикат $M^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множестве A^n с таким расчетом, чтобы он обращался в единицу на всех тех наборах $(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые принадлежат области M, и обращаются в нуль на всех остальных наборах множества A^n. В этом случае множество M определится уравнением

$$M^*(x_1, x_2, ..., x_n) = 1. \quad (12)$$

Если мы будем множество M, фигурирующее в модели $\langle M, P\rangle$, задавать с помощью этого уравнения, то любой набор, не принадлежащий множеству M, обратит уравнение (12) в противоречие вида 0=1. Таким образом, с помощью уравнения (7) мы получаем информацию о том, что любой набор ($x_1, x_2, ..., x_n$), не принадлежащий множеству M, является запрещенным, а значения предиката P, получаемые для этого набора, не следует принимать во внимание. Вместе с тем, все наборы ($x_1, x_2, ..., x_n$), принадлежащие множеству M, уравнение (12) допустит, так как при подстановке любого такого набора в это уравнение оно обращается в тождество вида 1=1.

Заметим, что предикат M^* взаимно однозначно связан с множеством M. Эта связь может быть выражена следующим образом:

$$M^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_1, x_2, ..., x_n) \in M, \\ 0, \text{ если } (x_1, x_2, ..., x_n) \notin M. \end{cases} \quad (13)$$

В связи с этим возникает вопрос, не проще ли было бы определить понятие модели в виде пары $\langle M^*, P\rangle$, а не пары $\langle M, P\rangle$. Мы считаем такой способ определения понятия модели принципиально неприемлемым, хотя как чисто практический прием задания модели он не вызывает возражений.

Дело в том, что роль предикатов P и M^* различна. Предикат P используется по своему прямому назначению: он описывает поведение испытуемого. Без него просто нельзя обойтись. Предикат же M^*, взятый сам по себе, в модели нам не нужен. Он выполняет вспомогательную роль, образуя левую часть уравнения (12), задающего множество M. Множество M можно было бы при желании задать и без привлечения предиката M^*, например, непосредственно перечисляя все содержащиеся в нем наборы идей. И этого было бы вполне достаточно для определения модели $\langle M, P\rangle$. Если б мы задали модель в виде пары $\langle M^*, P\rangle$, то пришлось бы сопровождать такое определение специальным комментарием об указанной выше специфической роли предиката M^*. Пришлось бы особо отметить, что на самом деле нас интересует не непосредственно предикат M^*, а лишь задаваемое им множество M.

Рассмотрим пример записи модели на языке универсальной алгебры конечных предикатов. Пусть требуется формально записать модель $\langle M, D\rangle$, где $D(x_1, x_2)$ – предикат равенства идей x_1 и x_2, значения которого экспериментально определены на следующем множестве пар идей:

$$M = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_1), (a_3, a_3)\}. \quad (14)$$

Значения предиката $D(x_1, x_2)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

x_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3
x_2	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_1	a_3
D	1	0	0	0	1	0	1

Предикат $M^*(x_1, x_2)$, задающий множество M, записываем в форме:

$$M^*(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1} x_2^{a_3} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_3}. \quad (15)$$

Множество M определится уравнением

$$M^*(x_1, x_2) = 1. \quad (16)$$

Предикат $D(x_1, x_2)$ записываем в виде формулы

$$D(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_3}.$$

Приведенный пример, несмотря на свою простоту, порождает вопросы, требующие разъяснения. Почему в примере не указаны универсум букв A и универсум переменных B, как того, казалось бы, требует определение понятия модели? Ответ на этот вопрос состоит в том, что в определении понятия модели множества A и B лишь упоминаются, а не вводятся фактически. Когда мы пишем, что $\mathsf{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $\mathsf{B} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, то тем самым постулируем только существование конечных множеств A и B, а вовсе не перечисляем все их элементы. Предполагается, что множества A и B настолько обширны и неопределенны, что в них содержатся все нужные нам буквы и переменные. Поэтому при практическом задании конкретных моделей множества A и B остаются как бы за кадром, они присутствуют лишь потенциально. Именно благодаря их существованию мы можем ввести в нашем примере буквы $a_1, a_2, a_3 \in A$ и переменные $x_1, x_2 \in B$ и оперировать ими. Если бы в определении понятия модифицированной модели не были упомянуты множества A и B, то мы не имели бы права пользоваться символами a_1, a_2, a_3 и x_1, x_2.

Второй вопрос: почему мы записываем предикат D в виде $D(x_1, x_2)$, указывая при этом только две переменные x_1, x_2, а не все те переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, которые содержатся в универсуме B? На это можно ответить, что запись $D(x_1, x_2)$ в отличие от записи $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, не полная, а сокращенная. Формируя сокращенную запись, мы руководствуемся следующим правилом: в ней несущественные переменные можно не указывать. Несущественными будем считать те из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, от значений которых значение предиката $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ не зависит. Однако все существенные переменные должны быть выписаны. Можно сказать, что выражение $D(x_1, x_2)$ есть стенографическая запись полного представления $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ предиката D. Мы обращаемся к такой стенографической записи не только из-за стремления к краткости, но, главным образом, в силу необходимости, ввиду невозможности перечислить все переменные $x_1, x_2, ..., x_n$. В нашем примере значения предиката D всегда однозначно определяются значениями переменных x_1, x_2, поэтому все остальные переменные универсума B в данном случае являются несущественными.

Мы обращаемся к сокращенной записи и в том случае, когда представляем множество M в виде выражения (14). Строго говоря, в каждом наборе букв, принадлежащем множеству M, содержится по n компонентов. Фактически же в наборах, фигурирующих в множестве, указанном справа в равенстве (14), записаны только по две буквы, а именно – те буквы, которые являются значениями существенных переменных x_1 и x_2. Если бы мы задались целью выписать в наборах букв, составляющих множество M, все значения хотя бы одной из несущественных переменных, то не смогли бы этого сделать ввиду того, что число наборов букв в записи множества M стало бы неопределенно большим. Так что приходится пользоваться сокращенной записью множества M. Множество M, на самом деле, состоит из всех тех n-компонентных наборов букв универсума A, у которых на местах x_1 и x_2 стоят значения, указанные в сокращенной записи множества M.

Аналитическую запись (15) множества M мы получаем путем перехода от бинарного отношения, стоящего в правой части равенства (14), к соответствующей ему формуле [4, с. 97]. В выражении (15) фигурируют всего две переменные – x_1 и x_2. Казалось бы, отсюда следует, что оно задает бинарный предикат. Такое заключение, однако, неверно. В выражении (15) слева от знака равенства стоит символ $M^*(x_1, x_2)$, который представляет собой сокращенную запись предиката $M^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, задающего множество M. Формула, стоящая в выражении (15) справа от знака равенства, на самом деле задает не множество пар букв, фигурирующее в (14), а множество всех n-компонентных наборов, входящих в состав области M. Если бы мы смогли практически перейти к СДНФ предиката (15), то получили бы дизъюнкцию конституэнт единицы, каждая из которых представляет собой произведение узнаваний букв всех переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Таким образом, уравнение (16), несмотря на все сокращения, принятые нами в процессе его получения, задает «настоящее» множество M, то есть n-арное, а не бинарное отношение.

Выводы

Все сказанное о представлении предиката M^* относится также к формульной записи (10) предиката D. На самом деле предикат $D(x_1, x_2)$ – не бинарный, а n-арный, все переменные алфавита B, кроме x_1 и x_2 в нем несущественные. В нашем примере существенные переменные у предикатов P и M^* оказались одни и те же. Такое совпадение, однако, не является обязательным. Заметим, что при желании в формульные представления предикатов P и M^* можно ввести любые из несущественных переменных. Например, можно ввести переменную x_3, дописывая в формуле, стоящей справа от знака равенства в выражении (10), дизъюнктивный член $x_3^{a_1} x_3^{a_2}$, равный нулю.

Список литературы: 1. *Бондаренко М.Ф.* Модель равенства идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 3-15. 2. *Цвикер Э.* Ухо как приемник информации [Текст] / *Э. Цвикер, Р. Фельдкелер.* – М.: Связь, 1971. – 320 с. 3. [Текст] / Формальная логика. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 110 с. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко.* – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. Ун-те, 1984 – 144 с. 5. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы [Текст] / *А.И. Мальцев.* – М.: Наука, 1970. – 476 с. 6. *Клини С.К.* Математическая логика [Текст] / *С.К. Клини* – М.: Мир. 1973. – 390 с.

Поступила в редколлегию 10.03.2010

УДК 519.7

Алгебра ідей / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 16–27.

Пропонується біонічний підхід до проблеми побудови штучного інтелекту. Розвивається спеціалізований математичний апарат для ефективного моделювання роботи механізмів інтелекту людини.

Табл. 1. Бібліогр.: 6 найм.

UDC 519.7

Ideas algebra / Bondarenko M.F., Shabanov-Kushnarenko Yu.P., Shabanov-Kushnarenko S.Yu. // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 16–27.

It is offered bionic approach to a problem of construction of an artificial intelligence. The specialized mathematical instrument for effective simulation of activity of mechanism of human intellect develops.

Tab. 1. Ref.: 6 items.

УДК 519.7

МЕТОД СРАВНЕНИЯ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Рассмотрены проблемы построения эффективного математического аппарата для формализации и моделирования систем искусственного интеллекта. В качестве такого аппарата предложен абстрактный эквивалент алгебры конечных предикатов - алгебра идей. На основе алгебра идей получены некоторые результаты в области формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности человека.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ РАВЕНСТВА, ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение

В [2] было введено понятие модифицированной модели, к которому нас привела задача формального описания интеллектуальной деятельности человека. Теперь мы попытаемся содержательно проинтерпретировать понятие модифицированной модели. Под буквами множества A будем понимать идеи [1], которые могут быть предъявлены исследователем испытуемому в процессе изучения закономерностей его интеллектуальной деятельности. Будем предполагать, что число k идей, содержащихся в множестве A, достаточно велико, а их состав достаточно разнообразен, то есть исследователь всегда найдет в множестве A любые идеи, нужные ему для работы с испытуемым.

1. Конгруэнтные модели

Под *переменными*, содержащимися в множестве B, будем понимать *места идей* в том наборе идей, который предъявляет исследователь испытуемому в своих опытах. Полагаем, что переменная x_i обозначает i-е по счету место идеи в наборе. Желая сказать, что на i-ом месте в наборе стоит идея a, будем писать $x_i = a$. О символе x_i будем говорить, что он обозначает переменную идею, стоящую на i-ом месте в наборе. Если записано, что $x_i = a$, то будем говорить, что переменная x_i, принимает значение a. Число n всех мест в наборе ($x_1, x_2, ..., x_n$) считаем достаточно большим. Это означает, что исследователь, проводя эксперименты, никогда не будет испытывать недостатка в числе мест для размещения на них идей, предъявляемых испытуемому. Необходимость введения мест для идей обусловлена тем, что идеи, предъявляемые испытуемому, часто оказываются неравноправными. Предположим, например, что испытуемый должен установить, находятся ли две предъявленные ему идеи в отношении следования. Чтобы испытуемый имел возможность решить эту задачу, недостаточно предъявить ему две идеи. Нужно еще указать место каждой из них, объяснив ему, какую идею следует считать первой (то есть посылкой), а какую – второй (заключением).

Элементы множества A^n интерпретируем как различные n-компонентные наборы идей. Если требуется выразить конкретный набор идей, для которого $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2, .., x_n = b_n$, то будем писать $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Такую запись будем называть *постоянным набором идей*. Произвольный набор идей будем записывать в виде ($x_1, x_2, ..., x_n$), называя его *переменным набором идей*. Он представляет собой все множество наборов A^n. В ряде случаев набор ($x_1, x_2, ..., x_n$) будем обозначать кратко буквой ξ, полагая ξ =($x_1, x_2, ..., x_n$). Запись набора, у которого на части мест стоят буквы, а на другой части мест – переменные (при этом символ x_i, если он присутствует в записи, обязательно должен стоять на i-ом месте набора), будем называть *смешанным набором идей*. Такая запись представляет собою множество всех тех наборов идей, у которых на местах, не занятых переменными, стоят заданные буквы.

Производя опыты над испытуемым, исследователь размещает интересующие его идеи не на всех n местах набора, а только на тех из них, которые находятся в его левой части. Например в случае, когда требуется установить наличие или отсутствие дизъюнктивной связи $b_1 \vee b_2 = b_3$ между идеями b_1, b_2 и b_3, исследователь предъявит испытуемому набор ($b_1, b_2, b_3, x_4, ..., x_n$), в котором заданные идеи b_1, b_2, b_3 располагаются на трех первых его местах. Для краткости вместо записи всего набора будем указывать только левую его часть (b_1, b_2, b_3), заполненную буквами. Если имеются ввиду произвольные идеи x_1, x_2, x_3, для которых испытуемый устанавливает наличие или отсутствие дизъюнктивной связи $x_1 \vee x_2 = x_3$, то будем выписывать начальный отрезок (x_1, x_2, x_3) набора переменных ($x_1, x_2, ..., x_n$), состоящий из переменных, участвующих в задаче. Такие укороченные наборы идей будем называть *сокращенными*. Переменные, стоящие на местах, не представленных в сокращенном наборе, при данном задании должны быть несущественными, их значения не должны влиять на исход эксперимента.

Переходим к интерпретации предиката P, фигурирующего в модели $\langle M, P \rangle$. Под *предикатом* *модели* $t = P(x_1, x_2, ..., x_n)$ будем понимать то *задание*, выполнения которого добивается исследователь от испытуемого в данной серии опытов над ним. Предполагается, что все опыты одной серии выполняются испытуемым при одном и том же задании. В процессе проведения каждого опыта в данной серии исследователь предъявляет испытуемому некоторый набор идей $(b_1, b_2, ..., b_n)$, состоящий из r идей ($r < n$), и предлагает ему установить, находятся ли они в отношении, указанном в задании. Например задание может состоять в том, чтобы установить, находятся ли идеи b_1 и b_2, указанные в наборе (b_1, b_2), в отношении равенства $b_1 = b_2$. Значение двоичной переменной t интерпретируем как реакцию испытуемого, формируемую им при выполнении задания P в ответ на предъявление набора идей $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если первые r компонентов $x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_n = b_n$ набора идей $(x_1, x_2, ..., x_n)$ находятся в заданном отношении, то испытуемый формирует ответ $t = 1$, в противном случае – ответ $t = 0$.

Наконец, остановимся на интерпретации носителя модели M, фигурирующего в модели $\langle M, P \rangle$, Он характеризует собою ту совокупность наборов идей, которую исследователь выбрал для предъявления испытуемому в серии опытов с заданием P. Предположим, что исследователь выбрал для опытов следующее множество T r-компонентных наборов: $T = \{(b_{1i}, b_{2i}, ..., b_{ri})\}_{i=1}^{s}$, где $r < n$, а s – общее число наборов в совокупности T. Множество M формируем следующим образом. На первом шаге включаем в множество M все те наборы $(x_1, x_2, ..., x_n)$, у которых $x_1 = b_{11}, x_2 = b_{21}, ..., x_r = b_{r1}$. На втором шаге пополняем множество М всеми теми наборами $(x_1, x_2, ..., x_n)$, у которых $x_1 = b_{12}, x_2 = b_{22}, ..., x_r = b_{r2}$, и так далее. На последнем s-ом шаге пополняем множество M всеми теми наборами $(x_1, x_2, ..., x_n)$, у которых $x_1 = b_{1s}, x_2 = b_{2s}, ..., x_r = b_{rs}$. В результате получаем все элементы множества M.

Ознакомившись с только что приведенной содержательной интерпретацией модели, читатель легко заметит, что между моделью и описываемым ею фактическим поведением испытуемого имеет место некоторая несогласованность. Предикат P $(x_1, x_2, ..., x_n)$, фигурирующий в модели $\langle M, P \rangle$, задан на всем множестве A^n, то есть он всюду определен. Каждому набору идей $\xi = (x_1, x_2, ..., x_n)$ он ставит в соответствие вполне определенное двоичное значение 0 или 1. Двоичный же ответ испытуемого экспериментально определяется исследователем лишь для части наборов идей, а именно – только для тех из них, которые содержатся во множестве M. Таким образом, предикат, реализуемый испытуемым, – частичный. Значения предиката модели совпадают с ответами испытуемого лишь для наборов, принадлежащих множеству M, для остальных наборов идей они оказываются вымышленными. Предикат модели можно получить из предиката, реализуемого испытуемым, только путем его произвольного, экспериментально не обоснованного доопределения. Таким образом, предикат модели за пределами множества M искажает результаты опытов: он приписывает вполне определенные реакции испытуемому даже там, где они вовсе не наблюдались исследователем.

Доопределение предиката P модели $\langle M, P \rangle$ возможно, очевидно, многими разными способами. Это приводит к тому, что результаты одной и той же серии опытов над испытуемым могут быть формально представлены различными моделями. Все такие модели равноправны в том смысле, что они содержат одну и ту же информацию о поведении испытуемого. Любые модели, задающие одно и то же поведение испытуемого, будем называть конгруэнтными друг другу. Дадим формальное определение *отношения конгруэнции моделей*. Две модели $\mathsf{M}_1 = \langle M_1, P_1 \rangle$ и $\mathsf{M}_2 = \langle M_2, P_2 \rangle$ называем *конгруэнтными* $\mathsf{M}_1 \approx \mathsf{M}_2$, если: 1) их носители равны $M_1 = M_2 = M$; 2) значения предикатов этих моделей для всех наборов идей $\xi \in M$ совпадают $P_1(\xi) = P_2(\xi)$.

На формально-логическом языке только что сформулированные условия запишутся в виде следующих уравнений:

$$\forall \xi (M_1^*(\xi) \sim M_2^*(\xi)) = 1, \tag{1}$$

$$\forall \xi (M^*(\xi) \supset P_1(\xi) \sim P_2(\xi)) = 1. \tag{2}$$

Предикаты $M^*(\xi)$, $M_1^*(\xi)$, $M_2^*(\xi)$, фигурирующие в уравнениях, соответствуют множествам M, M_1, и M_2. Закон соответствия задается соотношением (8) [2]. Знак $\forall \xi$ обозначает квантор общности по набору [3, с. 95].

Введем *множество всех моделей* L. Роль носителя M в модели $\langle M, P \rangle \in \mathsf{L}$ может играть любое подмножество пространства A^n, в роли предиката P в ней может выступать любой предикат, заданный на A^n. Из условий (1) и (2) непосредственно следует *рефлексивность конгруэнции моделей*: $\mathsf{M} \approx \mathsf{M}$ для всех $\mathsf{M} \in \mathsf{L}$. Очевидна также *симметричность конгруэнции моделей*: для любых $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2 \in \mathsf{L}$ из $\mathsf{M}_1 \approx \mathsf{M}_2$ следует $\mathsf{M}_2 \approx \mathsf{M}_1$. Докажем *транзитивность конгруэнции моделей*: для любых $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \mathsf{M}_3 \in \mathsf{L}$ из $\mathsf{M}_1 \approx \mathsf{M}_2$ и $\mathsf{M}_2 \approx \mathsf{M}_3$ следует $\mathsf{M}_1 \approx \mathsf{M}_3$. Пусть $\langle M_1, P_1 \rangle \approx \langle M_2, P_2 \rangle$ и $\langle M_2, P_2 \rangle \approx \langle M_3, P_3 \rangle$. Тогда согласно (1) $M_1 = M_2$ и $M_2 = M_3$, следовательно, $M_1 \approx M_3$. Итак

$$\forall \xi (M_1^*(\xi) \sim M_3^*(\xi)) = 1. \tag{а}$$

Обозначим $M_1 = M_2 = M_3 = M$. По условию (2) для любого $\xi \in \mathsf{A}^n$ имеем $M^*(\xi) \supset (P_1(\xi) \sim P_2(\xi)) = 1$ и $M^*(\xi) \supset (P_2(\xi) \sim P_3(\xi)) = 1$. Из последних двух равенств выводим

$$\forall \xi (M^*(\xi) \supset (P_1(\xi) \sim P_3(\xi))) = 1. \tag{б}$$

Из (а) и (б) следует $\mathsf{M}_1 \approx \mathsf{M}_3$.

Мы показали, что отношение конгруэнции моделей есть эквивалентность. Оно разбивает множество всех моделей L на смежные классы [5, с. 23]. Все модели, содержащиеся в одном смежном классе, задают одно и то же поведение испытуемого. Именно смежный класс, а не содержащиеся в нем модели, адекватно характеризует частичный предикат, реализуемый испытуемым в серии экспериментов. Выбирая каким-нибудь способом по одной модели из каждого класса, можно использовать такие модели (назовем их *стандартными*) в качестве адекватной математической характеристики поведения испытуемого. Одинаковым стандартным моделям соответствуют одинаковые частичные предикаты, реализуемые испытуемым в серии опытов, разным – различные.

Имеется и другая несогласованность между моделью и описываемым ею фактическим поведением испытуемого. В любой модели, независимо от того, к какой серии экспериментов она относится, всегда фигурируют n переменных. Реальное же число идей r в наборах, которые исследователь предъявляет испытуемому, совсем другое, оно всегда меньше n и может изменяться при переходе от одной серии опытов к другой. Реакция испытуемого всегда однозначно определяется этими r идеями. Так, например в опытах с установлением равенства и неравенства идей фактически используются только две переменные, а в опытах по изучению дизъюнктивной связи между идеями реально участвуют три переменные. Переменные, которые не используются в данной серии опытов, естественно рассматривать как несущественные для модели, соответствующей этим опытам. Несущественные переменные модели содержательно можно интерпретировать как факторы, которые не влияют на реакцию испытуемого в соответствующей серии экспериментов.

Дадим формальное определение понятия несущественной переменной модели. Переменную x_i называем *несущественной* относительно модели $\langle M, P\rangle$, если для всех наборов $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M$ при произвольной фиксации переменных x_1, x_2, $..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ значения предиката P не зависят от значений переменной x_i. Математически это условие можно записать в виде следующего логического уравнения:

$$\begin{gathered}\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_{i-1} \forall x_i' \forall x_i'' \forall x_{i+1} ... \forall x_n \\ (M^*(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i',x_{i+1},...,x_n) \wedge \\ \wedge M^*(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i'',x_{i+1},...,x_n) \supset \\ \supset (P(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i',x_{i+1},...,x_n) \sim \\ \sim P(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i',x_{i+1},...,x_n))) = 1.\end{gathered} \tag{3}$$

Переменную x_1 будем называть *существенной* относительно модели $\langle M, P\rangle$, если последняя не удовлетворяет условию (3). Вводя обозначения $(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i',x_{i+1},...,x_n) = \xi'$, можем переписать условие (3) в более компактной форме:

$$\begin{gathered}\forall \xi' \forall \xi'' (M^*(\xi') \wedge M^*(\xi'') \supset \\ \supset (P(\xi') \sim P(\xi''))) = 1.\end{gathered} \tag{4}$$

Рассмотрим *операцию нормализации модели*, заданную на множестве всех моделей L и принимающую значения в том же множестве. По определению операция нормализации ставит в соответствие модели $\langle M, P\rangle$ модель $\langle M, M^* \wedge P\rangle$. Модель $\mathsf{N} = \mathsf{F}(\mathsf{M})$, получаемая в результате выполнения операции нормализации F над моделью M, назовем *нормальным образом модели* M. Справедливо следующее утверждение: две модели $\mathsf{M}_1 = \langle M, P_1\rangle$ и $\mathsf{M}_2 = \langle M, P_2\rangle$ конгруэнтны в том и только в том случае, если их нормальные образы совпадают, то есть если $\mathsf{F}(\mathsf{M}_1) = \mathsf{F}(\mathsf{M}_2)$. Действительно, при любом $\xi \in A^n$

$$\begin{gathered}M^*(\xi)P_1(\xi) \sim M^*(\xi)P_2(\xi) = \overline{M^*(\xi)P_1(\xi)} \cdot \overline{M^*(\xi)P_2(\xi)} \vee \\ \vee M^*(\xi)P_1(\xi) \cdot M^*(\xi)P_2(\xi) = \left(\overline{M^*(\xi)} \vee \overline{P_1(\xi)}\right)\left(\overline{M^*(\xi)} \vee \right. \\ \left. \vee\ \overline{P_2(\xi)}\right) \vee M^*(\xi)P_1(\xi)P_2(\xi) = \overline{M^*(\xi)} \vee \overline{P_1(\xi)}\,\overline{P_2(\xi)} \vee \\ \vee M^*(\xi)P_1(\xi)P_2(\xi) = \overline{M^*(\xi)} \vee \overline{P_1(\xi)}\,\overline{P_2(\xi)} \vee P_1(\xi)P_2(\xi) = \\ = \overline{M^*(\xi)} \supset P_1(\xi) \sim P_2(\xi)).\end{gathered}$$

Полученное равенство означает, что условие $M^*P_1 = M^*P_2$ равносильно условию (2).

При переходе от исходной модели $\langle M, P\rangle$ к ее нормальному образу $\langle M, P'\rangle$ носитель модели сохраняется, а предикат P заменяется предикатом

$$P' = M^* P. \tag{5}$$

Предикат P' внутри области M сохраняет значения предиката P, за пределами области M он принимает только нулевые значения. Можно было бы, переходя к нормальному образу модели, приписать предикату P' за пределами области M единичные значения. В этом случае мы бы фактически воспользовались другим, двойственным первому, определением нормального образа модели, при котором принимается $P' = M^* \vee P$. Эту возможность мы здесь оставим нереализованной. Нормальный образ N модели M можно использовать в роли *стандартной модели*, характеризующей весь класс конгруэнтных моделей, к которому модель M принадлежит. В дальнейшем мы, как правило, будем иметь дело не с самими классами конгруэнтных моделей, а с их представителями – стандартными моделями, содержащимися в этих классах, пользуясь тем, что в каждом классе конгруэнтных моделей содержится ровно по одной стандартной модели.

Научившись переходить к нормальным образам любых моделей, мы тем самым получаем практическую процедуру, с помощью которой решается вопрос о конгруэнтности любых моделей. Если две модели имеют одинаковые нормальные образы, то они конгруэнтны, если же нормальные образы различны, то исходные модели неконгруэнтны. Важно уметь решать и обратную задачу: по данной стандартной модели найти весь класс конгруэнтных ей моделей. Эта задача сводится к отысканию общего решения уравнения (5) относительно предикатной переменной P. Оно выражается в следующем виде:

$$P = P' \vee \overline{M^*} C, \tag{6}$$

где C – произвольный предикат, заданный на A^n. Согласно (6) для всех $\xi \in M$ значения предиката $P(\xi)$ совпадают со значениями предиката $P'(\xi)$. За пределами же области M значения предиката P могут выбираться произвольно.

Справедливость равенства (6) обосновывает

Теорема 1. *Пусть a и b – булевы константы, удовлетворящие условию*

$$ab = b. \tag{а}$$

Тогда уравнение

$$ax = b \tag{б}$$

имеет относительно булевой переменной E следующее общее решение:

$$x = b \vee \bar{a}c. \tag{в}$$

Символом c обозначена произвольная булева константа. При невыполнении условия (а) уравнение (б) решений не имеет.

Доказательство. Подставляя (в) в (б), с учетом (а) получаем тождество, поскольку

$$ax = a(b \vee \bar{a}c) = ab = b.$$

Таким образом, при любом c выражение (в) задает решение уравнения (б). Предположим, что x есть решение уравнения (б). Тогда при $c = \bar{a}x$ равенство (в) превращается в тождество, поскольку $b \vee \bar{a}c = b \vee \bar{a}\bar{a}x = ax \vee \bar{a}x = x.$ Таким образом, любое решение уравнения (б) выражается формулой (в) при подходящем выборе значений константы c. Предположим, что условие (а) не выполняется, то есть что $ab \neq b.$ Тогда значение переменной x, определяемое формулой (в), ни при каком значении параметра c не будет решением уравнения (б). Действительно, полагая $x = b \vee \bar{a}c$, имеем $ax = a(b \vee \bar{a}c) = ab \neq b.$ Теорема доказана.

С помощью теоремы 1 выполним обоснование равенства (6). Произвольно фиксируем набор $\xi \in A^n$ и принимаем в роли a булеву константу $M^*(\xi)$, а в роли b – булеву константу $P'(\xi)$. Для всех $\xi \notin M$ предикат $P'(\xi)$ обращается в нуль, поэтому $M^*(\xi)\ P'(\xi) = \ = P'(\xi)$, так что условие (а) выполняется. В роли x принимаем значение предиката $P(\xi)$. Равенство (5) при фиксированном ξ запишется в виде $P'(\xi) = M^*(\xi)\ P(\xi)$, поэтому условие (б) тоже выполняется. Согласно теореме 1 имеет место равенство (в), которое при принятой интерпретации булевых констант a, b и x означает, что $P(\xi) = P'(\xi) \vee M^*(\xi) \wedge C(\xi)$, где $C(\xi) = c$. Поскольку ξ было фиксировано произвольно, мы приходим к равенству (6).

Рассмотрим пример. Возьмем модель $\langle M, D \rangle$, введенную формулами (б) и (г). Находим предикат D' ее нормального образа $\langle M, D \rangle$ по формуле (5):

$$D'(x_1, x_2) = M^*(x_1, x_2) \wedge D(x_1, x_2) = (x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$
$$\vee x_1^{a_1} x_2^{a_3} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_3})$$
$$(x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1} x_2^{a_1})(x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_3})$$
$$= x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_3} .$$

Мы видим, что предикат D' совпадает с предикатом D. Это означает, что в качестве исходной модели $\langle M, D \rangle$ была использована стандартная модель.

Возьмем в роли C предикат $C(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_3}$ и отыщем предикат $D_1(x_1, x_2)$ по формуле (6):

$$D_1(x_1, x_2) = D_1'(x_1, x_2) \vee \overline{M^*(x_1, x_2)}\ C(x_1, x_2) =$$
$$= x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_3} \vee \neg (x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee$$
$$\vee x_1^{a_1} x_2^{a_3} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_3}) \wedge$$
$$\wedge (x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_3}) = x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee$$
$$\vee x_1^{a_3} x_2^{a_3} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_3} .$$

Знак $\neg$ обозначает операцию отрицания. В процессе преобразований использовались законы поглощения отрицания [3, с. 33]. Полученный предикат D_1 не совпадает с предикатом D, следовательно, модель $\langle M, D_1 \rangle$ не является стандартной. Вместе с тем модель $\langle M, D_1 \rangle$ конгруэнтна модели $\langle M, D \rangle$. Нормализуя модель $\langle M, D_1 \rangle$ по формуле (5), снова возвращаемся к стандартной модели $\langle M, D \rangle$.

2. Метод сравнения

Выполненная в [2] содержательная интерпретация понятия модели позволяет сформулировать общий метод математического описания интеллектуальной деятельности человека, который мы назовем *методом сравнения*. По этому методу изучается индивидуальный интеллект конкретного человека, называемого *испытуемым*. *Исследователь*, проводящий это изучение, настраивает испытуемого на выполнение определенного задания, которое он описывает в виде отношения P, связывающего r идей $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Например, может быть задано отношение равенства $x_1 = x_2$ идей x_1 и x_2, отношение их следования $x_1 \Rightarrow x_2$, отношение конъюнкции $x_1 \wedge x_2 = x_3$ идей x_1, x_2, x_3 и т.п. Для равенства и следования идей имеем r =2, для конъюнкции идей r =3.

Исследователь выполняет на испытуемом серию опытов при одном и том же задании. В каждом опыте он предъявляет испытуемому набор идей ($x_1, x_2, \ldots, x_r$), взятый из какого-нибудь заранее выбранного и четко очерченного множества M. Число r во всей серии опытов фиксировано, поэтому все наборы в множестве M имеют одно и то же число компонентов. Выполняя предложенное исследователем задание, испытуемый должен отреагировать на каждый набор ($x_1, x_2, \ldots, x_r$) $\in M$ положительным ответом 1, если идеи $x_1, x_2, \ldots, x_r$ находятся в отношении *P*, и отрицательным ответом 0, если отношение P для этих идей не выполняется. В серии опытов исследователь предъявляет испытуемому по очереди все наборы идей, принадлежащих множеству M. На каждый набор идей испытуемый должен однозначно отреагировать ответом 0 или 1.

Например серия опытов может состоять из ряда предъявлений всевозможных пар цветов, в каждой из которых испытуемый устанавливает наличие или отсутствие цветового равенства. При равенстве цветов испытуемый реагирует сигналом 1, при неравенстве – сигналом 0. В процессе выполнения серии опытов испытуемый реализует некоторый предикат P^* ($x_1, x_2, \ldots, x_r$), заданный на множестве M, который связан с отношением P следующей зависимостью:

$$P^*(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in P, \\ 0, & (x_1, x_2, \ldots, x_r) \notin P. \end{cases} \quad (7)$$

Далее исследователь строит модель $\langle M, P' \rangle$, которая математически описывает результаты данной серии опытов. Символом M обозначен носитель модели. Он представляет собой некоторое множество n-компонентных наборов идей, каждая из которых принадлежит множеству A. Характеристика множества A дана в [2]. Формируется носитель модели следующим образом. Если набор ($b_1, b_2, \ldots, b_r$), составленный из первых r идей $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_r = b_r$ набора ($x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_n$), принадлежит множеству M, то считаем, что набор ($b_1, b_2, \ldots, b_r, x_{r+1}, x_n$) при любых значениях переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ принадлежит множеству M. В противном случае последний набор в состав множества M не включаем. Таким образом, множество M образуется по следующему правилу: для всех ($x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_n$) $\in A$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_n) \in M \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_r). \quad (8)$$

Знак $\Leftrightarrow$ обозначает логическую равносильность высказываний.

Предикат модели $P'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ считаем функцией *n* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждая из которых задана на множестве A. Значения этого предиката находим по следующему правилу:

$$P'(x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_n) = \begin{cases} P^*(x_1, x_2, \ldots, x_r), & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M, \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_r) \notin M. \end{cases} \quad (9)$$

Определение (9) предиката P' выбрано с таким расчетом, чтобы модель $\langle M, P' \rangle$ была стандартной. Если же требуется получить какую-нибудь иную модель $\langle M, P \rangle$ из числа моделей, конгруэнтных модели $\langle M, P' \rangle$, то это можно сделать, переходя от предиката P' к предикату P по формуле (6), предварительно выбрав подходящий предикат C.

Будет ли модель $\langle M, P' \rangle$ однозначно задавать результаты серии опытов, которые она призвана математически описывать? Да, будет. Это доказывается возможностью обратного перехода от модели к множеству M и отношению P, однозначно характеризующим экспериментальные данные. Такой переход можно произвести следующим образом. Пользуясь условием (3), разделяем переменные на существенные и несущественные. Поскольку номера всех существенных переменных меньше номеров несущественных переменных, то достаточно найти такое число r, при котором переменная x_r будет существенной, а переменная x_{r+1} – несущественной. Далее, пользуясь условием (8), устанавливаем, какие из наборов ($x_1, x_2, \ldots, x_r$) принадлежат множеству M, а какие – нет. В результате мы находим множество M всех r-компонентных наборов, которые были предъявлены испытуемому в серии опытов.

Значение предиката P^*, характеризующего поведение испытуемого в серии опытов, находим при помощи равенства

$$P^*(x_1, x_2, \ldots, x_r) = P'(x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_n), \quad (10)$$

вытекающего из соотношения (9). При определении значений предиката P^* значение переменных x_{r+1}, x_n можно брать произвольными. Наконец, с помощью зависимости (7) переходим от предиката P^* к отношению P, которое характеризует задание испытуемому, реализованное в данной серии опытов. В случае, когда серия опытов представлена не стандартной, а произвольной моделью $\langle M, P \rangle$, сначала переходим по формуле (5) от предиката P к предикату P', пользуясь предикатом M^*, отыскиваем по множеству M с помощью зависимости (7) [2], а затем по стандартной модели $\langle M, P' \rangle$ только что описанным способом находим множество M и отношение P.

Выше мы изложили метод сравнения и квалифицировали его как общий метод формального описания интеллекта человека. Но обладает ли метод сравнения эффективностью, общностью и универсальностью на самом деле? Можно ли с его помощью исчерпывающе описать весь механизм человеческого интеллекта во всех деталях и с математической точностью? Мы даем на эти вопросы утвердительный ответ, провозглашая тем самым *тезис об универсальности метода сравнения*. Принятие этого тезиса — очень ответственный шаг, он требует тщательного обсуждения. Чтобы утвердить метод сравнения в правах универсального инструмента познания интеллекта, необходимо нейтрализовать массу естественно возникающих сомнений, вопросов и возражений. Главное же — надо на деле продемонстрировать эффективность и универсальность метода сравнения при дальнейшей разработке теории интеллекта.

3. Контроль исследователем идей испытуемого

Согласно методу сравнения исследователь должен при проведении опытов на испытуемом предъявлять ему идеи. В связи с этим возникает возражение, состоящее в том, что идеи предъявить испытуемому нельзя, поскольку они идеальны. Исследователь может воздействовать на испытуемого только физическими предметами. Если мы хотим, чтобы исследование интеллекта человека удовлетворяло стандартам строгости, принятым в физике, то следует считать, что испытуемому предъявляются не идеи, а физические предметы. Только после того, как они окажут воздействие на органы чувств испытуемого, в его сознании смогут возникнуть соответствующие им идеи, являющиеся субъективными образами воспринимаемых предметов.

Изложенное соображение справедливо, однако содержащаяся в нем критика бьет мимо цели. Верно, что без предъявления испытуемому физических предметов исследователь не сможет возбудить в его сознании ни одной мысли. Однако предметы эти в натуральном виде испытуемому не являются, как "вещи в себе" они остаются для него недосягаемыми, ему и не обязательно иметь к ним прямой доступ. Испытуемый имеет дело лишь с образами предметов, то есть с идеями, порожденными соответствующими физическими стимулами. Например, чтобы возбудить в сознании испытуемого некоторое цветовое ощущение, исследователь, конечно, должен воздействовать на его орган зрения соответствующим световым излучением. Однако испытуемому нет до световых излучений никакого дела, поскольку в опыте он оперирует только с цветами, сравнивает и обрабатывает только их.

Двоичная реакция испытуемого определяется в конечном счете исключительно теми идеями, которые испытуемый непосредственно воспринимает и сравнивает. Физические стимулы, породившие эти идеи, остаются всецело в ведении исследователя, к испытуемому они отношения не имеют. Именно в этом смысле при описании метода сравнения нами утверждается, что испытуемому предъявляются для сравнения сами идеи, а не их физические прототипы. Говоря так, мы вовсе не имеем в виду, что в опытах по методу сравнения можно обойтись без физических стимулов, что они не нужны. Просто физические предметы в данной ситуации выполняют лишь вспомогательную (хотя и необходимую) роль источника идей, поэтому они при описании метода сравнения и не упоминаются.

Но если испытуемый не имеет прямого доступа к физическим предметам, то как же тогда можно изучать методом сравнения процессы восприятия предметов, то есть преобразование предметов в их субъективные образы? Ведь для того, чтобы выявить и описать связь предмета с его образом, необходимо их друг с другом сравнивать, а это, как мы видим, невозможно. Процесс же восприятия предметов — неотъемлемая часть интеллектуальной деятельности человека. Таким образом, выходит, что метод сравнения нельзя признать универсальным, поскольку важная способность интеллекта — восприятие внешних предметов — остается за пределами сферы его применимости.

Отвечая на это возражение, следует согласиться с тем, что испытуемый действительно не имеет непосредственного доступа к физическим предметам, предъявляемым ему для восприятия, и судит о них только по субъективным образам. Как следствие этого сравнивать предмет с его образом он не может. Но это и не требуется. Добраться до физических предметов и дать им математическое описание — это задача, которую должен решать не испытуемый, а исследователь. Именно исследователь регистрирует предъявленный испытуемому набор предметов ξ и его двоичную реакцию t на этот набор. Исследователь экспериментально изучает отношение $L(\xi,t)$ между входным ξ и выходным t сигналами испытуемого и математически его описывает.

Как это практически делается, описано в работе [4, с. 109] на примере задачи о цвете. В роли набора предметов ξ в задаче о цвете выступает пара световых излучений (x_1, x_2), предъявляемых испытуемому. Испытуемый формирует свой двоичный ответ на эту пару, сравнивая цвета u_1 и u_2 излучений x_1 и x_2. Таким образом, испытуемый в своих действиях не выходит за рамки метода сравнения. Производя логико-математическую обработку отношения L, исследователь извлекает из него математическую характеристику цвета u и вид функции $u = F(x)$, связывающей цвет u с соответствующим ему световым излучением x. Как видим, при такой методике исследования сравнивать физический предмет (в нашем примере — световое излучение) с его субъективным образом (цветом) вообще нет надобности.

Остается еще одно обстоятельство, которое может вызвать неудовлетворенность читателя. Если испытуемый не имеет прямого доступа к физическим предметам, то будет ли иметь его исследователь? Изучение физических предметов было переложено с испытуемого на исследователя, но исследователь — такой же человек, как и испытуемый, следовательно, и он подвержен тому же ограничению. Не имея прямого доступа к физическим предметам, исследователь не сможет связывать отношением $L(\xi,t)$ набор предметов ξ с реакцией испытуемого t на этот набор.

В этом возражении посылка верна, но из нее делается ошибочное заключение. Исследователь, как и испытуемый, действительно не имеет прямого доступа к физическим предметам. Он судит о предметах только по их образам, возникающим в его сознании. Но различие между исследователем и испытуемым все же есть. Испытуемый воспринимает предметы только собственными органами чувств, то есть только теми естественными приборами, которыми снабдила его природа. Исследователь же при изучении предметов пользуется всеми доступными ему источниками информации, в том числе всевозможными физическими приборами, созданными наукой и техникой. Поэтому он получает образ предмета более детализированный, чем испытуемый, проникает в структуру предмета глубже, чем это может сделать испытуемый. Хотя полной информации о предмете исследователь тоже не получает, но, используя весь арсенал физических средств, он имеет возможность углубиться в предмет настолько, насколько сочтет нужным, и в той мере, в какой это позволяет современное развитие науки. И этого оказывается достаточно для успешного изучения и формального описания связи между предметом, предъявляемым испытуемому, и образом предмета, возникающим в его сознании.

Поясним сказанное на примере задачи о цвете. Исследователь характеризует световое излучение его спектром. Спектр – это действительно не физический предмет, а всего лишь математическая абстракция, то есть идея. Верно и то, что спектр характеризует собой только часть качеств излучения. Так, спектр ничего не сообщает исследователю о форме электромагнитной волны излучения, о поляризационных и квантовых свойствах света. Вместе с тем, спектр содержит больше информации о световом излучении, чем цвет. В самом деле, когда спектры двух излучений совпадают, то совпадают и их цвета. В данном примере речь идет об излучениях естественного происхождения (солнечный свет, свет светильников и тому подобное), которые все некогерентны. Когерентные излучения, искусственно формируемые лазерами, могут давать видимые глазом биения цвета, аналогичные биениям звука при восприятии ухом. Вследствие этого существуют такие когерентные излучения одинакового спектра, которые порождают разные цвета.). Обратное, вообще говоря, неверно: известно, что существуют такие световые излучения различного спектра, цвета которых воспринимаются испытуемым как совершенно идентичные.

То же самое можно сказать о физической реакции испытуемого на предъявляемый ему предмет: исследователь судит о ней лишь по ее идеальному образу. Исследователь не нуждается в полной характеристике этой реакции. Например его не интересуют подробности комплекса движений, которые совершает испытуемый в процессе кивка головой. Исследователь должен лишь установить, что стоит за этим движением – положительный или отрицательный ответ испытуемого. Следовательно, весь сложный комплекс ответных физических действий испытуемого воспринимается исследователем всего лишь как одна из двух идей – 0 или 1.

Итак, получается, что исследователь связывает отношением L не сам материальный предмет, предъявляемый испытуемому, и не саму его ответную реакцию на этот предмет, но лишь идеальные образы этих двух физических явлений. Мы видим, что исследователь так же как и испытуемый, не выходит в своих действиях за рамки, очерченные методом сравнения. В роли задания для него выступает теория, описывающая предполагаемую зависимость между предметом, предъявленным испытуемому, и его ответной реакцией на этот предмет. А теория – это некоторое отношение. В процессе экспериментальной проверки теории исследователь сравнивает свой образ ξ предмета, воспринимаемого испытуемым, с образом t реакции испытуемого на этот предмет. Если эти два сигнала находятся в отношении $L(\xi,t)$, предписываемом теорией L, то исследователь формирует положительный ответ, если нет – отрицательный.

Но если исследователь не имеет непосредственного доступа к физическим предметам, то как же тогда ему удается формировать и предъявлять испытуемому нужные предметы? И можно ли всерьез говорить об эффективности метода сравнения как средства познания интеллекта, если физические стимулы исследователь предъявляет наобум, вслепую?

Для успешной борьбы с этим возражением нам придется расширить рамки ответа на уже задававшийся вопрос. Имеет ли исследователь прямой доступ к предметам? Раньше мы отвечали – нет, теперь ответим и нет, и да. Дело в том, что о доступе к предметам можно говорить в двух разных смыслах: в смысле контроля и в смысле регулирования. В первом смысле (а только он и рассматривался нами до сих пор) прямого доступа к предметам у исследователя нет: он контролирует параметры сформированного им предмета не непосредственно, а лишь косвенно по субъективному образу. Во втором смысле прямой доступ имеется: исследователь обладает способностью выходить во внешний мир и своими руками непосредственно воздействовать на внешние предметы. Например, производя целенаправленные действия с лампами, светофильтрами, линзами, призмами, ширмами и другими подходящими предметами, исследователь может изменять световое излучение и его спектр.

Итак, получается, что исследователь управляет предметом действительно вслепую. Манипулируя предметом в условиях неполной информации о нем, он не может дважды сформировать один и тот же предмет, поскольку не контролирует все его параметры. Но нужно ли исследователю стремиться к однозначному заданию предмета? Вовсе нет. Ведь в соответствии с требованиями метода сравнения исследователь должен однозначно сформировать нужную идею, а не породивший ее предмет. Беря наугад предмет, исследователь затем сверяет его образ, который он получает с помощью своих органов чувств и физических приборов, с интересующей его заранее выбранной идеей и устанавливает их совпадение или различие. Если имеется различие, то он начинает видоизменять предмет (опять наугад), все время наблюдая за его образом и стремясь приблизить его к заранее заданной идее.

Все это исследователь может делать, поскольку он обладает способностью измерять расстояние между фактическим и желаемым образами предмета (то есть устанавливать степень их близости друг к другу) и определять, становится ли это расстояние в процессе регулирования больше или меньше. Действуя так, исследователь постепенно доводит расстояние до нуля и приходит в итоге к такому предмету, который порождает желаемый образ. Решая ту же самую задачу повторно, исследователь снова придет к нужному образу, однако предмет, порождающий тот же самый образ, получится, вообще говоря, другой. Таким образом, исследователь каждый раз вслепую формирует один из многих возможных вариантов предмета (какой именно – он и сам не знает), тем не менее такой случайно выбранный предмет всегда приводит к нужной идее, а только это и требуется.

Например, формируя световое излучение, исследователь разными способами видоизменяет его качества, контролируя при этом только одно из них, а именно спектр. Если фактический спектр в процессе регулирования излучения удаляется от желаемого, то исследователь возвращается назад и в дальнейшем действует уже как-нибудь иначе, пока не получит одно из возможных излучений заданного спектра. Итак, эффективность метода сравнения приведенным выше возражением не подрывается. Исследователь располагает возможностью однозначно формировать нужные идеи, несмотря на то, что порождающие их физические предметы он однозначно задавать не может.

Вследствие неполного доступа к физическим предметам исследователь никогда не располагает исчерпывающей информацией о них. Как же в этих условиях можно ставить задачу о полном изучении преобразования физического стимула в его образ, возникающий в сознании испытуемого? Ведь таким преобразованием должно связываться полное математическое описание предмета с полным описанием образа этого предмета. Поскольку исчерпывающей характеристики входного сигнала мы не имеем (и иметь не можем), то исчезает та основа, на которой зиждется решение задачи полного формального описания процесса восприятия предметов человеком. Не следует ли отсюда вывод о неуверсальности метода сравнения?

Это возражение преодолевается следующим образом. Оказывается, можно получить исчерпывающее описания преобразования предметов в их образы, даже не располагая полным описанием предметов. Поясним смысл этого утверждения на примере задачи о восприятии цвета. Для математической характеристики излучения исследователь использует не первое попавшее под руку качество света. Он останавливается на спектре в силу его особых качеств. Исследователь включает спектр в характеристику света по той причине, что изменение спектра излучения в ряде случаев приводит к изменению цвета. Однако он не обращает внимания на поляризационные свойства света, поскольку варьирование направлением поляризации излучения при неизменности его спектра никогда не ведет к перемене цвета. Кроме спектра, исследователь не использует в математической характеристике света никаких других его свойств, потому что цвет всецело определяется спектром излучения. Если два излучения имеют одинаковые спектры, то, как бы сильно ни разнились они другими свойствами, порожденные ими цвета будут неотличимы друг от друга.

Ввиду сказанного правомерно утверждать, что для задачи о математическом описании процесса восприятия цвета спектр некогерентного излучения может служить его достаточной характеристикой. Все другие параметры света (в том числе и те, о которых наука пока еще ничего не знает) либо несущественны для цвета, либо однозначно зависят от спектра излучения. Подведем итог: любая математическая характеристика какого бы то ни было физического стимула, которую способен сформировать исследователь, строго говоря, всегда неполна. Но если такая неполная характеристика однозначно определяет образы предметов, возникающие в сознании испытуемого, то одного этого уже достаточно, чтобы получить возможность исчерпывающе описать процесс восприятия этих предметов.

Все качества предмета, независимые от принятой исследователем его характеристики, будут для образа предмета несущественными. И по этой причине их можно не учитывать. А те параметры предмета, которые однозначно выводятся из этой характеристики, тоже нет необходимости учитывать. Поэтому никакой будущий прогресс в познании предметов, которые предъявляет исследователь испытуемому, не позволит улучшить уже имеющееся математическое описание преобразования предмета в его субъективный образ, если оно разработано в соответствии с приведенной выше методикой. Единственно, что можно будет дополнительно сделать, так это перевести описание предмета на язык других его свойств, зависимых от свойств, включенных в исходную характеристику предмета, и за счет этого получить иное описание того же процесса восприятия, которое в логическом смысле будет равносильно первоначальному. Новое описание может оказаться более изящным и удобным, но от этого его логическая сила не возрастает. При желании новое описание можно будет вывести из первоначального чисто формально, как теорему, не привлекая для этого никаких дополнительных экспериментальных данных.

Выше было сказано, что не обязательно располагать полным описанием предметов для получения исчерпывающего формального описания их преобразования в образы. В качестве примера такого неполного, но достаточного описания предмета был приведен спектр светового излучения, успешно используемый в задаче о восприятии цвета. Однако, если подходить к этому вопросу предельно строго, то окажется, что спектр – характеристика недостаточная. Выше говорилось о когерентных излучениях, для которых характеристика света в виде спектра недостаточна. К этому можно добавить, что при очень слабом освещении предметов на результат их зрительного восприятия влияют, кроме спектра, еще и квантовые флуктуации света. Не получится ли так, что при строгом подходе к исследованию интеллекта человека придется без конца уточнять, детализировать и дополнять физическую характеристику предметов, и все же требуемая однозначная зависимость субъективных состояний испытуемого от нее так никогда и не будет достигнута? Если это так, тогда тезис об универсальности метода сравнения теряет силу.

Ответить на данное возражение можно следующим образом. Если задачу о восприятии цвета рассматривать в полном объеме (то есть для множества всевозможных зрительных стимулов), то характеристика света в виде спектра, действительно, будет недостаточной. Однако ничто не мешает исследователю сузить рамки задачи, выделяя в множество всех зрительных стимулов интересующее его подмножество. Например он может в серии опытов ограничиться некогерентными излучениями достаточно большой мощности. При такой постановке задачи даже самый придирчивый критик вынужден будет признать достаточность спектра в роли характеристики светового излучения. Но и в самой широкой постановке задачи о формальном описании восприятия цвета никогда не придется беспредельно усложнять математическую характеристику светового сигнала уже хотя бы потому, что все знания науки о свете конечны, они останутся таковыми и в будущем. То же самое можно сказать и об исследовании любых других процессов восприятия предметов испытуемым (слуха, обоняния и тому подобное.). Вся совокупность знаний, накопленных физикой о материальных предметах и процессах конечна. Поэтому исследователь, даже если б и захотел, не смог бы беспредельно усложнять формальное описание предметов, которые он предъявляет испытуемому при изучении его интеллекта.

Но может случиться так, что в некоторых задачах теории интеллекта даже при использовании всех знаний, которыми располагает современная физика, любая получаемая на базе этих знаний математическая характеристика входных сигналов будет недостаточной. Например исследование обонятельного анализатора по методу сравнения в настоящее время остановлено тем, что физика в силу своей недостаточной развитости не может дать приемлемого описания пахучих веществ. Это обстоятельство ограничивает развитие теории интеллекта методом сравнения. Мы снова приходим к выводу о неуниверсальности метода сравнения.

Ответ на это возражение сводится к следующему. Действительно, недостаточная развитость физической науки в какой-то мере ограничивает разработку некоторых разделов учения о процессах восприятия предметов человеком. Но виноват в этом не метод сравнения, а физика. Никаких ограничений метод сравнения в данном вопросе не накладывает. Как только физика разработает действенные методы и приборы для экспериментального изучения нужных материальных предметов и даст их полноценное математическое описание, так сразу же после этого теория интеллекта сможет приступить к своим исследованиям процессов восприятия человеком этих стимулов по методу сравнения. Таким образом, теория интеллекта должна просто подождать с решением некоторых из своих задач до той поры, пока физика разовьется настолько, что сможет давать полноценные формальные описания предметов.

Кстати говоря, физика не так уж сильно сдерживает развитие теории работы органов чувств. Задача о восприятии цвета в полном объеме обеспечивается достижениями оптики, задача о восприятии пространственных форм – достижениями геометрии, о слуховом восприятии – акустики, о восприятии движения – механики, о восприятии температурной чувствительности кожи – достижениями учения о теплоте и так далее. Так что теория интеллекта располагает широчайшими возможностями для беспрепятственного исследования многих видов восприятия физического мира человеком, и жаловаться на отсутствие работы она пока не может. Не так уж плохо обстоит дело с анализом пахучих веществ. К услугам разработчика теории интеллекта – разнообразнейшие методы химического анализа множества самых разных веществ, огромное число всевозможных газоанализаторов.

Правда, они не всегда могут сравниться по тонкости различения запахов с обонятельным анализатором человека, но здесь вопрос лишь времени. Прогресс в этой области физики идет настолько быстро, что требуемый теорией интеллекта уровень объективного анализа пахучих веществ будет достигнут в обозримый срок.

Любые знания, которые исследователь получает о физическом предмете в результате его изучения, идеальны, они существуют только в сознании людей, значит, они субъективны. Спектр светового излучения – это лишь мысль о предмете, а не сам предмет. Таким образом, исследования интеллекта по методу сравнения страдают субъективностью. Следовательно, они не удовлетворяют требованиям научной строгости.

Это возражение несостоятельно по той причине, что оно основано на смещении понятий. Дело в том, что слова *объективный* и *субъективный* употребляются людьми в двух совершенно различных смыслах – философском и физическом. В философском понимании слово "объективный" в противоположность слову "субъективный" означает "существующий вне человеческого сознания и независимо от него". В физическом понимании термин "объективный" применяется не к внешним предметам, а к мыслям, правильно отражающим природу наблюдаемых материальных процессов и явлений. Говоря об объективности исследований интеллекта человека по методу сравнения, мы имеем в виду второе значение этого слова. Объективная информация о предмете не зависит от того, кто наблюдает или изучает этот предмет, субъективная – зависит. Только в этом заключается различие между ними.

Например спектр представляет собой объективную информацию о световом излучении, поскольку он определяется только самим материальным предметом – излучением и не зависит от того, кто этот спектр измеряет. Цвет, воспринимаемый испытуемым, – это тоже информация о световом излучении, но она субъективна. Цвет зависит не только от породившего его света, но и от испытуемого, увидевшего этот свет. Действительно, функции спектральной чувствительности глаза [4, с. 114] у различных испытуемых неидентичны, поэтому всегда можно найти такие два излучения, цвета которых у одного испытуемого совпадут, а у другого – нет.

Результаты изучения человеческого интеллекта, осуществляемого исследователем по методу сравнения, объективны только в физическом смысле, но не в философском, тем не менее, этого достаточно, чтобы признать их удовлетворяющими стандартам строгости, принятым в физике. Важно подчеркнуть, что субъективная информация об интеллекте после ее исследования по методу сравнения превращается в объективную. Например информация о цвете излучения, возникающая в сознании испытуемого, остается субъективной только до тех пор, пока не проведено математическое описание процесса восприятия цвета испытуемым. После того, как исследователь изучит поведение испытуемого, сравнивающего цвета всевозможных излучений, и на этой основе математически опишет цвет и его зависимость от спектра для данного испытуемого, информация о цвете объективизируется. Теперь цветовую реакцию испытуемого на любое световое излучение можно будет определять даже без помощи испытуемого, просто вычисляя ее по найденному формальному описанию преобразования излучения в цвет.

Проводя серию опытов, исследователь предъявляет испытуемому много идей. Некоторые идеи он должен будет предъявлять многократно. Есть ли гарантия того, что исследователь сможет сформировать ту же самую идею повторно? Гарантию дает память человека. Между двумя предъявлениями одной и той же идеи исследователь ее помнит. Пользуясь своей способностью устанавливать равенство и неравенство идей, он формирует нужную идею, подравнивая ее к идее, хранящейся в памяти.

Но память человека не идеальна, она часто подводит, ее содержимое забывается, размывается, искажается. Как достичь, чтобы к моменту повторного предъявления идея не изменилась? В помощь памяти исследователь может использовать запись, хранящую заданную идею в виде материального предмета. Идею можно записать в форме фразы, таблицы, формулы, графика и тому подобное. Например цветовое ощущение, которое требуется запомнить, исследователь может записать в виде спектра светового излучения. Как показывает повседневная практика, идеи, представленные записями, обычно сохраняются гораздо лучше и дольше, чем те, которые хранятся только в памяти человека.

Конечно, и запись не вечна, она может стереться, затеряться. Исследователь может утратить ключ к ее расшифровке, может ее неправильно понять. Однако точно такое же положение существует не только в теории интеллекта, но и вообще во всей физике. Исследователь любых физических явлений тоже вынужден многократно воспроизводить одни и те же условия опыта, при этом у него возникают те же проблемы с их запоминанием. Тем не менее, физика успешно движется вперед в познании мира. Теория интеллекта должна изучить опыт физики и взять на вооружение все те приемы, которые последняя выработала за многие века своего существования. Было бы неразумно пытаться проводить исследования в теории интеллекта по стандартам строгости более высоким, чем это удается делать в физике.

В процессе проведения опытов исследователь предъявляет испытуемому идеи. Где гарантия того, что в уме испытуемого всегда возникает точно такая же идея, какую исследователь намеривался предъявить испытуемому? Исследователь может осуществить специальную проверку правильности передачи идеи испытуемому. Для этого он может воспользоваться тем же приемом, который практикуется на экзаменах. Чтобы убедиться в том, что учащийся правильно понял материал, преподаватель заставляет его пересказать усвоенную информацию. Если идея, возвратившаяся к исследователю от испытуемого, не совпадает с исходной идеей, то нет оснований полагать, что она была передана без искажений.

Но можно ли быть уверенным в точной передаче идеи в том случае, когда достигнуто совпадение возвратившейся идеи с исходной? Нет, поскольку возможны случайные совпадения. Однако, если учесть, что разных идей очень много, то можно прийти к заключению, что вероятность случайного совпадения идей ничтожно мала. При совпадении исходной и возвращенной идей можно быть практически уверенным, что идея испытуемому передана правильно. Правда возможен случай, когда испытуемый, как попугай, в точности повторяет слова, сказанные ему исследователем, и таким образом имитирует правильное усвоение идеи, которого на самом деле нет. Исследователь может принять специальные меры, чтобы этого не допустить. Он может, к примеру, предложить испытуемому пересказать сообщенную ему идею "своими словами".

Можно ли достичь идеально точного совпадения идей исследователя и испытуемого? По всей видимости, да. Если бы люди не могли передавать идеи друг другу без искажения, то эффективное общение между ними было бы невозможно. Однако практика жизни ясно показывает, что это не так. Но, может быть, идеи передаются неточно, с определенной степенью приближения, и этого достаточно для достижения взаимопонимания между людьми? В некоторых случаях бывает и так, тем не менее, существуют идеи, например, математические утверждения, которые могут передаваться от человека к человеку абсолютно точно. Видимо, если идея ясная и точная, а испытуемый – понятливый, то при достаточном умении исследователь всегда сможет ее донести до сознания испытуемого в полном объеме и неискаженном виде.

Конечно, встречаются идеи неясные, нечеткие, расплывчатые. И они могут представлять интерес, например, в педагогике при выяснении степени усвоения материала учащимися. Но к таким идеям неприменимо требование точной передачи. Представляется, что в теории интеллекта следует по возможности ограничиваться ясными и четко очерченными идеями. По крайней мере, на сегодняшний день в теории интеллекта имеется масса задач, которые можно успешно решать без привлечения нечетких идей. По этой причине мы будем воздерживаться от использования нечетких идей при исследовании интеллекта по методу сравнения.

4. Формирование множества идей испытуемого

Мы рассмотрели метод сравнения, теперь обсудим задачи теории интеллекта, которые можно решать с помощью этого метода. Первая задача, с которой сталкивается исследователь, состоит в том, чтобы сформировать множество A всех тех идей испытуемого, к которым он собирается обращаться в процессе последующего изучения интеллекта испытуемого. Исходным материалом при решении этой задачи исследователю служат его собственные идеи. Руководствуясь ими, исследователь формирует определенные физические предметы. Предъявляя их испытуемому, он рассчитывает возбудить в его уме те или иные идеи из множества A. Например, задаваясь тем или иным спектром, исследователь формирует соответствующее ему световое излучение. Это излучение он предъявляет испытуемому, рассчитывая, что оно вызовет в его сознании ощущение определенного цвета.

Для успешности изучения интеллекта необходимо, чтобы идеи испытуемого однозначно определялись идеями исследователя. Формулируя в первой части работы условие повторяемости, мы говорили о необходимости однозначной зависимости идей испытуемого от физических предметов, порождающих эти идеи. Строго говоря, это не совсем верно: важна не столько однозначная зависимость идей испытуемого от предъявленных ему физических стимулов, сколько их однозначная зависимость от идей исследователя, по которым он формирует физические предметы, порождающие соответствующие идеи в сознании испытуемого.

В соответствии со сказанным формулировка *условия повторяемости* должна быть уточнена: для успешного изучения интеллекта испытуемого его идеи должны однозначно определяться порождающими их идеями исследователя. Когда условие повторяемости выполнено, открывается возможность использовать идеи исследователя в роли имен идей испытуемого. Каждой идее исследователя теперь будет соответствовать в точности одна идея испытуемого. Обратное не обязательно: одной и той же идее испытуемого может соответствовать много различных идей исследователя. Например одному и тому же цвету зрительного ощущения испытуемого соответствуют различные спектры световых излучений, с помощью которых исследователь формирует этот цвет.

Первое, что должен сделать исследователь, желающий сформировать множество идей испытуемого A, – это четко очертить множество всех тех своих идей, которые он предполагает использовать в качестве прообразов идей испытуемого. Обозначим это множество символом $\boldsymbol{A}$. Будем предполагать, что каждой идее множества $\boldsymbol{A}$ соответствует единственная порождаемая ею идея в множестве A. Отсюда следует, что различным идеям множества

A соответствуют различные идеи в множестве $\boldsymbol{A}$. Вместе с тем мы будем допускать существование таких различных идей множества $\boldsymbol{A}$, которым соответствует одна и та же идея в множестве A.

На втором этапе исследователь должен установить, какие из идей множества $\boldsymbol{A}$ порождают одну и ту же идею множества A, а какие – различные. Если исследователь сможет сделать это, то он получит разбиение множества $\boldsymbol{A}$ на смежные классы. При этом идеи исследователя, принадлежащие одному классу разбиения, будут порождать одну и ту же идею испытуемого. Идеям исследователя, которые принадлежат разным классам разбиения, будут соответствовать различные идеи испытуемого. Ничто не мешает исследователю психологически интерпретировать полученные классы разбиения как идеи испытуемого, а само разбиение множества $\boldsymbol{A}$ – как множество A идей испытуемого. Таким образом, задача формирования множества идей испытуемого сводится к построению некоторого разбиения множества идей исследователя на смежные классы.

Как же получить искомое разбиение множества $\boldsymbol{A}$? Найти ответ на этот вопрос нам поможет вводимое ниже понятие *строения идеи*. Несомненно, что идеи испытуемого можно рассматривать как элементы некоторого множества A. Испытуемый обладает способностью устанавливать, равны или не равны переживаемые им идеи, следовательно можно говорить о попарной различимости элементов множества A. Для того чтобы какой-то механизм (а по крайней мере один такой механизм – сознание человека – существует) мог различать идеи, последние должны чем-то отличаться друг от друга, должны иметь различные признаки, детали. Следовательно, идеи должны обладать определенным строением. Если две идеи, взятые сами по себе, не отличаются друг от друга своим строением, то никакой прибор не сможет их различить. Если же хотя бы один прибор, различающий идеи, существует, то отсюда с неизбежностью следует, что эти идеи имеют определенное строение, причем, хотя бы некоторые детали этого строения у них не совпадают.

Может ли исследователь получить информацию о строении идей испытуемого и если да, то каким способом? Если ограничиться методом сравнения, то у исследователя остается единственный возможный источник информации о строении идей испытуемого – его двоичная реакция, вырабатываемая им в ответ на указанное ему задание и предъявленный набор идей. Когда испытуемый, получив от исследователя задание P, реагирует на набор идей ($x_1, x_2,..., x_n$) положительным ответом, то этим он свидетельствует, что идеи $x_1, x_2,..., x_n$ в силу особенностей своего строения способны вступать в отношение L, задаваемое уравнением $P(x_1, x_2,..., x_n)=1$. Когда же исследователь реагирует на набор идей ($x_1, x_2,..., x_n$) отрицательным ответом, это означает, что строение идей $x_1, x_2,..., x_n$ не позволяет им вступать в отношение L.

Выводы

Таким образом, двоичные ответы испытуемого несут в себе (правда, в неявном, зашифрованном виде) определенные сведения о строении идей. Мы полагаем, что глубинный смысл тезиса об универсальности метода сравнения заключается в том, что из двоичных ответов испытуемого можно извлечь всю информацию о строении идей. Задача исследователя, действующего в рамках метода сравнения, состоит в том, чтобы путем логико-математической обработки извлечь из двоичных ответов испытуемого всю заключенную в них информацию о строении идей. Если окажется, что этой информации достаточно для формального описания и искусственного воспроизведения с помощью ЭВМ всех проявлений человеческого интеллекта, тогда можно будет с полным правом утверждать, что метод сравнения на самом деле универсален.

Список литературы. 1. *Бондаренко М.Ф.* Модель равенства идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 3-15. 2. *Бондаренко М.Ф.* Алгебра идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 16-27. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко.* – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. Ун-те, 1984. – 144 с. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко.* – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. – 159 с. 5. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы [Текст] / *А.И. Мальцев.* – М.: Наука, 1970. – 476 с.

Поступила в редколлегию 10.03.2010

УДК 519.7

Метод порівняння / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 28–39.

Пропонується біонічний підхід до проблеми побудови штучного інтелекту. Розвивається спеціалізований математичний апарат для ефективного моделювання роботи механізмів інтелекту людини.

Бібліогр.: 5 найм.

UDC 519.7

Method of comparison / Bondarenko M.F., Shabanov-Kushnarenko S.Yu., Shabanov-Kushnarenko Yu.P. // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 28–39.

It is offered bionic approach to a problem of construction of an artificial intelligence. The specialized mathematical instrument for effective simulation of activity of mechanism of human intellect develops.

Ref.: 5 items.

УДК 519.7

ИЗОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ ИДЕЙ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Рассмотрены проблемы построения эффективного математического аппарата для формализации и моделирования систем искусственного интеллекта. В качестве такого аппарата предложен абстрактный эквивалент алгебры конечных предикатов – алгебра идей. На основе алгебра идей получены некоторые результаты в области формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности человека.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ РАВЕНСТВА, ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1-3]. Задача этих работ – построение абстрактного эквивалента алгебры конечных предикатов, которая, в свою очередь, используется для формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности. Этот абстрактный эквивалент, названный нами алгеброй идей, необходим для дальнейшего развития теории интеллекта. Выбор такого названия обусловлен тем, что элементы множества – носителя алгебры идей, естественным образом интерпретируются как идеи интеллекта (то есть мысли, понятия, вообще – любые субъективные состояния человека), а операции алгебры идей над этими элементами – как действия интеллекта над идеями. В роли прототипа алгебры идей в работе использована алгебра одноместных k-ичных предикатов первого порядка. Разработана аксиоматика алгебры идей.

Развивая алгебру идей, одновременно с этим будем продвигаться вперед и в деле формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности человека. Это будет достигаться посредством *психологической интерпретации* понятий и законов алгебры идей. Правомерность такой интерпретации будет обосновываться в каждом конкретном случае путем экспериментального изучения соответствующих свойств поведения испытуемого. Под *испытуемым* мы подразумеваем того конкретного человека, интеллектуальная деятельность которого подвергается формализации.

1. Формирование множества идей испытуемого

На основании результатов, полученных в работах [1-3], можно перейти к рассмотрению вопроса: как получить разбиение множества $\boldsymbol{A}$. Предположим, что испытуемому дано задание P. Пусть на набор идей $\xi'=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1},\alpha',\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$ он реагирует положительным ответом, а на набор идей $\xi''=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1},\alpha'',\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$ – отрицательным. Имеется ввиду, что $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1},\alpha',\alpha'',\alpha_{i+1},...,\alpha_n$ – идеи исследователя, произвольно выбранные из множества $\boldsymbol{A}$ и выступающие в роли имен идей испытуемого. Своими ответами испытуемый свидетельствует о том, что идеи исследователя α' и α'' порождают в его сознании различные идеи. Следовательно, α' и α'' обозначают различные идеи испытуемого. Таким образом, идеи исследователя α' и α'' должны быть размещены в разных классах разбиения множества $\boldsymbol{A}$. То же самое надо сделать, если окажется, что $P(\xi')=0$ и $P(\xi'')=1$.

Если же опыт покажет, что $P(\xi')=0$ и $P(\xi'')=0$ или $P(\xi')=1$ и $P(\xi'')=1$, то одного этого факта еще не достаточно, чтобы признать идеи испытуемого, порождаемые идеями исследователя α' и α'', идентичными и поместить их в одном классе разбиения. Такой исход эксперимента означает лишь то, что испытуемый по-одинаковому реагирует на свои идеи α' и α'' (вне зависимости от того, совпадают ли они друг с другом или нет). Отсюда, однако, еще не следует, что он будет реагировать на те же идеи по-одинаковому и при любом другом режиме их анализа. Достаточное основание к размещению идей α' и α'' в одном классе разбиения мы получим лишь тогда, когда равенство $P(\xi')=P(\xi'')$ будет иметь место при любом выборе идей $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_n$, числа i и задания P. В этом случае с полным правом можно будет утверждать, что испытуемый не имеет никакой возможности различить свои идеи, числящиеся под именами α' и α''. Таким образом, мы приходим к выводу, что в данном случае идеи исследователя α' и α'' порождают в сознании испытуемого одну и ту же идею.

Напрашивается вопрос, – а что будет, если исследователь не сможет отыскать эксперимент, разделяющий идеи α' и α'', а между тем объективно такой опыт существует (в том смысле, что, будучи кем-то указан, он мог бы быть реализован на практике). Такой случай вполне реален, если принять во внимание астрономическое число возможных экспериментов. Не сделает ли это препятствие неэффективной предложенную выше процедуру формирования множества A, не превратится ли она в безрезультатные поиски “иголки в стоге сена”? Обнадеживающим обстоятельством здесь служит то, что пропуск исследователем некоторых из экспериментов, выявляющих различие идей, не отменяет всей остальной его работы по формированию классов разбиения. Совершив такой пропуск, исследователь получит разбиение множества **A** более грубое, чем истинное разбиение. Если в процессе дальнейшей работы исследователь произведет новые эксперименты, разделяющие неизвестным ранее способом его идеи, то ничто не помешает ему детализировать полученное ранее разбиение множества **A**. В истории развития физики случаи подобной корректировки знания об окружающем нас мире встречались неоднократно. И всегда они воспринимались не как фиаско науки, а как нормальный процесс ее развития.

Рассмотрим еще и такой вопрос: всегда ли описанная выше процедура разделения идей исследователя на классы приводит к вполне определенному разбиению множества M ? Оказывается, не всегда. Разбиение получится вполне определенным только в том случае, когда ответы испытуемого однозначно определяются данным ему заданием и предъявленным ему набором идей, иначе говоря, когда при повторении любого эксперимента его результат всегда повторяется. Это условие означает, что испытуемый при каждом задании P реализует своим поведением вполне определенную двоичную функцию (т.е. предикат) $P(x_1, x_2,..., x_n)$. Сформулированное условие назовем *законом однозначности поведения испытуемого*. Закон этот не будет выполняться, если испытуемый просто выдумывает ответы, а не получает их в результате сравнения своих идей; если он недостаточно внимательно выполняет задание исследователя; если в процессе проведения опыта действуют не учтенные исследователем факторы. Проверка закона однозначности поведения испытуемого всецело находится во власти исследователя, поэтому он всегда сможет не допустить неоднозначных реакций испытуемого. Значит, исследователь всегда сможет сформировать интересующее его множество идей испытуемого при условии, что последний обладает способностью воспроизводить своим поведением любые предикаты, которые потребуются исследователю.

После того как множество идей испытуемого сформировано, исследователь вводит на нем бинарный предикат D , пользуясь следующим правилом: если идеи исследователя, порождающие идеи испытуемого x и y , принадлежат одному классу разбиения, то принимаем $D(x, y) = 1$, в противном случае полагаем $D(x, y) = 0$. Нетрудно убедиться в том, что так введенный на множестве $A \times A$ предикат D является предикатом равенства. В самом деле, ранее было установлено [2], что свойства рефлексивности и подстановочности однозначно определяют предикат равенства.

Рефлексивность предиката D непосредственно вытекает из факта существования разбиения множества **A**. Возможность же построения разбиения обусловлена способом отбора заданий для испытуемого. Как было сказано в последнем абзаце предыдущего пункта, исследователь проводит свои эксперименты лишь с теми заданиями, которые обеспечивают однозначные реакции испытуемого на любые наборы идей. Свойством подстановочности предикат D обладает по той причине, что разбиение множества **A** формировалось именно так, чтобы это свойство выполнялось. Таким образом, наличие свойств подстановочности у предиката D обусловлено самим способом образования множества **A**. Итак, единственность предиката D предопределена той методикой, с помощью которой обследуется поведение испытуемого. Существование предиката D обусловлено тем, что такая методика оказывается эффективной, т.е. фактически приводит к построению вполне определенного предиката, описывающего поведение испытуемого.

Предположим, что исследователь дал задание испытуемому определять, равны или нет предъявляемые ему идеи. Сможет ли он, не опираясь на интроспективное свидетельство испытуемого, вывести из своих экспериментов на испытуемом, что тот производит именно отождествление своих идей, а не какую-либо иную операцию над ними? Да, сможет. Для этого исследователю достаточно при данном задании определить реакции испытуемого на всевозможные пары его идей x, y и убедиться, что все они совпадают со значениями предиката $D(x, y)$.

Но если мы спросим, сможет ли исследователь вывести из чисто объективных наблюдений за поведением испытуемого существование у испытуемого субъективно переживаемых им идей, то на это придется дать отрицательный ответ. Удостовериться в наличии субъективных переживаний может только сам испытуемый, но объективной проверке эта информация не поддается. Исследователь может верить в существование субъективных состояний у испытываемого, а может и не верить. Если исследователь не верит в это, то тем самым лишает себя морального права утверждать, что он изучает внутренний мир испытываемого. В этом случае исследователь может претендовать лишь на то, что он изучает поведение испытуемого.

Сказанное в предыдущем абзаце может привести читателя к выводу, что утверждения противоречивы. Действительно, выше утверждалось, что из экспериментов, в которых изучается только поведение испытуемого, выводится существование классов разбиения множества **A**, которые психологически интерпретируются как идеи испытуемого. Вместе с тем, утверждается, что существование субъективных состояний из наблюдений за поведением испытуемого невыводимо. На самом деле никакого противоречия между этими двумя утверждениями нет. Дело в том, что термин *существование* имеет в русском языке два различных смысла, назовем их *логическим* и *фактическим*. Субъективные состояния испытуемого, которые он переживает в текущий момент времени, существуют в фактическом смысле. Классы же разбиения множества ***A*** существуют в логическом смысле. Поведение испытуемого таково, что дает возможность ввести классы разбиения множества ***A***. Но возможность – это еще не действительность. Классы вводятся не как реально существующие объекты, а лишь как логически возможные абстракции. Классы разбиения можно психологически интерпретировать как реально существующие идеи испытуемого лишь в том случае, когда признается фактическое существование идей испытуемого.

Логическое существование слабее фактического. Если предмет существует фактически, то он существует и в логическом смысле, обратное же верно не всегда. Когда мы говорим, что предмет существует в логическом смысле, то утверждаем лишь то, что этот предмет может существовать и фактически, т.е. ничто не мешает, чтобы данный предмет действительно находился в реальном мире. Например, в логическом смысле всегда существует отрезок прямой, соединяющий любые две точки. Но две точки, отмеченные чернилами на листе бумаги, могут быть отрезком прямой на самом деле не соединены, в данном случае отрезок прямой фактически не существует. Тем не менее, при желании такой отрезок мы всегда можем нарисовать, тогда он будет существовать и фактически. Логически не существует окружности диаметра 5 см, которую можно было бы провести через две точки, отстоящие друг от друга на расстоянии 10 см. Отсюда следует, что и реально такая окружность не может существовать: нельзя практически подобрать такое положение окружности заданного диаметра на листе бумаги, чтобы она проходила через две указанные выше точки.

Если поведение какого-то физического устройства, например, вычислительной машины таково, что допускает введение классов разбиения множества его входных сигналов, отсюда следует, что существование субъективных образов этих сигналов в логическом смысле гарантировано. Но ошибочно было бы только на этом основании утверждать, что устройство на самом деле переживает какие-то субъективные состояния. Для внешнего наблюдателя испытуемый представляет собой всего лишь устройство, преобразующее сигналы, поэтом фактическое существование субъективных состояний у испытуемого из анализа его поведения никак не вытекает. Исследователь вынужден просто верить заявлениям испытуемого, что у того действительно имеются субъективные состояния (мысли, ощущения и т.п.). Если исследователь в это верит, то перед ним появляется задача математического описания субъективных состояний испытуемого, и для ее решения он может воспользоваться приведенным выше методом сравнения. Если же исследователь не склонен верить испытуемому, то он лишается предмета исследования в виде субъективных переживаний испытуемого, и применение каких бы то ни было методов их математического описания становится для него неуместным: теперь их просто не к чему применять.

2. Понятие алгебры идей

Любую алгебраическую систему L_n, которая состоит из множества S_n $(n \in \{1,2,...\})$, содержащего 2^n элементов, отношения равенства $x = y$ и операции $x \vee y$ $(x, y, z \vee y \in S_n)$, назовем *алгеброй идей* если для нее выполняются следующие условия:

1) для любого $x \in S_n$ $\quad x \vee x = x$ (*аксиома идемпотентности*);

2) для любых $x, y \in S_n$ $\quad x \vee y = y \vee x$ (*аксиома коммутативности*);

3) для любых $x, y, z \in S_n$ $\quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (*аксиома ассоциативности*);

4) в множестве S_n содержится элемент 0 такой, что для любого $x \in S_n$ $\quad 0 \vee x = x$ (*аксиома нуля*);

5) в множестве S_n содержатся такие не совпадающие с нулем различные элементы $e_1, e_2, ..., e_n$, что из них и из элементов 0 можно с помощью операции $\vee$ получить любой из элементов множества S_n (*аксиома n-мерности*).

Введенные алгебры идей $L_1, L_2, ...$ являются частным случаем коммутативных идемпотентов [4, с. 83].

Множество S_n назовем *носителем* алгебры идей L_n. Число n назовем *размерностью* алгебры L_n. Элементы множества S_n называем *идеями* алгебры L_n. Будем говорить, что идеи алгебры L_n *n-мерны*. Операцию $x \vee y$ называем *дизъюнкцией* идей x и y. Идею $z = x \vee y$, получаемую в результате выполнения операции дизъюнкции над идеями x и y, будем называть их *логической суммой*. Идеи x и y будем называть *слагаемыми* суммы $x \vee y$. Элемент 0 называем *нулевой идеей* или *нулем* алгебры L_n. Элементы $e_1, e_2, ..., e_n$ называем *базисными идеями* алгебры L_n, а множество $B_n = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ – ее *базисом*. Нулевую и базисные идеи будем называть *образующими идеями* алгебры L_n.

Понятие алгебры идей размерности n $(n \in \{1,2,...\})$ нами было введено не прямым определением, а задано неявно системой логических условий. При таком способе задания понятия не исключен случай, когда не существует ни одного объекта, соответствующего вводимому понятию. Так случилось бы, если бы система условий, задающая понятия алгебры идей размерности n, оказалась бы противоречивой. Поэтому важно доказать, что для каждого $n \in \{1,2,...\}$ существует хотя бы одна конкретная алгебра L_n, являющаяся алгеброй идей размерности n. Если этого не сделать, то у нас не будет гарантии того, что при каждом натуральном n алгебра идей есть нечто реальное, а не просто ни на что не годная фикция. Такую гарантию дает доказываемая ниже *теорема о существовании алгебр идей*.

Теорема 1. *Алебра идей любой размерности n ($n = 1,2,...$) существует.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если нам удастся построить ряд конкретных алгебр $L_1, L_2,...$, являющихся алгебрами идей размерности 1,2,... . Алгебры $L_1, L_2,...$ будем строить с помощью специальной порождающей процедуры, начиная с алгебры L_1 размерности $n=1$ и переходя от алгебры L_{k-1} размерности $n = k-1$ к алгебре L_k размерности $n = k$. Проверку алгебр $L_1, L_2,...$ на их соответствие определению алгебр идей размерности 1,2,... будем вести методом математической индукции по k, начиная с алгебры L_1 и переходя от алгебры L_{k-1} к алгебре L_k.

Алгебру L_1 с номером $k=1$ определяем следующим образом. В роли носителя алгебры L_1 используем множество $S_1 = \{0,\ e_1\}$. В качестве элементов множества S_1 берем символы 0 и e_1. Таким образом, в множестве S_1 содержится $2 = 2^1$ элемента. Операцию $\vee$ дизъюнкции элементов множества S_1 определяем следующим образом: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee e_1 = e_1$, $e_1 \vee 0 = e_1$, $e_1 \vee e_1 = e_1$. Докажем, что так определенная алгебра L_1 удовлетворяет всем аксиомам алгебры идей размерности 1. Проверяем идемпотентность дизъюнкции. По только что принятому определению операции дизъюнкции имеем: $0 \vee 0 = 0$, $e_1 \vee e_1 = e_1$. Следовательно, при любом $x \in S_1$ $x \vee x = x$. Проверяем коммутативность дизъюнкции: $0 \vee e_1 = e_1 = e_1 \vee 0$. Итак, при любых $x, y \in S_1$, $x \vee y = y \vee x$. Из определения операции дизъюнкции выводим аксиому ассоциативности:

$$(0 \vee 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0 \vee (0 \vee 0),$$
$$(0 \vee 0) \vee e_1 = 0 \vee e_1 = 0 \vee (0 \vee e_1),$$
$$(0 \vee e_1) \vee 0 = e_1 \vee 0 = e_1 = 0 \vee e_1 = 0 \vee (e_1 \vee 0),$$
$$(0 \vee e_1) \vee e_1 = e_1 \vee e_1 = e_1 = 0 \vee e_1 = 0 \vee (e_1 \vee e_1),$$
$$(e_1 \vee 0) \vee 0 = e_1 \vee 0 = e_1 \vee (0 \vee 0),$$
$$(e_1 \vee 0) \vee e_1 = e_1 \vee (0 \vee e_1),$$
$$(e_1 \vee e_1) \vee 0 = e_1 \vee 0 = e_1 = e_1 \vee e_1 = e_1 \vee (e_1 \vee 0),$$
$$(e_1 \vee e_1) \vee e_1 = e_1 \vee e_1 = e_1 \vee (e_1 \vee e_1).$$

Мы получили, что при любых $x, y, z \in S_1$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

Проверяем аксиому нуля. В роли нуля алгебры L_1 берем символ 0. Это мы имеем право сделать, поскольку для символа 0 аксиома нуля выполняется. В самом деле: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee e_1 = e_1$. Это означает, что при любом $x \in S_1$ $0 \vee\ x = x$. Проверяем аксиому одномерности. В роли базисного элемента алгебры L_1 принимаем символ e_1. Элемент e_1 – ненулевой, поскольку он не удовлетворяет аксиоме нуля: $e_1 \vee 0 = e_1$, следовательно, $e_1 \vee 0 \neq 0$. Все элементы множества S_1 выражаются через базисный и нулевой элементы с помощью операции $\vee$, т.к. $0 = 0 \vee 0$, $e_1 = 0 \vee e_1$. Итак, аксиома одномерности в алгебре L_1 выполняется. Как видим, построенная нами при $k=1$ алгебра L_1 есть алгебра идей размерности 1. Следовательно, одномерная алгебра идей существует.

Предположим теперь, что уже построена алгебра L_{k-1}, и сконструируем на ее основе алгебру L_k. В роли носителя алгебры L_{k-1} используется множество S_{k-1}, состоящее из 2^{k-1} различных символов. Пусть в алгебре L_{k-1} роль нулевого элемента выполняет символ 0, а в качестве базисных элементов выступают не совпадающие с нулем различные символы $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$. Полагаем, кроме того, что в алгебре L_{k-1} задана двуместная операция $\vee$ дизъюнкции элементов множества S_{k-1}, значениями которой служат элементы того же множества. Имеется в виду, что операция $\vee$ идемпотентна и ассоциативна, а также удовлетворяет аксиомам нуля и (k -1)-мерности.

В роли носителя алгебры L_k берем множество S_k, которое формируется следующим образом. Во-первых, включаем в его состав 2^{k-1} символов, образующих множества S_{k-1}. Во-вторых, включаем в состав множества S_k символ e_k, отличающийся от любого элемента множества S_{k-1}. В-третьих, включаем в состав множества S_k всевозможные символы вида xe_k, где x – произвольный ненулевой элемент множества S_{k-1}. Символ xe_k представляет собой последовательность символов x и e_k. Каждый из 2^{k-1}-1 символов вида xe_k отличается от всех других элементов множества S_k. Действительно, символы xe_k и ye_k, различны. Каждый из символов вида xe_k отличается от любого символа из множества S_{k-1} наличием в его составе символа e_k, стоящего справа. От символа же e_k каждый из символов вида xe_k отличается наличием левой части x. Таким образом, множество S_k составлено из 2^k различных символов. Полагаем, что в алгебре L_k роль нулевого элемента выполняет символ 0, а в качестве базисных элементов используются символы $e_1, e_2, ..., e_k$.

Операцию дизъюнкции элементов в алгебре L_k определяем следующим образом. В качестве логической суммы $z = x \vee y$ любых двух символов $x, y \in S_{k-1}$ берем символ $z \in S_{k-1}$, получаемый в алгебре L_{k-1} в результате выполнения операции дизъюнкции символов x и y. Дизъюнкцию символа e_k с самим собой задаем правилом $e_k \vee e_k = e_k$ (1), с символом 0 – правилами $0 \vee e_k = e_k \vee 0 = e_k$ (2, 3), с любым ненулевым элементом $x \in S_{k-1}$ – правилами $x \vee e_k = e_k \vee x = xe_k$ (4, 5), с любым элементом вида xe_k — правилами $e_k \vee xe_k = xe_k \vee e_k = xe_k$ (6, 7). Дизъюнкцию произвольного символа $x \in S_{k-1}$ с символом вида ye_k задаем правилами $x \vee ye_k = ye_k \vee x = (x \vee y)e_k$ (8, 9) Наконец, дизъюнкцию любых символов вида xe_k и ye_k определяем правилом $xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k$ (10).

Итак, мы полностью построили алгебру L_k. Осталось показать, что введенная в ней операция дизъюнкции обладает свойствами идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, а также удовлетворяет аксиомам нуля и k-мерности. Проверяем идемпотентность дизъюнкции. Для любого элемента $x \in S_{k-1}$, согласно свойству идемпотентности операции $\vee$ в алгебре L_{k-1}, имеем $x \vee x = x$. Для символа e_k по правилу (1) имеем $e_k \vee e_k = e_k$. Для любого символа вида xe_k, согласно правилу (10) и аксиоме идемпотентности в алгебре L_{k-1}, получаем $xe_k \vee xe_k = (x \vee x)e_k = xe_k$.

Проверяем коммутативность. Для любых $x, y \in S_{k-1}$ равенство $x \vee y = y \vee x$ имеет место ввиду коммутативности дизъюнкции в алгебре L_{k-1}. В случае, когда одно из слагаемых x есть элемент из S_{k-1}, а другое — символ e_k, коммутативность вытекает из равенств (2)-(5): если $x=0$, то $x \vee e_k = 0 \vee e_k = e_k = e_k \vee 0 = e_k \vee x$; если же $x \neq 0$, то $x \vee e_k = xe_k = e_k \vee x$. Для случая, когда одно из слагаемых есть символ $x \in S_{k-1}$, а другое — символ вида ye_k, коммутативность вытекает из правил (8) и (9): $x \vee ye_k = (x \vee y)e_k = ye_k \vee x$. Для случая, когда одно слагаемое есть символ e_k, а другое — символ xe_k, коммутативность следует из правил (6) и (7): $e_k \vee xe_k = xe_k = xe_k \vee e_k$. Остался нерассмотренным случай, когда оба слагаемых являются символами вида xe_k и ye_k. Коммутативность в этом случае следует из правила (10) и аксиомы коммутативности дизъюнкции в алгебре L_{k-1}: $xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = (y \vee x)e_k = ye_k \vee xe_k$.

Проверяем ассоциативность дизъюнкции. Множество S_k разбиваем на четыре класса элементов: а) нулевой элемент 0, б) ненулевые элементы множества S_{k-1}, в) элемент e_k, г) элементы вида xe_k. Поскольку в аксиоме ассоциативности $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ фигурируют три элемента x, y и z, то приходится проверять $4^3 = 64$ типа равенств. Если $x, y, z \in S_{k-1}$, то, согласно свойству ассоциативности операции $\vee$ в алгебре L_{k-1}, имеем $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$. Проверяем ассоциативность для случая, когда $x, y, z \in \{0, e_k\}$:

$$(0 \vee 0) \vee e_k = 0 \vee e_k = 0 \vee (0 \vee e_k),$$
$$(0 \vee e_k) \vee 0 = e_k \vee 0 = 0 \vee (e_k \vee 0),$$
$$(e_k \vee 0) \vee 0 = e_k \vee 0 = e_k \vee (0 \vee 0),$$
$$(0 \vee e_k) \vee e_k = e_k \vee e_k = e_k = 0 \vee e_k = 0 \vee (e_k \vee e_k),$$
$$(e_k \vee 0) \vee e_k = e_k \vee e_k = e_k \vee (0 \vee e_k),$$
$$(e_k \vee e_k) \vee 0 = e_k \vee 0 = e_k = e_k \vee e_k = e_k \vee (e_k \vee 0),$$
$$(e_k \vee e_k) \vee e_k = e_k \vee e_k = e_k \vee (e_k \vee e_k).$$

Рассматриваем все оставшиеся случаи, когда в условии ассоциативности присутствует любые элементы, кроме элементов вида xe_k:

$$(x \vee y) \vee e_k = (x \vee y)e_k = x \vee ye_k = x(y \vee e_k),$$
$$(x \vee e_k) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y)e_k = x \vee ye_k = x \vee (e_k \vee y),$$
$$(e_k \vee x) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y) \vee e_k = e_k \vee (x \vee y),$$
$$(x \vee e_k) \vee e_k = xe_k \vee e_k = xe_k = x \vee e_k = x \vee (e_k \vee e_k),$$
$$(e_k \vee x) \vee e_k = xe_k \vee e_k = xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (x \vee e_k),$$
$$(e_k \vee e_k) \vee x = e_k \vee x = xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (e_k \vee x),$$
$$(0 \vee x) \vee e_k = x \vee e_k = x \vee e_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (x \vee e_k),$$
$$(x \vee 0) \vee e_k = x \vee e_k = x \vee (0 \vee e_k),$$
$$(e_k \vee 0) \vee x = e_k \vee x = e_k \vee (0 \vee x),$$
$$(e_k \vee x) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = e_k \vee x = e_k \vee (x \vee 0),$$
$$(0 \vee e_k) \vee x = e_k \vee x = x \vee e_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (e_k \vee x),$$
$$(x \vee e_k) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = x \vee e_k = x \vee (e_k \vee 0).$$

Рассматриваем случаи, когда в условии ассоциативности присутствуют нулевые элементы вида xe_k:

$$(0 \vee 0) \vee xe_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (0 \vee xe_k),$$
$$(0 \vee xe_k) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (xe_k \vee 0) \wedge$$
$$\wedge (xe_k \vee 0) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k (0 \vee 0),$$
$$(0 \vee xe_k) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = 0 \vee (x \vee y)e_k =$$
$$= 0 \vee (xe_k \vee ye_k)(xe_k \vee 0) \vee ye_k =$$
$$= xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (0 \vee ye_k),$$
$$(xe_k \vee ye_k) \vee 0 = (x \vee y)e_k \vee 0 = (x \vee y)e_k =$$
$$= xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (xe_k \vee 0),$$
$$(xe_k \vee ye_k) \vee zy_k = (x \vee y)e_k \vee ze_k = ((x \vee y) \vee z)e_k =$$
$$= xe_k \vee (y \vee z)e_k = xe_k \vee (ye_k \vee ze_k).$$

Проверяем ассоциативность при наличии ненулевых элементов множества S_{k-1} и элементов вида xe_k:

$$(x \vee y) \vee ze_k = ((x \vee y) \vee z)e_k = (x \vee (y \vee z))e_k =$$
$$x \vee (y \vee z)e_k = x \vee (y \vee ze_k),$$
$$(x \vee ye_k) \vee z = (x \vee y)e_k \vee z = (x \vee (y \vee z))e_k =$$
$$= x \vee (y \vee z)e_k = x \vee (ye_k \vee z),$$
$$(xe_k \vee y) \vee z = (x \vee y)e_k \vee z = (x \vee (y \vee z))e_k =$$
$$= (x \vee (y \vee z))e_k = xe_k \vee (y \vee z),$$
$$(x \vee ye_k) \vee ze_k = (x \vee y)e_k \vee ze_k = ((x \vee y) \vee z)e_k =$$
$$= (x \vee (y \vee z))e_k = x \vee (ye_k \vee ze_k),$$
$$(xe_k \vee y) \vee ze_k = (x \vee y) \vee ze_k = (x \vee y)e_k \vee ze_k =$$
$$((x \vee y) \vee z)e_k = (x \vee (y \vee z))e_k = xe_k \vee (y \vee z)e_k =$$
$$= xe_k \vee (y \vee ze_k),$$
$$(xe_k \vee ye_k) \vee z = (x \vee y)e_k \vee z = (x \vee (y \vee z))e_k =$$
$$(x \vee (y \vee z))e_k = xe_k \vee (y \vee z)e_k = xe_k \vee (ye_k \vee z).$$

Рассматриваем случай, когда в условии ассоциативности присутствуют элементы вида xe_k, а также элементы e_k и 0:

$$(e_k \vee e_k) \vee ze_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (e_k \vee xe_k),$$

$$(e_k \vee xe_k) \vee e_k = xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (xe_k \vee e_k),$$

$$(xe_k \vee e_k) \vee e_k = xe_k \vee e_k = xe_k \vee (e_k \vee e_k),$$

$$(e_k \vee xe_k) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = \\ = e_k \vee (xe_k \vee ye_k),$$

$$(xe_k \vee e_k) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (e_k \vee ye_k),$$

$$(xe_k \vee ye_k) \vee e_k = (x \vee y)e_k \vee e_k = (x \vee y)e_k = \\ = xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (ye_k \vee e_k),$$

$$(0 \vee e_k) \vee xe_k = e_k \vee xe_k = xe_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (e_k \vee xe_k),$$

$$(e_k \vee 0) \vee xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (0 \vee xe_k),$$

$$(xe_k \vee e_k) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = xe_k \vee e_k = xe_k \vee (e_k \vee 0),$$

$$(0 \vee xe_k) \vee e_k = xe_k \vee e_k = xe_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (xe_k \vee e_k),$$

$$(e_k \vee xe_k) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (xe_k \vee 0).$$

Осталось проверить два случая, когда в аксиоме ассоциативности фигурируют элемент 0 и элементы вида x, ye_k или элементы вида e_k, x, ye_k, где x, y — любые ненулевые элементы множества S_{k-1}:

$$(0 \vee x) \vee ye_k = x \vee ye_k = (x \vee y)e_k = 0 \vee (x \vee y)e_k = \\ = 0 \vee (x \vee ye_k),$$

$$(x \vee 0) \vee ye_k = x \vee ye_k = x \vee (0 \vee ye_k),$$

$$(xe_k \vee 0) \vee y = xe_k \vee y = xe_k \vee (0 \vee y),$$

$$(xe_k \vee y) \vee 0 = (x \vee y)e_k = xe_k \vee y = xe_k \vee (x \vee 0),$$

$$(0 \vee xe_k) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y)e_k = 0 \vee (x \vee y)e_k = \\ = 0 \vee (xe_k \vee y),$$

$$(x \vee ye_k) \vee 0 = (x \vee y)e_k \vee 0 = (x \vee y)e_k = x \vee ye_k = \\ = 0 \vee (ye_k \vee 0),$$

$$(x \vee e_k) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = x \vee ye_k = \\ = x \vee (e_k \vee ye_k),$$

$$(e_k \vee x) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = \\ = e_k \vee (x \vee y)e_k = e_k \vee (x \vee ye_k),$$

$$(x \vee ye_k) \vee e_k = (x \vee y)e_k \vee e_k = (x \vee y)e_k = \\ = x \vee ye_k = x \vee (ye_k \vee e_k),$$

$$(xe_k \vee y) \vee e_k = (x \vee y)e_k \vee e_k = (x \vee y)e_k = \\ = xe_k \vee y = xe_k \vee (y \vee e_k),$$

$$(e_k \vee xe_k) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y)e_k = \\ = e_k \vee (x \vee y)e_k = e_k \vee (xe_k \vee y),$$

$$(xe_k \vee e_k) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y)e_k = \\ = xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (e_k \vee y).$$

Проверяем аксиому нуля. Для любого $x \in S_{k-1}$, согласно аксиоме нуля в алгебре L_{k-1}, имеем $0 \vee x = x$. Для символа e_k по правилу (2) имеем $0 \vee e_k = e_k$. Для любого символа вида xe_k, согласно правилу (8) и аксиоме нуля в алгебре L_{k-1}, получаем: $0 \vee xe_k = (0 \vee x)\ e_k = xe_k$. Проверяем аксиому k-мерности. По индуктивному предположению для всех $x \in S_{k-1}$ аксиома $(k-1)$-мерности выполняется. Следовательно, все элементы множества S_k, принадлежащие вместе с тем и множеству S_{k-1}, можно получить из базисного и нулевого элементов алгебры L_{k-1} (а значит, из базисных и нулевого элементов алгебр L_k) с помощью операции дизъюнкции. Элемент e_k выражается в виде $e_k = 0 \vee e_k$. Остальные элементы множества S_k имеют вид xe_k, где $x \in S_{k-1}$. Все они выражаются, согласно (4), в виде $xe_k = x \vee e_k$. Итак, мы убедились в том, что введенная в алгебре L_k, операция дизъюнкции обладает свойством идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, а также удовлетворяет аксиомам нуля и k-мерности. Следовательно, теорема доказана.

При доказательстве теоремы о существовании алгебр идей нам пришлось построить ряд конкретных алгебр идей $L_1, L_2, \ldots$. Эти алгебры будем называть *каноническими алгебрами идей*. Носителем канонической алгебры идей L_n служит множество S_n, образованное из всевозможных символов вида $0, e_1, e_2, \ldots, e_n$, а также из всевозможных символов вида $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$, где $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p} \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, $2 \le p \le n$. Каждый такой символ представляет собой последовательность, составленную из двух или более (не обязательно всех) символов, называемых *базисными*, которые расположены в порядке возрастания их номеров. Любой из базисных символов может входить в последовательность $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$ не более одного раза. Например, множество S_1 состоит из двух символов 0 и e_1, множество S_2 — из четырех символов $0, e_1, e_2, e_1e_2$, множество S_3 — из восьми символов 0, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, e_1, e_2, e_3. Множество S_n состоит из 2^n символов.

В канонической алгебре идей L_n операция дизъюнкции определена следующим образом. Дизъюнкция любого элемента x с нулем дает в результате элемент x. Например, $0 \vee e_1e_2 = e_1e_2$, $e_2e_3e_4 \vee 0 = e_2e_3e_4$. Логическая сумма $z = x \vee y$ любых ненулевых элементов $x = e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$ и $y = e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}$ ($p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$) формируется по следующему правилу: $z = e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_r}$, где $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_r}\} = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}\} \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}\}$. Для получения логической суммы $z = x \vee y$ по этому правилу нужно выбрать из обоих слагаемых $x = e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$ и $y = e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}$ все входящие в них базисные символы $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$, $e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}$ и составить из них последовательность $z = e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_r}$, не допуская в ней повторений базисных элементов и располагая базисные символы в порядке возрастания их номеров. Например, $e_4 \vee e_1 = e_1e_4$, $e_1e_2 \vee e_1 = e_1e_2$, $e_2e_3 \vee e_1e_3e_4 = e_1e_2e_3e_4$.

Элементы множества S_n канонической алгебры идей L_n можно естественным образом расположить в ряд. Начинаем этот ряд символом 0, после него помещаем символ e_1. Это – первый шаг, в результате которого получаем $2 = 2^1$ члена ряда. На втором шаге получаем еще два члена ряда, формируя их из членов ряда, полученных на первом шаге: 0 заменяем на символ e_2, а к символу e_1 дописываем справа символ e_2. В результате имеем уже 2^2 членов ряда: $0, e_1, e_2, e_1e_2$. На третьем шаге получаем еще 2^2 членов ряда, формируя их из элементов уже имеющегося отрезка ряда: 0 заменяем символом e_3, а остальные члены ряда получаем дописыванием справа символа e_3 к последующим членам уже имеющегося отрезка ряда. В результате имеем уже 2^3 членов ряда: 0, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, e_1, e_2, e_3. Процесс построения ряда продолжаем аналогичным образом. На n-ом шаге формируем 2^{n-1} элементов, заменяя в уже имеющемся отрезке ряда 0 на символ e_n и дописывая справа символ e_n к остальным членам ряда. В результате получаем искомый ряд элементов множества S_n, состоящий из 2^n элементов.

Пронумеруем элементы множества S_n в том порядке, в каком они располагаются в построенном нами ряду. Нулевому символу присваиваем номер 0, элементу e_1 – номер 1 и т.д. От каждого элемента нетрудно перейти к его порядковому номеру. Для этого символ e_1 снабжен весовым коэффициентом 2^0, символ e_2 – коэффициентом 2^1, символ e_n – весовым коэффициентом 2^{n-1}. Тогда произвольному элементу $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}$ соответствует порядковый номер

$$2^{i_1-1} + 2^{i_2-1} + ... + 2^{i_p-1},$$

представляющий собой сумму весовых коэффициентов всех символов, составляющих этот элемент. Например, элемент e_2, e_4, e_7 имеет номер

$$2^{2-1} + 2^{4-1} + 2^{7-1} = 2 + 8 + 32 = 42.$$

Нетрудно также от заданного номера N перейти к соответствующему ему элементу множества S_n. Для этого нужно перевести число N в двоичный код $\sigma_n, \sigma_{n-1}, ..., \sigma_2, \sigma_1$. Здесь $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}, \sigma_n$ – двоичные цифры 0 или 1. Элемент множества S_n с номером N строим по следующему правилу. Если в двоичном коде числа N $\sigma_i = 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$, то символ e_i включается в последовательность $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}$, представляющую искомый элемент. Если же $\sigma_i = 0$, то символ e_i в состав элемента $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}$ не включается. К примеру, отыщем элемент, соответствующий номеру 154. Переводя число 154 из десятичной системы в двоичную, получаем двоичный код 10011010. В нем единицы стоят на втором, четвертом, пятом и восьмом местах (считая справа налево). Искомый элемент имеет вид $e_2e_4e_5e_8$.

Важно отметить, что если какой-либо элемент принадлежит множеству S_i, то он принадлежит также и всем множествам S_{i+1}, $S_{i+2}, ...$ $(i = 1, 2, ...)$ большей размерности. Например, элемент e_1e_2, входящий в состав множества S_3, входит также и в множество S_3. Номер любого элемента остается одним и тем же вне зависимости от того, в составе какой алгебры L_i он рассматривается. Например, в алгебрах L_2 и L_3 элемент e_1e_2 имеет один и тот же номер 3. Логическая сумма $x \vee y$ любых двух слагаемых x и y (а также ее номер) будет одной и той же во всех алгебрах, где имеются элементы x, y и $x \vee y$. Все сказанное приводит к выводу, что при любых $i < j$ $(i, j \in \{1, 2, ...\})$ алгебра L_j является просто расширением алгебры L_i. Иначе говоря, алгебра L_i является подалгеброй алгебры L_j. Имеет место вложение любой канонической алгебры меньшей размерности в каноническую алгебру большей размерности. Поэтому можно иметь дело всего лишь с одной алгеброй идей L_n, размерность n которой выбрана остаточно большой с таким расчетом, чтобы все нужные нам алгебры идей оказались фрагментами алгебры L_n. Алгебру идей L_n, обладающую таким свойством, назовем *универсальной канонической алгеброй идей.*

Для примера в таблице 1 представлены значения операции дизъюнкции $x \vee y$ в алгебре L_3.

Таблица 1

x \ y	0	e_1	e_2	e_1e_2	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
0	0	e_1	e_2	e_1e_2	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
e_1	e_1	e_1	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_2	e_2	e_1e_2	e_2	e_1e_2	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_3	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_3	e_1e_3	r	$e_1e_2e_3$
e_1e_3	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_2e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$

Части таблицы, очерченные жирными линиями и имеющие размер 2×2 и 4×4 ячейки, характеризуют операции дизъюнкции соответственно в алгебрах L_1 и L_2. Таблица имеет размер 8×8 ячеек. Достраивая таблицу до размера 16×16 ячеек, можно получить таблицу, задающую операции дизъюнкции идей в алгебре L_4.

Переход от таблицы дизъюнкции идей в алгебре L_{i+1} к таблице дизъюнкции идей в алгебре L_{i+1} можно осуществить следующим способом.

1) Удваиваем вертикальный и горизонтальный размеры уже имеющейся таблицы, добавляя к ней снизу 2^i строк и справа 2^i столбцов.

2) Новые строки и столбцы помечаем элементами множества S_{i+1}, отсутствующими в множестве S_i. Располагаем эти элементы в порядке роста их номеров.

3) Ячейки верхней правой четверти таблицы заполняем, приписывая справа символ e_{i+1} к элементам, расположенным на соответствующих местах верхней левой четверти таблицы. Исключение составляет лишь верхняя левая ячейка, в которую следует занести символ e_{i+1}.

4) Остальные две четверти таблицы (нижнюю левую и нижнюю правую) заполняем точно так же, как и верхнюю правую четверть таблицы.

3. Изоморфизм алгебр идей

Рассмотренные в предыдущей части работы канонические алгебры идей являются конкретным случаем алгебры идей. Теперь мы снова возвратимся к изучению алгебр идей в абстрактном их понимании. Для обозначения n-мерных идей алгебры L_n вводим *формулы алгебры идей* L_n. Формулы будем строить из символов $0, e_1, e_2, ..., e_n$, обозначающих образующие идеи алгебры L_n, символа $\vee$, обозначающего операцию дизъюнкции алгебры L_n, и двух вспомогательных символов – скобок (и). Символы $0, e_1, e_2, ..., e_n$ будут называть *образующими символами* алгебры L_n, а символы $e_1, e_2, ..., e_n$ – *базисными символами* алгебры L_n. Любые конечные последовательности введенных символов будем называть *выражениями* алгебры L_n.

Понятие формулы определяем индуктивно с помощью порождающей процедуры, основанной на следующих двух правилах. 1) Все образующие символы называем формулами алгебры L_n. 2) Если выражения A и B – формулы алгебры L_n, то выражение $(A \vee B)$ называем формулой алгебры L_n. Будем считать, что формула $(A \vee B)$ обозначает идею, получаемую в результате дизъюнкции идей, обозначенных формулами A и B. Нетрудно видеть, что введенные формулы представляют собой графическое изображение всевозможных способов получения идей в алгебре L_n. Из аксиомы n-мерности следует, что для каждой идеи алгебры L_n найдется хотя бы одна обозначающая ее формула. Это означает, что язык формул логической алгебры L_n при любом $n \in \{1, 2, ...\}$ *полон*. Отметим, что выражения и формулы алгебры идей L_n являются вместе с тем выражениями и формулами любых алгебр идей L_{n+1}, L_{n+2},... большей размерности.

Рассмотрим примеры образования формул алгебры идей. Берем трехмерную алгебру идей. В роли символов e_1, e_2, e_3 используем в ней буквы a, b, c. По правилу 1) образуем формулу $(0 \vee b)$, из формул c и $(0 \vee b)$ образуем формулу $(c \vee (0 \vee b))$, из формул $(0 \vee b)$ и b образуем формулу $((0 \vee b) \vee b)$, из формул $(c \vee (0 \vee b))$ и $((0 \vee b) \vee b)$ образуем формулу $((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b))$. Итак, мы построили ряд все более удлиняющихся формул: $0, b, c$, $(0 \vee b)$, $(c \vee (0 \vee b))$, $((0 \vee b) \vee b)$, $((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b))$.

Формулы, обозначающие одну и ту же идею, назовем *тождественными формулами*. Из аксиомы ассоциативности следует, что все формулы, отличающиеся друг от друга лишь положением имеющихся в них скобок, тождественны. Например, формулы

$$((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b)),$$
$$((((c \vee (0 \vee b) \vee 0) \vee (b \vee b)),$$
$$((c \vee 0) \vee (((b \vee 0) \vee b) \vee b))$$

тождественны друг другу. В связи с этим появляется возможность выбросить из формулы все скобки и записывать любые идеи в виде выражений более простых, чем формулы. Выражения получаемые из формул исключением всех скобок, будем называть *бесскобочными формами*. Например, всем трем только что записанным формулам соответствует одна и та же бесскобочная форма $c \vee 0 \vee b \vee 0 \vee b \vee b$.

Далее, из аксиомы коммутативности вытекает возможность сузить класс бесскобочных форм для обозначения всех идей, оставив лишь те из них, у которых образующие символы следуют в порядке $0, e_1, e_2, ..., e_n$. К примеру, одну и ту же идею, представленную тремя различными скобочными формами $c \vee 0 \vee b \vee 0 \vee b \vee b$, $b \vee b \vee 0 \vee b \vee 0 \vee c$ и $0 \vee c \vee 0 \vee b \vee b \vee b$, можно записать единственной формой $0 \vee 0 \vee b \vee b \vee b \vee c$. Кроме того, основываясь на аксиоме идемпотентности, можно упростить запись идеи, оставляя в обозначающей ее бесскобочной форме лишь по одному вхождению образующего символа. Например, идею, записанную в форме $0 \vee 0 \vee b \vee b \vee b \vee c$, можно представить более короткой бесскобочной формой $0 \vee b \vee c$. Наконец, из аксиомы нуля вытекает возможность еще большего упрощения представления идей: из любой бесскобочной формы, кроме формулы 0, можно исключить символ 0, если он там имеется. К примеру, идея, представленная формой $0 \vee b \vee c$, после выбрасывания из этой формы символа 0 запишется более экономной бесскобочной формой $b \vee c$.

Формулу 0 и все бесскобочные формы, в которые не входит символ 0, а базисные символы входят не более, чем по одному разу и расположены в порядке роста их номеров, будем называть *стандартными формами* идей. Формулу 0 будем называть *нулевой стандартной формой*. Ниже приводится *теорема о стандартной форме*.

Теорема 2. *Для каждой идеи алгебры* L_n $(n = 1, 2, ...)$ *существует единственная стандартная форма.*

Доказательство. *Существование.* Каждая ненулевая стандартная форма алгебры L_n имеет вид $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$, где $i_1, i_2, ..., i_p \in \{1, 2, ..., n\}$, $i_1 < i_2 < ... < i_p$, $p \leq n$. Как было сказано ранее, для каждой идеи алгебры L_n найдется хотя бы одна обозначающая ее формула. Вместе с тем, только что было установлено, что для каждой формулы A алгебры идей L_n существует стандартная форма, обозначающая ту же идею, что и формула A. Таким образом, любую идею алгебры L_n можно представить в стандартной форме.

Единственность. Пусть $A = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ – произвольно выбранная ненулевая стандартная форма. Множество $E_A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}\}$ всех базисных символов, присутствующих в форме A *назовем ядром ненулевой стандартной формы* A. *Ядром нулевой стандартной формы* 0 назовем пустое множество $\varnothing$. Ядро каждой стандартной формы является одним из подмножеств множества $B_n = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Каждому подмножеству множества B_n соответствует своя стандартная форма. Таким образом, между стандартными формами и подмножествами множества B_n имеет место взаимное однозначное соответствие. Всего имеется 2^n подмножеств множества B_n. Следовательно, всего существует 2^n различных стандартных форм. С другой стороны, множество B_n состоит из 2^n различных идей алгебры L_n. Таким образом, каждой идее алгебры L_n соответствует единственная стандартная форма. Теорема доказана.

Ниже формулируется и доказывается *теорема об изоморфизме алгебр идей.*

Теорема 3. *Все алгебры идей размерности* n $(n \in \{1, 2, ...\})$ *изоморфны друг другу.*

Доказательство. Только что было доказано, что каждой стандартной форме и ее ядру соответствует своя идея алгебры L_n. Следовательно, каждой идее $x \in L_n$ соответствует свое подмножество E_x базиса B_n. Множество E_x будем называть *ядром* идеи x. Обозначим через C_n систему всех подмножеств базиса B_n. Существует биекция $\Omega: S_n \to C_n$, которая ставит в соответствие каждой идее $x \in L_n$ ее ядро $E_x \in C_x$, так что $E_x = \Omega(x)$.

Докажем, что любая алгебра идей размерности n изоморфна канонической алгебре идей $\mathbf{L}_n$ той же размерности. Все символы, относящиеся к алгебре L_n, будем записывать тонким шрифтом, а символы относящиеся к алгебре $\mathbf{L}_n$ – жирным. Введем биекцию $\Phi: S_n \to \mathbf{S}_n$, определив ее следующим образом: $\Phi(0) = \mathbf{0}$, $\Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p}$. Имеем:

$$\Phi(0 \vee 0) = \Phi(0) = \mathbf{0} = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \Phi(0) \vee \Phi(0),$$

$$\Phi(0 \vee (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p})) = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) =$$

$$= \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} = 0 \vee \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} = \Phi(0) \vee \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}),$$

$$\Phi((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) \vee 0) = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) =$$

$$= \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} \vee \mathbf{0} = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) \vee \Phi(0).$$

В алгебре L_n логическая сумма $z = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee ... \vee e_{k_r}$ любых ненулевых идей $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ и $y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee ... \vee e_{j_q}$ может быть определена, согласно аксиомам идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, следующим правилом: $\{e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee ... \vee e_{k_r}\} = \{e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}\}$ $\cup \{e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee ... \vee e_{j_q}\}$. Для получения логической суммы y по этому правилу нужно выбрать из стандартных форм обоих слагаемых $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ и $y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee ... \vee e_{j_q}$ все входящие в них базисные символы $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}, e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee ... \vee e_{j_q}$ и составить из них стандартную форму $z = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee ... \vee e_{k_r}$, не допуская повторений базисных символов и располагая последние в порядке возрастания их номеров. Как мы знаем, аналогичное правило используется и для образования логической суммы в алгебре $\mathbf{L}_n$.

В силу сказанного имеем:

$$\Phi((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) \vee (e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee ... \vee e_{j_q})) =$$

$$\Phi(e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee ... \vee e_{k_r}) = \mathbf{e}_{k_1}\mathbf{e}_{k_2}...\mathbf{e}_{k_r} = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}...\mathbf{e}_{i_p} \vee$$

$$\vee \mathbf{e}_{j_1}\mathbf{e}_{j_2}...\mathbf{e}_{j_q} = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}) \vee$$

$$\Phi(e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee ... \vee e_{j_q}).$$

Итак, при любых $x, y \in S_n$ имеем:

$$\Phi(x \vee y) = \Phi(x) \vee \Phi(y).$$

Это означает, что любая алгебра идей L_n изоморфна [5, с. 49] канонической алгебре идей $\mathbf{L}_n$. Отсюда непосредственно следует, что все алгебры идей размерности n изоморфны друг другу. Теорема доказана.

Смысл теоремы 3 сводится к тому, что ранее введенному понятию алгебры идей размерности n удовлетворяет единственный абстрактный математический объект. Это означает, что все возможности алгебры идей размерности n отличаются друг от друга лишь используемыми в них обозначениями. По существу же, т.е. в абстрактном смысле, все такие алгебры неразличимы.

Объединяя теоремы о существовании и изоморфизме алгебр идей, мы можем утверждать что *алгебра идей каждой размерности* $n\,(n \in \{1, 2, ...\})$ *существует и единственна (с точностью до изоморфизма).*

Рассмотрим некоторые из возможных интерпретаций алгебры идей размерности n.

а) Алгебра множеств. В качестве носителя S_n алгебры идей L_n при *теоретико-множественной интерпретации* берем систему T_n всех подмножеств множества $R_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ каких-нибудь символов $a_1, a_2, ..., a_n$. В роли элементов множества S_n выступают подмножества системы T_n. В роли нулевой идеи алгебры L_n берем пустое множество $\varnothing$. В роли базисных идей $e_1, e_2, ..., e_n$ в алгебре множеств берем одноэлементные множества $\{a_1\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}$. Под элементом $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ в алгебре множеств понимается множество $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}\}$. Роль операции дизъюнкции в алгебре множеств выполняет операция объединения множеств. Легко проверить, что все аксиомы алгебры идей L_n в алгебре множеств выполняются.

б) Алгебра двоичных наборов. В роли идей алгебры при *двоично-кодовой интерпретации* берем n-компонентные наборы $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ двоичных цифр $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. В роли носителя S_n алгебры L_n в алгебре двоичных кодов принимаем n-ную декартову степень множества {0, 1}. Нулевой идеей алгебры L_n при такой интерпретации служит набор $(0,0,...,0)$, составленный из одних нулей. В роли базисных идей используются всевозможные двоичные наборы, в состав которых входит по одной единице $(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1)$. Под элементом $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ в алгебре двоичных наборов понимается набор, у которого на $i_1,i_2,...,i_p$-том местах стоят единицы, а на остальных местах — нули. Дизъюнкция идей при двоично-кодовой интерпретации определяется как дизъюнкция двоичных наборов:

$$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) \vee (\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) = \\ = (\alpha_1 \vee \beta_1 \vee, \alpha_2 \vee \beta_2,...,\alpha_n \vee \beta_n).$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы алгебры идей L_n в алгебре n-компонентных двоичных наборов выполняются.

Между алгеброй множеств и алгеброй двоичных наборов существует взаимно однозначная связь. Пусть A — произвольно выбранный элемент алгебры множеств, а $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ — соответствующий ему элемент алгебры двоичных наборов. Тогда: если $a_i \in A$, то $\alpha_i = 1$; если $a_i \notin A$, то $\alpha_i = 0$; если $\alpha_i = 1$, то $a_i \in A$; если $\alpha_i = 0$, то $a_i \notin A$ $(i \in \{1,2,...,n\})$. Например, элементу (a_2,a_3,a_5) шестимерной алгебры множеств соответствует элемент $(0,1,1,0,1,0)$ шестимерной алгебры двоичных наборов. Элементу $(1,0,0,0,1,1)$ алгебры двоичных наборов соответствует элемент (a_1,a_5,a_6) алгебры множеств.

в) Алгебра одноместных предикатов первого порядка [6, с. 10]. Идеями в n-мерной алгебре одноместных предикатов первого порядка служат всевозможные предикаты $P(x)$, заданные на множестве $R_n = (a_1,a_2,...,a_n)$ букв $a_1,a_2,...,a_n$. Нулевой идеей здесь служит тождественно ложный предикат. В роли базисных идей используются предикаты узнавания букв $x^{a_1},x^{a_2},...,x^{a_n}$, обращающиеся в 1 соответственно при $x = a_1, x = a_2,...,x = a_n$ и в 0 — при остальных значениях переменной x. Идеей $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ в алгебре одноместных предикатов первого порядка служит предикат $P(x)$, обращающийся в 1 при $x \in \{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_p}\}$ и в 0 — при всех других значениях переменной x. Роль дизъюнкции идей выполняет операция предикатов. Аксиомы 1) – 5) в алгебре одноместных предикатов первого порядка выполняются. Всего имеется 2^n одноместных предикатов первого порядка.

Между алгеброй множеств и алгеброй двоичных наборов, с одной стороны, и алгеброй одноместных предикатов первого порядка, с другой, имеют место следующие связи. Пусть $\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_p}\}$ — произвольно выбранный элемент алгебры множеств. Ему взаимно однозначно соответствует элемент $x^{a_{i_1}},x^{a_{i_2}},...,x^{a_{i_p}}$ алгебры одноместных предикатов первого порядка. Нулевому элементу $\varnothing$ алгебры множеств соответствует тождественно ложный предикат 0. Элементу $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ алгебры двоичных наборов взаимно однозначно соответствует элемент $\alpha_1 \cdot x^{a_1},\alpha_2 \cdot x^{a_2},...,\alpha_n \cdot x^{a_n}$ алгебры одноместных предикатов.

г) Алгебра многоместных предикатов первого порядка. Рассмотрим множество N всевозможных предикатов вида $P(x_1,x_2,...,x_m)$, заданных на декартовом произведении $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$ множеств $M_i = \{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_i}\}$, где $i \in \{1,2,...,m\}$. Множество N принимаем в роли носителя алгебры идей L_n. Всего в области M имеется $n = n_1 n_2 ... n_m$ наборов, в множестве N содержится всего $2^{n_1 n_2 ... n_m}$ предикатов. Размерностью алгебры многоместных предикатов первого порядка служит число n. Дизъюнкцией идей в алгебре многоместных предикатов первого порядка служит операция дизъюнкции предикатов. Нулевой идеей служит предикат 0, тождественно равный нулю. В алгебре многоместных предикатов первого порядка имеется n базисных идей. В их роли выступают всевозможные предикаты P_j $(j = 1,2,...,n)$, обращающиеся в единицу на единственном наборе значений аргументов $(s_1,s_2,...,s_m)$:

$$P_j(x_1,x_2,...,x_m) = \\ = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_1,x_2,...,x_m) = (s_1,s_2,...,s_m), \\ 0, \text{ если } (x_1,x_2,...,x_m) \neq (s_1,s_2,...,s_m). \end{cases} \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы алгебры идей размерности n в алгебре многоместных предикатов первого порядка выполняются.

В теоретико-множественной интерпретации алгебре многоместных предикатов первого порядка соответствует алгебра всех подмножеств декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$. Если P и $(s_1,s_2,...,s_m)$ — соответствующие друг другу элементы алгебры многоместных предикатов первого порядка и алгебры подмножеств декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$, то взаимно однозначная связь между ними определяется правилом: $P(x_1,x_2,...,x_m) = 1$ в том и только в том случае, когда $(s_1,s_2,...,s_m) \in M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$. В двоично-кодовой интерпретации алгебре многоместных предикатов первого порядка соответствует алгебра двоичных кодов длины $n = n_1,n_2,...,n_m$. Связь между многоместным предикатом первого порядка и соответствующим ему двоичным кодом длины n может быть установлена следующим образом. Двоичному коду $x_1, x_2, ..., x_m$ взаимно однозначно соответствует предикат

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \bigvee_{a_1, a_2, ..., a_m} \alpha_i x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}, \qquad (2)$$

где i – номер набора [4, с. 65] $(s_1, s_2, ..., s_m)$.

д) Алгебра предикатов произвольного порядка [7, с. 6]. В ней роль идей алгебры L_n выполняют всевозможные предикаты p-го порядка вида

$$f\,(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m_2}, x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m_1}, ..., x_{p-1,1}, x_{p-1,2}, ..., x_{p-1m_{p-1}}),$$

заданные на декартовом произведении

$$M = M_0^{m_0} \times M_1^{m_1} \times ... \times M_{p-1}^{m_{p-1}}. \qquad (3)$$

Множество M_i $(i = 1, 2, ..., p-1)$ образовано из предикатов i-порядка. Алгебра предикатов p-го порядка имеет размерность

$$n = n_0^{m_0} n_1^{m_1} ... n_{p-1}^{m_{p-1}}. \qquad (4)$$

Числа $n_1, n_2, ..., n_{p-1}$ определяются по следующей рекуррентной формуле

$$n_i = 2^{n_0^{m_0} n_1^{m_1} ... n_{p-1}^{m_{p-1}}}. \qquad (5)$$

где n_0 – число элементов в множестве M_0. В остальном алгебра предикатов произвольного порядка рассматривается аналогично алгебре многоместных предикатов первого порядка.

е) Алгебра булевых функций [8, с. 200]. К алгебре булевых функций приходим, принимая в алгебре идей L_n в роли S_n множество всех m-местных булевых функций. Размерностью алгебры идей в этом случае служит число $n = 2^m$. Всего в множестве S_n содержится $n = 2^{2^m}$ векторов. Нулевой идеей служит m-местная булева функция, тождественно равная нулю. В роли базисных идей выступают всевозможные булевы функции, обращающиеся в единицу лишь на одном наборе значений аргументов. Всего в алгебре m-местных булевых функций имеется 2^m различных базисных идей. В роли операции дизъюнкции идей в данном случае выступает операция дизъюнкции m-местных булевых функций. При $m = 1$ приходим к *алгебре логики*. В этом случае в роли операции дизъюнкции идей выступает дизъюнкция двоичных знаков: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$. Нулевой идеей служит знак 0, единственной базисной идеей – знак 1.

Выводы

В настоящей статье рассмотрены вопросы формирования и факторизации множества идей испытуемого. Проанализированы проблемы строгости предложенного подхода при постановке эксперимента и формализации субъективных состояний человека. Сформулирован закон однозначности поведения испытуемого. Определены условия, при которых предложенная методика оказывается эффективной.

Аксиоматически введена алгебра идей. Она определяется пятью аксиомами. Доказана теорема о существовании алгебры идей любой конечной размерности.

Рассмотрены вопросы построения формул алгебры идей. Формулы определяются индуктивно с помощью порождающей процедуры. Обосновано, что язык формул логической алгебры любой конечной размерности полон. Доказаны теоремы о стандартной форме формул алгебры идей и об изоморфизме алгебр идей размерности n.

Рассмотрены некоторые из возможных интерпретаций алгебры идей размерности n: алгебра множеств, алгебра двоичных наборов, алгебра одноместных предикатов первого порядка, алгебра многоместных предикатов первого порядка, алгебра предикатов произвольного порядка, алгебра булевых функций.

Литература: 1. *Бондаренко М.Ф.* Модель равенства идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 3-15. 2. *Бондаренко М.Ф.* Алгебра идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 16-27. 3. *Бондаренко М.Ф.* Метод сравнения [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 28-39. 4. *Ляпин Е.С.* Полугруппы. – М.: Физматгиз, 1960. – 235 с. 5. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 476 с. 6. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. Ун-те, 1984 – 144 с. 7. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. – 159 с. 8. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962. – 321 с.

Поступила в редколлегию 19.03.2010

УДК 519.7

Ізоморфізми алгебри ідей / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 40–50.

Пропонується біонічний підхід до проблеми побудови штучного интелекту. Розвивається спеціалізований математичний апарат для ефективного моделювання роботи механізмів людського інтелекту.

Бібліогр.: 8 найм.

UDC 519.7

The ideas algebra isomorphisms / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 40–50.

It is offered bionic approach to a problem of construction of an artificial intelligence. The specialized mathematical instrument for effective simulation of activity of mechanism of human intellect develops.

Ref.: 8 items.

УДК 519.7

ИНТЕРПРЕТАЦИИ АЛГЕБРЫ ИДЕЙ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

В статье разработан абстрактный эквивалент алгебры конечных предикатов – алгебра идей. Рассмотрена формальная числовая интерпретация алгебры идей для разных размерностей. В алгебре идей введен частичный порядок. Разработано несколько содержательных интерпретаций алгебры идей – смысловая, ситуационно-предикатная и ситуационно-кодовая.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ РАВЕНСТВА, ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В этих работах рассматривается задача построения абстрактного эквивалента алгебры конечных предикатов, которая, в свою очередь, используется для формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности. Этот абстрактный эквивалент, названный нами алгеброй идей, необходим для дальнейшего развития теории интеллекта. В роли прототипа алгебры идей в работе использована алгебра одноместных k -ичных предикатов первого порядка. Разработана аксиоматика алгебры идей.

1. Числовая интерпретация алгебры идей

В [1] был рассмотрен ряд интерпретаций алгебры идей. В этой статье описывается еще одна интерпретация алгебры идей, называемая нами *алгеброй чисел*. К алгебре чисел приходим, заменяя элементы канонической алгебры идей их номерами. В табл. 1 представлены в виде примера операции дизъюнкции идей (в данной интерпретации – натуральных чисел) при n =1, 2 и 3.

Таблица 1

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	3	3	5	5	7	7
2	2	3	2	3	6	7	6	7
3	3	3	3	3	7	7	7	7
4	4	5	6	7	4	5	6	7
5	5	5	7	7	5	5	7	7
6	6	7	6	6	6	7	6	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7

Можно, если угодно, считать, что таблицей 1 заданы некоторые функции 2-, 4-, и 8-значной логики [2, с. 35]. При n =1 приходим к такой алгебре чисел, для которой роль дизъюнкции идей выполняет операция дизъюнкции двузначной логики. Однако при любом n>1 операция дизъюнкции идей в алгебре чисел не совпадает с дизъюнкцией 2^n -значной логики $x \vee y = \max(x, y)$, поскольку в алгебре чисел любой размерности n>1 1$\vee$2=3, а в 2^n -значной логике 1$\vee$2=2. Имеется важное отличие семейства всех алгебр чисел от семейства всех многозначных логик с операцией дизъюнкции. Оно состоит в том, что алгебры чисел могут быть заданы лишь на множествах, состоящих из 2^n элементов. Многозначные же логики могут быть заданы на множестве с любым числом элементов k .

Опишем на языке алгебры конечных предикатов в форме неявного задания [3, с. 68] операцию дизъюнкции идей для n -мерной алгебры чисел. С этой целью введем предикат

$$P_0(x, y, z) = x^0 y^0 z^0 \tag{1}$$

и предикат $P_k(x, y, z)$, соответствующий отношению $x \overset{k}{\vee} y = z$. Символом $\overset{k}{\vee}$ обозначена операция дизъюнкции идей в алгебре чисел размерности k (k =1,2,...). Предикат $P_{k+1}(x, y, z)$ соответствует отношению $x \overset{k+1}{\vee} y = z$. Символ $\overset{k+1}{\vee}$ обозначает операцию дизъюнкции идей в алгебре чисел размерности $k+1$ Аргументы $P_k(x, y, z)$ предиката $P_k(x, y, z)$ заданы на множестве {0,1,..., 2^k -1}. Предикат P_{k+1} можно выразить через предикат P_k с помощью следующей зависимости:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x, y, z) &= P_k(x, y, z) \vee P_k(x, y-2^k, z-2^k) \vee \\ &\vee P_k(x-2^k, y, z-2^k) \vee P_k(x-2^k, y-2^k, z-2^k). \end{aligned} \tag{2}$$

Первое слагаемое, стоящее в правой части равенства (2), задает значения операции $z = x \overset{k+1}{\vee} y$, содержащиеся в левой верхней четверти ее таблицы. Второе слагаемое задает правую верхнюю четверть таблицы. Появление разностей $y-2^k$ и $z-2^k$ на месте второго и третьего аргументов предиката P_k обусловлено тем, что все значения переменных y и z , связанные с ячейками правой верхней четверти таблицы, возрастают на величину 2^k по сравнению со значениями тех же переменных для соответствующих ячеек левой верхней четверти таблицы. Третье слагаемое задает значения операции дизъюнкции идей для нижней четверти таблицы, а четвертое – для правой нижней. Появление разностей на месте аргументов предиката P_k в этих слагаемых обусловлено ростом значений соответствующих переменных на величину 2^k по сравнению с их значениями для левой верхней четверти таблицы. Неявное задание операции дизъюнкции идей для n-мерной алгебры чисел получаем, выражая по формуле (2) предикат P_n через предикат P_n, предикат P_n – через предикат P_{k-2} и т.д. до тех пор, пока не дойдет до предиката P_0. Предикат же P_0 выражаем по формуле (1).

В качестве примера найдем описанным способом формулы, задающие в неявном виде операцию дизъюнкции идей для одномерной и двумерной алгебр чисел. Принимая $k=0$ по формулам (2) и (1) находим:

$$P_1(x,y,z) = P_0(x,y,z) \vee P_0(x,y-2^0,z-2^0) \vee$$
$$\vee P_0(x-2^0,y,z-2^0) \vee P_0(x-2^0,y-2^0,z-2^0) =$$
$$= x^0 y^0 z^0 \vee x^0 (y-1)^0 (z-1)^0 \vee (x-1)^0 y^0 (z-1)^0 \vee$$
$$\vee (x-1)^0 (y-1)^0 (z-1)^0.$$

В алгебре конечных предикатов при любых натуральных значениях x,a,b имеет место следующее равенство:

$$(x-a)^b = x^{a+b} \tag{3}$$

Действительно, если $(x-a)^b = 1$, то $x-a=b$, $x=a+b$, $x^{a+b}=1$; если же $(x-a)^b=0$, то $x-a \neq b$, $x \neq a+b$, $x^{a+b}=1$. Пользуясь зависимостью (3), получаем окончательное выражение, задающее в неявном виде операцию дизъюнкции идей для одномерной алгебры чисел:

$$P_1(x,y,z) = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1.$$

Используя только что полученную формулу для предиката P_1, с помощью равенств (2) и (3) находим неявное задание операции дизъюнкции идей для двумерной алгебры чисел:

$$P_2(x,y,z) = P_1(x,y,z) \vee P_1(x,y-2^1,z-2^1) \vee P_1(x-2^1,y,$$
$$z-2^1) \vee P_1(x-2^1,y-2^1,z-2^1) = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^1 z^1 \vee$$
$$x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1 \vee x^0 (y-2)^0 (z-2)^0 \vee x^0 (y-2)^1 (z-2)^1 \vee$$
$$\vee x^1 (y-2)^1 (z-2)^1 \vee (x-2)^0 y^1 (z-2)^1 \vee (x-2)^1 y^0 (z-2)^1 \vee$$
$$\vee (x-2)^1 y^1 (z-2)^1 \vee (x-2)^0 (y-2)^0 (z-2)^0 \vee (x-2)^0 \wedge$$
$$\wedge (y-2)^1 (z-2)^1 \vee (x-2)^1 (y-2)^0 (z-2)^1 \vee (x-2)^1 (y-2)^1 \wedge$$
$$\wedge (y-2)^1 (z-2)^1 = \vee x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1 \vee$$
$$\vee x^0 y^2 z^2 \vee x^0 y^3 z^3 \vee x^1 y^2 z^3 \vee x^1 y^3 z^3 \vee x^2 y^0 z^2 \vee x^2 y^1 z^3$$
$$\vee x^3 y^0 z^3 \vee x^3 y^1 z^3 \vee x^2 y^2 z^2 \vee x^2 y^3 z^3 \vee x^3 y^2 z^3 \vee x^3 y^3 z^3.$$

Понятие алгебры идей ранее было определено для размерностей $n=1,2...$. Случай нулевой размерности, как вырожденный, не рассматривался. Однако, при математическом описании операции дизъюнкции идей в алгебре чисел, являющейся одним из вариантов алгебры идей, нам пришлось ввести никак не интерпретируемый предикат P_0. Все остальные предикаты P_k ($k=1,2,...$). были проинтерпретированы как операции дизъюнкции идей в алгебре чисел размерности k. Более естественным было бы рассматривать предикат P_0 в одном ряду с остальными предикатами $P_1, P_{2,...}$ и интерпретировать его как операцию дизъюнкции идей в алгебре чисел нулевой размерности. Таким образом, обнаруживается практическая необходимость введения алгебры идей нулевой размерности. Ниже приведено определение такой алгебры. Оно получено из текста определения алгебры идей размерности $n=1,2,...$ подстановкой вместо символа n числа 0.

Любую алгебраическую систему P_0, которая состоит из множества S_0, содержащего $2^0=1$ элемент, отношения равенства $x=y$ и операции $x \vee y$ ($x,y,x \vee y \in S_0$), назовем *алгеброй идей нулевой размерности*, если для нее выполняются следующие условия:

1) для любого $x \in S_0$ $x \vee x = x$;

2) для любых $x,y \in S_0$ $x \vee y = y \vee x$;

3) для любых $x,y,z \in S_0$ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;

4) в множестве S_0 содержится элемент 0 такой, что для любого $x \in S_0$ $0 \vee x = x$;

5) из элемента 0 можно получить с помощью операции $\vee$ любой элемент множества S_0.

Приведенная формулировка определения алгебры идей нулевой размерности допускает существенное упрощение. В самом деле, на множестве $\{0\}$ можно определить лишь двуместную операцию. Она характеризуется равенством $0 \vee 0=0$. Только эта операция может быть принята в роли дизъюнкции идей алгебры L_0. Эта операция обладает свойствами идемпотентности ($x \vee x = 0 \vee 0 = 0 = x$), коммутативности ($x \vee y = 0 \vee 0 = y \vee x$), ассоциативности ($(x \vee y) \vee z = (0 \vee 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0 \vee (0 \vee 0) = x \vee (y \vee z)$) и нуля ($0 \vee x = 0 \vee 0 = 0 \vee x$). Поэтому требования 1)–4) нет необходимости включать в определение алгебры идей нулевой размерности. Требование 5) также вытекает из только что полученного прямого определения операции дизъюнкции идей, согласно которому $0=0 \vee 0$. Таким образом, алгебру идей нулевой размерности можно определить просто как любое одноэлементное множество с заданными на нем отношениями равенства и бинарной операцией. Ясно, что такая алгебра существует. Для построения формул алгебры L_0 используется единственный образующий символ 0, базисные символы в алгебре идей нулевой размерности отсутствуют. Очевидно, что все алгебры идей нулевой размерности изоморфны друг другу. Таким образом, алгебра L_0 единственна (с точностью до изоморфизма).

Отметим, что формулировку общего определения алгебры идей можно упростить и для одномерного случая, однако это не удается сделать столь радикально, как при $n=0$. Любая двуместная операция, заданная на двухэлементном множестве $S_1=\{0,\ 1\}$, полностью определяется аксиомами идемпотентности, коммутативности и нуля. Действительно, по аксиоме нуля находим $0\vee 0=0$, $0\vee 1=1$. Из аксиомы коммутативности следует $1\vee 0=0\vee 1=1$. Аксиома же идемпотентности дает $1\vee 1=1$. Мы пришли к операции дизъюнкции двоичных знаков, которая как известно, ассоциативна. Аксиома одномерности, очевидно, также выполняется. Таким образом, при $n=1$ аксиомы ассоциативности и одномерности логически выводимы из остальных аксиом, фигурирующих в определении понятия алгебры идей произвольной размерности. Следовательно, эти две аксиомы можно исключить из определения одномерной алгебры идей. Мы приходим к следующему определению. *Одномерной алгеброй идей* называем любую алгебраическую систему, состоящую из двухэлементного множества S_1, отношения равенства $x=y$ и операции $x\vee y$ ($x,y,x\vee y\in S_1$), если для нее при любом $x\in S_1$ $x\vee x=x$, $0\vee x=x$ и при любых $x,y\in S_1$ $x\vee y=y\vee x$.

Оказывается, что аксиомы идемпотентности, коммутативности и нуля, фигурирующие в только что сформулированном определении, логически не зависят друг от друга. Докажем это. Принимаем $S_1=\{0,\ 1\}$. Определим операцию дизъюнкции идей как неравнозначность двоичных знаков $x\vee y=x\oplus y$. Такая операция не удовлетворяет аксиоме идемпотентности ($1\oplus 1=0$), но подчиняется аксиоме коммутативности ($x\oplus y=y\oplus x$) и аксиоме нуля ($0\oplus x=x$). Далее, определяя операцию дизъюнкции идей как функцию $x\vee y=y$, видим, что она некоммутативна ($0\vee 1=1$, $1\vee 0=0$), но идемпотентна ($x\vee x=x$) и удовлетворяет аксиоме нуля ($0\vee y=y$). Наконец, принимая в роли операции дизъюнкции идей конъюнкцию двоичных знаков $x\vee y=xy$, находим, что она идемпотентна ($xx=x$) и коммутативна ($xy=yx$), но не подчиняется аксиоме нуля ($0\cdot 1=0$). Итак, мы доказали независимость аксиом идемпотентности, коммутативности и нуля друг от друга. Поэтому ни одна из этих аксиом не может быть исключена из приведенного выше определения одномерной алгебры идей.

В двумерном случае ни одну из пяти аксиом невозможно исключить из определения алгебры идей. Нельзя обойтись в определении двумерной алгебры идей и без требования четырехэлементности множества S_2. Докажем это. Для доказательства независимости аксиомы ассоциативности определим операцию дизъюнкции идей табл. 2. Для нее аксиома ассоциативности не выполняется, поскольку $(1\vee 2)\vee 2=3\vee 2=0$, но $1\vee(2\vee 2)=$ $=1\vee 2=3$. Вместе с тем, аксиомы идемпотентности, коммутативности и нуля, как явствует из табл. 2, выполняются.

Таблица 2

x \ y	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	0
2	2	3	2	0
3	3	0	0	3

$x\vee y$

Выберем в качестве базисных идей элементы 1 и 2. Так как $1\vee 2=3$, то аксиома двухмерности выполняется. Множество S_2 четырехэлементно. Итак, аксиома ассоциативности невыводима из остальных свойств двумерной алгебры идей.

Для доказательства независимости аксиомы двумерности принимаем в роли операции дизъюнкции идей дизъюнкцию четырехзначной логики $x\vee y=\max(x,y)$. Как известно, она коммутативна, ассоциативна и идемпотентна. Для нее выполняется и аксиома нуля. Множество S_2 четырехэлементно. Однако, аксиома двумерности не выполняется. Это обусловлено тем фактором, что в каждой дизъюнкции четырехзначной логики $a=x\vee y$, выражающей произвольно выбранный элемент $a\in S_2$, хотя бы одно из слагаемых x или y обязательно должно совпадать с элементом a. Например, элемент 3 можно представить только следующими дизъюнкциями четырехзначной логики: $3=0\vee 3=3\vee 0=$ $=1\vee 3=3\vee 1=2\vee 3=3\vee 2=3\vee 3$. В каждой из этих дизъюнкций обязательно присутствует элемент 3. Таким образом, в данном случае существует единственный базис $\{1,\ 2,\ 3\}$, число элементов которого не совпадает с числом 2, как того требует аксиома двумерности.

Четырехэлементность носителя S_2 двумерной алгебры идей не вытекает из совокупности всех остальных свойств этой алгебры. Чтобы доказать это утверждение, определим операцию дизъюнкции идей табл. 3.

Таблица 3

x \ y	0	2	3
0	0	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

$x\vee y$

Нетрудно убедиться в том, что все пять аксиом в данном случае выполняются, однако число элементов в множестве S_2 не равно четырем. Независимость аксиом идемпотентности, коммутативности и нуля непосредственно вытекает из их независимости в одномерной алгебре идей. Итак, мы доказали, что при $n=2$ все шесть рассмотренных выше условий независимы друг от друга, и поэтому их число не может быть уменьшено в рассматриваемом определении алгебры идей. Полученный результат непосредственно распространяется на любые алгебры идей произвольной размерности $n>2$. Отметим, что формулировка аксиомы n-мерности допускает некоторое упрощение, а именно, из нее можно исключить требование попарного различия образующих идей 0, $e_1, e_2, ..., e_n$. Дело в том, что, согласно теореме о стандартной форме, число всех идей в множестве S_n не может превысить величины 2^t, где t – число всех различных ненулевых базисных идей. Если бы некоторые из базисных идей, фигурирующих в определении n-мерной алгебры идей совпали друг с другом или с нулем, то оказалось бы, что $t<n$. Но этот вывод противоречит требованию 2^t-элементности множества S_n. Таким образом, условие попарного различия образующих идей вытекает из совокупности всех остальных свойств, присутствующих в определении n-мерной алгебры идей. С учетом сказанного аксиома n-мерности может быть записана в следующей более простой формулировке: "В множестве S_n содержатся такие элементы $e_1, e_2, ..., e_n$, что из них и из элемента 0 можно с помощью операции $\vee$ получить любой элемент множества S_n".

Опишем на языке алгебры конечных предикатов в форме неявного задания операцию k-значной дизъюнкции ($k=1,2,...$). С этой целью введем предикат $Q_k(x)$, задающий область определения k-значных переменных $\{0,1,..., k-1\}$. Предикат Q_{k+1} выражается через предикат Q_k следующим образом:

$$Q_{k+1}(x) = Q_k(x) \vee x \vee k\,. \qquad (4)$$

Полагаем, что

$$Q_1(x) = x^0\,. \qquad (5)$$

Введем, кроме того, предикат $R_k(x,y,z)$, соответствующий отношению $x \underset{k}{\vee} y = z$. Символ $\underset{k}{\vee}$ обозначает операцию k-значной дизъюнкции: $x \underset{k}{\vee} y = z$

Предикат R_{k+1} выражается через предикат $R_k(x,y,z)$ следующим образом:

$$R_{k+1}(x,y,z) = R_k(x,y,z)Q_{k+1}(x)y^k z^k \vee \\ \vee x^k Q_{k+1}(y) z^k. \qquad (6)$$

Полагаем, что

$$R_1(x,y,z) = x^0 y^0 z^0\,. \qquad (7)$$

Сравнивая между собой формулы (1) и (2), описывающие операцию идей для алгебры чисел, с формулами (4)-(7), описывающими операцию дизъюнкции чисел для многозначной логики, мы обнаруживаем, что эти операции сильно отличаются друг от друга по своему строению. Этот факт свидетельствует о существенном отличии алгебры идей от любой алгебры многозначной логики, в которой дизъюнкция используется в роли базисной операции (например, алгебра Россера-Тьюкетта, алгебра Поста). И, несмотря на то, что операция многозначной дизъюнкции подчиняется аксиомам идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, следовательно, любая такая алгебра многозначной логики, так же как и алгебра идей, относится к коммутативным полугруппам идемпотентов.

На самом деле степень родства между этими двумя алгебрами еще бо́льшая, поскольку и дизъюнкция алгебры идей и дизъюнкция многозначной логики подчиняются также и аксиоме нуля. Кроме того, в обеих алгебрах имеется система образующих элементов. Единственное "маленькое" отличие между алгебрами состоит в том, что базис алгебры идей минимален по числу составляющих его элементов, чего не скажешь о базисе алгебры, основанной на операции многозначной дизъюнкции. Так, при общем числе элементов, равном 2^n, базис алгебры идей состоит из n элементов, а базис многозначной логики – из 2^n-1 элементов. Минимальность базиса алгебры идей непосредственно следует из того ранее доказанного факта, что попарное различие образующих элементов вытекает из совокупности всех остальных свойств, заключенных в определении алгебры идей. Достаточно было бы изъять из аксиомы n-мерности ограничение на число базисных элементов, и любая алгебра 2^n-значной логики с операцией дизъюнкции подошла бы под определение n-мерной алгебры идей.

2. Частичный порядок в алгебре идей

Пусть L_n – произвольно выбранная алгебра идей размерности n, заданная на носителе S_n, для которой определена операция дизъюнкции идей $\vee$. Введем на множестве S_n бинарное отношение $\le$, определив его следующим условием: для любых $x, y \in S_n$ утверждение $x \le y$ равносильно равенству $x \vee y = y$. Докажем, что отношение $\le$ есть *частичный порядок* [4, с.30]. По аксиоме идемпотентности для любого $x \in S_n$ имеем $x \vee x = x$. Это означает, что $x \le y$, т.е. отношение $\le$ рефлексивно. Предположим, что $x, y, z \in S_n$ таковы, что $x \le y$ и $y \le z$. Это означает, что $x \vee y = y$ и $y \vee z = z$. Согласно аксиоме ассоциативности $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, откуда $x \vee z = z$. Мы получили, что $x \le z$. Таким образом, отношение $\le$ транзитивно. Пусть $x, y \in S_k$ таковы, что $x \le y$ и $y \le x$. Это означает, что $x \vee y = y$ и $y \vee x = x$. Пользуясь законом коммутативности, получаем $x = y \vee x = x \vee y = y$. Мы вывели равенство $x = y$, а это означает, что отношение $\le$ антисимметрично. Итак, мы доказали, что отношение $\le$ удовлетворяет всем свойствам, определяющим отношение частичного порядка.

Для примера построим отношение частичного порядка $\le$ на множестве S_3 в канонической алгебре идей L_3. Множество S_3 состоит из восьми идей 0, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, $e_1e_2e_3$. По таблице 4 находим: $0 \vee e_1 = e_1$, $e_1 \vee 0 \neq 0$, следовательно $0 \leq e_1$, $e_1 \nleq 0$. Испытывая таким способом всевозможные пары идей, приходим к следующему отношению частичного порядка $\leq$ на множестве S_3: {(0, 0), (0, e_1), (0, e_2), (0, e_1e_2), (0, e_3), (0, e_1e_3), (0, e_2e_3), (0, $e_1e_2e_3$), (e_1, e_1), (e_1, e_1e_2), (e_1, e_1e_3), (e_1, $e_1e_2e_3$), (e_2, e_2), (e_2, e_1e_2), (e_2, e_2e_3), (e_2, $e_1e_2e_3$), (e_1e_2, e_1e_2), (e_1e_2, $e_1e_2e_3$), (e_3, e_3), (e_3, e_1e_3), (e_3, e_2e_3), (e_3, $e_1e_2e_3$), (e_1e_3, e_1e_3), (e_1e_3, $e_1e_2e_3$), (e_2e_3, e_2e_3), (e_2e_3, $e_1e_2e_3$), ($e_1e_2e_3$, $e_1e_2e_3$)}. В табл. 4 представлены значения предиката $\leq(x,y)$, соответствующего только что построенному отношению $x \leq y$.

Таблица 4

	0	e_1	e_2	e_1e_2	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
0	1	1	1	1	1	1	1	1
e_1	0	1	0	1	0	1	0	1
e_2	0	0	1	1	0	0	1	1
e_1e_2	0	0	0	1	0	0	0	1
e_3	0	0	0	0	1	1	1	1
e_1e_3	0	0	0	0	0	1	0	1
e_2e_3	0	0	0	0	0	0	1	1
$e_1e_2e_3$	0	0	0	0	0	0	0	1

$\leq(x,y)$

Опишем общие правила определения принадлежности или непринадлежности пары (x,y) идей x,y отношению $\leq$ в канонической алгебре идей L_n.

1) При любом $x \in S_n$ ($n \in \{1, 2, ...\}$) пара $(0, x)$ принадлежит отношению $\leq$. Правило непосредственно следует из аксиомы нуля $0 \vee x = x$.

2) При любой ненулевой идее $x \in S_n$ пара $(x, 0)$ не принадлежит отношению $\leq$. Правило непосредственно следует из равенства $x \vee 0 = x$, вытекающего из аксиомы нуля и коммутативности.

3) Пусть $x = e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}$, $y = e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}$, где $p,q \in \{1, 2,... n\}$. Тогда пара (x,y) принадлежит отношению $\leq$ в том и только том случае, если $\{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}\} \subseteq \{e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_q}\}$. Правило означает, что при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ любая пара (x,y) принадлежит отношению $\leq$ в том и только том случае, когда все базисные символы, входящие в состав идеи x, входят также и в состав идеи y.

Справедливость третьего правила можно продемонстрировать на материале только что рассмотренного примера. Так например, $e_1e_3 \leq e_1e_2e_3$, но $e_2e_3 < e_1e_3$, вместе с тем $\{e_1e_3\} \subseteq \{e_1e_2e_3\}$, но $\{e_2e_3\} \nsubseteq \{e_1e_3\}$.

Для доказательства третьего правила достаточно установить, что: а) оно выполняется в алгебре L_1, б) из предположения, что третье правило выполняется в алгебре L_{k-1}, вытекает его выполнение также и в алгебре L_k. В алгебре L_1 имеется всего лишь одна пара (e_1, e_2) ненулевых идей. Поскольку $e_1 \vee e_1 = e_1$, то $e_1 \leq e_1$. Вместе с тем, $\{e_1\} \subseteq \{e_1\}$. Таким образом, третье правило в алгебре L_1 выполняется. Предположим, что в алгебре L_{k-1} третье правило выполняется. Это означает, что для любых $x = e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}$ и $y = e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}$ $(x, y \in S_{k-1})$ условие $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}\}$ равносильно утверждению $x \leq y$. Чтобы доказать выполнение третьего правила в алгебре L_k, достаточно проверить его справедливость для пар вида (x,y), (e_k, e_k), (x, e_k), (e_k, x), (e_k, xe_k), (xe_k, e_k), (x, ye_k), (xe_k, y), (xe_k, ye_k). Здесь имеется в виду, что x, y – произвольные ненулевые идеи, принадлежащие множеству S_{k-1}.

Для пары (x,y) третье правило выполняется по индуктивному предположению. Пара (e_k, e_k) принадлежит отношению $\leq$, поскольку $e_k \vee e_k = e_k$. Вместе с тем, $\{e_k\} \subseteq \{e_k\}$. Пары (x, e_k) и (e_k, x) не принадлежат отношению $\leq$, поскольку $x \vee e_k = e_k \vee x = xe_k$ и $e_k \neq xe_k$, $x_k \neq xe_k$. Вместе с тем, $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}\} \nsubseteq \{e_k\}$ и $\{e_k\} \nsubseteq \{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}\}$. Пара (e_k, xe_k) принадлежит отношению $\leq$, а пара (xe_k, e_k) – нет, поскольку $e_k \vee xe_k = xe_k \vee e_k = xe_k$ и $e_k \neq xe_k$. Вместе с тем, $\{e_k\} \subseteq \{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}, e_k\}$, а $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}, e_k\} \nsubseteq \{e_k\}$. Пара (xe_k, y) не принадлежит отношению $\leq$, поскольку $xe_k \vee y = (x \vee y)e_k \neq y$. Вместе с тем, $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}, e_k\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}\}$.

Если $x \leq y$, то $x \vee y = y$, и тогда пары (x, ye_k), (xe_k, ye_k) принадлежат отношению $\leq$, поскольку $e_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = ye_k$, $xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = ye_k$. Вместе с тем, $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}\}$, откуда $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}, e_k\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}, e_k\}$, $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}, e_k\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}, e_k\}$. Если же $x \nleq y$, то $x \vee y \neq y$ и тогда пары (x, ye_k), (xe_k, ye_k) не принадлежат отношению $\leq$, поскольку $x \vee ye_k = (x \vee y)e_k \neq ye_k$, $xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k \neq ye_k$. Вместе с тем, $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}\} \nsubseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}\}$, откуда $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}\} \nsubseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}, e_k\}$, $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}, e_k\} \nsubseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}, e_k\}$. Итак, справедливость третьего правила доказана.

Описанные выше правила, по которым можно определить, выполняется или нет отношение $x \leq y$ для произвольных идей x и y, легко переводятся с языка канонической алгебры идей на язык формул произвольной алгебры идей. Будем говорить, что нулевая стандартная форма является *частью* любой стандартной формы. Будем, кроме того, считать, что ненулевая стандартная форма $f = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ $(p \geq 1)$ является частью ненулевой стандартной формы $g = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee ... \vee e_{j_q}$ $(g \geq 1)$, если все базисные символы, входящие в состав стандартной формы f, входят также в состав стандартной формы g, иначе говоря, если $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p}\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_q}\}$. Тогда отношение $x \leq y$ будет выполняться в том и только в том случае, когда стандартная форма идеи x является частью стандартной формы идеи y. Например, если $x = e_1 \vee e_3$

и $y = e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4$, то $x \le y$, если же $x = e_2 \vee e_4$ и $y = e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4$, то $x \not\le y$.

Если $x \le y$, то будем говорить, что идея x *меньше или равна* идее y. Если $x \le y$ и $x \ne y$, то будем писать $x < y$ и говорить, что x *меньше* y. Стандартную форму f будем называть *собственной частью* стандартной формы g, если f является частью g и, кроме того, f и g не совпадают друг с другом. Тогда соотношение $x < y$ будет выполняться в том и только том случае, когда стандартная форма идеи x является собственной частью стандартной формы идеи y. Например, если $x = e_1 \vee e_2$ и $y = e_1 \vee e_2 \vee e_4$, то $x < y$, если же $x = e_2 \vee e_3$, $y = e_2 \vee e_3$, то $x \not< y$.

Опишем на языке алгебры конечных предикатов в форме неявного задания отношение $\le$ n-мерной алгебры чисел. С этой целью введем предикат $T_k(x, y)$, соответствующий отношению $x \overset{k}{\le} y$. Символом $\overset{k}{\le}$ обозначено отношение “меньше или равно” в алгебре чисел размерности k (k =0, 1, 2, ..). Аргументы x, y предиката $T_k(x, y)$ заданы на множестве {0, 1, .., 2^k -1}. Поскольку соотношения $x \le y$ и $x \vee y = y$ равносильны, то при любых $x, y \vee S_k$

$$T_k(x, y) = P_k(x, y, y). \qquad (8)$$

Из равенства (8) и равенства (1) выводим:

$$T_0(x, y) = x^0 y^0. \qquad (9)$$

Из равенства (2) и равенства (8) получаем:

$$T_{k+1}(x, y) = P_{k+1}(x, y, y) = P_k(x, y, y) \vee$$
$$\vee P_k(x, y - 2^k, y - 2^k) \vee\ P_k(x - 2^k, y, y - 2^k) \vee$$
$$\vee P_k(x - 2^k, y - 2^k, y - 2^k).$$

Числа y и $y - 2^k$ никогда вместе не принадлежат множеству S_k, поэтому при любом значении переменной y

$$P_k(x - 2^k, y, y - 2^k) = 0.$$

Сказанное приводит к следующему окончательному выражению для предиката T_{k+1}:

$$T_{k+1}(x, y) = T_k(x, y) \vee T_k(x, y - 2^k) \vee$$
$$\vee T_k(x - 2^k, y - 2^k). \qquad (10)$$

В качестве примера найдем с помощью зависимостей (9) и (10) формулы, задающие отношение $x \le y$ для одномерной и двумерной алгебр чисел. Принимая k =0, находим

$$T_1(x, y) = T_0(x, y) \vee\ T_0(x, y - 2^0) \vee\ T_0(x - 2^0, y - 2^0) =$$
$$= x^0 y^0 \vee x^0 (y-1) \vee (x-1)^0 (y-1)^0.$$

Пользуясь зависимостью (3), получаем окончательное выражение, задающее в неявном виде отношение $x \le y$ в одномерной алгебре чисел:

$$T_1(x, y) = x^0 y^0 \vee x^0 y^1 \vee x^0 y^1.$$

Полагая k =1 и рассуждая аналогично, приходим к следующей формуле, задающей отношение “меньше или равно” для двумерной алгебры чисел:

$$T_2(x, y) = x^0 y^0 \vee\ x^0 y^1 \vee\ x^0 y^2 \vee\ x^0 y^3 \vee\ x^1 y^1 \vee$$
$$x^1 y^3 \vee\ x^2 y^2 \vee\ x^2 y^3 \vee\ x^3 y^3.$$

Заметим, что отношению $\le$, введенное в алгебре чисел, не совпадает с одноименным отношением, используемым в арифметике натуральных чисел. В самом деле, в арифметике утверждение $1 \le 2$ является истинным высказыванием, а в логической алгебре чисел это утверждение, как явствует из только что записанной формулы, ложно.

Согласно закону нуля для любого $x \in S_n$ $0 \vee x = x$, следовательно $0 \le x$. Таким образом, идея 0 в множестве S_n – *наименьшая*. В любой алгебре идей L_n при n =1, 2,... можно ввести *единичную идею* или единицу, обозначаемую символом 1, стандартная форма которой, по определению, содержит все базисные символы:

$$1 = e_1 \vee e_2 \vee \ldots \vee e_n. \qquad (11)$$

В алгебре идей нулевой размерности L_0 единичная идея не существует, ввиду отсутствия в множестве S_0 базисных идей. Для любого $x \in S_n$ (n =1, 2, ...) выполняется равенство

$$x \vee 1 = 1, \qquad (12)$$

называемое законом единицы. Действительно, если x =0, то, согласно аксиоме нуля, $0 \vee 1 = 1$. Если же x – ненулевая идея, то она может быть представлена в форме $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}$, где $p \in \{1, 2,.., n\}$. Используя аксиомы идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, а также определение единичной идеи (11), получаем:

$$x \vee 1 = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p} \vee e_1 \vee e_2 \vee \ldots \vee e_n =$$
$$= e_1 \vee e_2 \vee \ldots \vee e_n = 1.$$

Равенство (12) означает, что $x \le 1$ при любом $x \in S_n$ (n =1, 2, ...). Таким образом, единичная идея в множестве S_n – *наибольшая*. Поскольку $0 \ne 1$, то $0 \le 1$.

Заметим, что из аксиом нуля и коммутативности вытекает единственность нулевой идеи. Действительно, предположим, что существуют идеи 0_1 и 0_2, удовлетворяющие аксиоме нуля: $0_1 \vee x = x$ и $0_2 \vee y = y$. Полагая $x = 0_2$ и $y = 0_1$, выводим равенство идей 0_1 и 0_2: $0_1 = 0_2 \vee 0_1 = 0_1 \vee 0_2 = 0_2$. Из закона единицы и аксиомы коммутативности вытекает единственность единичной идеи. Действительно, предположим, что существуют идеи 1_1 и 1_2, удовлетворяющие закону единицы, $x \vee 1_1 = 1_1$, $y \vee 1_2 = 1_2$. Полагая $x = 1_2$ и $y = 1_1$, выводим равенство идей

1_1 и 1_2: $1_1 = 1_2 \vee 1_1 = 1_1 \vee 1_2 = 1_2$. Сказанное позволяет нуль алгебры идей L_n однозначно определить как любую идею $x \in S_n$ (n=0, 1, 2, ...), удовлетворяющую условию: "для всех $x \in S_n$ $a \vee x = x$". Единицу алгебры идей L_n можно однозначно определить как любую идею $b \in S_n$ (n=1, 2, ...), удовлетворяющую условию: "для всех $x \in S_n$ $x \vee b = b$".

Представление идеи z в виде дизъюнкции $z = x \vee y$ идей x и y в случае, когда $x \neq z$ и $y \neq z$, назовем *разложением* идеи z на идеи x и y. Идеи x и y назовем *членами разложения* идеи z. Докажем, что в разложении $z = x \vee y$ всегда $x < z$ и $y < z$. Согласно аксиомам ассоциативности и идемпотентности $x \vee z = x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y = z$, откуда $x \vee z = z$, т.е. $x \leq z$. Т.к. $x \neq z$, то $x < z$. Пользуясь аксиомами коммутативности, ассоциативности и идемпотентности, получаем: $y \vee z = y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y = z$, откуда следует $y \vee z = z$, т.е. $y \leq z$. Поскольку $y \neq z$, то $y < z$. Докажем, далее, что идеи x и y в разложении $z = x \vee y$ всегда различны. Для этого предположим, что $x = y$, тогда, согласно аксиоме идемпотентности, $z = x \vee y = x \vee x = x$, что невозможно, следовательно, $x \neq y$. Наконец, докажем, что каждый из членов x и y разложения $z = x \vee y$ всегда ненулевой. Действительно, пусть $x = 0$, тогда, согласно аксиоме нуля, $z = x \vee y = 0 \vee y = y$. Но $y \neq z$, поэтому $x = 0$. Аналогично доказывается, что $y \neq 0$.

Любую идею z алгебры L_n (n=0, 1, 2, ...), которую можно разложить в сумму $z = x \vee y$, назовем *разложимой*, остальные идеи назовем *неразложимыми*. Установим, какие именно идеи разложимы, а какие – нет. Нулевая идея неразложима. Действительно, если предположить, что нулевая идея имеет разложение $0 = x \vee y$, то окажется, что $x < 0$ и $y < 0$. Но это невозможно, поскольку нулевая идея – наименьшая в множестве S_n. Идеи $e_1, e_2, ..., e_n$ неразложимы. В самом деле, собственной частью стандартных форм идей $e_1, e_2, ..., e_n$ является лишь стандартная форма нулевой идеи. Значит, идеи $e_1, e_2, ..., e_n$ – это наименьшие ненулевые идеи множества S_n. Предположим, что существует разложение $z = x \vee y$ какой-нибудь из идей $e_1, e_2, ..., e_n$. Отсюда вытекает, что $x \neq 0$ и $x < z$. Последнее же невозможно. Все остальные идеи множества S_n разложимы. Действительно, любая такая идея может быть представлена стандартной формой $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$, в которой имеется, по крайней мере, два слагаемых ($p \geq 2$).

Согласно приведенному ранее определению, базисом алгебры идей S_n может служить любое подмножество S_n множества S_n, удовлетворяющее следующим условиям: а) множество S_n состоит из n идей; б) нулевая идея не содержится в множестве S_n; в) из нулевой идеи и из идей множества S_n можно с помощью операции дизъюнкции идей получить любую идею множества S_n. Множество $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ является базисом, поскольку оно удовлетворяет условиям а) - в). Других базисов в алгебре идей S_n не существует. Действительно, ни один базис не может обойтись без всех наименьших ненулевых идей множества S_n, так как каждую из этих идей невозможно представить в виде логической суммы отличных от нее идей, а это ведет к невыполнению условия в). Добавление каких-либо иных идей в множество всех наименьших ненулевых идей недопустимо, поскольку число идей в множестве, полученном таким способом, превысит величину n, а это, в свою очередь, приведет к невыполнению условия а). Итак, в алгебре идей L_n существует единственный базис, и им является множество $L_n = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ всех наименьших ненулевых идей $e_1, e_2, ..., e_n$ множества L_n. Отсюда непосредственно следует, что в множестве L_n содержится всего n наименьших ненулевых идей.

Рассмотрим условие: "Для всех $x, y \in S_n$ из $x \vee y = c$ следует $x = y = c$" (*). *Условию* (*) *удовлетворяет единственный элемент множества* L_n $c = 0$. Действительно, вектор $c = 0$ условию (*) удовлетворяет: если $x \vee y = 0$, то с необходимостью $x = y = 0$, иначе оказалось бы, что $x < 0$ или $y < 0$, что невозможно. Пусть c – любой ненулевой элемент множества L_n. Согласно аксиоме нуля, $0 \vee c = c$. Таким образом, имеет место случай, когда $x \vee y = c$, но $x \neq c$, что противоречит условию (*). Итак, мы доказали, что все ненулевые векторы множества L_n не подчиняются условию (*). Сказанное позволяет принять условие (*) в качестве еще одного определения нулевого вектора алгебры L_n: *нулевым вектором логической алгебры* L_n *назовем любой элемент* $c \in S_n$ *удовлетворяющий условию* (*).

Из этого определения следует, что нулевой вектор встречается в таблице операции сложения любой логической алгебры L_n (n=0, 1, 2, ...) только один раз. Любой же иной вектор $x \in S_n$ встречается в этой таблице более одного раза, поскольку, согласно аксиомам нуля и идемпотентности, $0 \vee x = x$ и $0 \vee x = x$. Пользуясь этим признаком, всегда можно распознать нулевой вектор среди всех векторов при любом способе их обозначения и расположения. В качестве примера найдем нулевой вектор с помощью табл. 5, задающей операцию сложения в одной из трехмерных логических алгебр.

Таблица 5

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	2	2	0	0	0	2	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	1	2	3	0	3	2	1
4	0	2	2	0	4	4	6	6
5	0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	2	2	2	6	6	6	6
7	2	1	2	1	6	7	6	7

$x \vee y$

Изучая таблицу, видим, что элемент, обозначенный символом 0, на самом деле нулевым вектором не является, поскольку встречается в таблице более одного раза. Один раз встречается в этой таблице только элемент 5, следовательно, именно он играет роль нулевого вектора в алгебре с так заданной операцией логического сложения.

3. Содержательная интерпретация алгебры идей

Выше была описана алгебра идей и ее *формальные интерпретации*. В этом разделе рассматриваются *содержательные интерпретации* алгебры идей. Первую из них назовем *смысловой интерпретацией* алгебры идей. В ней элементы множества S_n интерпретируем как мысли или идеи, возникающие в уме данного человека. Именно этой интерпретации алгебра идей обязана своим названием. Конкретного человека, интеллектуальная деятельность которого подвергается изучению, будем называть *испытуемым*. Того, кто производит опыты над испытуемым, называем *исследователем*. Множество S_n интерпретируем как совокупность всевозможных мыслей, которые исследователь может возбудить в уме испытуемого. Желаемую мысль исследователь может возбудить в сознании испытуемого, предъявляя ему специально подобранный *текст*. Мысль, возникающую в уме испытуемого в результате понимания предъявленного ему текста, назовем *смыслом* этого текста.

Каждый текст, используемый исследователем, должен быть *понятным* испытуемому, т.е. должен вызывать в его уме вполне определенную *мысль*. Это требование назовем *условием смысловой определенности текста*. Оно может не выполняться, если предъявить испытуемому невнятно произнесенные фразы, неразборчиво написанные тексты, тексты на незнакомом ему языке, тексты с неизвестными знаками, словами или словесными оборотами, тексты с неправильной или непонятной испытуемому грамматической структурой. Исследователь не должен допускать, чтобы испытуемый вынужден был гадать, что же именно означает предъявленный ему текст. Однако тексты, имеющие несколько различных *смысловых значений*, допускаются. В этом случае под *смыслом* текста понимается совокупность всех возможных его смысловых значений. Примером *двусмысленного текста* может служить фраза “Дочь бранит мать”.

Каждая мысль, возбуждаемая исследователем в уме испытуемого, должна однозначно определяться порождающим ее текстом. Это требование назовем *условием смысловой однозначности текста*. Оно означает, что при повторном предъявлении текста в уме испытуемого должна возникнуть та же самая мысль. Этого можно достичь, если каждый текст, предъявленный испытуемому, будет восприниматься им как *изолированный*. Такой текст не должен связываться испытуемым с каким бы то ни было контекстом, вообще – с какой-либо информацией, которая могла бы изменить его смысл. Невыполнение указанных условий приводит к потере исследователем контроля над мыслями испытуемого. В этом случае эффективное изучение механизма мыслительной деятельности человека становится невозможным.

Отношение равенства, заданное на множестве S_n, интерпретируем как способность испытуемого устанавливать совпадение или различие любых мыслей, возникающих в его уме. Пользуясь этой способностью испытуемого, исследователь всегда может проверить выполнение условий смысловой определенности и однозначности текста. Эти условия будут выполняться, если любые две мысли, возбуждаемые одним и тем же текстом в уме испытуемого, всегда воспринимаются им как идентичные. Существуют различные тексты, обладающие одним и тем же смыслом. Тексты, имеющие один и тот же смысл, будем называть *тождественными*. Примером текстов с одинаковым смыслом могут служить предложения “Идет дождь, или светит солнце” и “Светит солнце, или идет дождь”. Вместе с тем, существуют тексты, имеющие разные смыслы. Например, для любого человека, владеющего русским языком, фразы “Идет дождь” и “Светит солнце” имеют различный смысл.

Возьмем предложение A «Идет дождь» и предложение B «Светит солнце” и образуем из них предложение C “Идет дождь, или светит солнце”. Смысл последнего предложения представляет собой множество трех смысловых значений, выражаемых фразами “Идет дождь”, “Светит солнце” и “Идет дождь, и светит солнце”. Продемонстрированный на этом примере способ образования мысли c, заданной текстом C, из произвольно взятых мыслей a и b, заданных текстами A и B, рассматриваем как операцию дизъюнкции $c = a \vee b$ алгебры идей. Смысл предложения C рассматриваем как логическую сумму смыслов предложений A и B. Нетрудно убедиться в том, что так заданная *операция дизъюнкции мыслей* подчиняется аксиомам идемпотентности, коммутативности и ассоциативности. Союз *или* рассматриваем как *имя* операции дизъюнкции мыслей. Смысл любого *противоречивого текста*, например, фразы “Идет дождь, и не идет дождь”, рассматриваем как нулевую идею. Такой смысл, как нетрудно убедиться, удовлетворяет аксиоме нуля. Смысл любого *бессодержательного* текста, например, фразы “Идет дождь, или не идет дождь”, рассматриваем как единичную идею. Такой смысл подчиняется закону единицы.

Переходим к рассмотрению второй содержательной интерпретации алгебры идей, называемой нами ситуационно-предикатной. Будем формально представлять испытуемого в виде вполне конечного автомата, задаваемого *функцией переходов* [5, с. 58]

$$U(t)=G(U(t-1),V(t-1)) \tag{13}$$

и *функцией выходов*

$$V(t)=H(U(t-1),V(t-1)). \tag{14}$$

Здесь t — текущее значение *дискретного времени*, т.е. тот момент, в который исследователь производит очередной опыт над испытуемым. Моменты дискретного времени, следующие непосредственно друг за другом, обозначаем числами натурального ряда 0, 1, 2, .., m. Момент 0 называем *начальным*, момент m — *конечным*. В роли m принимаем достаточно большое натуральное число. Переменная t определена на множестве $\{0, 1, 2, ..., m\}$. Число $t-1$ обозначает момент дискретного времени, непосредственно предшествовавший моменту t. В роли *такта* времени, т.е. интервала физического времени между соседними моментами дискретного времени, принимаем достаточно малую величину.

Символом $U(t)$ обозначаем *состояние памяти* испытуемого в текущий момент дискретного времени. Символ $V(t)$ обозначает *состояние физического мира*, окружающего испытуемого, в текущий момент. Выражения $U(t-1)$ и $V(t-1)$ обозначают состояние памяти испытуемого и состояние физического мира в момент дискретного времени, непосредственно предшествовавший текущему моменту. Функция переходов G описывает закон, по которому память испытуемого переходит из состояния $U(t-1)$ в состояние $U(t)$ в результате действия на испытуемого физического мира, находившегося в состоянии $V(t-1)$. Функция выходов H описывает закон, по которому физический мир переходит из состояния $V(t-1)$ в состояние r в результате действий испытуемого, обусловленных состоянием его памяти $U(t-1)$.

Состояние $U(t)$ памяти испытуемого в заданный момент дискретного времени t будем характеризовать с помощью некоторого *слова* [5, с. 75] $T=y_1y_2...y_r$, представляющего собой последовательность букв $y_1y_2...y_r$, взятых из достаточно обширного алфавита R. Полагаем, что длина r слова T достаточно велика и не меняется с течением времени. Каждое слово будем формально представлять в виде бинарного предиката $T(x,y)$, где x — *номер* [5, с. 115] *буквы y в слове* T ($x\in\{1,2,..,r\}$), y — буква, стоящая на x-том месте в слове T ($x\in R$). Полагаем, что предикат T удовлетворяет *условию определенности*

$$\forall x\exists y\, T(x,y)=1 \tag{15}$$

и *условию однозначности*

$$\forall x\forall y'\forall y''(T(x,y')\wedge T(x,y'')\supset(y'=y''))=1. \tag{16}$$

Встречающийся в выражении (16) символ = обозначает *предикат равенства букв*, заданный на декартовом квадрате $R\times R$. Содержательно условия (15) и (16) означают, что на каждом месте в слове T стоит одна-единственная буква.

Предикат T можно выразить следующей формулой алгебры конечных предикатов [5, с. 113]:

$$T(x,y)=x^1(y=y_1)\vee x^2(y=y_2)\vee...\vee x^r(y=y_r). \tag{17}$$

Будем считать, что на части мест в слове T стоят *незначащие буквы* [5, с. 118], которые с течением времени могут замещаться значащими буквами по мере поступления в память испытуемого новой информации и *запоминания* ее. Полагаем, что, кроме запоминания, возможен и обратный процесс *забывания* (*уничтожения* [5, с. 110]) информации, когда по прошествии определенного времени некоторые значащие буквы замещаются незначащими. Мы считаем также возможной *замену* во времени одних значащих букв другими.

Поскольку буквы $y_1,y_2,...,y_r$ могут меняться во времени, будем записывать их, в случае необходимости, в виде $y_1(t),y_2(t),...,y_r(t)$, подчеркивая этим тот факт, что они являются функциями времени. Так как предикат T зависит от букв $y_1,y_2,...,y_r$, то он меняется во времени. Желая отметить это обстоятельство, будем записывать предикат T в виде T_t. С учетом изменившейся символики формулы (17) можем переписать в виде:

$$T_t(x,y)\equiv x^1(y=y_1(t))\vee x^2(y=y_2(t))\vee...\vee \\ \vee x^r(y=y_r(t)). \tag{18}$$

Человек не может одновременно осознавать сразу всю информацию, хранящуюся в его памяти. В каждый момент времени ему доступна лишь некоторая часть содержимого памяти. В соответствии с этим введем предикат $Q_t(t)$, который выделяет [5, с. 107] в слове $T_t(x,y)$ *часть мест*, осознаваемых испытуемым в момент времени t. Воспринимаемая сознанием испытуемого *часть* [5, с. 121] $P_t(x,y)$ *слова* $T_t(x,y)$, стоящая на этих местах, определяется формулой [5, с. 123]:

$$P_t(x,y)\equiv Q_t(x)\wedge T_t(x,y). \tag{19}$$

Выделение части слова можно представить в виде процедуры, выполняемой с помощью *регулируемого селектора* [5, с. 105]. Воспринимаемую сознанием испытуемого часть $P_t(x,y)$ содержимого его памяти будем называть *ситуацией*. Задание испытуемому на восприятие им той или иной ситуации дает исследователь. Например, исследователь может предложить испытуемому посмотреть в окно на открывающийся вид на улицу, вспомнить одно из вчерашних событий или мотив какой-нибудь песни, обратить внимание на свое самочувствие или настроение. Мы полагаем, что образы предметов внешнего мира, формируемые органами чувств, непосредственно нашим сознанием не воспринимаются. Они сначала запоминаются и лишь после этого могут осознаваться.

Образуем множество всевозможных ситуаций N и введем переменную X на этом множестве. Буквой Y будем обозначать идеи из множества S_n. Предположим, что исследователь предъявляет испытуемому ситуацию X и идею Y и предлагает ему определить, реализуется ли в ситуации X идея Y. Например, исследователь просит испытуемого взглянуть в окно на улицу и ответить на вопрос, идет ли там дождь. Если дождь действительно идет, то испытуемый должен отреагировать ответом «да», в противном случае – ответом «нет». Своим поведением испытуемый реализует некоторый предикат $Z = L(X,Y)$, заданный на декартовом произведении $N \times S_n$. В нашем примере в роли ситуации X выступает восприятие испытуемым улицы, роль идеи Y играет смысл фразы «Идет дождь». В роли нулевого значения $Z = 0$ предиката L выступает ответ испытуемого «нет», в роли единичного значения $Z = 1$ – ответ «да». Значение Z предиката L примем за *истинностное значение* высказывания, задающего идею Y. В нашем примере в роли такого высказывания выступает предложение «Идет дождь». Если $Z = 1$, то высказывание, задающее идею Y, считаем *истинным* для ситуации E, если же $Z = 0$, то – *ложным*. Предикат L называем *ситуационно-смысловым*.

При фиксированной идее $Y = A$ бинарный предикат $Z = L(X,Y)$ превращается в унарный. Обозначим этот предикат символом

$$L_A(X) \equiv L(X,A), \tag{20}$$

называя его *ситуационным предикатом*, соответствующим идее A. Очевидно, что разным идеям $A \neq B$ соответствуют различные предикаты L_A и L_B, $L_A(X) \neq L_B(X)$. Действительно, всегда можно подобрать такую ситуацию $X = C$, в которой идея A реализуется, а идея B – нет, т.е. $L_A(C) \neq L_B(C)$. Вместе с тем, реакции испытуемого на любую ситуацию X, соответствующие тождественным текстам, имеющим один и тот же смысл A, очевидно, всегда будут одинаковыми. Это означает, что между любой идеей $A \in S_n$ и соответствующим этой идее ситуационным предикатом $L_A(X)$ существует взаимно однозначное соответствие. Таким образом, предикат $L_A(X)$ может выступать в роли полной характеристики идеи A. Описанную интерпретацию алгебры идей назовем *ситуационно-предикатной*.

Мы получили вторую интерпретацию алгебры идей, тесно связанную с ранее рассмотренной смысловой интерпретацией. Теперь в роли множества S_n выступает множество всевозможных предикатов $L_A(X)$, причем каждой идее A взаимно однозначно соответствует ситуационный предикат $L_A(X)$. Так как множество всех ситуаций конечно, то множество S_n всех ситуационных предикатов $L_A(X)$ конечно. Это означает, что число всех идей, которыми может оперировать испытуемый, конечно. Операции дизъюнкции $A \vee B$ соответствует дизъюнкция $L_A(X) \vee L_B(X)$ ситуационных предикатов L_A и L_B. Очевидно, что операция дизъюнкции ситуационных предикатов идемпотентна, коммутативна и ассоциативна, так что в ситуационно-предикатной интерпретации аксиомы идемпотентности, коммутативности и ассоциативности алгебры идей выполняются. Нулевой идее 0 соответствует тождественно ложный ситуационный предикат $L_0(X) \equiv 0$, единичной идее 1 соответствует тождественно истинный ситуационный предикат $L_1(X) \equiv 1$. Ясно, что аксиома нуля и закон единицы в ситуационно-предикатной интерпретации алгебры идей выполняются.

Если две идеи A и B находятся в отношении частичного порядка

$$A \leq B \tag{21}$$

то соответствующие им ситуационные предикаты удовлетворяют условию

$$\forall X(L_A(X) \supset L_B(X)) = 1. \tag{22}$$

Обратно, если выполнено условие (22), то будет также выполняться условие (21). Таким образом, отношение частичного порядка $A \leq B$ идей A и B интерпретируется как отношение включения $L_A(X) \subseteq L_B(X)$ соответствующих им ситуационных предикатов. Каждой ненулевой минимальной идеи соответствует ситуационный предикат, обращающийся в единицу только на одной единственной ситуации.

Таким образом, каждой базисной идее A соответствует ситуационный предикат $L_A(X)$, удовлетворяющий условию

$$\exists! X \; L_A(X) = 1. \tag{23}$$

Ситуационный предикат L_A, удовлетворяющий условию (23), будем называть *базисным*. Очевидно, что дизъюнкция всех базисных ситуационных предикатов равна тождественно истинному ситуационному предикату, так что закон истинности ситуационно-предикатной интерпретации выполняется. Число n интерпретируем как число всех ситуаций, содержащихся в множестве N. Число всех ситуационных предикатов, заданных на множестве N, равно 2^n, что согласуется с соответствующим требованием в определении алгебры идей. Очевидно, что любой предикат $L_A(X)$ можно представить в виде дизъюнкции некоторых базисных предикатов, так что аксиома n-мерности выполняется.

Перейдем теперь к рассмотрению третьей содержательной интерпретации, которую назовем *ситуационно-множественной*. В этой интерпретации в роли элемента множества S_n, соответствующего идее A, принимаем множество M_A всех ситуаций, удовлетворяющих условию

$$L_A(X) = 1. \tag{24}$$

Дизъюнкции $A \vee B$ идей A и B в данной интерпретации соответствует объединение $M_A \cup M_A$ множеств M_A и M_B. Нулевой идее соответствует пустое множество ситуаций, единичной идее соответствует множество N всевозможных ситуаций. Отношению частичного порядка $A \leq B$ идей A и B соответствует отношение включения $M_A \subseteq M_A$ множеств M_A и M_B. Множество всех идей S_n интерпретируем как систему всех подмножеств множества N. Базисным элементам множества S_n соответствуют множества, состоящие из единственной ситуации.

Последней рассмотрим *ситуационно-кодовую интерпретацию* алгебры идей. Пронумеруем в каком-нибудь порядке все ситуации множества N. Получаем ряд ситуаций $X_0, X_1, ..., X_{2n-1}$. Составим n-компонентный двоичный набор ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$), соответствующий идее A, по следующему правилу: если $X_i \in M_A$ ($x \in \{0, 1, ..., 2^n-1\}$) то принимаем α_i=1, если же $X_i \notin M_A$, то принимаем α_i=0. Так составленный двоичный набор назовем *кодом идеи* A. Множество всех таких двоичных наборов обозначаем буквой K. Очевидно, что между двоичными наборами множества A и идеями множества S_n существует взаимно однозначное соответствие. Дизъюнкции идей соответствует поразрядная дизъюнкция двоичных наборов. Нулевой идее соответствует двоичный набор, составленный из одних нулей, единичной идее соответствует двоичный набор, составленный из одних единиц. Базисным идеям соответствуют двоичные наборы, в состав которых входит одна-единственная единица.

Выводы

Итак, мы видим, что мысли испытуемого поддаются математическому описанию и при том даже многими способами. При этом в сферу формального описания попадает также процесс мышления, представляющий собой ряд операций над мыслями. Мысли можно описывать *абстрактно* как элементы некоторого множества, на котором заданы отношение равенства и одна базисная бинарная операция, называемая дизъюнкцией идей и удовлетворяющая аксиомам идемпотентности, коммутативности, ассоциативности, нуля и n-мерности. Существуют, кроме того, три равносильных друг другу способа *конструктивного* формального описания идей в виде предикатов, множеств или двоичных наборов. Базисная операция над мыслями в этих описаниях представлена соответственно дизъюнкцией предикатов, объединением множеств и поразрядной дизъюнкцией двоичных наборах.

Осталось еще проинтерпретировать формулы алгебры идей. Содержательно формулы алгебры идей интерпретируем как тексты, предъявляемые исследователем испытуемому. Каждая формула алгебры идей обозначает некоторый элемент множества S_n. Соответственно этому каждый текст имеет свой смысл, выражает некоторую мысль. Понятию тождественности формул соответствует смысловая тождественность текстов. Знаку дизъюнкции, фигурирующему в формулах алгебры идей, соответствует союз «или», встречающийся в текстах. На этом, однако, возможности интерпретации формул алгебры идей исчерпываются. Для базисных символов, входящих в формулы алгебры идей, не удается найти аналога в текстах естественного языка. Вместе с тем, обращаясь к реальным текстам, используемым при общении между людьми, например, к предложениям, записанным на русском языке, мы обнаруживаем в них множество таких деталей, для которых нет прототипов в формулах алгебры идей.

Означает ли это, что структура текстов естественного языка не поддается формализации в терминах алгебры идей? Мы полагаем, что делать такой вывод было бы преждевременно. Дело в том, что базис алгебры идей, состоящий из базисных элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ и базисной операции $\vee$ дизъюнкции идей, был нами выбран по существу случайно и без учета особенностей структуры текстов естественного языка. Очевидно, что возможны многие различные варианты определений, задающих равносильные друг другу алгебры идей, основанных на иных базисных элементах и базисных операциях. Вероятность того, что в текстах естественного языка фактически реализовано именно то определение алгебры идей, которое было выбрано нами, весьма невелика. В свете сказанного представляется целесообразным проанализировать структуру текстов естественного языка на предмет выяснения того, какой конкретно набор базисных элементов и операций фактически в них используется. Если это удастся сделать, то можно будет в соответствии с полученными результатами разработать другой, равносильный исходному, вариант определения алгебры идей, допускающий более глубокую ее содержательную интерпретацию.

Литература: 1. *Бондаренко М.Ф.* Изоморфизмы алгебры идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 40-50. 2. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука. 1979 – 395 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. Ун-те, 1984 – 144 с. 4. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 476 с. 5. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Технические средства. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. – 136 с.

Поступила в редколлегию 23.03.2010

УДК 519.7

Інтерпретації алгебри ідей / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 51–61.

Розвинутий абстрактний еквівалент алгебри кінцевих предикатів – алгебри ідей, необхідної для моделювання роботи механізму людського інтелекту. Розроблені формальна і декілька змістовних інтерпретацій алгебри ідей, які дозволяють розширити сферу її практичного застосування.

Бібліогр.: 5 найм.

UDC 519.7

The ideas algebra interpretations / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 51–61.

The conceptual equivalent of the finite predicates algebra that is the ideas algebra that is needed to model the operation of the human intelligence has been developed.The formal algebra and a few intensional interpretations of the ideas algebra that allow to develop the sphere of the practical using have been designed.

Ref.: 5 items.

УДК 519.7

ОБ АЛГЕБРЕ ОДНОМЕСТНЫХ ПРЕДИКАТОВ

М.Ф. Бондаренко[1], Н.П. Кругликова[2], И.А. Лещинская[3], Н.Е. Русакова[4], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[5]

[1, 2, 3, 4, 5] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Алгебра одноместных предикатов стоит особо в ряду алгебр предикатов, поскольку для достижения ее полноты достаточно единственной базисной операции дизъюнкции. В статье рассматриваются варианты алгебр одноместных предикатов с *дизъюнктивным*, *дизъюнктивно-конъюнктивным* и *булевым базисами операций* и с *экономными базисами элементов*. Выполнена *лингвистическая интерпретация рассмотренных алгебр* и показано, что множество *понятийных слов* любого естественного языка с формальной точки зрения представляет собой консервативно расширенную конечную булеву алгебру одноместных предикатов, которая называется *алгеброй слов*. Практическое значение алгебры одноместных предикатов определяется прежде всего тем, что она может выполнить роль ключа, открывающего доступ к системному формальному описанию и воспроизведению на мозгоподобных ЭВМ механизма естественного языка.

АЛГЕБРА ОДНОМЕСТНЫХ ПРЕДИКАТОВ, МИНИМИЗАЦИЯ БАЗИСА ЭЛЕМЕНТОВ, АЛГЕБРА СЛОВ, ПОНЯТИЙНЫЕ СЛОВА

Введение

Дизъюнктивной алгеброй предикатов называется любая *алгебра многоместных предикатов* [1] *типа* $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \in A_i$, $i = \overline{1,m}$, базис операций которой образует единственная операция дизъюнкции, а базис элементов состоит из предикатов 0, 1 и всевозможных предикатов узнавания предмета x_i^a ($a \in A_i$). Любая *дизъюнктивная алгебра многоместных предикатов* ($m \geq 2$) *неполна*. *Дизъюнктивная* же *алгебра одноместных предикатов* типа $P(x)$, $x \in A$ *полна* при любом A. В этой алгебре каждый ненулевой предикат выражается формулой

$$P(x) = \underset{a \in P}{\vee} x^a, \tag{1}$$

кроме того, каждый предикат (в том числе и нулевой) выражается формулой

$$P(x) = \underset{a \in A}{\vee} P(a) x^a. \tag{2}$$

Формулой дизъюнктивной алгебры одноместных предикатов можно записать любое множество. Пусть, к примеру, $P = \{a, b, c\}$. Тогда $P(x) = x^a \vee x^b \vee x^c$. Множество P выражаем равенством $P(x) = 1$: $x^a \vee x^b \vee x^c = 1$; $x \in \{a, b, c\}$. Перечислим *основные законы дизъюнктивной алгебры предикатов*: *идемпотентности* $P \vee P = P$; *коммутативности* $P \vee Q = Q \vee P$; *ассоциативности* $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$; *сохранения единицы* $P \vee 1 = 1$; *исключения нуля* $P \vee 0 = P$; *истинности* $\underset{a \in A}{\vee} x^a = 1$; *ложности* $x^a x^b = 0$, если $a \neq b$. Система всех основных законов дизъюнктивной алгебры одноместных предикатов *полна* при любом A. Основываясь на этих законах можно доказать, к примеру, что $\{a, a, b\} = \{a, b\}$, $\{a, b\} = \{b, a\}$, $\{a, b\} \cup \{c\} = \{a, c\} \cup \{b, c\}$, $\varnothing \cup \{a, b\} = \{a, b\}$. Чтобы сделать это, составляем соответствующие доказываемым соотношениям равенства алгебры одноместных предикатов:

$$x^a \vee x^a \vee x^b = x^a \vee x^b, \quad x^a \vee x^b = x^b \vee x^a,$$

$$(x^a \vee x^b) \vee x^c = (x^a \vee x^c) \vee (x^b \vee x^c),$$

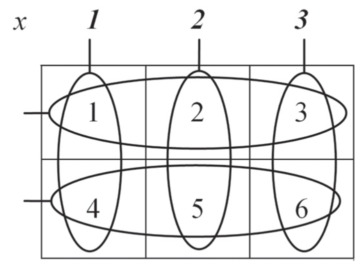
$$0 \vee (x^a \vee x^b) = x^a \vee x^b$$

и устанавливаем, что эти равенства являются ее тождествами.

1. Дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра

Консервативно расширим дизъюнктивную алгебру одноместных предикатов, дополнительно введя в ее базис операцию конъюнкции. Благодаря этому, получаем избыток в базисе вновь сформированной дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры одноместных предикатов. Избавимся от этого избытка за счет консервативного сужения базиса элементов полученной алгебры. Сделаем это вначале на конкретном примере. Берем следующий базис элементов исходной алгебры: $0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$, что соответствует носителю алгебры $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ($x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Ему соответствует система множеств: $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}.

Таблица 1



Располагаем предметы в прямоугольной таблице с размерами 3×2 и формируем из них новые множества в виде взаимно перпендикулярных полос (табл. 1). Эти полосы снабжаем номерами ***1***, ***2***, ***3***, ***4***, ***5***. Введенным множествам соответствуют предикаты:

$$P_1(x) = x^1 \vee x^4,\ P_2(x) = x^2 \vee x^5,$$
$$P_3(x) = x^3 \vee x^6,\ P_4(x) = x^1 \vee x^2 \vee x^3,$$
$$P_5(x) = x^4 \vee x^5 \vee x^6.$$

В результате получаем пять базисных предикатов для вводимой дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов вместо семи базисных предикатов дизъюнктивной алгебры с тем же базисом. Все базисные предикаты исходной алгебры выражаются через базисные предикаты новой алгебры:

$$0 = P_1(x)P_2(x),\ x^1 = P_1(x)P_4(x),$$
$$x^2 = P_2(x)P_4(x),\ x^3 = P_3(x)P_4(x),\ x^4 = P_1(x)P_5(x),$$
$$x^5 = P_2(x)P_5(x),\ x^6 = P_3(x)P_5(x).$$

Поэтому базис элементов новой алгебры полон. Он также несократим.

Расположим теперь те же предметы в вершинах некоторого гиперкуба наименьшей подходящей размерности. В нашем примере размерность гиперкуба следует взять равной трем, то есть надо воспользоваться кубом. У куба 8 вершин, это не меньше, чем необходимо для размещения шести предметов, у квадрата же всего 4 вершины, что недостаточно. Располагаем в вершинах куба предметы 1, 2, 3, 4, 5, 6 множества A исходной дизъюнктивной алгебры предикатов. Формируем из них на гранях куба шесть новых множеств, снабжая их номерами **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** (рис. 1). Введенным множествам соответствуют предикаты:

$$P_1(x) = x^1 \vee x^3 \vee x^5,\ P_2(x) = x^2 \vee x^4 \vee x^6,$$
$$P_3(x) = x^1 \vee x^2 \vee x^5 \vee x^6,\ P_4(x) = x^3 \vee x^4,$$
$$P_5(x) = x^1 \vee x^2 \vee x^3 \vee x^4,\ P_6(x) = x^5 \vee x^6.$$

Теперь мы получили шесть базисных предикатов для нового варианта базиса элементов дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов. Первый вариант базиса для этой же алгебры состоял из пяти элементов и был более экономным, там был достигнут абсолютный минимум числа элементов в базисе данной алгебры. Можно доказать, что использование гиперкубов дает число элементов в базисе, близкое к минимальному. Все базисные элементы исходной алгебры выражаются через базисные элементы новой алгебры:

$$0 = P_1(x)P_2(x),\ x^1 = P_1(x)P_3(x)P_5(x),$$
$$x^2 = P_2(x)P_3(x)P_5(x),\ x^3 = P_1(x)P_4(x)P_5(x),$$
$$x^4 = P_2(x)P_4(x)P_5(x),\ x^5 = P_1(x)P_3(x)P_6(x),$$
$$x^6 = P_2(x)P_3(x)P_6(x).$$

Поэтому базис элементов новой алгебры полон. Он также несократим.

2. Минимизация базиса элементов

Отыщем размерность n^* гиперкуба, которая обеспечивает наименьшее число базисных элементов в дизъюнктивно-конъюнктивной алгебре одноместных предикатов. Пусть $|A| = k$. Тогда размер h стороны гиперкуба размерности n равняется

$$h = \sqrt[n]{k}. \tag{3}$$

Число h совпадает с числом предметов, располагаемых на одной грани гиперкуба. Число N базисных элементов в новой алгебре равно

$$N = nh. \tag{4}$$

Иначе говоря,

$$N = n\sqrt[n]{k} = nk^{\frac{1}{n}}.$$

Отыскиваем n^*, исходя из условия:

$$\frac{dN}{dn} = 0. \tag{5}$$

Производим дифференцирование:

$$\frac{dN}{dn} = \frac{d(nk^{\frac{1}{n}})}{dn} = \frac{dn}{dn}k^{\frac{1}{n}} + n\frac{d(k^{\frac{1}{n}})}{dn} =$$
$$= 1 \cdot k^{\frac{1}{n}} + nk^{\frac{1}{n}} \ln k \frac{d(\frac{1}{n})}{dn} =$$
$$= k^{\frac{1}{n}}(1 + n\ln k(-\frac{1}{n^2})) = k^{\frac{1}{n}}(1 - \frac{\ln k}{n}).$$

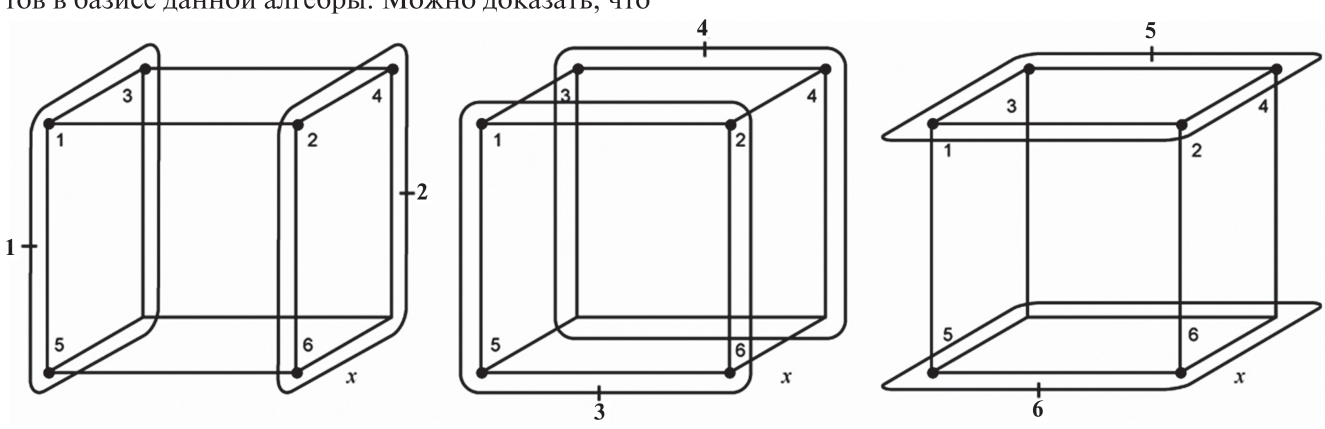


Рис. 1

Поскольку $k^{\frac{1}{n}} \neq 0$, то согласно условию (5), имеем

$$1 - \frac{\ln k}{n} = 0 ,$$

откуда

$$n^* = \ln k . \qquad (6)$$

Размер h^* стороны гиперкуба размерности n^* равен:

$$h^* = \sqrt[n^*]{k} = \sqrt[\ln k]{k} = k^{\frac{1}{\ln k}} .$$

Учитывая, что

$$\ln h^* = \ln(k^{\frac{1}{\ln k}}) = \frac{1}{\ln k} \ln k = 1 ,$$

окончательно получаем:

$$h^* = e \approx 2{,}7 . \qquad (7)$$

Наименьшее число $N_{\min}$ базисных элементов в новой алгебре равно:

$$N_{\min} = n^* \cdot h^* .$$

Окончательно:

$$N_{\min} = e \cdot \ln k . \qquad (8)$$

Результаты подсчетов по формулам (6) и (8) приведены в табл. 2.

Таблица 2

k	10	10^2	10^5	10^{10}
n^*	3	5	12	23
$N_{\min}$	7	13	31	62

Как явствует из таблицы, введение дополнительной базисной операции конъюнкции дает существенную экономию числа базисных элементов в алгебре одноместных предикатов.

3. Булева алгебра

Консервативно расширим дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру одноместных предикатов, дополнительно введя в ее базис операцию отрицания. Благодаря этому, мы получаем булеву алгебру одноместных предикатов с избыточным базисом. Избавляемся от этого избытка за счет консервативного сужения базиса элементов в этой алгебре. Выше мы нашли, что $h^* = 2{,}7$. Поэтому нам достаточно произвести сужение базиса элементов лишь в двух случаях, когда $h = 3$ и $h = 2$. Сначала сделаем это на конкретном примере. Пусть $h = 3$. Принимаем, для примера, $k = 27$. Согласно (3) имеем

$$h = \sqrt[n]{k} ,$$

откуда

$$\lg h = \frac{1}{n} \lg k ,$$

следовательно

$$n_3 = \frac{\lg k}{\lg h} . \qquad (9)$$

В нашем примере получаем при $h = 3$ следующую размерность n_3 гиперкуба:

$$n_3 = \frac{\lg 27}{\lg 3} = \frac{1{,}4314}{0{,}4771} = 3 .$$

Согласно равенству (4) число $N_3^{ДК}$ базисных элементов дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры при $h = 3$ равно:

$$N_3^{ДК} = n_3 h = 3 \cdot 3 = 9 .$$

Согласно закону отрицания, в булевой алгебре число $N_3^{Б}$ базисных элементов можно уменьшить на треть, следовательно $N_3 = 6$.

Пусть теперь $h = 2$. По-прежнему, для примера, принимаем $k = 27$. Размерность n_2 гиперкуба при $h = 2$ согласно (9) равна:

$$n_2 = \frac{\lg 27}{\lg 2} = \frac{1{,}4314}{0{,}3010} = 4{,}7 .$$

Итак $n_2 = 5$. Число $N_2^{ДК}$ базисных элементов дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры при $h = 2$ согласно (4) равно:

$$N_2^{ДК} = n_2 h = 5 \cdot 2 = 10 .$$

Согласно закону отрицания, в булевой алгебре число N_2 можно уменьшить наполовину, следовательно:

$$N_2^{Б} = 5 .$$

Таким образом,

$$N_2^{Б} < N_3^{Б} \ (5<6),$$

а это означает, что при $h = 2$ базис булевой алгебры более экономный, чем при $h = 3$.

От примера перейдем к общему рассмотрению. Можем записать:

$$k = 2^{n_2} = 3^{n_3} .$$

Следовательно:

$$n_2 \lg 2 = n_3 \lg 3 .$$

Итак:

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\lg 2}{\lg 3} = \frac{0{,}3010}{0{,}4771} = 0{,}63 .$$

Вместе с тем,

$$N_3^{ДК} = n_3 \cdot 3 ; \ N_2^{ДК} = n_2 \cdot 2 ;$$

$$N_3^{Б} = \frac{2}{3} \cdot N_3^{ДК} = \frac{2}{3} \cdot n_3 \cdot 3 = 2n_3 ;$$

$$N_2^{Б} = \frac{1}{2} \cdot N_2^{ДК} = \frac{1}{2} \cdot n_2 \cdot 2 = n_2 .$$

Окончательно:

$$\frac{N_3^{\,Б}}{N_2^{\,Б}}=\frac{2n_3}{n_2}=2\frac{n_3}{n_2}=2\cdot 0{,}63=1{,}26\,. \qquad (10)$$

Итак, для любого числа k булева алгебра одноместных предикатов при $h=3$ имеет базисных элементов на 26% больше, чем при $h=2$. Минимальное число базисных элементов в булевой алгебре одноместных предикатов равно

$$N_2^{\,Б}=n_2\,.$$

Из равенства

$$k=2^{n_2}$$

выводим

$$n_2=\frac{\lg k}{\lg 2}\,.$$

Окончательно:

$$N_2^{\,Б}=\frac{\lg k}{\lg 2}\,. \qquad (11)$$

Результаты подсчетов по формуле (11) приведены в табл. 3.

Таблица 3

k	10	10^2	10^5	10^{10}
$N_{\min}$	7	13	31	62
$N_2^{\,Б}$	4	7	17	34

Они свидетельствуют о том, что введение в алгебре одноместных предикатов базисной операции отрицания дает ощутимую дополнительную экономию числа базисных элементов сравнительно с дизъюнктивно-конъюнктивной алгеброй.

4. Формулы

Выше были введены понятия одноместного предиката и его типа. Кроме того, для примера было образовано множество M всех предикатов типа $P(x)$, $x\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Всего в множестве M содержится 2^6=64 предиката. Затем на носителе M были определены пять различных алгебр одноместных предикатов: 1) дизъюнктивная с базисными предикатами 0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6; 2) дизъюнктивно-конъюнктивная с базисными предикатами $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$; 3) булева с базисными предикатами $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_4(x)$; 4) дизъюнктивно-конъюнктивная с базисными предикатами $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$, $P_6(x)$; 5) булева с базисными предикатами $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$.

Возьмем теперь какой-нибудь конкретный предикат указанного выше типа, а именно предикат

$$P(x)=x^1\vee x^3\vee x^6\,,$$

который представлен формулой алгебры 1), и выразим его также во всех остальных алгебрах 2)-5). Записываем предикат $P(x)$ в виде формулы алгебры 2):

$$P_1(x)P_4(x)\vee P_3(x)P_4(x)\vee P_3(x)P_5(x)\,;$$

алгебры 3):

$$P_1(x)P_4(x)\vee \overline{P_1(x)P_2(x)}P_4(x)\vee \overline{P_1(x)P_2(x)}\;\overline{P_4(x)}\,;$$

алгебры 4):

$$P_1(x)P_3(x)P_5(x)\vee P_1(x)P_4(x)P_5(x)\vee P_2(x)P_3(x)P_6(x);$$

алгебры 5):

$$P_1(x)P_3(x)P_5(x)\vee P_1(x)\overline{P_3(x)}P_5(x)\vee \overline{P_1(x)}P_3(x)\overline{P_5(x)}\,.$$

Формулы предикатов в алгебрах 1)-5) можно сделать более короткими и удобными, если из полного имени $P_i(x)$ каждого базисного предиката, входящего в их состав, исключить все образующие его символы, кроме индекса i, использовав его в роли краткого имени этого предиката. Сделав это, и выполняя затем упрощающие тождественные преобразования, приходим к формулам, помещенным в табл. 4.

Таблица 4

Номер алгебры	Вид формулы после упрощения	
	имен ее базисных предикатов	ее путем преобразования
1	$1\vee3\vee6$	$1\vee3\vee6$
2	$1\cdot4\vee3\cdot4\vee3\cdot5$	$1\cdot4\vee3$
3	$1\cdot4\vee\overline{1\vee2}\cdot4\vee\overline{1\vee2}\cdot\overline{4}$	$1\cdot4\vee\overline{1\vee2}$
4	$1\cdot3\cdot5\vee1\cdot4\cdot5\vee2\cdot3\cdot6$	$1\cdot5\vee2\cdot3\cdot6$
5	$1\cdot3\cdot5\vee1\cdot\overline{3}\cdot5\vee\overline{1}\cdot3\cdot\overline{5}$	$1\cdot5\vee\overline{1}\cdot3\cdot\overline{5}$

5. Алгебра слов

Практическое значение алгебры одноместных предикатов определяется прежде всего тем, что она может выполнить роль ключа, открывающего доступ к системному формальному описанию и воспроизведению на ЭВМ механизма *естественного языка*, на котором люди общаются друг с другом. Это утверждение мы попытаемся обосновать на примере русского языка. Как известно, основу любой разновидности естественного языка (в том числе – и русского) составляют слова, выражающие определенные понятия, такие, к примеру, как ***стол***, ***ручка***, ***прическа***, ***теорема***, ***едет***, ***синий***, ***очень***, ***давно***. Назовем их *понятийными словами*. Каждое из понятийных слов распространяется на свое множество конкретных предметов. Именно этим множеством определяется объем и *содержание* каждого понятийного слова, а в конечном счете, его *смысл* и значение. Преимущественно из понятийных слов составляются предложения, которыми люди выражают свои мысли. В предложениях могут встречаться слова, которые не относятся к понятийным словам, но таких слов в любом языке гораздо меньше, чем понятийных слов. Примерами не понятийных слов могут служить предлоги и союзы.

Встречаются предложения, составленные только из понятийных слов. Приведем пример такого предложения: ***Я быстро пишу тупым карандашом требование прислать немедленно вооруженный отряд милиции***, Фадеев, Разгром. На рис. 2 изображено *дерево грамматических зависимостей* для этого предложения.

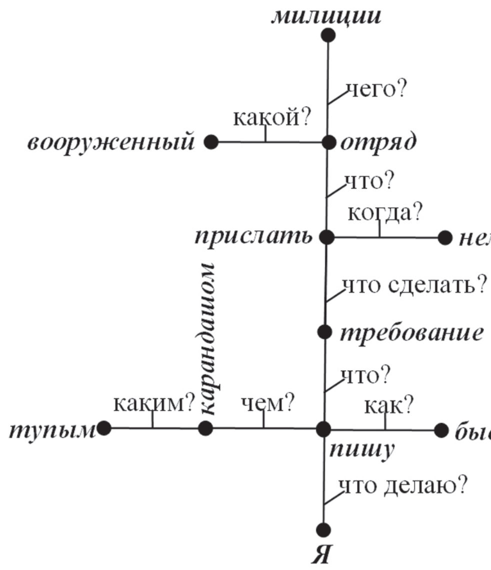


Рис. 2

С формальной точки зрения это дерево представляет собой *реляционную сеть*, которая состоит из *полюсов* и *ветвей*. Каждому полюсу соответствует свое слово, каждой ветви отвечает своя связь между соответствующими словами, которая характеризуется вопросами (см. рис. 2). Каждому понятийному слову соответствует свое множество предметов, а каждому множеству – свой одноместный предикат.

Таким образом, каждому понятийному слову можно поставить во взаимно однозначное соответствие свой одноместный предикат. Этот одноместный предикат можно принять за полноценное описание смысла соответствующего слова. Убедиться в справедливости этого утверждения можно с помощью следующего эксперимента, который ставиться на человеке, называемом *испытуемым*. В этом эксперименте для каждого понятийного слова (для конкретного испытуемого – носителя языка) отыскивается соответствующий ему одноместный предикат (если таковой вообще существует). Для этого исследователь должен образовать множество U всех предметов, охватываемых содержанием любых понятийных слов, которые используются в естественном языке. Кроме того, исследователь формирует множество M всех понятийных слов той же разновидности естественного языка, которой владеет испытуемый (например, русским языком).

Далее исследователь предъявляет испытуемому по очереди из множества U предметы, спрашивая, знакомы ли они ему. Из знакомых для испытуемого предметов исследователь образует множество $A \subseteq U$. Он также предъявляет испытуемому слова из множества M , обращаясь к нему с тем же вопросом. Из знакомых для испытуемого слов исследователь образует множество $B \subseteq U$. Далее, он образует декартово произведение $A \times B$ пар (a,b) и начинает предъявлять эти пары испытуемому, предлагая ему ответить на вопрос, можно ли считать, что предмет a охватывается содержанием слова b . Если испытуемый правильно узнаёт предметы $a \in A$ и в совершенстве понимает смысл слов $b \in B$, то он своими ответами будет реализовывать любые предикаты, заданные на $A \times B$.

Предметы, принадлежащие множеству A , всегда можно однозначно охарактеризовать словесным описанием определенной длины, например словосочетанием: “Я, быстро пишущий тупым карандашом требование прислать немедленно вооруженный отряд милиции”. Присоединение каждого нового слова к словосочетанию очень быстро сужает его объем до одного предмета. Для достижения этого обычно бывает достаточно одного словосочетания сравнительно небольшой длины. Если же испытуемый не владеет в совершенстве естественным языком, то он неизбежно будет давать противоположные ответы при повторном предъявлении одной и той же пары “предмет-слово” или же вообще не сформирует никакого ответа. Этим он продемонстрирует, что не является носителем полноценного предиката каждого слова данного языка. Отсюда следует непреложный вывод: предикаты понятийных слов полноценно формально описывают содержательную сторону слова (его объем, содержание, смысл, значение).

Выводы

Для каждого слова из множества B исследователь образует некоторое свое высказывание. Если это, к примеру, имя существительное, например, слово ***стол***, он ставит ему в соответствие высказывание “Предмет x есть стол”, если глагол (***едет***) – высказывание “Предмет x едет”, если имя прилагательное (***красный***) – “Предмет x красный”. Для других частей речи (***темно***, ***быстро***, ***очень***) высказывания тоже можно построить, однако несколько более сложным образом. Затем исследователь знакомит с этим высказыванием испытуемого (например, “Предмет x есть стол”) и по очереди предъявляет ему различные предметы из множества A (например, “стул, стоящий в углу комнаты”, “стол, стоящий посередине комнаты”, “тетрадь, лежащая на тумбочке”). Он ставит перед испытуемым задание определить, будет ли предъявленное высказывание истинным или ложным для тех или иных предметов. Своим чисто внешним (объективным) поведением испытуемый реализует предикат

$P(x)$, соответствующий значению слова ***стол***. Мы его будем записывать в виде **стол**(x), принимая само слово за имя предиката $b(x)$.

Эксперименты показывают, что высказывание "предмет x есть стол или стул" соответствует дизъюнкции предикатов **стол**(x) и **стул**(x):

(**стол или стул**)(x)=**стол**(x)$\vee$**стул**(x)=
=(**стол**$\vee$**стул**)(x).

Аналогично находим:

(**стол и стул**)(x)=**стол**(x)$\wedge$**стул**(x)=
=(**стол**$\wedge$**стул**)(x),
(**не стол**)(x)=$\neg$**стол**(x)=($\neg$**стол**)(x).

Мы видим, что на множестве A понятийных слов заданы булевы операции, то есть мы имеем *булеву алгебру слов*. Базисными элементами в ней служат предикаты, соответствующие понятийным словам.

Описанные опыты можно проводить не только со словами, но и со словосочетаниями. Берем, к примеру, словосочетание ***большой стул***. Опыты со словами ***большой***, ***стул*** и словосочетанием ***большой стул*** приводят к тождеству:

(**большой стул**)(x)=**большой**(x)$\wedge$**стул**(x).

В результате появляется возможность приступить к практически беспрепятственному системному математическому описанию механизма естественного языка.

Список литературы: 1. Бондаренко, М.Ф. Теория интеллекта [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Изд-во «СМИТ», 2007. – 576 с.

Поступила в редколлегию 19.03.2010

УДК 519.7

Про алгебру одномісних предикатів / М.Ф. Бондаренко, Н.П. Кругликова, І.О. Лещинська, Н.Є. Русакова, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 62–67.

В статті розглядаються алгебри одномісних предикатів з диз'юнктивним, диз'юнктивно-кон'юнктивним, булевим базисами операцій та з економними базисами елементів. Здійснено лінгвістичну інтерпретацію цих алгебр.

Іл.: 2. Бібліогр.: 1 найм.

UDK 519.7

About algebra of monadic predicates / M.F. Bondarenko, N.P. Kruglikova, I.O. Leshchynska, N.E. Rusakova, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 62–67.

In article algebras of monadic predicates with disjunctive, disjunctive-conjunctive, boolean bases of operations and economical bases of the elements are considered. Linguistic interpretation these algebras is completed.

Fig.: 2. Ref.: 1 items.

УДК 519.7

О МОЗГОПОДОБНЫХ СТРУКТУРАХ

М. Ф. Бондаренко[1], Н. Е. Русакова[2], Ю. П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Быстро прогрессирующие компьютеризация и информатизация требуют постоянного повышения производительности электронных вычислительных машин. Сегодня уже появилась возможность создания вычислительных структур с производительностью, близкой к производительности мозга человека. В связи с этим в статье рассматривается идея мозгоподобной структуры, предложенная академиком В. М. Глушковым, и дальнейшее ее развитие.

МОЗГОПОДОБНАЯ СТРУКТУРА, ОТНОШЕНИЕ, МЕТОД ПЕРЕВОДА, АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПРЕДИКАТОВ

Введение

Академик Виктор Михайлович Глушков в 1957 году писал «...группа задач связана с поиском новых принципов построения электронных цифровых машин. Особое значение приобретает здесь задача детального изучения механизма высшей нервной деятельности, в частности процесса образования понятий и их связи с языком. Как известно, механизм действия современных цифровых машин с программным управлением весьма сильно отличается от работы человеческого мозга. Не подлежит сомнению, например, что в мозгу нет ничего похожего на арифметическое устройство последовательного, а тем более параллельного действия. Говоря не вполне точно, машина сводит логические операции к арифметическим, тогда как в мозгу как раз наоборот. Поэтому, намного превосходя человека в скорости выполнения арифметических операций, машина не имеет столь же значительного превосходства над ним в скорости выполнения операций логического характера. В свете всего сказанного становится ясным огромное практическое значение глубокого проникновения в закономерности работы мозга. Ведь познав только некоторые важнейшие из таких закономерностей и реализовав их в той или иной мере на основе электронных схем, можно рассчитывать получить машины, гораздо более приспособленные к выполнению сложных логических операций, чем любая современная вычислительная машина» [1, с. 96].

Впоследствии В. М. Глушков назвал приведенное выше сформулированное им направление исследований идеей *мозгоподобных структур*, гениально провидя для нее ведущую роль в развитии вычислительной техники будущего. Перспективность мозгоподобных структур отмечалась В. М. Глушковым на конференции в Киеве в 1959 году, а также на конгрессе International Federation of Information Processing (IFIP) в 1974 году. В 1981 году за год до смерти В. М. Глушков дал следующую итоговую характеристику и оценку идеи мозгоподобных структур: «Если предположить, что конструктор может объединить в систему не несколько тысяч логических элементов, как это было в эпоху электронно-ламповой техники, а многие десятки миллионов (причем на число соединений этих элементов практически не накладывается никаких ограничений), то лучшими архитектурными решениями для ЭВМ будут мозгоподобные структуры. Характерной особенностью их является слияние памяти с обработкой данных: данные обрабатываются одновременно по всей памяти с максимально возможной степенью распараллеливания всех операций. Подчеркнем, что речь идет именно о мозгоподобных структурах, а не о точном копировании мозга, в котором эффективно распараллеливаются далеко не все операции (в частности, в мозге плохо распараллеливаются собственно вычислительные операции).

Хотя мозгоподобные структуры с параллельными процессами, управляемыми многими потоками данных и команд, несомненно, представляют собой высший уровень развития архитектур ЭВМ, однако на нынешнем этапе электронной технологии полная и бескомпромиссная их реализация является пока преждевременной. Необходимы компромиссные решения, представляющие собой переходные этапы к мозгоподобным структурам будущего на основе разумного отступления от принципов фон Неймана» [2, с. 59 – 60].

С тех пор прошло почти 30 лет, и то, о чем мечтал В. М. Глушков, теперь становится реальностью: сегодня уже появилась возможность создания вычислительных структур с производительностью, близкой к производительности мозга человека. Таким образом, время создания мозгоподобных структур для ЭВМ сверхвысокой производительности настало. Задача создания ЭВМ с мозгоподобными структурами, так называемых *мозгоподобных ЭВМ* [3] (по англ. – *brainlike computer*), завладела воображением специалистов.

1. Мозгоподобные ЭВМ

Быстро прогрессирующие компьютеризация и информатизация требуют постоянного повышения производительности электронных вычислительных машин. Однако, делать это становится все труднее. Резервы увеличения быстродействия решающих элементов ЭВМ исчерпываются. Остается путь наращивания числа одновременно работающих элементов в процессоре компьютера. Уже сейчас имеется практическая возможность, опираясь на успехи микроминиатюризации и удешевления электронных элементов и на достижения в области автоматизации проектирования и изготовления вычислительной аппаратуры, строить компьютеры с числом элементов до 10^{15}. Однако, применительно к нынешним ЭВМ последовательного действия, работающим по принципу программного управления Дж. фон Неймана, делать это не имеет смысла, поскольку в них в каждый момент дискретного времени одновременно находится в работе лишь небольшое число элементов. Попытки же перехода к машинам параллельного действия пока не дают ожидаемого роста их производительности. Так, например, производительность многопроцессорной ЭВМ растет не пропорционально числу имеющихся в ней процессоров, как, казалось бы, должно быть, а гораздо медленнее, а именно – по логарифмическому закону. Возникают существенные трудности также и при попытках создания высокопроизводительных нейрокомпьютеров, которые строятся в виде сетей из формальных нейронов.

Между тем, существует «вычислительная машина», созданная природой, – мозг человека, для которой проблема полноценного распараллеливания обработки информации полностью решена. Мозг человека по сравнению с современной ЭВМ – тихоход. О его «тактовой частоте» можно судить по пропускной способности нервных волокон. Известно, что каждое нервное волокно может пропускать не более 10^3 импульсов в секунду. По проводникам же нынешних ЭВМ передается порядка 10^9 импульсов в секунду. Следовательно, ЭВМ превосходит мозг человека в смысле скорости работы ее отдельных решающих элементов в $10^9{:}10^3 = 10^6$ раз. Тем не менее, по своей производительности в целом мозг превосходит любую ЭВМ. Это обусловлено тем, что мозг человека имеет в своем составе около 10^{15} простейших решающих элементов, в роли которых мы принимаем синапсы – стыки между окончаниями отдельных волокон нервных клеток. Число же нервных клеток в мозге человека оценивается величиной 10^{11}. Все клетки мозга, как свидетельствуют нейрофизиологические данные, работают одновременно.

В ЭВМ же последовательного действия в каждый момент времени действует лишь небольшое число элементов. По самым льготным для машины оценкам в ней одновременно работает в среднем не более 10^3 элементов. Таким образом, в смысле числа параллельно работающих элементов мозг превосходит машину в $10^{15}{:}10^3 = 10^{12}$ раз. В итоге, по своей общей производительности мозг превосходит современную вычислительную машину последовательного действия в $10^{12}{:}10^6 = 10^6$ раз. Итак, ЭВМ параллельного действия, работающая по принципам мозга человека и построенная на современной элементной базе, иными словами, – мозгоподобная ЭВМ, согласно вышеприведенным оценкам, в случае ее создания будет превосходить нынешние ЭВМ последовательного действия в 10^{12} раз, а мозг человека – в 10^6 раз. Если мозгоподобные ЭВМ удастся создать, то это приведет к значительному повышению темпов компьютеризации и информатизации.

2. Значение мозгоподобных ЭВМ

Пионеры искусственного интеллекта А. Ньюэл, Дж. Шоу и Г. Саймон еще в конце 50-х годов XX столетия высказались в том смысле, что глубинный смысл компьютеризации и информатизации заключается в том, чтобы побудить людей заняться познанием и совершенствованием самих себя и снабдить их достаточными для этого средствами [4]. Известный специалист в области искусственного интеллекта Роджер Шенк пишет: «Искусственный интеллект как область науки – это лишь малая часть грандиозной попытки постичь мышление. Мы считаем, что это основная цель данной области науки и здесь достигнуты немалые успехи. Программы, которые мы пишем, важны как эксперимент, а не как конечный результат. Главный интерес для нас представляет именно интеллект, а не его искусственное происхождение. Если мы достигнем успеха в этом направлении, то проложим путь для создания механических помощников человеку в его повседневных делах и заботах. Но не в этом главное. Самое важное, чего мы тогда добьемся, – более глубокого понимания самих себя, что безусловно, гораздо ценнее чем любая программа [5, с. 26].

Представляется, что в результате создания мозгоподобных ЭВМ появятся небывалые возможности для самопознания и самоусовершенствования самого человека. Что сулит человечеству столь стремительное развитие средств вычислительной техники? По нашему мнению, наилучший ответ на этот вопрос содержится в предисловии к книге Норберта Винера «Кибернетика», написанном известным московским ученым Гелием Николаевичем Поваровым. В нем говорится: «... научно-технический прогресс ставит перед человечеством серьезные проблемы. Стремительное развитие науки и техники возлагает на нас колоссальную ответственность за разумное использование полученного нами могущества. «Кто живет в стеклянном доме, тот не должен бросать камней», – гласит старинная пословица. Человек стал настолько могущественным, что любое его нерассчитанное движение: с роботами, с атомной энергией, с химией – может иметь тяжелые непредвиденные последствия. Это парадокс могущества. Нельзя забывать, однако, что наука и техника не только возлагают новую ответственность на человека, но и доставляют ему новые средства справиться с нею. Это относится и к роботам. Альтернатива «человек или робот», «опасное развитие искусственного разума или своевременный отказ от него», чем ограничивается большинство авторов, имеет третье, более необычайное и, пожалуй, более вероятное решение, если только искусственный разум и искусственная жизнь вообще возможны. Человек, научившийся создавать искусственный разум и искусственную жизнь, не остановится перед коренной переделкой самого себя. Не роботы вместо людей, а новый человек вместо старого! Человек будущего вряд ли останется таким же «натуральным» существом, таким же теплокровным позвоночным, каким он вышел из горнила естественного отбора. Почти наверное, он будет искусственно развивать свой мозг и свое тело, будет по воле лепить и изменять свою физическую оболочку. Ему по силам быть впереди любого возможного робота. Это будет биологическая революция, и если смелые гипотезы оправдаются, она будет означать преобразование всего человеческого существования. Быть может далекий смысл «безумной» винеровской идеи о передаче человека по телеграфу и есть достижение человеком перевоплощаемости? Позволим себе минуту фантазии: не станет ли тогда человек новым космическим существом, свободным от земных ограничений? Есть ли абсолютная граница могущества и сложности для человека и его творений, абсолютная граница могущества и сложности для саморазвивающихся систем вообще?... Впрочем, это вопросы для науки будущего, на которые она сумеет ответить лучше нас» [6, с. 26 – 27].

3. Определение понятия «мозгоподобная структура»

Как определить понятие «мозгоподобная структура» в точных математических терминах? Его можно отождествить, ввиду потенциальной универсальности мозга человека, с понятием «математическая структура». Обращаемся к его классическому определению: «*Структура математическая* – родовое название, объединяющее понятия, общей чертой которых является то, что они применимы к множествам, природа элементов которых не определена. Чтобы определить структуру, задают отношения, в которых находятся элементы множеств (типовая характеристика структуры), а затем постулируют, что данные отношения удовлетворяют условиям – аксиомам структуры» [7, с. 568]. В применении к человеку и вычислительной технике понятие мозгоподобной структуры необходимо сузить, отождествив его с понятием конечной математической структуры. Приходим к следующему определению: «*Конечная математическая структура* – родовое название, объединяющее понятия, общей чертой которых является то, что они применимы к конечным множествам, природа элементов которых не определена. Чтобы определить конечную структуру, задают конечные отношения, в которых находятся элементы конечных множеств (типовая характеристика конечной структуры), а затем постулируют, что данные конечные отношения удовлетворяют условиям – аксиомам конечной структуры». Первое определение понятия «мозгоподобная структура» назовем *общим* (*бесконечным*), а второе – *частным* (*конечным*).

Одним из понятий, на которые опирается определение понятия «мозгоподобная структура», является понятие отношения. Определяется оно следующим образом. Вводится *декартово произведение* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ системы множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ как совокупность последовательностей вида $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_m \in A_m$. Всякое подмножество R множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ называется *отношением*, определенным на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, где $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = A$, называется *декартовой m-й степенью* множества A и обозначается через A^m. Отношение R, определенное на A^m, называется *m-арным отношением на множестве A* [8, с. 42].

Ранее были известны разные способы выражения отношений: множествами наборов предметов, графами, графиками, таблицами. Но среди них не было ни одного способа представления отношений формулами. Между тем, крайне важно научится записывать отношения с помощью формул. Как показывает опыт науки и техники, нет более удобного и более практичного средства описания объектов, чем формулы. Формулы не только дают названия объектам, но и выражают их свойства и поведение. Вместо того, чтобы ставить опыты над реальными объектами, можно «поэкспериментировать» с формулами, описывающими эти объекты, и получить все интересующие нас сведения о них. Формулы можно «оживить» в ЭВМ, и они будут воспроизводить поведение описываемых ими объектов. Если удастся научиться описывать формулами отношения, а затем реализовывать эти формулы в ЭВМ и привести их в действие, то у машины, как можно надеяться, появятся мысли, соответствующие этим отношениям, и она приобретет способность их обрабатывать, то есть мыслить. Однако, обращаясь к опыту математики, мы обнаруживаем, что формулами выражаются только функции. Но отношения – это не функции, они представляют собой нечто более общее [9].

4. Предикаты

Известен такой метод: если не представляется возможным решить какую-то задачу, то ее заменяют другой, взаимно однозначно с нею связанной задачей, которая поддается решению. Затем переводят полученное решение на язык первоначальной задачи. В результате получают решение исходной задачи. Этот метод в конце XIX века с успехом применил Оливер Хевисайд для решения линейных дифференциальных уравнений. Он нашел способ замены этих уравнений алгебраическими уравнениями. Получив решение алгебраических уравнений, Хевисайд перевел его обратно на язык дифференциальных уравнений и таким способом решил интересовавшую его задачу. В результате он создал так называемое операционное исчисление. Будучи физиком и инженером по роду деятельности, Хевисайд не дал строгого математического обоснования найденного им метода, за что и подвергся нападкам математиков. Ответил он им так: «Буду ли я отказываться от обеда потому, что не понимаю полностью процесс пищеварения?» [3, с. 94].

Мы применим подобный метод для отыскания способа формульной записи отношений. Называется он *методом перевода*. Каждый наблюдаемый *факт* можно исчерпывающе охарактеризовать отношением, образованным из одного набора: $P=\{(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m)\}$. Это отношение извещает нас о том, в каких *состояниях* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ находятся интересующие нас *места* $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Любой факт P можно выразить высказыванием:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \text{"}x_1 = a_1 \text{ и } x_2 = a_2 \text{ и...и } x_m = a_m\text{"},$$

которое мы запишем в следующем сокращенном виде:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}.$$

Отношением произвольного вида

$$Q=\{(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots$$
$$\ldots, (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})\}$$

можно выразить любое *знание* о любом факте. Любое знание представляет собой перечень всех возможных вариантов

$$P_1=\{(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})\},$$
$$P_2=\{(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_k=\{(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})\}$$

факта P. Любое знание Q о факте можно выразить высказыванием:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$
$$= \text{"}(x_1 = a_{11} \text{ и } x_2 = a_{21} \text{ и ... и } x_m = a_{m1}) \text{ или}$$
$$\text{или } (x_1 = a_{12} \text{ и } x_2 = a_{22} \text{ и ... и } x_m = a_{m2}) \text{ или ...}$$
$$\text{... или } (x_1 = a_{1k} \text{ и } x_2 = a_{2k} \text{ и ... и } x_m = a_{mk})\text{"},$$

которое мы будем записывать в следующем сокращенном виде:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} \ldots x_m^{a_{m1}} \vee$$
$$\vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} \ldots\ x_m^{a_{m2}} \vee \ldots \vee\ x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} x_m^{a_{mk}}.$$

Если факт P входит в перечень всех его возможных вариантов $P_1, P_2, \ldots, P_k$, то высказывание называется *истинным*, в противном случае — *ложным*.

Например, возьмем отношение

$$P=\{(1,\, 6),\, (2,\, 4),\, (3,\, 3),\, (4,\, 3),\, (4,\, 4)\}$$

и запишем соответствующее ему высказывание

$$P(x,\, y) = x^1 y^6 \vee x^2 y^4 \vee x^3 y^3 \vee x^4 y^3 \vee x^4 y^4.$$

Это высказывание будет истинным относительно факта (4, 3), поскольку $(4,\, 3) \in P$, и ложным относительно факта (2, 3), поскольку $(2,\, 3) \notin P$. Факт истинности высказывания будем выражать символом 1, а факт его ложности – символом 0. Символ 1 называется *истиной*, а символ 0 – *ложью*. Действуя так, мы приходим к функции $P(x,\, y)$ с двоичными значениями 0 и 1. Будем считать, что она задана на декартовом произведении

$$A \times B = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\} \times \{3,\, 4,\, 5,\, 6\},$$

где

$$A = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\},\ B = \{3,\, 4,\, 5,\, 6\},\, x \in A,\ y \in B.$$

Ниже приведена таблица функции $P(x,\, y)$.

		y B			
	x	3	4	5	6
A	1	0	0	0	1
	2	0	1	0	0
	3	1	0	0	0
	4	1	1	0	0

$P(x,\, y)$

Функции такого типа называются предикатами.

Сформулируем общее определение понятия предиката. *Предикатом*, заданным на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, называется любая функция $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \xi$, отображающая декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в множество $\Sigma = \{0,\, 1\}$. Символы 0 и 1 называются *булевыми элементами*, Σ – множество всех булевых элементов. Переменная $\xi \in \{0,\, 1\}$, являющаяся значением предиката P, называется *булевой*. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, в отличие от соответствующего ему отношения P, есть функция, поэтому появляется надежда, что его удастся выразить формулой некоторой специально сконструированной *алгебры предикатов*.

5. Алгебраическая система предикатов

Однако, на этом пути возникает, казалось бы, неодолимая преграда: разнотипность независимых и зависимых переменных предиката. Этот факт препятствует образованию полноценных суперпозиций предикатов, поскольку такие суперпозиции приводят к вырождению предикатов в булевы функции. Преодолеть возникшее препятствие невозможно, но его можно обойти. Выход заключается в том, чтобы вместо несуществующей полноценной алгебры предикатов использовать для формульной записи отношений более общую математическую конструкцию, а именно — *алгебраическую систему предикатов*. Нами показано, что такая алгебраическая система возможна и может быть построена, а с ее помощью успешно решается проблема создания мозгоподобных структур и мозгоподобных ЭВМ.

Алгебраической системой (или просто *системой*) заданного типа τ называется объект $\mathrm{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P \rangle$, состоящий из трех множеств: непустого множества A, множества операций $\Omega_F = \{F_0, ..., F_\xi, ...\}$, определенных на множестве A для каждого $\xi < \alpha$, и множества предикатов $\Omega_P = \{P_0, ..., P_\eta, ...\}$, заданных на множестве A для каждого $\eta < \beta$, причем арности рассматриваемых операций и предикатов должны удовлетворять условиям:

$$n(F_\xi) = m_\xi \text{ для всех } \xi < \alpha,$$

$$n(P_\eta) = n_\eta \text{ для всех } \eta < \beta.$$

Множество A называется *носителем* или *основным множеством* системы A, а его элементы — элементами системы A. Мощность $|A|$ множества A называется *мощностью* или *порядком* системы A и обозначается также $|\mathrm{A}|$. В отличие от других операций и предикатов, которые могут быть определены на множестве A, операции F_ξ $(\xi < \alpha)$ и предикаты P_η $(\eta < \beta)$ называются *основными* или *главными*. Нульарной операцией на множестве A называется фиксированный элемент из этого множества, а нульарным предикатом — истина и ложь. Если на множестве A заданы операции F и предикаты P, то их арности обозначаются соответственно $n(F)$ и $n(P)$. Значения главных нульарных операций системы называются *главными* или *выделенными элементами* этой системы.

Символы α и β обозначают фиксированные порядковые числа. *Типом* τ порядка (α, β) называется пара отображений $W(\alpha) \to N$, $W(\beta) \to N$ множеств $W(\alpha)$, $W(\beta)$ в множество $N = \{0, 1, 2, ...\}$. Тип τ записывается в виде

$$\tau = \langle m_0, ..., m_\xi, ...; n_0, ..., n_\eta, ... \rangle \; (\xi < \alpha, \eta < \beta).$$

Два типа τ и τ' считаются равными тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же порядок (α, β) и $m_\xi = m_\xi'$, $n_\eta = n_\eta'$ для всех $\xi < \alpha$ и для всех $\eta < \beta$. Тип τ называется *конечным*, если числа α, β, составляющие его порядок (α, β), конечны [8, с. 46].

Объединим множества Ω_F и Ω_P системы A и, полагая $\Omega = \Omega_F \cup \Omega_P$, запишем систему A более кратко: $\mathrm{A} = \langle A, \Omega \rangle$. Система $\mathrm{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *конечной*, если множество A конечно. Система A конечного типа записывается виде

$$\mathrm{A} = \langle A; F_0, ..., F_{s-1}; P_0, ..., P_{t-1} \rangle$$

или в виде

$$\mathrm{A} = \langle A; F_1, ..., F_s; P_1, ..., P_t \rangle.$$

Алгебраическая система $\mathrm{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *алгеброй*, если $\Omega_P = \varnothing$, и *моделью* (или *реляционной системой*), если $\Omega_F = \varnothing$ [8, с. 47].

К *алгебраической системе предикатов* приходим, отправляясь от приведенного выше общего понятия алгебраической системы. Для этого используем в роли множества A систему всех предикатов типа $P(x_1, x_2, ..., x_m) = \xi$, заданных на $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$. Эта система расслаивается на *алгебру имен предикатов* и *модель предикатов*. Подробное описание полученной на этом пути полноценной алгебраической системы предикатов приведено в книге [10]. Аксиоматическое определение алгебры имен предикатов (под именем абстрактной алгебры конечных предикатов) дано в [10, с. 29]. Имя P каждого предиката заданного типа взаимно однозначно *развертывается* в соответствующий ему свой предикат $P(x_1, x_2, ..., x_m)$, от которого переходим к уравнению

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1, \tag{1}$$

задающему отношение P, соответствующее этому предикату. Левая часть уравнения (1) записывается в виде *развернутой формулы* алгебры имен предикатов.

Заключение

В результате получаем средство формульной записи произвольных отношений. Решая уравнения вида (1), можно воспроизводить на модели любые процессы, как физические, так и информационные. Отношениями можно выразить строение любых предметов, их поведение, свойства и связи между ними. Естественный язык, являющийся универсальным средством общения людей, можно рассматривать как механизм для выражения отношений, то есть как некую разновидность алгебраической системы предикатов. Обращаясь с предложениями друг к другу, люди обмениваются мыслями в виде формул отношений. Мышление — это процесс преобразования отношений, получения новых отношений из тех, которые уже имеются в наличии. Информация поступающая к нам из внешнего мира через органы чувств, имеет вид отношений, которые несут в себе структуру окружающих нас предметов и процессов. Действуя на внешние предметы и события, человек может формировать их структуру и их течение в соответствии с заранее построенными в его уме отношениями.

Остается проблема решения уравнений вида (1). Она преодолевается построением *алгебры предикатных операций – верхней алгебры* алгебраической системы предикатов. Из различных вариантов алгебры предикатных операций выбираем *кванторную алгебру* [11]. На языке кванторной алгебры выражаются *линейные логические операторы* [12], являющиеся достаточным средством для решения уравнений вида (1). Практически это решение осуществляется с помощью *реляционных сетей*, которые реализуются на логических кристаллических структурах (чипах). Пример такой структуры для конкретной задачи приведен в работах [13, 14]. В Харьковском национальном университете радиоэлектроники с 2004 года демонстрируется действующий макет мозгоподобной ЭВМ, построенный на базе персонального компьютера [10, с. 499-500].

Список литературы: 1. *Глушков, В. М.* О некоторых задачах вычислительной техники и связанных с ними задачах математики [текст]: избр. труды / В. М. Глушков. – Т. 1. – К.: Наукова думка, 1990. – 262 с. 2. *Глушков, В. М.* Основные архитектурные принципы повышения производительности ЭВМ [текст]: избр. труды / В. М. Глушков. – Т. 2. – К.: Наукова думка, 1990. – 267 с. 3. *Бондаренко, М. Ф.* О мозгоподобных ЭВМ [текст] / М. Ф. Бондаренко, З. В. Дударь, И. А. Ефимова, В. А. Лещинский, С. Ю. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика научн.-техн. журнал. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 2004. – № 2 – С. 89-105. 4. *Nevel, A.* Empirical explorations with the logic theory machine [техt] / A. Nevel, I. C. Show, H. A. Simon // Proceedings of the western Joint Computer Conference – 1957. – P. 218-239. 5. *Шенк, Р.* Познать механизмы мышления [текст] / Р. Шенк, Л. Хантер. – М.: Мир, 1987. – 287 с. 6. *Винер Н.* Кибернетика [текст]: 2-е изд. / Н. Винер – М.: Сов. радио, 1968. – 325 с. 7. Математический энциклопедический словарь [текст] / Сов. Энциклопедия; гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М., 1988. – 847 с. 8. *Мальцев, А. И.* Алгебраические системы [текст] / А. И. Мальцев. – М.: Изд-во «Наука», 1970. – 392 с. 9. *Русакова, Н. Е.* Методы реляционного программирования [текст] / Н. Е. Русакова // Материалы первой международной научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития IT-индустрии»: тез. докл. 18–19 ноября 2009 г. – Х.: ХНЭУ, 2009. – С. 250 – 252. 10. *Бондаренко, М.Ф.* Теория интеллекта [текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Изд-во «СМИТ», 2007. – 576 с. 11. *Дударь З. В.* О прикладной алгебре конечных предикатов [текст] / З. В. Дударь, Н. С. Кравец, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Проблемы бионики научн.-техн. журнал. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 1998. – вып.49 – С. 14-22. 12. *Дударь, З. В.* Отношения как объекты формульного описания [текст] / З. В. Дударь, Р. В. Мельникова, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика научн.-техн. журнал. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 1997. – № 1 – С. 115-119. 13. *Русакова, Н. Е.* Модель устной речи [текст] / Н. Е. Русакова // Бионика интеллекта. 2010. – № 1 – С. 94-97. 14. *Бондаренко, М. Ф.* Модели языка [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Бионика интеллекта – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 2004. – №1 – С. 27-37.

Поступила в редколлегию 31.03.2010.

УДК 519.7

Про мозкоподібні структури / М. Ф. Бондаренко, Н. Є. Русакова, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 68–73.

У статті розглядається визначення поняття «мозкоподібна структура», яке ґрунтується на поняттях математичної структури, відношення, предиката, алгебраїчної системи та системи предикатів.

Бібліогр.: 14 назв.

UDC 519.7

About brainlike structures / M.F. Bondarenko, N.E. Rusakova, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 68–73.

Determination of concept «brainlike structure», which is based on the concepts of mathematical struk-rook, relation, predicate, system of algebra and system of predicates, is examined in the article.

Ref.: 14 items.

УДК 519.7

ИНСТРУМЕНТАРИЙ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

М.Ф. Бондаренко[1], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[2], Н.В. Шаронова[3]

[1, 2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

[3] ХПИ, г. Харьков, Украина

Развивается метод аксиоматического описания разума человека, – метод сравнения или метод компараторной идентификации. Он позволяет излагать теорию интеллекта дедуктивным способом, исходя исключительно из физически наблюдаемых фактов. Обнаруживаемые в экспериментах в соответствии с этим методом закономерности поведения испытуемого записываются в виде системы логических уравнений.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Данная статья является продолжением прежних работ авторов в области теории интеллекта. В предыдущих работах [1-3] дана характеристика теории интеллекта как новой научной области, разработаны математические и технические средства теории интеллекта, обсуждены проблемы и перспективы ее развития, описан метод теории интеллекта и дан обзор стоящих перед нею задач.

В данной статье мы приступаем к изложению конкретных достижений теории интеллекта. В качестве образца при разработке теории интеллекта мы принимаем современную физику, которая, подобно теории интеллекта, имеет две стороны – формальную и содержательную. Как формальное учение физика – это опытная наука, изучающая законы природы и выражающая их в виде уравнений.

Необходимость рассматривать теорию интеллекта как формальное учение обусловлена тем, что она нуждается в особом математическом языке, который недостаточно развит в имеющихся разделах математики. Поэтому теория интеллекта, наряду с содержательным изучением разума человека, вынуждена также разрабатывать необходимый ей формальный аппарат. В этом теория интеллекта не уникальна. Так, потребности небесной механики породили математический анализ, учение о логических способностях человека стимулировало развитие исчисления предикатов.

1. Компараторная идентификация – метод теории интеллекта

Возможность излагать теорию интеллекта дедуктивным способом, исходя исключительно из физически наблюдаемых фактов, основывается на развитом нами методе аксиоматического описания разума человека. Это метод – сравнения или метод компараторной идентификации. Сущность метода состоит в том, что испытуемый (человек, интеллект которого исследуется) в специально поставленных опытах своими физическими реакциями формирует значения некоторых предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_r$. В этих опытах выявляются свойства предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_r$, которые формально записываются в виде логических уравнений, связывающих предикатные переменные $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Некоторые из этих уравнений используются в роли аксиом или исходных постулатов теории интеллекта. Из аксиом, как из уравнений, находятся значения предикатных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_r$, которыми являются соответственно предикаты $P_1, P_2, \ldots, P_r$.

Внутренняя структура найденных предикатов характеризует те или иные детали механизма интеллекта человека.

Метод сравнения впервые использовал Ньютон [4] при физическом изучении цветового зрения человека. Действуя в роли испытуемого, он наблюдал на полях сравнения произвольные световые излучения x_1, x_2 и регистрировал равенство или неравенство их цвета. Формируемый таким способом предикат $P(x_1, x_2)$ впервые связал логическими уравнениями-аксиомами Грассман. Основываясь на постулатах (законах) Грассмана, Шредингер впервые построил дедуктивную теорию цветового зрения человека.

При изучении человеческого интеллекта методом сравнения исследователь воздействует на органы чувств испытуемого физическими сигналами (стимулами) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, порождающими в его сознании определенные субъективные переживания (состояния) $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Предполагается, что состояния $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однозначно зависят от соответствующих им стимулов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Это означает, что существуют функции

$$y_1 = f_1(x_1), y_2 = f_2(x_2), \ldots, y_n = f_n(x_n).$$

В опытах на испытуемом стимулы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ берутся из четко очерченных исследователем множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, так что всегда $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$.

Множества $A_i (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ исследователь выбирает произвольно, по своему усмотрению, исходя из тех научных задач, которые он перед собою ставит. Предполагается, что каждый из стимулов $x_i \in A_i$ порождает вполне определенное состояние y_i. Множество всех значений функции $y_i = f_i(x_i)$, заданной на множестве A_i, обозначаем символом B_i. Таким образом, каждая из функций f_i представляет собою сюръекцию, отображающую множество A_i на множество B_i. Функции f_i характеризуют способность испытуемого реагировать на внешние предметы соответствующими им субъективными состояниями.

Исследователь дает испытуемому задание, которое тот должен выполнить в ходе опыта. В задании указывается некоторое отношение L, связывающее состояния $y_1 \in B_1, y_2 \in B_2, \ldots, y_n \in B_n$. В каждом опыте исследователь формирует в сознании испытуемого определенные состояния $y_1, y_2, \ldots, y_n$, предъявляя ему соответствующие им стимулы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если для этих состояний отношение L выполняется, то испытуемый должен отреагировав ответом $\xi = 1$, если не выполняется, то ответом $\xi = 0$. Исполняя задание, испытуемый реализует предикат $\xi = L(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, соответствующий отношению L. Предикат L характеризует действие механизма сознания испытуемого, сравнивающего состояния $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в соответствии с полученным заданием. Именно эта операция сравнения дает имя методу компараторной идентификации (от английского слова compare - сравнивать).

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n))$ характеризует физически наблюдаемое поведение испытуемого, выполняющего задание исследователя и реагирующего на стимулы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ответом $\xi = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Задача теории интеллекта состоит в том, чтобы из свойств предиката P, обнаруживаемых в опытах на испытуемом, извлечь внутреннюю структуру сигналов $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$; вид функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и вид предиката L. Эта задача допускает обобщение на случай r предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_n$. В общем случае испытуемый получает r заданий, которые выполняет поочередно для различных наборов входных сигналов.

Обнаруживаемые в экспериментах закономерности поведения испытуемого записываются в виде системы логических уравнений (условий):

$$\begin{aligned} &P_1(X_1, X_2, \ldots, X_r) = 1, \\ &P_2(X_1, X_2, \ldots, X_r) = 1, \\ &\ldots \\ &P_l(X_1, X_2, \ldots, X_r) = 1, \end{aligned} \tag{1}$$

связывающих между собою предикатные переменные $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Символами $P_1, P_2, \ldots, P_l$ обозначены предикаты от предикатов $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Предикат $X_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)(j \in \{1, 2, \ldots, r\})$ задан на декартовом произведении $A_{1j} \times A_{2j} \times \ldots \times A_{nj}$. Имеется в виду, что решение $X_1 = P_1, X_2 = P_2, \ldots, X_r = P_r$ удовлетворяет системе уравнений (1).

Значения аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_r$ в экспериментах выступают поначалу как абстрактные элементы, внутренняя структура которых неизвестна. Эта структура извлекается дедуктивными приемами из условий (1). Из них же извлекается внутренняя структура предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_r$, которая слагается из внутренней структуры сигналов $y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj}$, функций $f_{1j}, f_{2j}, \ldots, f_{nj}$ и предиката L_j для каждого из предикатов

$$\begin{aligned} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= L_j(f_{1j}(x_1), f_{2j}(x_2), \ldots, f_{nj}(x_n)) = \\ &= L_j(y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj}). \end{aligned}$$

Теория интеллекта как формальное учение строится следующим образом. Имеется универсум элементов U, в роли которого используется совокупность всевозможных стимулов, которые исследователь может предъявить испытуемому. Из элементов универсума U исследователь образует множества $A_{1j} \times A_{2j} \times \ldots \times A_{nj}$, сообразуясь с поставленной конкретной задачей изучения той или иной стороны интеллекта человека. На декартовых произведениях $A_{1j} \times A_{2j} \times \ldots \times A_{nj}$ определены предикаты P_j, которые интерпретируются как поведение испытуемого, выполняющего те или иные задания исследователя.

Вводя предикатные переменные $X_1, X_2, \ldots, X_r$, связываем их логическими уравнениями (1). Содержательно эти уравнения выступают в роли исходных постулатов теории интеллекта. Из них, как из аксиом, дедуктивно выводятся зависимости, характеризующие внутреннюю структуру элементов универсума U и предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Задачей теории интеллекта как содержательного учения является формулировка и экспериментальная проверка ее постулатов, в роли которых выступают уравнения (1).

2. Множества

Изложенную выше программу исследований невозможно выполнить без достаточно развитого математического языка. Прежде всего, необходим формальный язык, на котором можно было бы записывать предикаты, реализуемые испытуемым в экспериментах. Далее, надо располагать языком для записи уравнений, выражающих свойства этих предикатов. Кроме того, необходимо иметь формальные средства для описания внутренней структуры стимулов, предъявляемых испытуемому, и состояний, переживаемых им, а также внутренней структуры предикатов, реализуемых испытуемым. Наконец, необходимо располагать математическими средствами извлечения из свойств предикатов их внутренней структуры. Фундаментом для разработки искомого формального языка служат понятия множества и отношения, которые рассматриваются в этом и следующем параграфах.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – различные предметы. Их совокупность называется множеством. Множества обычно будем обозначать заглавными латинскими буквами. Предметы $a_1, a_2, \ldots, a_k$, входящие в состав множества, называются его элементами. Элементы, как правило, будут обозначаться нами строчными латинскими буквами. Множества могут отличаться друг от друга числом k и составом входящих в них элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Для записи множества будем использовать перечень всех его элементов, заключенный в фигурные скобки: $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Множества можно строить не только из элементов, но и из множеств, например $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$. Такие множества называются системами множеств.

Элементы в множестве неупорядочены, поэтому порядок перечисления элементов в записи множества не имеет значения. В записи множества допускается повторение одних и тех же элементов, однако от этого само множество не меняется, поскольку в нем нет одинаковых элементов. Если символы a и b обозначают один и тот же элемент, то говорят, что элементы a и b равны и пишут $a = b$. В противном случае пишут $a \neq b$. Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они равны, и пишут $A = B$. Если ложно, что $A = B$, то пишут $A \neq B$.

Только что рассмотренные множества называются конечными. Число элементов в них может принимать любое натуральное значение $k = 0, 1, 2, \ldots$. При $k = 0$ получаем пустое множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента. При $k = 1$ получаем одноэлементные множества. Можно также рассматривать бесконечные множества, для которых значение k не существует. Примерами бесконечных множеств могут служить счетное множество, составленное из всех натуральных чисел, и континуальное множество всех вещественных чисел. Мощность континуального множества больше мощности счетного множества. Существуют множества, мощность которых превышает мощность континуума, например, множество всех вещественных функций.

Для бесконечного множества роль числа его элементов выполняет мощность множества. Два множества A и B называются равномощными, если каждому элементу множества A можно поставить в соответствие свой элемент множества B и наоборот. Под мощностью конечного множества понимается число его элементов. Совокупность всех предметов, являющихся элементами всевозможных множеств, которые рассматриваются в конкретной задаче (рассуждении, исследовании, теории), называется универсальным множеством или универсумом этой задачи и обозначается символом U. Можно объединять в одном универсуме вместе с элементами также и множества, образованные из этих элементов. Полагают, что в таком универсуме множества отличаются от элементов, в частности $a \neq \{a\}$.

Если элемент a входит в состав множества A, то говорят, что a принадлежит A и пишут $a \in A$. Запись $a \overline{\in} A$ или $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Запись $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ означает, что $a_1 \in A, a_2 \in A, \ldots, a_n \in A$. В роли элементов множества можно использовать любые элементы универсума U. Каждый элемент любого множества, рассматриваемого в какой-либо задаче, должен быть элементом универсума этой задачи. Отношение $\in$ называется принадлежностью элемента множеству.

Отношения принадлежности элемента множеству и равенства элементов связаны законом Лейбница: для всех a и b $a = b$ в том и только в том случае, когда $a \in A$ равносильно $b \in A$ при любом A. Отношения принадлежности элемента множеству и равенства множеств связаны законом объемности или экстенсиональности: для всех A и B $A = B$ в том и только том случае, когда $a \in A$ равносильно $a \in B$ при любом a.

Множество A называется подмножеством или частью множества B, а множество B – надмножеством множества A, если каждый элемент множества A принадлежит также и множеству B. В этом случае говорят, что множество A включено в множество B и пишут $A \subseteq B$. В роли множеств элементов можно использовать любые подмножества универсума U. Каждое множество, рассматриваемое в какой-либо задаче, должно быть подмножеством универсума этой задачи: $A \subseteq U$ (2) для любого A. Каждый элемент, фигурирующий в задаче, должен принадлежать универсуму этой задачи:

$$a \in U \tag{3}$$

для любого a.

Пустое множество является подмножеством любого множества:

$$\varnothing \subseteq A \tag{4}$$

для любого A.

Отношение $\subseteq$ называется включением множеств. Оно рефлексивно:

$$A \subseteq A \tag{5}$$

для любого A; антисимметрично: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ равносильно $A = B$ для любых A и B; транзитивно: $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ влечет $A \subseteq C$ для любых A, B, C. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называют собственным подмножеством или правильной частью множества B и пишут $A \subset B$. Отношение $\subset$ называется строгим включением множеств. Множества $\varnothing$ и A называются несобственными подмножествами множества A, все другие подмножества множества A – его собственными подмножествами.

Объединением или суммой $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества B. Утверждение $a \in A \cup B$ равносильно утверждению $a \in A$ или $a \in B$ при любых a, A, B. Пересечением или общей частью $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех таких элементов, каждый из которых содержится как в множестве A, так и в множестве B. Утверждение $a \in A \cap B$ равносильно утверждению $a \in A$ и $a \in B$ при любых a, A, B.

Операции объединения и пересечения множеств идемпотентны: $A \cup A = A$ (6), $A \cap A = A$ (7) для любого A; коммутативны: $A \cup B = B \cup A$ (8), $A \cap B = B \cap A$ (9) для любых A и B; ассоциативны:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{10}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{11}$$

и дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{12}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{13}$$

любых A, B, C. Операции объединения и пересечения множеств подчиняются законам поглощения или элиминации:

$$A \cup (A \cap B) = A, \tag{14}$$

$$A \cap (A \cup B) = A \tag{15}$$

для любых A и B. В сочетании с универсальным и пустым множествами операции объединения и пересечения множеств обладают свойствами:

$$A \cup \varnothing = A, \tag{16}$$

$$A \cap U = A, \tag{17}$$

$$A \cup U = U, \tag{18}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing \tag{19}$$

при любом A.

Множества A и B называются непересекающимися, если $A \cap B = \varnothing$; в противном случае говорят, что эти множества пересекаются. Множество B называется дополнением множества A, если $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = U$. Для каждого множества A существует единственное дополнение $\overline{A}$. При любых a и A $a \in \overline{A}$ равносильно $a \notin A$. Операция дополнения $\overline{A}$ множества A подчиняется закону двойного дополнения: $\overline{\overline{A}} = A$ (20) для любого A; законам до Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{21}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{22}$$

для любых A и B. В сочетании с универсальным и пустым множествами операции объединения, пересечения и дополнения множеств обладают свойствами:

$$A \cup \overline{A} = U, \tag{23}$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \tag{24}$$

для любого A;

$$\overline{\varnothing} = U \tag{25}$$

$$\overline{U} = \varnothing \tag{26}$$

При любых A и B равенство $A \cup B = B$ равносильно включению $A \subseteq B$, справедливы включения

$$A \subseteq A \cup B, \tag{27}$$

$$A \cap B \subseteq B. \tag{28}$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \tag{29}$$

Система всех подмножеств универсума U вместе с заданными на ней операциями дополнения, объединения и пересечения множеств, называется алгеброй множеств. Соотношения (2) – (26) называются основными тождествами алгебры множеств.

Любое множество M, содержащее элементы 0 и 1, на котором заданы две двухместные операции $+$ и $\bullet$ и одна одноместная $'$, удовлетворяющие при любых a, b, $c \in M$ равенствам

$$a + a = a, \tag{30}$$

$$a \cdot a = a, \tag{31}$$

$$a + b = b + a, \tag{32}$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \tag{33}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \tag{34}$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \tag{35}$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \tag{36}$$

$$(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c), \tag{37}$$

$$a + (a \cdot b) = a, \tag{38}$$

$$a \cdot (a + b) = a, \tag{39}$$

$$a + 0 = a, \tag{40}$$

$$a \cdot 1 = a, \tag{41}$$

$$a + 1 = 1, \tag{42}$$

$$a \cdot 0 = 0, \tag{43}$$

$$(a')' = a, \tag{44}$$

$$(a + b)' = a' \cdot b', \tag{45}$$

$$(a \cdot b)' = a' + b', \tag{46}$$

$$a + a' = 1, \tag{47}$$

$$a \cdot a' = 0, \tag{48}$$

$$\overline{0} = 1, \tag{49}$$

$$\overline{1} = 0 \tag{50}$$

называется булевой алгеброй. Соотношения (30) – (50) называются основными тождествами булевой алгебры.

Не все основные тождества булевой алгебры независимы друг от друга. Часть из них можно вывести из совокупности остальных. Так, из тождеств

$$
\begin{gathered}
a+a=a, \\
a+b=b+a, \\
(a+b)+c=a+(b+c), \\
(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c), \\
(a')'=a, \\
(a+b)'=a'\cdot b', \\
a+(b\cdot b')=a.
\end{gathered}
\qquad (51)
$$

выводятся все остальные основные тождества булевой алгебры. Тождество (51), отсутствующее в перечне основных тождеств булевой алгебры, вытекает из тождеств $a+0=a$ и $a\cdot a'=0$. Только что приведенные семь тождеств (30), (32), (34), (36), (44), (46) и (51) логически независимы друг от друга, они называются аксиомами булевой алгебры. Любое непустое множество M, на котором заданы операции $+$, $\bullet$ и $'$, починяющиеся этим аксиомам, является булевой алгеброй. Из аксиом булевой алгебры следует существование и единственность нуля $0=a\cdot a'$ и единицы $1=a+a'$.

Если в роли 0 принять множество $\varnothing$, в роли 1 – множество U, в роли операций $+$, $\bullet$, $'$ – соответственно операции $\cup$, $\cap$, $\bar{}$ над множествами множества U, то булева алгебра превратится в одну из ее разновидностей – алгебру множеств. Операции $\cup$, $\cap$, $\bar{}$ называют булевыми операциями над множествами. Аксиомы булевой алгебры теперь выполняют роль аксиом алгебры множеств, которые записываются в виде тождеств:

$$
\begin{gathered}
A\cup A=B\cup A,\ (a\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \\
(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\ \overline{\overline{A}}=A, \\
\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ A\cup\left(B\cap\overline{B}\right)=A
\end{gathered}
\qquad (52).
$$

3. Отношения

Любая упорядоченная совокупность каких-либо элементов $a_1,a_2,\ldots,a_n$ называется набором, кортежем или последовательностью. Элементы, образующие набор, называются его компонентами. Каждый компонент в наборе характеризуется своим местом, так что перемена местами различных элементов в наборе ведет к изменению всего набора. Наборы могут отличаться друг от друга числом компонентов n, а также составом или порядком расположения элементов в наборе. Для записи набора используется перечень всех его компонентов, заключенный в круглые скобки: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Наборы будем обозначать строчными латинскими буквами, например, $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Места компонентов в наборе нумеруют слева направо. На разных местах в наборе могут стоять как различные, так и одинаковые элементы. Однокомпонентный набор называется унарным, двухкомпонентный – бинарным, трехкомпонентный – тернарным, n-компонентный – n-арным. Число компонентов в наборе называется его арностью. Бинарный набор называется упорядоченной парой или просто парой. Любой унарный набор (a) совпадает с элементом a. Если символы a и b обозначают один и тот же набор, то говорят, что наборы a и b равны и пишут $a=b$. Два набора $a=(a_1,a_2,\ldots,a_m), b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ равны в том и только том случае, если $m=n$ и $a_i=b_i$ при всех $i\in\{1,2,\ldots,m\}$. Наборы можно строить не только из элементов, но и из наборов по правилу

$$
\begin{gathered}
((a_1,a_2,\ldots,a_m),(b_1,b_2,\ldots,b_n))= \\
=(a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots,b_n).
\end{gathered}
\qquad (52)
$$

Пусть $A_1,A_2,\ldots,A_n$ – непустые подмножества универсума U. Образуем набор $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ из элементов $a_1\in A_1,a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n$. Множество $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ всех таких наборов называется декартовым произведением множеств $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Можно говорить о принадлежности $a\in A$ набора a декартову произведению A. Если $n=2$ и $A_1=A_2=A$, то декартово произведение называют декартовым квадратом или просто квадратом множества A и пишут $A\times A=A^2$. Декартово произведение $A\times A\times A=A^3$ называется кубом множества A. Декартово произведение $A\times A\times\ldots\times A$, в записи которого множество A встречается n раз, называется n-й степенью множества A и записывается в виде A^n.

Операция $\times$ получения декартова произведения $A\times B$ из множества A и B ассоциативна:

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C) \qquad (54)$$

при любых A, B, C. В сочетании с операциями $\cup$, $\cap$ и $\bar{}$ операция декартова произведения множеств обладает свойствами:

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D), \qquad (55)$$

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C), \qquad (56)$$

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C), \qquad (57)$$

$$
\begin{gathered}
(A\cup B)\times(C\cup D)= \\
=(A\times C)\cup(B\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times D)
\end{gathered}
\qquad (58)
$$

для любых A, B, C, D. Отношения $\in$, $=$ и $\subseteq$ в сочетании с операциями $\times$, $\cup$, $\cap$, $\bar{}$ обладают следующими свойствами: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ равносильно $a_1\in A_1,a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n$ для любых $a_1,a_2,\ldots,a_n$ и $A_1,A_2,\ldots,A_n$; $A\subseteq B$ и $C\subseteq D$ равносильно $A\times C\subseteq B\times D$; $A=B$ и $C=D$ равносильно

$A\times C = B\times D$; $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$; $A\subseteq C$ и $B\subseteq D$ влечет $A\times B=(A\times D)\cap(C\times B)$; $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times D$ влечет $A=B=C=D$ для любых A, B, A, D.

Любое подмножество P декартова произведения A множеств $A_1,A_2,\ldots,A_n$ называется отношением, заданным на $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$. Отношение $\varnothing$, не содержащее ни одного набора, называется пустым; отношение P, состоящее из всех наборов декартова произведения A, называется полным. Отношения, как и множества, будем обозначать заглавными латинскими буквами. При $n=1$ отношение называется унарным, при $n=2$ — бинарным, при $n=3$ — тернарным. При произвольном значении n отношение называется n-арным. Об n-арном отношении, заданном на A^n, для краткости говорят, что оно задано на A. Вместо выражения «отношение P, заданное на A» кратко говорят «отношение P на A». Для задач, в которых фигурируют отношения на A, множество A играет роль универсума, а сами отношения — роль подмножеств этого универсума.

Можно говорить о принадлежности набора отношению, равенстве и включении отношений на A, а также об их объединения, пересечении и дополнении. Таким образом, на множестве всех отношений задана алгебра, являющаяся разновидностью булевой алгебры. Объединение отношений называют их дизъюнкцией, пересечение — конъюнкцией, дополнение — отрицанием отношения. Можно говорить о декартовом произведения $P\times Q$ отношений P и Q. Утверждение $(a_1,a_2,\ldots,a_m)\in P$ и $(b_1,b_2,\ldots,b_m)\in Q$ равносильно утверждению $(a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots,b_n)\in P\times Q$ при любых $a_1\in A_1,a_2\in A_2,\ldots,a_m\in A_m$, $b_1\in B_1,b_2\in B_2,\ldots,b_n\in B_n$, $P\subseteq A$, $Q\subseteq B$, где $A=A_1\times A_2\ldots\times A_m$ и $B=B_1\times B_2\times\ldots\times B_n$.

Если набор принадлежит отношению P, то он называется веткором отношения P. Для бинарных отношений, кроме записи $(a,b)\in P$, употребляется равносильная ей запись U. Если $(a,b)\notin P$, то пишут U. Бинарное отношение U, составленное из всех пар вида (a,a), где $a\in U$, называется равенством или диагональным отношением, заданным на универсуме U. Для обозначения отношения D используется также символ $=$. Пары вида (a,a) называются диагональными. Отношение равенства рефлексивно: $a=a$ (59) для любого a; симметрично: $a=b$ влечет $b=a$ для любых a, b; транзитивно: $a=b$ и $b=c$ влечет $a=c$ для любых a, b, c. Отношение равенства можно задать не только на универсуме U, но и на любом его подмножестве A. В этом случае говорят о равенстве на A.

Отношение F, заданное на $A\times B$, называется функциональным, если оно удовлетворяет условию однозначности: для любых $a\in A$ и $b,c\in B$ aFb и aFc влечет $b=c$. Говорят, что функциональное отношение F, заданное на $A\times B$, определяет соответствующую ему функцию или операцию f, действующую из множества A в множество B. Функции будем обозначать строчными латинскими или греческими буквами. Если для $a\in A$ найдется элемент $b\in B$ такой, что aFb, то функция f ставит в соответствие элементу a единственный элемент b. Этот факт записывают следующим образом: $b=f(a)$ или $b=fa$. Если же для $a\in A$ не существует элемента $b\in B$ такого, что aFb, то функция f не ставит в соответствие элементу a никакого элемента из множества B. В этом случае говорят, что функция f для элемента $a\in A$ не определена.

Функцию f можно определить, указывая соответствующее ей отношение F. Чтобы определение функции было логически безупречным (корректным), нужно доказать, что отношение F подчиняется условию однозначности. Такое доказательство называется проверкой корректности определения функции f. Отношение равенства D на A определяет функцию d, называемую тождественной. Она характеризуется свойством:

$$a=d(a) \tag{60}$$

для всех $a\in A$.

Если $b=f(a)$, то элемент $b\in B$ называется образом элемента $a\in A$, а элемент a — прообразом элемента b относительно функции f. Совокупность всех прообразов элемента b относительно функции f, содержащихся в множестве A, называется полным прообразом элемента b в A относительно функции f. Множество A называется областью отправления функции f, множество B — ее областью прибытия. Множество всех элементе $a\in A$, для каждого из которых существует элемент $b\in B$, удовлетворяющий условию $b=f(a)$, называется областью определения функции f. Множество всех элементов $b\in B$, для каждого из которых существует элемент $a\in A$, удовлетворяющий условию $b=f(a)$, называется областью значений функции f. Если область отправления функции f представляет собой декартово произведение $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$, то говорят, что функция f n-местна.

Функция называется всюду определенной, если ее область определения совпадает с областью отправления, в противном случае она называется частичной. Будем говорить, что всюду определенная функция f заданная на $A\times B$, отображает множество A в множество B, и писать $f:A\to B$. Иногда для краткости всюду определенную функцию называют просто функцией. Всюду определенная функция называется сюръекцией, если ее область значений совпадает с областью прибытия. Будем говорить, что сюръекция, заданная на $A\times B$, отображает множество A на множество B. Говорят, что сюръекция $f: A \to A$ отображает множество A на себя.

Всюду определенная функция f, заданная на $A \times B$ называется инъекцией, если для каждого $b \in B$ не существует более одного элемента $a \in A$, удовлетворяющего условию $b = f(a)$. Сюръективная и инъективная функция называется биекцией. Говорят, что биективная функция на $A \times B$ взаимно однозначно отображает множество A на множество B. Конечные области отправления и прибытия биекции состоят из одинакового числа элементов, а бесконечные – равномощны.

Бинарное отношение E на A называется эквивалентностью, если оно рефлексивно: aEa для любого $a \in A$; симметрично: aEb влечет bEa для любых $a, b \in A$; транзитивно: aEb и bEc влечет aEc для любых $a, b, c \in A$. Отношение равенства D является эквивалентностью. Разбиением S множества A называется любая система непустых подмножеств множества A, таких что каждый элемент множества A принадлежит только одному из них. Множества, принадлежащие разбиению S, называются слоями или смежными классами разбиения S.

Каждой эквивалентности E на A можно поставить во взаимно однозначное соответствие разбиение S множества A, и наоборот, по следующему правилу: если aEb, то a и b помещаем в один слой разбиения S, если же $a\overline{E}b$, то в разные. Так, связанные эквивалентность E и разбиение S называются соответствующими друг другу. Равенству D на A соответствует разбиение множества A, состоящее из одноэлементных слоев.

Разбиение S, соответствующее эквивалентности E на A, называется фактор-множеством от A по E и обозначается $A \setminus E$. Сюръекция $f_E: A \to A \setminus E$, которая каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие содержащий его слой разбиения S, называется каноническим отображением A на $A \setminus E$. Каноническое отображение $f_E: A \to A \setminus E$ будет биекцией в том и только том случае, когда эквивалентность E совпадает с равенством D.

Пусть f – сюръекция, отображающая A на B. Определим на A эквивалентность E, полагая aEb в том и только той случае, когда $f(a) = f(b)$. Слои разбиения S, соответствующего эквивалентности E, представляют собой полные прообразы в A элементов множества B. Ставя в соответствие каждому элементу множества B его полный прообраз в A, получаем биекцию, отображающую B на $A \setminus E$. Эта биекция называется каноническим отображением B на $A \setminus E$. Эквивалентность E называется ядерной для функции f.

Бинарное отношение на множестве A называется квазипорядком, если оно рефлексивно и транзитивно. Частичным порядком называется квазипорядок P, удовлетворяющий условию антисимметричности: aPb и bPa влечет $a = b$ для всех $a, b \in A$. Для частичного порядка будем использовать специальное обозначение $\leq$. Если $a \leq b$ и $a \neq b$, то будем писать $a < b$ и говорить, что a меньше b. Запись $a \leq b$ означает, что a меньше или равно b. Элемент $a \in A$ называется наибольшим в A относительно частичного порядка $\leq$ на A, если $b \leq a$ для всех $b \in A$; наименьшим – если $a \leq b$. Элементы a и b множества A называются сравнимыми относительно частичного порядка $\leq$ на A, если $a \leq b$ или $b \leq a$. Частичный порядок $\leq$ на A называется линейным порядком на A, если любые $a, b \in A$ сравнимы относительно $\leq$. Множество, на котором задан частичный порядок, называется частично упорядоченным; линейный — линейно упорядоченным или цепью.

Бинарное отношение Q на $B \times A$ называется обратным к отношению P на $A \times B$, если оно удовлетворяет условию: aPb равносильно bQa для всех $a \in A$ и $b \in B$. Операция *, которая ставит в соответствие каждому отношению P на $A \times B$ обратное ему отношение P^* на $B \times A$, называется обращением отношения P. Произведением отношений P на $A \times B$ и Q на $B \times C$ называется отношение R на $A \times C$, удовлетворяющее условию: для любых $a \in A$ и $c \in C$ утверждение «существует $b \in B$, такое, что aPb и bQc» равносильно утверждению aRc. Операция $\circ$, которая ставит в соответствие отношениям P на $A \times B$ и Q на $B \times C$ их произведение $P \circ Q$ на $A \times C$, называется умножением отношений. Произведение $H = F \circ G$ функциональных отношений F и G соответствует функция $h = gf$, называемая суперпозицией функций f и g, соответствующих отношениям F и G. Если $xF \circ Gy$, то пишут $y = g(f(x)) = gf(x)$.

Алгеброй отношений на A называется множество всех бинарных отношений на A с заданными на нем операциями $\cup$, $\cap$, $\overline{}$, $\circ$ и *. В алгебре отношений справедливы все основные тождества булевой алгебры. Роль операций $+$, $\bullet$ и $'$ в алгебре отношений выполняют соответственно операции объединения, пересечения и дополнения отношений. Операции $\circ$ и * подчиняются следующим тождествам:

$$\left(P^*\right)^* = P, \tag{61}$$

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R), \tag{62}$$

$$(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*, \tag{63}$$

$$\overline{P^*} = \left(\overline{P}\right)^*, \tag{64}$$

$$(P \cup Q)^* = P^* \cup Q^*, \tag{65}$$

$$(P \cap Q)^* = P^* \cap Q^*, \tag{66}$$

$$P \circ (Q \cup R) = (P \circ Q) \cup (P \circ R), \tag{67}$$

$$(P \cup Q) \circ R = (P \circ R) \cup (Q \circ R), \tag{68}$$

которые, вместе с основными тождествами булевой алгебры, считаются основным тождествами в алгебре отношений. Аналог двух последних тождеств для операции $\cap$ неверен, вместо них имеют место включения

$$P \circ (Q \cap R) \subseteq (P \circ Q) \cap (P \circ R), \qquad (69)$$

$$(P \cap Q) \circ R \subseteq (P \circ R) \cap (Q \circ R). \qquad (70)$$

Символ P, Q и R обозначают произвольные бинарные отношения на A.

4. Предикаты

В этом подразделе описывается формальный язык – алгебра предикатов, с помощью которого можно математически выражать предикаты, реализуемые испытуемым (см. п. 1). Вначале рассмотрим алгебру логики, которую приходится использовать при введении алгебры предикатов. Введем множество $\Sigma = \{0,1\}$. Символы 0 и 1 называются булевыми элементами. Символ 0 называется нулем или ложью, символ 1 – единицей или истиной. Переменная, заданная на множестве Σ, называется булевой. Булевы переменные будем обозначать строчными буквами греческого алфавита.

Одноместная операция $\beta = \overline{\alpha}$, отображающая множество Σ на себя и определяемая равенствами

$$\overline{0} = 1, \qquad (71)$$

и

$$\overline{1} = 0, \qquad (72)$$

называется булевым отрицанием. Двухместная операция $\sum = \{0,1\}$, отображающая Σ^2 на Σ и определяемая равенствами

$$0 \vee 0 = 0, \qquad (73)$$

$$0 \vee 1 = 1, \qquad (74)$$

$$1 \vee 0 = 1, \qquad (75)$$

$$1 \vee 1 = 1, \qquad (76)$$

называется булевой дизъюнкцией или булевым сложением. Двухместная операция $\gamma = \alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta = \alpha\beta$, отображающая Σ^2 на Σ и определяемая равенствами

$$0 \wedge 0 = 0, \qquad (77)$$

$$0 \wedge 1 = 0, \qquad (78)$$

$$1 \wedge 0 = 0, \qquad (79)$$

$$1 \wedge 1 = 1, \qquad (80)$$

называется булевой конъюнкцией или булевым умножением.

Множество Σ, вместе с заданными на нем операциями $\overline{}$, $\vee$ и $\wedge$, называется алгеброй логики. Алгебра логики является разновидностью булевой алгебры. Роль операций $+$, $\bullet$ и $'$ в алгебре логики выполняют соответственно операции $\vee$, $\wedge$ и $\overline{}$. В алгебре логики справедливы все основные тождества булевой алгебры. Функции, получаемые суперпозицией операций $\overline{}$, $\vee$ и $\wedge$, называются булевыми функциями. Булева функция

$$\alpha \supset \beta = \alpha \vee \overline{\beta} \qquad (81)$$

называется импликацией, булева функция

$$\alpha \sim \beta = (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha) \; – \qquad (82)$$

равнозначностью.

Предикатом P, заданным на U^n, называется любая функция $\zeta = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отображающая множество U^n в множество Σ. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются предметными, а их значения – предметами. Если $n = 1$, то предикат P называется унарным, если $n = 2$ – бинарным, если $n = 3$ – тернарным. При произвольной значении n предикат называется n-арным. Если множество U конечно, то предикат P называется конечным, в противном случае – бесконечным. Предикат, равный единице для всех наборов значений своих аргументов, называется тождественно истинным; равный нулю – тождественно ложным. Обозначаем эти предикаты символами 1 и 0.

Дизъюнкцией или логическим сложением предикатов P и Q называется предикат $P \vee Q$, значения которого при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in U$ определяются по формуле

$$\begin{aligned}(P \vee Q)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \ldots, x_n).\end{aligned} \qquad (83)$$

Конъюнкцией или логическим сложением предикатов $\sum = \{0,1\}$ и Q называется предикат $\sum = \{0,1\}$ со значениями

$$\begin{aligned}(P \wedge Q)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_n).\end{aligned} \qquad (84)$$

Отрицанием предиката P называется предикат $\overline{P}$ со значениями

$$(\overline{P})(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad (85)$$

В правой части равенств (83) и (85) знаки $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$ обозначают булевы дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. В левой части тех же равенств знаки $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$ обозначают операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов.

Множество всех n-арных предикатов, заданных на U^n, на котором определены операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, предикатов называется алгеброй n-арных предикатов на U. Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов называются базисными для алгебры предикатов. Алгебра предикатов при любом значении n является разновидностью булевой алгебры. В ней выполняются все основные тождества булевой алгебры. В алгебре предикатов роль элементов

0, 1 и операций $+$, $\bullet$ и $'$ выполняют соответственно тождественно ложный и тождественно истинный предикаты и операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов.

Предикат вида:

$$x_i^a = \begin{cases} 1, \text{если } x_i = a, \\ 0, \text{если } x_i \neq a \end{cases} \tag{86}$$

называются базисными для алгебры предикатов. Здесь $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, a – любой элемент универсума U. Если универсум конечен и состоит из k элементов, то всего имеется kn различных базисных элементов. Алгебра предикатов полна в том смысле, что любой ее предикат можно представить в виде некоторой суперпозиции базисных операций, примененных к базисным элементам. Предикат x_i^a называется узнаванием предмета a по переменной x_i.

Для узнаваний предметов при любом $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ справедливы следующие тождества: закон истинности –

$$\bigvee_{a \in U} x_i^a = 1, \tag{87}$$

закон отрицания – для любого $a \in U$

$$\overline{x_i^a} = \bigvee_{\substack{b \in U \\ b \neq a}} x_i^b \tag{88}$$

закон ложности – для любых $a, b \in U$, если $a \neq b$, то

$$x_i^a x_i^b = 0 \tag{89}$$

Запись $\bigvee\limits_{a \in U}$ обозначает операцию логического суммирования, выполняемую для всех a, принадлежащих универсуму U.

Если универсум конечен $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, то только что приведенные тождества можно переписать в виде:

закон истинности – для любого $i \in \{1,2,\ldots,n\}$

$$x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \ldots \vee x_i^{a_k} = 1, \tag{90}$$

закон отрицания – для любых $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ и $j \in \{1,2,\ldots,k\}$

$$\overline{x_i^{a_j}} = x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \ldots \vee x_i^{a_{j-1}} \vee x_i^{a_{j+1}} \vee \ldots \vee x_i^{a_k}, \tag{91}$$

закон ложности – для любых $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $j, l \in \{1,2,\ldots,k\}$ и $j \neq l$

$$x_i^{a_j} x_i^{a_l} = 0. \tag{92}$$

Пусть P – отношение, заданное на U^n. Предикат P, значения которого вычисляются по правилу

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P \\ 0, \text{если } x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin P \end{cases} \tag{93}$$

называется предикатом, соответствующим отношению P. Каждому отношению P на U^n соответствует свой предикат P на U^n и наоборот. Наличие такого взаимно однозначного соответствия между отношениями и предикатами дает возможность математически записывать любое отношение в виде некоторой формулы алгебры предикатов, по которой могут быть вычислены значения предиката, соответствующего этому отношению.

Например, отношению

$$P = \{(n,a,n,a),(м,a,м,a)\}$$

соответствует предикат P, значения которого определяется формулой $P(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^a x_4^a (x_1^n x_3^n \vee x_1^м x_3^м)$. Переменные x_1, x_2, x_3, x_4, фигурирующие в формуле, можно содержательно интерпретировать как имена первого, второго, третьего и четвертого мест элементов в наборах, образующих отношение P (считая слева неправо). Запись $x_1 = n$, $x_2 = a$, $x_3 = n$, $x_4 = a$ означает, что в данном случае речь идет о наборе (п, а, п, а), на первом и третьем местах которого стоит буква п, а на втором и четвертом – буква а.

Любой предикат P, заданный на U^n, можно выразить следующей формулой алгебры предикатов

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}, \tag{94}$$

называемой совершенной дизъюнктивной нормальной формой предиката P (сокращенно СДНФ предиката). Запись в правой части равенства (94) означает, что ведется логическое суммирование по всем наборам предметов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, входящим в состав отношения P, соответствующего предикату P.

Декартову произведению $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq U$ соответствует предикат $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, значения которого определяются формулой

$$\begin{aligned}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = A_1(x_1) A_2(x_2) \ldots A_n(x_n).\end{aligned} \tag{95}$$

Здесь A_i – предикат, соответствующий множеству $A_i (i = 1,2,\ldots,n)$, стоящему на i-м месте в декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_n$. Его значения отыскиваются по формуле

$$A_i(x_i) = \bigvee_{a \in A_i} x_i^a \tag{96}$$

Если множество A_i конечно $(A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\})$, то значения соответствующего ему предиката определяются формулой

$$A_i(x_i) = x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \ldots \vee x_i^{a_k} \tag{97}$$

Выражение множеств A_i формулами (96) и (97) выявляет следующий важный факт: оказывается, что предикат $A_i(x_i)$, соответствующий множеству A_i, описывает не только само это множество, но и его место в декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_n$. Это место представлено переменной x_i. Таким образом, выражение множества A_i предикатом $A_i(x_i) = x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \ldots \vee x_i^{a_k}$ характеризует множество более полно, чем запись $A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Рассмотрим, к примеру, декартово произведение $A = M \times M$, где $M = \{a, b\}$. Множеству M, стоящему на первом месте в A, согласно (97) соответствует предикат $M(x_1) = x_1^a \vee x_1^b$. Множеству же M, стоящему на втором месте в A и имеющему то же число и тот же состав элементов, соответствует иной предикат $M(x_2) = x_2^a \vee x_2^b$.

Пусть P — отношение, заданное на декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n \in U$. Отношение P можно формально выразить любым предикатом P, заданным на U^n, который удовлетворяет условию: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P$; $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \setminus P$. За пределами области $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ значения предиката P можно выбрать произвольно. Факт задания отношения P на декартовом произведении A формально выражается системой уравнений $A_1(x_1) = 1, A_2(x_2) = 1, \ldots, A_n(x_n) = 1$, ограничивающих значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ множествами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пытаясь описать на языке алгебры предикатов отношение равенства D, заданное на U, мы обнаруживаем, что этому отношению соответствует не один предикат D, а целое семейство предикатов $D(x_i, x_j)$ $(i \neq j;\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$, зависящих от всевозможных пар аргументов. Таким образом, мы вынуждены различать отношения равенства в зависимости от того, на каких местах в n-компонентном наборе стоят элементы, связываемые данным отношением равенства.

Отношению равенства D, связывающему элементы, стоящие в n-компонентном наборе на D-м и D-м местах, соответствует предикат D, значения которого определяются формулой:

$$D(x_i, x_j) = \bigvee_{a \in U} x_i^a x_j^a. \qquad (98)$$

Если универсум конечен $(U = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\})$, то формулу (98) можно записать в виде

$$D(x_i, x_j) = x_i^{a_1} x_j^{a_1} \vee x_i^{a_2} x_j^{a_2} \vee \ldots \vee x_i^{a_k} x_j^{a_k}. \qquad (99)$$

Назовем множества однотипными, если соответствующие им предикаты зависят от одной и той же переменной. Пусть однотипным множествам A и B соответствуют предикаты $A(x_i)$ и $B(x_i)$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$. Тогда объединению $A \cup B$ этих множеств соответствует предикат

$$(A \cup B)(x_i) = A(x_i) \vee B(x_i). \qquad (100)$$

Пересечению $A \cap B$ множеств A и B соответствует предикат

$$(A \cap B)(x_i) = A(x_i) \wedge B(x_i). \qquad (101)$$

Дополнению $\tilde{A}$ множества A соответствует предикат

$$(\tilde{A})(x_i) = \overline{A(x_i)}. \qquad (102)$$

Мы видим, что объединение, пересечение и дополнение предикатов совпадает соответственно с их дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием (см. (83)-(85)). Точно так же объединению, пересечению и дополнению отношений отвечает дизъюнкция, конъюнкция и отрицание предикатов, соответствующих этим отношениям. Можно показать, что при таком определении операций $\cup$, $\cap$ и ~ для множеств и отношений они будут удовлетворять всем основным тождествам булевой алгебры. Заметим, что пустому множеству $\varnothing$ соответствует предикат $\varnothing(x_i) = 0$ (103) для всех $x_i \in U$. Универсальному множеству U соответствует предикат $U(x_i) = 1$ (104) для всех $x_i \in U$. Точно так же пустому и полному отношениям соответствуют предикаты тождественно ложный и тождественно истинный.

5. Операции над предикатами

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольный предикат, заданный на U^n. Утверждение "Для всех x_i выполняется равенство $P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 1$" связывает предикат некоторым унарным отношением, которое формально можно записать в виде равенства

$$\bigwedge_{x_i \in U} P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 1. \qquad (105)$$

Здесь $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Выражение, стоящее в левой части равенства (105) можно понимать как некую операцию, отображающую множество всех предикатов., заданных на U^n, в себя. Называется эта операция квантором общности по переменной x_i и записывается в виде $\forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n))$. Символ $\forall$ читается «для всех». Таким образом:

$$\begin{aligned} &\forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)) = \\ &= \bigwedge_{x_i \in U} P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n). \end{aligned} \qquad (106)$$

Утверждение «Существует x_i, для которого выполняется равенство $P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 1$» связывает предикат P другим отношением, которое формально выражается равенством

$$\bigvee_{x_i \in U} P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 1. \qquad (107)$$

Операция, стоящая в левой части равенства (107) и отображающая множество всех предикатов, заданных на U^n, в себя, называется квантором существования по переменной x_i. Она записывается в виде $\exists x_i\left(P\left(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n\right)\right)$. Символ $\exists$ читается «существует». Имеем:

$$\begin{aligned}&\exists x_i\left(P\left(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n\right)\right)=\\&=\bigvee_{x_i\in U}P(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)=1.\end{aligned}\qquad(108)$$

Кванторы общности и существования используются для формальной записи различных математических высказываний. При переводе на формальный язык слова “для всех” (или “для каждого”, “при любом” и т.п.) заменяются символом $\forall$, слова “существует” (“найдется”) – символом $\exists$; отношения, фигурирующие в высказывании, заменяются соответствующими им предикатами; слова “или”, “и” (запятая), “не” (“ложно, что”, “неверно, что”), “влечет” (“если – то”, “когда – тогда”), “равносильно” (“если и только если – то”, “тогда и только тогда – когда”, “в том и только том случае – если”) заменяются булевыми операциями $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$, $\supset$, $\sim$.

Далее приведены примеры перевода математических утверждений на формальный язык:

1) «При любых

$$x_1,x_2,\dots,x_n\ \ (x_1,x_2,\dots,x_n)\in A_1\times A_2\times\dots\times A_n$$

в том и только том случае, если

$$x_1\in A_1,x_2\in A_2,\dots,x_n\in A_n\text{»:}$$

$$\begin{aligned}&\forall x_1\forall x_2\dots\forall x_n((A_1\times A_2\times\dots\times A_n)(x_1,x_2,\dots,x_n)\sim\\&\sim A_1(x_1)\wedge A_2(x_2)\wedge\dots\wedge A_n(x_n));\end{aligned}$$

2) «Для каждого a $a=a$»: $\forall aD(a,a)$;

3) «$a=b$ равносильно $b=a$ для любых a, b»: $\forall a\forall b\left(D(a,b)\sim D(b,a)\right)$;

4) «aEb и bEc влечет aEc для любых a, b, c»: $\forall a\forall b\forall c\left(E(a,b)E(b,c)\supset E(a,c)\right)$;

5) «Для всех a, b, c aFb и aFc влечёт $b=c$»: $\forall a\forall b\forall c\left(F(a,b)F(a,c)\supset D(b,c)\right)$;

6) «Существует x такое, что для любого y xFy»: $\exists x\forall yF(x,y)$. В целях сокращения числа скобок в формальных выражениях операция $\wedge$ принимается старшей по отношению к операции $\vee$, а операция $\vee$ – старшей по отношению к операциям $\supset$ и $\sim$. Аргумент квантора не заключается в скобки, если это не нарушает правильности понимания структуры формулы.

В математических текстах часто встречаются утверждения вида: «Для всех $x_i\in A$ U» и «Существует $x_i\in A$ такой, что U». Первое из них переводится на формальный язык следующим образом: $\forall x_i\left(A(x_i)\supset P(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)$, второе – $\exists x_i\left(A(x_i)\wedge P(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)$. Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}&\forall x_1\in A\ P(x_1,x_2,\dots,x_n)=\\&=\forall x_i\left(A(x_i)\supset P(x_1,x_2,\dots,x_n)\right),\end{aligned}\qquad(109)$$

$$\begin{aligned}&\exists x_1\in A\ P(x_1,x_2,\dots,x_n)=\\&=\exists x_i\left(A(x_i)\wedge P(x_1,x_2,\dots,x_n)\right).\end{aligned}\qquad(110)$$

Примеры перевода:

1) «Для любых $a\in A$ и $b,c\in B$ aFb и aFc влечёт $b=c$»:

$$\forall a\forall b\forall c\ \left(A(a),B(b)B(c)\supset\left(F(a,b)F(a,c)\supset D(b,c)\right)\right);$$

2) «aEa для всех $a\in A$»: $\forall a\left(A(a)\supset E(a,a)\right)$;

3) «Для любого $a\in A$ существует $b\in B$ такое, что aFb»: $\forall a\exists b\left(A(a)\supset B(b)F(a,b)\right)$.

Перечислим наиболее употребительные тождества для кванторов: при любых A и B

$$\forall x\forall xA(x)=\forall xA(x),\qquad(111)$$

$$\exists x\exists xA(x)=\exists xA(x),\qquad(112)$$

$$\exists x\forall xA(x)=\forall xA(x),\qquad(113)$$

$$\forall x\exists xA(x)=\exists xA(x),\qquad(114)$$

$$\forall xA(x)=\forall yA(y),\qquad(115)$$

$$\exists xA(x)=\exists yA(y),\qquad(116)$$

$$\forall x\forall yA(x,y)=\forall y\forall xA(x,y),\qquad(117)$$

$$\exists x\exists yA(x,y)=\exists y\exists xA(x,y),\qquad(118)$$

$$\forall x\left(A(x)\wedge B(x)\right)=\forall xA(x)\wedge\forall xB(x),\qquad(119)$$

$$\exists x\left(A(x)\vee B(x)\right)=\exists xA(x)\vee\exists xB(x),\qquad(120)$$

$$\overline{\forall xA(x)}=\exists x\overline{A(x)},\qquad(121)$$

$$\overline{\exists xA(x)}=\forall x\overline{A(x)},\qquad(122)$$

$$\forall xA(x)=\overline{\exists x\overline{A(x)}},\qquad(123)$$

$$\exists xA(x)=\overline{\forall x\overline{A(x)}},\qquad(124)$$

$$\forall x\forall y\left(A(x)\vee B(y)\right)=\forall xA(x)\vee\forall yB(y),\qquad(125)$$

$$\exists x\exists y\left(A(x)\wedge B(y)\right)=\exists xA(x)\wedge\exists yB(y).\qquad(126)$$

В только что приведенных записях имеется в виду, что предикаты A и B – n-арные, и что их значения зависят от переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$. Для краткости записи символами x и y из общего перечня переменных указываются только переменные x_i и y_i при произвольно фиксированных $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$.

Переменная x_i предиката $P(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)$ называется фиктивной или несущественной, если значения предиката P не зависят от значений этой переменной. Формально понятие фиктивности переменной x_i предиката P определяется следующим условием:

$$\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_{i-1}\forall x_i'\,\forall x_i''\,\forall x_{i+1}\ldots\forall x_n \begin{pmatrix} P(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i',x_{i+1},\ldots,x_n)\sim \\ P(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i'',x_{i+1},\ldots,x_n) \end{pmatrix}. \qquad (127)$$

Действуя квантором общности или существования по переменной x_i на любой предикат $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, получаем в результате предикат $Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, у которого переменная x_i фиктивна. Если у предиката P переменная x_i фиктивна, то применение к P квантора $\forall x_i$ или $\exists x_i$ этот предикат не меняет. Если переменная x у предиката B фиктивна, то для любых A и B

$$\forall x(A(x)\vee B)=\forall xA(x)\vee B\,, \qquad (128)$$

$$\exists x(A(x)\wedge B)=\exists xA(x)\wedge B\,. \qquad (129).$$

Кванторы общности и существования можно брать не только по предметам, но и по предикатным переменным. Такая возможность основывается на следующих соображениях. Когда предикат P переменный, то равенство $P(x_1,x_2,\ldots,x_m)=1$ можно рассматривать как $m+1$-арное отношение $(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in P$, связывающее предметные переменные $x_1,x_2,\ldots,x_m$ с переменным n-арным отношением P, соответствующим предикату P. Здесь $x_1,x_2,\ldots,x_m$ $(m<n)$ — существенные переменные предиката P. Несущественные переменные в записи предиката P опущены. Выражаясь более точно, следовало бы сказать, что P — это переменная, заданная на множестве имён всевозможных m-арных отношений. Обозначим предикат, соответствующий отношению $(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in P$, через $\prod(x_1,x_2,\ldots,x_m,P)$. Здесь $\prod$ — имя постоянного предиката, соответствующего постоянному отношению с именем $\in$.

Если в формуле, которая содержит предикат, стоящий под знаком кванторной операции, всюду заменить выражение $P(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ выражением $\prod(x_1,x_2,\ldots,x_m,P)$, то переменный предикат P в этой формуле исчезнет, а вместо него появится ещё одна предметная переменная P, заданная на множестве имён всевозможных n-арных предикатов. Так что, беря квантор по переменному предикату P, мы фактически берём его по предметной переменной P, заданной на некотором подмножестве универсума. Имена предикатов не входят в множество U всех предметов. Поэтому множество U теперь нельзя считать универсумом задачи. Необходим более широкий универсум, получаемый объединением множества U и множества имён всех предикатов. Таким образом, получается, что теперь предметные переменные заданы не на универсуме, а на одном из его подмножеств.

Запишем формулы для вычисления кванторов в случае наличия в подкванторном выражении как предметных, так и предикатных переменных. Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_n\in U$; $P_1,P_2,\ldots,P_r\subseteq U^n$, $R(x_1,x_2,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_r)$ — произвольный предикат. Кванторы по предметной переменной x_i определяются формулами

$$\forall x_i R(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_r)= =\bigwedge_{x_i\in U} R(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_r), \qquad (130)$$

$$\forall x_i R(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_r)= =\bigvee_{x_i\in U} R(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_r). \qquad (131)$$

Кванторы по предикатной переменной P_j $(j\in\{1,2,\ldots,r\})$ вычисляются по формулам:

$$\forall P_j R(x_1,x_2,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_j,\ldots,P_r)= \bigwedge_{P_j\subseteq U^n} R(x_1,x_2,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_j,\ldots,P_r), \qquad (132)$$

$$\exists P_j R(x_1,x_2,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_j,\ldots,P_r)= =\bigvee_{P_j\subseteq U^n} R(x_1,x_2,\ldots,x_n,P_1,P_2,\ldots,P_j,\ldots,P_r). \qquad (133)$$

Аналогичным способом можно определить операцию взятия кванторов по предикатным переменным второго и более высокого порядков.

Приводим примеры перевода на формальный язык математических утверждений с участием кванторов по предикатным переменным:

1) «Для всех a и b $a=b$ в том и только том случае, когда $a\in A$ равносильно $b\in A$ при любом A»: $\forall A\forall a\forall b\big(D(a,b)\sim(A(a)\sim A(b))\big)$;

2) «Для всех A и B $A=B$ в том и только том случае, когда $a\in A$ равносильно $a\in B$ при любом a»: $\forall A\forall B\forall a\big(D(A,B)\sim(A(a)\sim B(a))\big)$;

3) «Существует множество M такое, что для всех x $x\in M$»: $\exists M\forall xM(x)$. Заметим, что предикат равенства от предикатов первого порядка определяется формулой

$$D(P_i,P_j)=\bigvee_{A\subseteq U^n} P_i^A P_j^A\,, \qquad (134)$$

аналогичной выражению (93).

Мы рассмотрели ряд операций над предикатами, отображающих множество всех предикатов, заданных на U^n, в себя. Это — конъюнкция, дизъюнкция и отрицание предикатов, а также кванторы общности и существования по переменным x_i $(i=1,2,\ldots,n)$. Введём ещё семейство всех предикатов, соответствующих отношениям $A\subseteq U^n$, каждый из которых рассматривается как константная операция A, принимающая на всех наборах предикатов одно и то же значение A. Введём также операцию узнавания предиката A по предикатной переменной P_j $(j\in\{1,2,\ldots,t\})$, определяемую следующим образом:

$$P_j^A=\begin{cases}1, \text{ если } P_j=A,\\ 0, \text{ если } P_j\neq A.\end{cases}, \qquad (135)$$

Здесь символы 1 и 0 обозначают тождественно истинный и тождественно ложный предикаты.

Любую t-местную операцию F над предикатами $P_1, P_2, \ldots, P_t$ можно следующим образом выразить в виде суперпозиции уже введенных операций:

$$F(P_1, P_2, \ldots, P_t) = \\ = \bigvee_{A_1, A_2, \ldots, A_t \subseteq U^n} B(A_1, A_2, \ldots, A_t) P_1^{A_1}, P_2^{A_2}, \ldots, P_t^{A_t} \quad (136).$$

Здесь $B(A_1, A_2, \ldots, A_t) = F(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ – фиксированный предикат, представляющий собой значение операции F на наборе предикатов $(A_1, A_2, \ldots, A_t)$. Таким образом, система операций, состоящая из дизъюнкции, конъюнкции, узнаваний всевозможных предикатов по переменным $P_1, P_2, \ldots, P_t$ и всех константных операций, полна.

Узнавание каждого предиката A по любой из предикатных переменных $P_j (j = 1, 2, \ldots, t)$ выражается в виде следующей суперпозиции кванторов общности, операции равнозначности предикатов и фиксированного (индивидуального) предиката A:

$$P_j^A = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \left(P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) \quad (137)$$

Операция равнозначности предикатов

$$P \sim Q = \bar{P}\bar{Q} \vee PQ \quad (138)$$

выражается через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание предикатов. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – набор предметных переменных. Квантором общности по набору x назовем операцию

$$\forall x P(x) = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n P(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (139)$$

Мы видим, что любую операцию над предикатами можно выразить суперпозицией операций $\forall x$, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$ и всех константных операций (т.е. индивидуальных предикатов). Такая система операций несократима.

Операции над предикатами, которые принимают значения только из множества 0, 1, называются предикатами от предикатов. Каждому предикату T от предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_t$ соответствует некоторое отношение T, связывающее отношения $P_1, P_2, \ldots, P_t$. Любой t-арный предикат T от предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_t$ можно выразить формулой вида:

$$T(P_1, P_2, \ldots, P_t) = \bigvee_{(A_1, A_2, \ldots, A_t) \in T} P_1^{A_1} P_2^{A_2} \ldots P_t^{A_t} \quad (140)$$

Выводы

Мы видим, что система всех узнаваний предикатов, вместе с операциями дизъюнкции и конъюнкции предикатов, полна при выражении с ее помощью любого предиката от предикатов. Если желательно обойтись без узнаваний предикатов, то для выражения любых предикатов от предикатов можно воспользоваться описанной в предыдущем абзаце системой, состоящей из операций $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$, $\forall x$ и всех константных операций.

Предикаты от предикатов используются для формальной записи математических утверждений. Если предикат от предикатов принимает значение 1, то ему соответствует истинное утверждение, если 0 – ложное. Приводим примеры перевода истинных и ложных утверждений на формальный язык:

1) "Для любого множества M существует элемент x такой, что $x \in M$": $\forall M \exists x M(x)$;

2) "Для любых отношений A и B

$A \cup B = B \cup A$": $\forall A \forall B D(A \vee B, B \vee A)$

Утверждение 1) ложно, утверждение 2) истинно. Если в формуле, выражающей предикатную операцию, присутствует квантор $\forall x_i$ или квантор $\exists x_i$, то говорят, что переменная x_i в этой формуле связана. В противном случае переменная в формуле называется свободной. Формула, у которой все переменные связаны, называется замкнутой. Замкнутые формулы всегда истинны или ложны.

Литература: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко* - Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984. – 144 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Технические средства [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко* - Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. – 136 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко* - Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. – 159 с. 4. *Ньютон И.* Оптика или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. Пер. с англ. 2-е изд. – М.: Гостехтеориздат, 1954. – 365 с.

Поступила в редколлегию 02.04.2010

УДК 519.7

Інструментарій компараторної ідентифікації / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Н.В. Шаронова // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 74–86.

Теорія інтелекту розглядається як формальне вчення. Така необхідність обумовлена тим, що теорія інтелекту має потребу в особливій математичній мові, що недостатньо розвинена в наявних розділах математики. Тому поряд зі змістовним вивченням розуму людини необхідно також розробляти відповідний формальний апарат.

Бібліогр.: 5 найм.

UDC 519.7

The ideas algebra interpretations / M.F. Bondarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko, N.V. Sharonova // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – C. 74–86.

The intelligence theory is considered as the formal doctrine. Such necessity is caused by that the intelligence theory requires special mathematical language which is insufficiently developed in available sections of mathematics. Therefore along with substantial studying of the person reason it is necessary to develop the corresponding formal device also.

Ref.: 5 items.

УДК 519.7

СИТУАЦИОННО-ТЕКСТОВЫЙ ПРЕДИКАТ

М.Ф. Бондаренко[1], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[2], Н.В. Шаронова[3]

[1,2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина,

[3] ХПИ, г. Харьков, Украина

Для развития метода компараторной идентификации вводится формальный язык, который позволяет записывать предикаты, реализуемые испытуемым в экспериментах; язык для записи уравнений, выражающих свойства этих предикатов; формальные средства для описания внутренней структуры стимулов, предъявляемых испытуемому, состояний, переживаемых им, а также внутренней структуры предикатов, реализуемых испытуемым. Предлагаются математические средства извлечения из свойств предикатов их внутренней структуры.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Ситуация – это физическая реальность, данная испытуемому в его ощущениях. Ситуации существуют независимо от сознания испытуемого и отражаются в нем в виде впечатлении, восприятий. Ситуации являются тем единственным источником первичной информации, которая затем используется интеллектом в его мыслительной деятельности. То, что не было извлечено органами чувств испытуемого из ситуаций, не может затем появиться в его разуме. Любая ситуация ограничена в пространстве и во времени. Например, вид на улицу из окна комнаты ограничен в пространстве углом обзора и домами на противоположной стороне улицы.

Во времени каждая ситуация ограничена длительностью ее наблюдения испытуемым. Ситуации ограничиваются также и направленностью внимания испытуемого. Например, рассматривая картины Айвазовского в музее, человек попутно получает из внешнего мира массу побочных впечатлений, но не обращает на них внимания. Восприятие ситуаций ограничивается также уровнем подготовки испытуемого, объемом его знаний, направленностью его интересов. Каждая ситуация воспринимается испытуемым с конечным разрешением как в пространстве, так и во времени. То же относится к световым излучениям, звукам, тактильным, вкусовым, обонятельным и другим видам воздействий. Таким образом, любая ситуация является фрагментом физического мира, некоторой его частью. Множество A всех ситуаций, используемых в данном эксперименте над испытуемым, исследователь может выбрать произвольно по собственному усмотрению, сообразуясь с теми конкретными задачами, которые он ставит перед собой при изучении интеллекта испытуемого.

1. Введение ситуационно-текстового предиката

Рассмотрим эксперимент, в котором испытуемый реализует бинарный предикат $P(x,y)$, заданный на декартовом произведении $A\times B$ множеств A и B. Предикат P назовем ситуационно - текстовым. В роли сигнала X исследователь предъявляет испытуемому ситуации. Определить в точных терминах, что такое ситуация, пока не представляется возможным, поскольку такое определение как раз и составляет одну из задач теории интеллекта, которую предстоит еще решить. Поэтому мы ограничимся примерами, поясняющими интуитивное содержание этого понятия.

В роли ситуации X можно, например, использовать вид, открывающийся из окна комнаты на улицу. Выглядывая из окна в разное время суток, человек всякий раз будет воспринимать какую-то ситуацию. В данном случае в роли множества A берем, к примеру, совокупность всех ситуаций, которые можно наблюдать из окна комнаты в течение каждой минуты суток. Другие примеры сигнала X и множества A: 1) X – день жизни данного человека; A – все дни одного года жизни данного человека; 2) X – кадр из кинофильма “Веселые ребята”; A – все кадры этого кинофильма; 3) X – вид, открывающийся из окна вагона поезда, следующего из Москвы до Ленинграда, на одном из километровых участков пути; A – множество таких видов на всех километровых участках этого пути; 4) X – картина Айвазовского из Феодосийского музея; A – собрание всех картин Айвазовского, имеющихся в Феодосийском музее.

В роли сигнала Y исследователь предъявляет испытуемому тексты. Определение в точных терминах понятия текста представляет собой одну из важных задач теории интеллекта, ждущую еще своего решения. Ниже смысл понятия текста разъясняется на интуитивном уровне. Любой текст должен выражать вполне определенную мысль. Мысль, заключенная в тексте, называется смыслом этого текста. Например, текстами являются следующие записи: “Светит солнце”, “Идет дождь”, “Не идет дождь”, “Идет дождь, или светит солнце”, “Идет дождь. Светит солнце”.

Под текстом понимается физический объект, а не субъективный результат его восприятия или понимания испытуемым. В только что приведенных примерах в роли текстов выступают полоски пятен черной краски на белом листе бумаги, ограниченные кавычками. В роли текстов могут выступать проговариваемые голосом речевые сообщения, тогда это будут звуковые колебания частичек воздуха. Множество B представляет собой некоторую, достаточно четко очерченную, совокупность текстов, сформированную исследователем в соответствии с задачами изучения интеллекта испытуемого в данном эксперименте.

Имеется в виду, что испытуемый обладает способностью извлекать из предъявленного ему текста заключенную в нем мысль, т.е. понимать текст. Запись на иностранном языке, который незнаком испытуемому, не считается текстом по отношению к данному испытуемому. Незаконченные фрагменты предложений не являются текстами, например: "В роли множества берем", "из окна комнаты в течение". Мы не будем считать текстами предложения, выражающие вопрос или повеление, например, "Который час?", "Решайте задачу!". Считается, что исследователь располагает способом формирования любой ситуации, содержащейся в множестве A, а также способом различения или отождествления любых двух ситуаций из этого множества. То же относится и к текстам, входящим в состав множества B. Уметь описывать внутреннюю структуру ситуаций и текстов исследователю не обязательно, он может обращаться с ними просто как с попарно различными элементами множеств A и B.

Предполагается, что тексты описывают свойства ситуаций. Поэтому, когда испытуемый воспринимает пару (X,Y), образованную из ситуации X и текста Y, то он может установить, соответствуют друг другу или нет данные ситуация и текст. Будем считать, что текст соответствует ситуации в том случае, если он выражает некоторое свойство ситуации. Если же свойство, выраженное текстом, в данной ситуации не обнаруживается, то считаем, что текст не соответствует ситуации, предъявленной испытуемому.

Например, испытуемый смотрит из окна квартиры на улицу и сравнивает увиденную ситуацию с текстом "Идет дождь". Если на улице действительно идет дождь, то испытуемый считает, что предъявленный ему текст соответствует воспринятой ситуации. Если же дождь фактически не идет, то он будет считать, что такое соответствие не имеет места. В эксперименте исследователь предлагает испытуемому выполнить следующее задание: восприняв предъявленные ситуацию X и текст Y, установить, соответствуют они друг другу или нет. Если оказывается, что испытуемый способен выполнить это задание для всех пар (X,Y) из множества $A\times B$, то своими действиями он реализует ситуационно-текстовый предикат $P(X,Y)$.

Будем считать, что значение предиката $P(X,Y)$ равно единице, если имеет место соответствие между ситуацией X и текстом Y, и равно нулю, если такого соответствия не наблюдается. Мы предполагаем, что все используемые в эксперименте ситуации и тексты таковы, что испытуемый всегда однозначно реагирует ответом 0 или 1 на любую пару (X,Y), принадлежащую множеству $A\times B$. Если $P(X,Y)=1$, то будем говорить, что текст Y истинен для ситуации X. Если же $P(X,Y)=0$, то говорим, что текст Y по отношению к ситуации X ложен. Говорить об истинности или ложности текста безотносительно к какой-либо ситуации не имеет смысла. Значение $t=P(X,Y)$ предиката P будем называть истинностным значением текста Y для ситуации X.

Предикат $P(X,Y)$ реально существует в том и только том случае, если испытуемый однозначно реагирует двоичным ответом на каждую пару (X,Y) сигналов X и Y из множества $A\times B$. Это требование назовем постулатом существования предиката P. Если постулат существования выполняется, то при повторном предъявлении любой пары ситуация - текст из $A\times B$ испытуемый всегда будет реагировать тем же самым ответом, что и в первый раз. Точное исследование интеллекта человека описываемым здесь методом возможно лишь в том случае, когда постулат существования выполняется. Однако идеально точно постулат существования не выполняется никогда. Можно рассчитывать лишь на его приближенное выполнение. Если же постулат существования выполняется приблизительно, то с такой же степенью приближения будет математически описываться и интеллект человека.

Это обусловлено тем, что исследователь извлекает информацию о механизме интеллекта испытуемого только из предиката P (сейчас мы ведем речь только о той частной постановке задачи об исследовании интеллекта, которая описывается в этом параграфе). Никакими другими исходными данными исследователь не располагает, если он придерживается метода компараторной идентификации интеллекта. Согласно этому методу всю информацию о предикате P исследователь получает исключительно из изучения физически наблюдаемого поведения испытуемого (см. п. 1). Привлечение интроспективных данных, кроме как с эвристической целью, методом компараторной идентификации не допускается. Таким образом, любые сведения об интеллекте человека, получаемые при данном подходе, всегда будут основываться лишь на физическом, т.е. чисто объективном, обследовании поведения испытуемого.

Неточность выполнения постулата существования обусловлена многими причинами. К ним относятся неидеальная стабильность работы органов чувств, их конечная чувствительность. Мозг человека не является безошибочно действующим механизмом. Внимание человека отвлекается, процесс мышления может нарушить какая-либо помеха (зубная боль, сильное волнение, громкий шум и т.п.). Пусть, к примеру, испытуемый должен установить, идет дождь на улице или нет. В случае, когда интенсивность дождя достаточно мала (дождь слегка накрапывает), испытуемый может испытывать чувство неуверенности при формировании своего ответа. В этих условиях ответ испытуемого может стать неоднозначным: один раз на данную ситуацию он отреагирует положительным ответом, другой - отрицательным.

И все же, в том, что постулат существования предиката P никогда точно не выполняется, нет ничего катастрофического для дела исследования разума человека. Положение в теории интеллекта ничуть не хуже, чем в физике. Ни одну физическую закономерность не удается проверить в эксперименте абсолютно точно. Любые измерительные приборы работают лишь с конечной точностью, стабильность их не идеальна. Измерения всегда ведутся на фоне помех. Любой физический прибор может выйти из строя, дать неправильные показания. Ни один физик не застраховав от ошибок. И тем не менее, физика успешно справляется с задачей изучения закономерностей физических процессов, постоянно расширяет сферу знаний об окружающем нас мире. Мы надеемся, что на пути физического исследования разума человека теорию интеллекта ожидает такое же блестящее будущее, как и физику.

В некотором отношении теория интеллекта находится даже в лучшем положении, чем физика. Физический мир, как утверждают многие философы, неисчерпаем, его невозможно познать до конца. Разум же человека конечен, поэтому, в принципе, он полностью познаваем. Когда физик сталкивается с ограниченной чувствительностью своих приборов, он ожидает, что, повысив ее, обнаружит в объекте исследования еще что-то новое. Если же исследователь интеллекта обнаруживает неустранимую нестабильность значений предиката P, реализуемого испытуемым, он приходит к выводу, что достиг предела возможностей разума этого испытуемого. Поэтому при нарушении постулата существования предиката P одновременно исчезает и сам предмет исследования — интеллект испытуемого.

К примеру, понятие “дождь” нельзя считать идеально четким, его точность лимитируется точностью работы органов чувств человека. Если испытуемый при предельном напряжении всех своих интеллектуальных способностей все же не может однозначно ответить, идет дождь или нет, это значит, что возможности его интеллекта в данном случае исчерпаны и исследовать здесь больше нечего. Единственная возможность, которая еще остается для исследователя, — это подвергнуть совокупность всех нестабильных ответов испытуемого на один и тот же входной сигнал статистической обработке и попытаться извлечь отсюда дополнительную информацию о закономерностях поведения испытуемого.

В результате воздействия ситуации X на органы чувств испытуемого в сознании последнего возникает субъективный образ x этой ситуации. Его мы будем называть восприятием ситуации X. Следуя Расселу, будем отличать восприятие от суждения восприятия. Он пишет: “То, что два оттенка цвета, на которые я смотрю, подобны или неподобны в зависимости от обстоятельств, представляет собой нечто, что я со своей стороны должен был бы принять не как “восприятие”, но как “суждение восприятия”. Я должен сказать, что восприятие не является знанием, но лишь чем-то, что имеет место и что принадлежит равным образом и к миру физики и к миру психологии... Суть голого явления — просто определенные цветные пятна... Психический объект восприятия — это именно явление; он не бывает ни истинным, ни ложным. Заполненный словами, он есть суждение, и способен быть истинным или ложным. Это суждение я называю “суждением восприятия”” [1].

Будем считать, что восприятие x однозначно определяется породившей его ситуацией X. Функцию $x = f(X)$ зависимости восприятия x от ситуации X назовем функцией восприятия ситуации. Эта функция описывает процесс преобразования ситуации в восприятие этой ситуации. Множество всех значений функции f, т.е. совокупность всех восприятий, порождаемых ситуациями из множества A, будем обозначать буквой M. Функция f отображает множество A на множество M.

Важно отметить, что разнообразие восприятий ситуаций может оказаться меньше разнообразия самих ситуаций. Поэтому возможны такие различные ситуации, которые порождают одинаковые восприятия. Например, одно и то же цветовое восприятие (цвет) может быть порождено в сознании испытуемого совершенно различными световыми излучениями. Световые излучения, порождающие один и тот же цвет, принято называть метамерными. По аналогии с этим ситуации, порождающие в сознании испытуемого одинаковые восприятия, будем называть метамерными для данного испытуемого.

Воспринимая текст Y и понимая его, испытуемый извлекает из него вполне определенную мысль y, являющуюся субъективным образом текста. Будем считать, что мысль y однозначно определяется породившим ее текстом Y. Функцию $y = g(Y)$ зависимости мысли y от текста Y назовем функцией понимания текста. Эта функция описывает процесс преобразования текста в смысл этого текста. Множество всех значений функции g, т.е. совокупность всех мыслей, порождаемых текстами из множества B, будем обозначать буквой N. Функция g отображает множество B на множество N.

Одну и ту же мысль можно выразить различными текстами, так что возможны случаи, когда разные тексты порождают в сознании испытуемого одинаковые мысли. Тексты, выражающие одну и ту же мысль, назовем тождественными. Например, тождественны тексты “Идет дождь, или светит солнце” и “Светит солнце, или идет дождь”. Тождественные тексты логически равносильны. Если тексты a и b тождественны, то из a следует b, и из b следует a.

Полагаем, что ответ испытуемого $t = P(X,Y)$ полностью определяется восприятием $x = f(X)$ ситуации X и смыслом $y = g(Y)$ текста Y. Отсюда следует, что существует предикат $t = L(x, y)$, реализуемый испытуемым, который называется нами предикатом осознания. Выбор этого термина обусловлен тем, что испытуемый формирует значение $t \in \{0,1\}$ предиката $L(x, y)$ в результате осознания соответствия $(t = 1)$ или несоответствия $(t = 0)$ мысли y восприятию x. Предикаты P и L, функции f и g и переменные X, Y, x, y связаны зависимостью $P(X,Y) = L(f(X), g(Y)) = L(x, y)$ (1). Обратим внимание на то, что функции f и g, переменные x, y и предикат L введены не на основании физического эксперимент, а на базе интроспективных данных о субъективных явлениях, наблюдаемых испытуемым во время проведения экспериментов на нем. Такое введение нуждается поэтому в обосновании объективными данными.

2. Декомпозиция ситуационно-текстового предиката

Структура предиката P, введенная выражением (1), была получена нами на базе интроспективных данных, имеющих субъективный характер. Поэтому она обладает пока лишь эвристической ценностью и нуждается в физико-математическом обосновании, опирающемся только на объективные данные. Такое обоснование оказывается возможным. Существование предиката L функций f и g, их конкретный вид и взаимосвязь, выраженную соотношением (1), можно установить, основываясь исключительно на физическом наблюдении поведения испытуемого, которое характеризуется предикатом $P(X,Y)$. Ниже описывается способ обоснования структуры предиката P.

Введем предикаты

$$E_1(X_1, X_2) = \forall Y \in B(P(X_1,Y) \sim P(X_2,Y)), \qquad (2)$$

$$E_2(Y_1, X_2) = \forall Y \in A(P(X,Y_1) \sim P(X,Y_2)), \qquad (3)$$

которые однозначно определяются предикатом P. Предикат E_1 задан на множестве $A \times A$, предикат E_2 — на множестве $B \times B$. Предикат E_1 назовем предикатом метамерности ситуаций, предикат E_2 назовем предикатом тождественности текстов.

Предикат $E_1(X_1, X_2)$ можно использовать для объективного определения понятия метамерности любых ситуаций X_1 и X_2, принадлежащих множеству A. Действительно, если $E_1(X_1, X_2) = 1$ то, согласно (2), $P(X_1,Y) = P(X_2,Y)$ при любом текст Y из множества B. Это означает, что все свойства ситуаций X_1 и X_2, выражаемые текстами из множества B, совпадают, следовательно, для испытуемого (судя по его поведению) ситуации X_1 и X_2 неразличимы, т.е. метамерны. Если же $E_1(X_1, X_2) = 0$, то найдется такой текст $Y \in B$, для которого $P(X_1,Y) \neq P(X_2,Y)$. В этом случае не все свойства ситуаций X_1 и X_2, выражаемые из множества B, совпадают. Следовательно, ситуации X_1 и X_2 судя по физически наблюдаемым реакциям испытуемого, им различаются, т.е. они для него не метамерны.

Предикат $E_2(Y_1, Y_2)$ можно использовать для объективного определения понятия тождественности любых текстов Y_1 и Y_2, принадлежащих множеству B. Действительно, если $E_2(Y_1, Y_2) = 1$, то $P(X,Y_1) = P(X,Y_2)$ для любой ситуации X из множества A. Это означает, что тексты Y_1 и Y_2 либо одновременно соответствуют ситуации X, либо одновременно ей не соответствуют. Таким образом, объективно тексты Y_1 и Y_2 всегда выражают одно и то же свойство ситуаций. Иными словами, в множестве A нет такой ситуации, которая обладала бы свойством, выраженным текстом Y_1, и не обладала свойством, выраженным текстом Y_2, и наоборот.

Следовательно, тексты Y_1 и Y_2, судя по поведению испытуемого, для него неотличимы по смыслу, т.е. тождественны друг другу. Если же $E_2(Y_1, Y_2) = 0$, то найдется такая ситуация $x \in A$, для которой $P(X,Y_1) \neq P(X,Y_2)$. Значит, либо ситуация X обладает свойством, выраженным текстом Y_1, и не обладает свойством, выраженным текстом Y_2, либо ситуация X не обладает свойством, выраженным текстом Y_1, и обладает свойством, выраженным текстом Y_2. В обоих случаях тексты Y_1 и Y_2 выражают различные свойства ситуаций, а это означает, что данные тексты, судя по физически наблюдаемым реакциям испытуемого, обладают различный смыслом, т.е. не тождественны.

Предикаты E_1 и E_2, определяемые выражениями (2) и (3), рефлексивны, симметричны и транзитивны. Это означает, что E_1 и E_2 - эквивалентности. Предикат E_1 определяет разбиение R множества A на слои ситуаций. Все ситуации, принадлежащие одному слою разбиения R, метамерны. Любые же две ситуации, взятые из разных слоев разбиения R, не метамерны. Предикат E_2 определяет разбиение S множества B на слои текстов. Все тексты, принадлежащие одному слою разбиения S тождественны. Вместе с тем, любые два текста, взятые из равных слоев разбиения S, не тождественны.

Предикаты E_1 и E_2 можно представить в виде

$$E_1(X_1,X_2)=D_1(f(X_1),f(X_2)), \tag{4}$$

$$E_2(Y_1,Y_2)=D_2(g(Y_1),g(Y_2)). \tag{5}$$

Здесь f — каноническое отображение множества A на разбиение R, g — каноническое отображение множества B на разбиение S, D_1 — предикат равенства на $R\times R$, D_2 — предикат равенства на $S\times S$.

Слой разбиения R, содержащий ситуацию X, будем интерпретировать как образ $x=f(X)$ ситуации X. Слой разбиения S, содержащий текст Y, будем интерпретировать как смысл $y=g(Y)$ текста Y. Разбиение R выступает в роли множества M всех восприятий, порождаемых ситуациями, взятыми из множества A. Разбиение S выступает в роли множества N всех мыслей, порождаемых текстами, взятыми из множества B. Предикат $D_1(x_1,x_2)$ будем рассматривать в роли формального эквивалента способности испытуемого устанавливать совпадение или различие любых восприятий x_1 и x_2 из множества M. Предикат $D_2(y_1,y_2)$ интерпретируем как операцию по установлению равенства или неравенства мыслей y_1 и y_2 из множества N, выполняемую испытуемым.

Подчеркнем, что функции f и g, фигурирующие в выражениях (4) и (5), вводятся чисто физически, на основе объективно наблюдаемых фактов, поскольку при их определении используется только предикат P, характеризующий поведение испытуемого. Вместе с тем, ясно, что это должны быть те же самые функции f и g, которые присутствуют в выражении (1) [2] и которые введены на основе интроспективных данных о субъективных явлениях, наблюдаемых испытуемым во время проведения эксперимента на нем. Мы видим, что и субъективные и объективные данные об интеллекте человека важны для его формального описания, но роль этих данных различна. Субъективные данные подсказывают вид преобразований, реализуемых интеллектом, объективные данные обосновывают (или опровергают) его. Субъективные данные имеют эвристическую ценность, объективные — обладают доказательной силой.

Классу V_a всех ситуаций $x\in A$, метамерных ситуации $a\in A$, т.е. восприятию, порождаемому в сознании испытуемого ситуацией a, соответствует предикат

$$V_a(X)=E_1(X,a). \tag{6}$$

Классу W_b всех текстов $y\in B$ тождественных тексту $b\in B$, т.е. мысли, возникающей в сознании испытуемого в ответ на предъявление текста b, соответствует предикат $W_b(Y)=E_2(Y,b)$ (7). Учитывая зависимости (2) и (3), получаем формулы

$$V_a(X)=\forall Y\in B(P(X,Y)\sim P(a,Y)), \tag{8}$$

$$W_b(Y)=\forall X\in A(P(X,Y)\sim P(X,b)), \tag{9}$$

которые выражают субъективные по своей природе восприятия и мысли испытуемого через предикат P, характеризующий его объективно наблюдаемое поведение.

Рассмотрим на конкретном примере способ определения функции f по известному предикату P. Пусть $A=\{a_1,\ldots,a_7\}$, $B=\{b_1,\ldots,b_7\}$. Предикат P задан следующей формулой:

$$\begin{gathered}P(X,Y)=X^{a_1}Y^{b_3}\vee X^{a_1}Y^{b_4}\vee X^{a_2}Y^{b_1}\vee X^{a_2}Y^{b_2}\vee\\ \vee X^{a_3}Y^{b_1}\vee X^{a_3}Y^{b_2}\vee X^{a_4}Y^{b_5}\vee X^{a_4}Y^{b_6}\vee X^{a_5}Y^{b_3}\vee\\ \vee X^{a_5}Y^{b_4}\vee X^{a_6}Y^{b_3}\vee X^{a_7}Y^{b_3}\end{gathered} \tag{10}$$

Слои разбиения R множества A находим, вычисляя соответствующие им предикаты $V_{a_1}(X)+V_{a_7}(X)$ по формуле (8). Отыскиваем предикат

$$\begin{gathered}V_{a_1}(X)=(P(X,b_1)\sim P(a_1,b_1))\ldots(P(X,b_6)\sim P(a_1,b_6))=\\ =(X^{a_2}\vee X^{a_3}\sim 0)(X^{a_2}\vee X^{a_3}\sim 0)\\ (X^{a_1}\vee X^{a_5}\vee X^{a_6}\vee X^{a_7}\sim 1)(X^{a_1}\vee\\ \vee X^{a_5}\sim 1)(X^{a_4}\sim 0)(X^{a_4}\sim 0)=\overline{X^{a_2}\vee X^{a_3}}\\ (X^{a_1}\vee X^{a_5}\vee X^{a_6}\vee X^{a_7})(X^{a_1}\vee X^{a_5})\overline{X^{a_4}}=X^{a_1}\vee X^{a_5}\end{gathered}$$

Окончательно получаем:

$$V_{a_1}(X)=X^{a_1}\vee X^{a_5} \tag{11}$$

Аналогично определяем остальные предикаты:

$$V_{a_2}(X)=X^{a_2}\vee X^{a_3} \tag{12}$$

$$V_{a_3}(X)=X^{a_2}\vee X^{a_3} \tag{13}$$

$$V_{a_4}(X)=X^{a_4} \tag{14}$$

$$V_{a_5}(X)=X^{a_1}\vee X^{a_5} \tag{15}$$

$$V_{a_6}(X)=X^{a_6}\vee X^{a_7} \tag{16}$$

$$V_{a_7}(X)=X^{a_6}\vee X^{a_7}. \tag{17}$$

Мы видим, что найденные слои разбиения R повторяются. Отбирая все попарно различные классы, формируем из них разбиение $R=\{\{a_1,a_5\},\{a_2,a_3\},\{a_4\},\{a_6,a_7\}\}$. Вводим обозначения для смежных слоев: $\alpha_1=\{a_1,a_5\}$, $\alpha_2=\{a_2,a_3\}$, $\alpha_3=\{a_4\}$, $\alpha_4=\{a_6,a_7\}$. Связь между введенными слоями и их именами записывается следующим предикатом:

$$\begin{gathered}F(X,x)=(X^{a_1}\vee X^{a_5})x^{\alpha_1}\vee(X^{a_2}\vee X^{a_3})x^{\alpha_2}\vee\\ \vee X^{a_4}x^{\alpha_3}\vee(X^{a_6}\vee X^{a_7})x^{\alpha_4}\end{gathered} \tag{18}$$

Значения переменной x служат имена слоев разбиения R. Отношение, соответствующее предикату F, связывает переменные X и x, следовательно, оно задает в неявном виде функцию $x = f(X)$. Предикат F связан с функцией f следующим образом: если $F(X,x) = 1$, то $x = F(X)$, если же $F(X,x) = 0$, то $x \neq F(X)$.

Выражаем функцию f в явном виде [3]:

$$x^{\alpha_1} = X^{a_1} \vee X^{a_5}, \tag{19}$$

$$x^{\alpha_2} = X^{a_2} \vee X^{a_3}, \tag{20}$$

$$x^{\alpha_3} = X^{a_4}, \tag{21}$$

$$x^{\alpha_4} = X^{a_6} \vee X^{a_7}. \tag{22}$$

В роли множества M выступает совокупность имен всех слоев разбиения R, т.е. $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\}$. Формально множество M описываем предикатом:

$$M(x) = x^{\alpha_1} \vee x^{\alpha_2} \vee x^{\alpha_3} \vee x^{\alpha_4} \tag{23}$$

Аналогично отыскиваем вид функции g. Слои разбиения S множества B находим, вычисляя предикаты $W_{b_1}(Y) + W_{b_6}(Y)$ по формуле (9). В результате получаем

$$W_{b_1}(Y) = Y^{b_1} \vee Y^{b_2}, \tag{24}$$

$$W_{b_2}(Y) = Y^{b_1} \vee Y^{b_2}, \tag{25}$$

$$W_{b_3}(Y) = Y^{b_3}, \tag{26}$$

$$W_{b_4}(Y) = Y^{b_4}, \tag{27}$$

$$W_{b_5}(Y) = Y^{b_5} \vee Y^{b_6}, \tag{28}$$

$$W_{b_6}(Y) = Y^{b_5} \vee Y^{b_6}. \tag{29}$$

Формируем разбиение

$$S = \{\{b_1, b_2\}, \{b_3\}, \{b_4\}, \{b_5, b_6\}\}.$$

Вводим обозначения для слоев разбиения $S: \beta_1 = \{b_1, b_2\}, \beta_2 = \{b_3\}, \beta_3 = \{b_4\}, \beta_4 = \{b_5, b_6\}$. Связь между именами и обозначаемыми ими слоями разбиения S записывается в виде следующего предиката:

$$G(Y,y) = (Y^{b_1} \vee Y^{b_2})y^{\beta_1} \vee Y^{b_3}y^{\beta_2} \vee \vee Y^{b_4}y^{\beta_3} \vee (Y^{b_5} \vee Y^{b_6})y^{\beta_4}. \tag{30}$$

Значениями переменной y служат имена слоев разбиения S. Отношение, соответствующее предикату G, связывает переменные Y и y, следовательно, оно задает в неявном виде функцию $y = g(Y)$. Предикат G связан с функцией g следующим образом: если $G(Y,y) = 1$, то $y = g(Y)$, если же $G(Y,y) = 0$, то $y \neq g(Y)$.

Уравнение (30) заменяем системой уравнений, которыми функция $y = g(Y)$ выражается в явном виде:

$$y^{\beta_1} = Y^{b_1} \vee Y^{b_2}, \tag{31}$$

$$y^{\beta_2} = Y^{b_3}, \tag{32}$$

$$y^{\beta_3} = Y^{b_4}, \tag{33}$$

$$y^{\beta_4} = Y^{b_5} \vee Y^{b_6}. \tag{34}$$

В роли множества N выступает совокупность имен всех слоев разбиения S, т.е. $S = \{\beta_1, \ldots, \beta_4\}$. Формально множество N описываем предикатом:

$$N(y) = y^{\beta_1} \vee y^{\beta_2} \vee y^{\beta_3} \vee y^{\beta_4}. \tag{35}$$

Рассмотрим способ определения предиката L, фигурирующего в выражении (1). Такой предикат существует для любого P. Предикат L можно вычислить по известному предикату P и известным функциям f и g по следующей формуле:

$$L(x,y) = \exists X \in AY \in B(P(X,Y)F(X,x)G(Y,y)). \tag{36}$$

В нашем примере получаем формулу для предиката L, подставляя в (36) предикаты P, M и G согласно выражениям (10), (18) и (30):

$$L(x,y) = x^{\alpha_1}y^{\beta_2} \vee x^{\alpha_1}y^{\beta_3} \vee x^{\alpha_2}y^{\beta_1} \vee x^{\alpha_3}y^{\beta_4} \vee x^{\alpha_4}y^{\beta_2} \tag{37}$$

Определение предиката L по известным P, f и g можно произвести также и по формуле

$$L(x,y) = P(f^{-1}(x), g^{-1}(y)), \tag{38}$$

являющейся сокращенной записью зависимости (36). Выражение $f^{-1}(x)$ обозначает один из элементов $X \in A$ (неважно какой именно), удовлетворяющий условию $x = f(X)$. Запись $g^{-1}(y)$ расшифровывается аналогично. Равенство (38) непосредственно следует из равенства (1).

Из равенства (1) также вытекает зависимость

$$P(X,Y) = \exists x \in M \exists y \in N(L(x,y)F(X,x)G(Y,y)), \tag{39}$$

с помощью которой предикат P может быть вычислен по известному предикату L и известным функциям f и g. Зависимость (39) является полной логической записью равенства (1). В нашем примере, подставляя в (39) предикаты L, F и G согласно выражениям (37) из настоящего пункта и (24), (30), получаем формулу (10). Определить предикат P по L, f и g можно также посредством формулы (1).

Обратим внимание на то важное обстоятельство, что значениями переменных x и y служат не сами слои разбиений R и S, а их имена. Эти имена можно выбрать произвольным способом, лишь бы соблюдалось условие: каждому классу разбиения должно соответствовать в точности одно имя. Пусть M и M' – две системы имен восприятий ситуаций, а x и x' – элементы этих систем. Первую систему имен будем называть старой, вторую – новой. Существует биекция

$$x' = \phi(x), \tag{40}$$

отображающая множество M на множество M', с помощью которой можно заменить старые обозначения x на новые x'.

Аналогично, если N и N' – две системы имен смыслов текстов, а y и y' – элементы этих систем, то существует биекция

$$y' = \psi(y) , \tag{41}$$

отображающая множество N на множество N', с помощью которой можно заменить старые имена y новыми именами y'. Пусть в старых системах имен предикат P записывается в виде (1), а в новых – в виде

$$P(X,Y) = L'(f'(X), g'(Y)) = L'(x', y') . \tag{42}$$

Тогда имеет место изоморфизм функций f, f' и g, g', а также изоморфизм предикатов L, L': для любого $X \in A f'(X) = \phi(f(X))$; для любого $Y \in B g'(Y) = \psi(g(Y))$; для любых $x \in M, y \in N$ $L(x,y) = L'(\phi(x), \psi(y))$.

Важно отметить, что при практическом определении вида функций f и g приходится отличать множество слоев разбиения от имен этих слоев (т.е. различать множества R и M, а также множества S и N), хотя, по существу, казалось бы, это одно и то же. Ранее, при теоретическом рассмотрении вопроса, мы эти множества не различали. То же самое приходится делать и при содержательной интерпретации этих множеств, а именно – отличать восприятия ситуаций как субъективные образования от формально представляющих их слоев ситуаций, характеризующих восприятия как физические образования, а также отличать смыслы текстов как субъективные мысли испытуемого от соответствующих им классов текстов как объективных характеристик тех же мыслей.

Восприятия ситуаций и смыслы текстов субъективны, а слои ситуаций и слои текстов объективны. Можно сказать, что имена слоев ситуаций и имена слоев текстов, которые нам пришлось ввести в рассмотренном выше примере, являются как бы субъективными аналогами слоев ситуаций и слоев текстов. Сказанное наводит на мысль, что субъективные состояния человека играют роль имен классов, обнаруживаемых им в окружающем физическом мире. Можно предположить, что субъективные состояния человека относят к идеальным образованиям лишь по той причине, что они используются в роли имен физических объектов.

Как имена физических объектов, субъективные состояния идеальны. Но взятые сами по себе, они могут рассматриваться как физические объекты. Несомненно, что в мозге человека субъективные состояния реализованы в виде каких-то, пока малоизученных, материальных структур и процессов. Будучи материализованными (в соответствии со своим математическим описанием) в вычислительной машине, субъективные состояния также воплотятся во вполне определенные физические объекты и процессы (например, в магнитные диполи, зафиксированные в запоминающем устройстве ЭВМ). И, тем не менее, даже в “бездушной” машине эти искусственные копии субъективных состояний человека не перестанут быть идеальными образованиями, поскольку и там они выступают в роли имен физических объектов окружающего машину мира.

Таким образом, правы те философы, которые предостерегают от того, чтобы ставить непреодолимую преграду между материальным и идеальным [4]. “Удвоение” мира происходит лишь по той причине, что любой механизм, анализирующий физическую действительность, будь то человек или “бездушное” вычислительное устройство, вынужден оперировать в процессе этого анализа не самими классами материальных объектов, а их именами. Физический объект, используемый в роли имени другого физического объекта, приходится рассматривать в этом его качестве как нечто идеальное.

Однако если сменить точку зрения и рассматривать имя просто как некий объект, существующий сам по себе, то оно сразу же превратится в материальное образование. Таким образом, отнесение объекта к разряду материальных или идеальных зависит исключительно от той роли, которую этот объект играет. Если данный объект выступает в роли имени другого объекта, то в своем качестве он идеален; если тот же объект играет иную роль, то его придется рассматривать как материальный. В чем же первопричина “удвоения” мира, деления его на материальное и идеальное? Видимо, дело в том, что когда появляется множество предикатов, то, если не ввести имена для этих предикатов, входящих в это множество, то нет никакой возможности его формально выразить.

Операция дизъюнкции для этого не подходит. Так например, исключая из правой части равенства (10) имена предикатов (вместе с предикатами узнаваний, в которых эти имена фигурируют в роли показателей), получим формулу $X^{a_1} \vee X^{a_5} \vee X^{a_2} \vee X^{a_3} \vee X^{a_4} \vee X^{a_6} \vee X^{a_7}$. Выделить из нее исходные предикаты невозможно, так как они исчезли, полностью растворившись в их дизъюнкции. Если же имена для предикатов введены, то получение исходных предикатов вполне возможно. Например, положим $x = \alpha_1$. Подставляя это значение в правую часть равенства (18), получаем предикат $X^{a_1} \vee X^{a_5}$, соответствующий имени α_1.

Быть может, мы здесь сталкиваемся с каким-то фундаментальным ограничением в природе: если некий механизм, производящий эффективную обработку сигналов, имеет дело с системами (иными словами – с системами множеств), то введение имен для предикатов (множеств) этих систем становится неизбежным. Если разобрать на части такой механизм, то в нем обязательно обнаружатся физические структуры, которые реально воспроизводят эти имена. Весьма вероятно, что без использования имен предикатов эффективное действие любого механизма указанного назначения невозможно. Именно в связи с этим в достаточно сложных системах обработки информации появляются идеальные объекты (т.е. имена). Оперирование идеальными состояниями не является исключительной привилегией человека. В любой "бездушной" машине, выполняющей ту же работу, что и человек, идеальные состояния должны появляться принудительно, иначе машина не сможет эффективно действовать. Таким образом, нет оснований считать, что чувствовать и мыслить (т.е. оперировать идеальными состояниями) могут только люди, но ни в коем случае не машины.

3. Предикат осознания как принадлежность

Выше мы произвели расчленение (декомпозицию) ситуационно-текстового предиката $t = P(X,Y)$ на три части: функцию восприятия $x = f(X)$, функцию понимания $y = g(Y)$ и предикат осознания $t = L(x,y)$. При этом мы также ввели промежуточные сигналы x и y, характеризующие соответственно восприятие ситуации X и смысл текста Y. Формулируя задачу декомпозиции предиката P, мы руководствовались убеждением каждого человека, основанным на самонаблюдении, о наличии в его сознании восприятий и мыслей, возникающих под действием ситуаций и текстов. Решается же эта задача чисто физическим методом без привлечения субъективных данных. Множество M всех сигналов x, множество N всех сигналов y, функции f и g, а также предикат L определяются единственным образом по известному предикату P, заданному на $A \times B$, если не считать выбора обозначений.

Исследователь располагает свободой выбирать множества A и B ситуаций и текстов произвольно, по собственному усмотрению с поставленной задачей. Знание внутренней структуры ситуаций и текстов не требуется, они рассматриваются как простые элементы (точки) множеств A и B. Предполагается лишь, что исследователь способен отождествлять или различать любые две ситуации из множества A и любые два текста из множества B. Иными словами, постулируется, что на множествах P и P определены предикаты равенства. Любой предикат P, заданный на $A \times B$, без каких бы то ни было исключений, может быть успешно подвергнут декомпозиции; важно лишь, чтобы это был именно предикат, а не что-то иное. Для выполнения последнего условия достаточно, чтобы испытуемый на любую пару сигналов $x \in A$ и $y \in B$ всякий раз реагировал двоичным ответом t (0 или 1), и чтобы этот ответ однозначно определялся парой (X,Y).

Описанным методом декомпозиции структура сигналов x и y не вскрывается, они пока вводятся лишь как простые элементы (точки) множеств M и N. На множествах M и N вводятся предикаты равенства D_1 и D_2, которые однозначно (с точностью до обозначений элементов множеств M и N) определяются предикатом P. Подчеркнем, что предикаты D_1 и D_2 вводятся посредством соображений объективного характера, опирающихся только на физически наблюдаемые факты. Значения предикатов $D_1(x_1,x_2)$ и $D_2(y_1,y_2)$ могут быть заранее вычислены для любых $x_1,x_2 \in M$ и $y_1,y_2 \in N$ без обращения к субъективному опыту испытуемого.

Вместе с тем, предикаты D_1 и D_2 допускают психологическое истолкование (интерпретацию), согласующееся со свидетельством сознания испытуемого. Если в результате вычислений оказалось, что $D_1(x_1,x_2) = 1$, то восприятия x_1 и x_2 испытуемым должны отождествляться; если же $D_1(x_1,x_2) = 0$, то испытуемый должен обнаружить их отличие друг от друга. Точно так же, когда $D_2(y_1,y_2) = 1$, то испытуемый должен обнаружить, что мысли y_1 и y_2 тождественны; когда $D_2(y_1,y_2) = 0$, то они должны осознаваться испытуемым как разные. Если же окажется, что указанной согласованности между объективными и субъективными данными нет, то такие результаты математического описания интеллектуальной деятельности испытуемого следует признать неадекватными. Значит, что-то при исследовании интеллекта было сделано не так, как надо, и проведенная работа нуждается в усовершенствовании.

У читателя может возникнуть недоумение по поводу того, что данные субъективного характера привлекаются для контроля доброкачественности результатов исследования интеллекта испытуемого, которое только что было охарактеризовано как чисто физическое. Разве могут физические знания нуждаться в обосновании субъективным свидетельством интроспекции? Не вернее ли утверждать обратное? Все это, конечно, так. Научные результаты физического характера потому и называются субъективными, что не требуют для признания своей истинности подкрепления соображениями субъективного характера. И тем не менее, здесь не все так просто и прямолинейно, как может показаться с первого взгляда.

Физическими методами в теории интеллекта изучается объективно наблюдаемое поведение испытуемого. В результате такого изучения для рассматриваемой здесь задачи должны быть, в конце концов, получены исчерпывающие сведения о предикате P. Все обстояло бы благополучно, если б удалось составить таблицу зависимости сигнала $t = P(X,Y)$ от всевозможных значений сигналов X и Y. Тогда задачу исследования рассматриваемой здесь стороны интеллекта человека можно было бы считать полностью решенной. Однако множество всех ситуаций и множество всех текстов, которые можно в эксперименте предъявить испытуемому, практически необозримы. Реально невозможно все ситуации и тексты по очереди перебрать и для всевозможных пар экспериментально определить двоичную реакцию испытуемого. Для выполнения всех таких опытов не хватит не только всей жизни испытуемого, но даже времени существования Солнечной системы.

Поэтому приходится действовать как-то иначе, идти обходным путем. Точно такая же проблема существует и в физике. И там “силовым приемом” полного перебора всех возможных случаев никогда не удается достичь результата. Физики преодолевают эту трудность следующим образом: они пытаются угадать формулу, описывающую изучаемый процесс, и отыскивают условия (т.е. постулаты, законы), из которых эту формулу можно было логически вывести. Сформулированные условия подвергаются выборочной опытной проверке. Если они во всех экспериментах выполняются, а сами опыты достаточно разнообразны, то, даже, несмотря на их малое число, теория признается справедливой. Именно по такой методике Ньютон построил и обосновал небесную механику, и с тех пор эта методика принимается за образец для подражания во всех серьезных физических исследованиях.

Если следовать этой методике также и в теории интеллекта (а это кажется естественным и разумным, да и других путей не видно), то надо будет угадать формулу для представления предиката P, а затем сформулировать такую систему его свойств из которой бы логически вытекала допустимость такого представления. Любая формула расчленяет описываемую ею функцию на части, представляет ее в виде суперпозиции каких-то иных функций. Этот процесс называется декомпозицией функции. Декомпозицию любой функции можно производить многими разными способами. Но на каком из них следует остановиться?

При решении последнего вопроса крайне важно не ошибиться. Естественно ожидать, что предикат P, который характеризует весьма сложные процессы восприятия, понимания и осознания, будет иметь и столь же сложное строение, вскрываемое в процессе декомпозиции. Почти наверное, функции, полученные в результате первого акта декомпозиции, придется подвергнуть дальнейшей декомпозиции. И возможно, так придется делать много раз. Если мы с самого начала поведем декомпозицию предиката P по неправильному пути, то очень скоро зайдем в тупик.

Именно эту проблему помогают решить интроспективные сведения, сообщаемые испытуемым о его субъективных переживаниях. Имея возможность узнать кое-что о сигналах внутри “черного ящика” своей психики, испытуемый может подсказать исследователю правильный способ декомпозиции предиката P. Вместе с тем, результаты опытного определения физической реакции $t = P(X,Y)$ испытуемого на сигналы X и Y, конечно, никак не зависят от субъективных переживаний испытуемого. Свидетельствуя о возникновении в его сознании восприятия x ситуации X и смысла y текста Y, испытуемый наводит исследователя на мысль ввести промежуточные сигналы x и y и произвести декомпозицию предиката $t = P(X,Y)$ на три функции: $x = f(X)$, $y = g(Y)$ и $t = L(x,y)$.

Возвратимся к задаче декомпозиции предиката P. Ранее он был расчленен на три части – функции f, g и предикат L. Сейчас объектом рассмотрения будет предикат L. Выше мы уже занимались определением вида этого предиката для случая, когда число элементов в множествах P и P невелико. Рассмотренный там метод основан на “силовом приеме” перебора всевозможных вариантов. Однако, как только что было сказано, этот прием не позволяет получить математическое описание изучаемого объекта в условиях, когда множества P и P необозримо велики, а именно этот случай имеет место на практике. Сейчас мы при расшифровке вида предиката L пойдем по другому пути, а именно – по пути формулировки таких его свойств, из которых можно было бы извлечь дополнительную информацию о структуре предиката L.

При решении этой задачи будем исходить из рабочей гипотезы, гласящей, что предикат $L(x,y)$ соответствует отношению принадлежности $x \in y$. Такого типа предикат будем называть принадлежностью. Рассмотрим те соображения эвристического характера, которые склоняют нас к этой гипотезе. Каждому смыслу текста $y \in N$ соответствует вполне определенное множество S восприятий ситуаций $x \in M$, таких что $L(x,y) = 1$. Это наводит на мысль рассматривать смыслы текстов как имена соответствующих им множеств восприятий ситуаций. На это, правда, можно возразить, что с таким же успехом можно для каждого восприятия ситуации $x \in M$ ввести множество T смыслов текстов $y \in N$, таких что $L(x,y) = 1$, и рассматривать восприятия ситуаций как имена соответствующих им множеств смыслом текстов.

Однако имеется одно обстоятельство, которое не позволяет этого сделать. Если бы восприятия могли выступать в роли множеств, то к ним можно было бы применить операции объединения, пересечения и дополнения. Но можно ли, к примеру, объединить два какие-нибудь восприятия? Нет, поскольку различные восприятия взаимно исключают друг друга. Новое восприятие может возникнуть лишь взамен старого, уступившего ему место. Два и более восприятия не могут существовать одновременно. В каждый момент времени может существовать только одно восприятие. Аналогичные соображения заставляют нас отвергнуть возможность выполнения над восприятиями операций пересечения и дополнения.

Совсем иначе обстоит дело со смыслами текстов. Возьмем, например, мысли x_1 и x_2, выражаемые фразами "Идет дождь" и "Светит солнце". Каждой из них соответствует вполне определенное множество ситуаций. Пусть мысли x_1 соответствует множество T_1, а мысли x_2 – множество T_2. Можно ли из мыслей x_1 и x_2 образовать мысль x, которой бы соответствовало объединение множеств T_1 и T_2? Можно, для этого достаточно соединить исходные фразы союзом "или", понимаемым в объединительном смысле "или также" (есть и другое значение союза "или" – разделительное "или - или"). В результате получаем фразу "Идет дождь, или светит солнце". Пересечение мыслей выражается союзом "и", дополнение мысли – частицей "не", словами "ложно, что...". Ясно, что операции объединения, пересечения и дополнения, в принципе, можно применить к любым мыслям.

Теперь постараемся сформулировать систему условий, которая характеризовала бы предикат $L(x,y)$, заданный на $M \times N$, как предикат принадлежности. В математике принимается, как само собою разумеющееся, что подмножества любого универсума не совпадают ни с одним из элементов этого универсума. Это свойство согласуется с интроспективными наблюдениями людей: для каждого ясно, что восприятие – это одно, а мысли – совсем иное. Любой человек легко отличает восприятия от мыслей. Восприятия характеризуются предметностью, каждое из них представляет собой образ некоторого фрагмента внешнего мира. Мысли же абстрактны, бестелесны, их источником служит не внешний мир, а разум человека. В соответствии со сказанным формулируем постулат непересекаемости, который гласит: множества M и N не пересекаются. Формально этот постулат можно записать следующим образом:

$$\forall x \in M \forall y \in N \overline{D(x,y)}. \tag{43}$$

В теории множеств используется аксиома объемности или экстенсиональности: если элементный состав множеств совпадает, то и сами множества совпадают. В психологической интерпретаций аксиома объемности означает, что если смысл текста y_1 соответствует множеству восприятий ситуаций S_1, а смысл текста y_2 – множеству восприятий ситуаций S_2, и эти множества совпадают друг с другом, то смыслы текстов как субъективные состояния испытуемого также совпадают. В соответствии со сказанным формулируем постулат объемности:

$$\forall y_1, y_2 \in N(\forall x \in M(L(x,y_1) \sim L(x,y_2)) \supset D(y_1,y_2)) \tag{44}$$

Далее, нам потребуется постулат существования противоречия, утверждающий существование такой мысли $y \in N$ которая не соответствует ни одному из восприятий $x \in M$. Иными словами, согласно постулату противоречия должна найтись мысль, которой соответствует пустое множество восприятий ситуаций. Текст, выражающий такую мысль, нетрудно образовать, например, "Идет дождь, и не идет дождь". Ясно, что не существует ситуации, которая могла бы подойти под такое высказывание. Любое высказывание, которое не подходит ни под одну из ситуаций множества M, будем называть противоречием. Формально постулат существования противоречия записываем в следующем виде:

$$\exists y \in N \forall x \in M \overline{L(x,y)}. \tag{45}$$

Следующее условие назовем постулатом исчерпываемости. Согласно этому постулату для любого восприятия ситуации $x \in M$ должен существовать такой смысл текста $y \in N$, который подходит к этому восприятию, но не подходит ни к какому другому. Иными словами, для каждого наперед заданного восприятия должен найтись такой текст, который исчерпывающе его описывает. Слово "исчерпывающе" здесь употреблено в том смысле, что по тексту, описывающему данное восприятие, его можно отличить от любого восприятия, содержащегося в множестве M. По такому тексту испытуемый должен суметь выбрать из всевозможных восприятий ситуаций множества M единственное восприятие, соответствующее данному тексту. Постулат исчерпываемости формально записываем в виде следующего выражения:

$$\begin{gathered}\forall x \in M \exists y \in N(L(x,y) \wedge \\ \wedge \forall x_1 \in M(L(x_1,y) \supset D(x,x_1))).\end{gathered} \tag{46}$$

Наконец, формулируем последнее условие, которое называем постулатом объединяемости. Пусть y_1 и y_2 – смыслы текстов, которым соответствуют множества восприятий ситуаций T_1 и T_2. Постулат объединяемости гласит: для любых $y_1, y_2 \in N$ найдется такой смысл текста $y \in N$, которому соответствует множество ситуаций $T = T_1 \cup T_2$. Это означает, что на любую пару мыслей можно воздействовать операцией их дизъюнкции. Постулат объединяемости формально записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\forall y_1, y_2 \in N \exists y \in N \forall x \in \\ \in M(L(x,y_1) \vee L(x,y_2) \sim L(x,y)).\end{gathered} \tag{47}$$

Справедливо следующее утверждение. Пусть на $M \times N$ задан предикат $L(x,y)$, а на $M' \times N'$ – предикат $L'(x',y')$. Если M равномощно множеству M', а N – множеству N' и, кроме того, предикаты M, N, L и M', N', L' подчиняются условиям непересекаемости, объемности, существования противоречия, исчерпываемости и объединяемости, то предикат L и L' изоморфны. Иными словами, при выполнений перечисленных условий существуют биекции $\phi: M \to M'$ и $y \in N$ такие, что для всех $x \in M$ и $y \in N$

$$L(x, y) = L'(\varphi(x), \psi(y)). \tag{48}$$

Сформулированное утверждение означает, что если множества M и N не пересекаются и заданы с точностью до обозначений, то условия объемности, существования противоречия, исчерпываемости и объединяемости определяют единственный (с точностью до обозначений) предикат L. В этой смысле данная система условий полна. Никакие дополнительные логические условия, накладываемые на предикат L, не смогут определить его точнее, чем только что записанная система условий. Поэтому такая система не нуждается в пополнении. Можно, кроме того, доказать, что эта система условий несократима в том смысле, что исключение из нее любого из четырех условий (объемности, существования противоречия, исчерпываемости или объединяемости) делают ее неполной.

У читателя может вызвать возражение то, что мы связываем постулатами предикаты M, N и L, а не предикаты A, B и P. Ведь с самого начала было провозглашено, что изучение интеллекта человека будет осуществляться на строго объективной основе, а это означает, что все знания об интеллекте должны выводиться исключительно из свойств поведения испытуемого, т.е. из логических условий, связывающих в данном случае предикат $P(X, Y)$ и области задания A и B его аргументов X и Y. Предикаты же M, N и L характеризуют субъективные факторы – множество восприятий испытуемого, множество его мыслей и действия сознания испытуемого по установлению соответствия или несоответствия между восприятиями и мыслями. Возражение это справедливо. Однако, если б мы стали так делать, то, вместо легко понимаемых и обозримых формулировок постулатов, получили бы громоздкие, неуклюжие и неудобочитаемые утверждения.

Вместе с тем, следует учесть, что предикаты M, N и L нами уже однозначно выражены (с точностью до обозначений) через предикаты A, B и P. Поэтому можно с достаточным основанием считать, что характеризуемые предикатами M, N и L состояния из субъективных теперь превратились также и в объективные. Любые субъективно наблюдаемые состояния, после того как их удалось определить в строго объективных терминах, можно рассматривать еще и как физические. Так поступают в колориметрии – наиболее развитой области объективного изучения субъективных состояний. До начала исследования цвет светового излучения рассматривается только как субъективное переживание испытуемого. Но после завершения физической теории цветового зрения и получения математических зависимостей, однозначно выражающих цвет через спектр породившего его светового излучения, цвет квалифицируется также и как физическое явление.

Таким образом, на наших глазах субъективные состояния превращаются в объективные, и этому не следует удивляться. Ранее нами уже отмечалась относительность противопоставления материальных и идеальных явлений. Состояния следует считать только субъективными до тех пор, пока мы не можем узнать о них что-либо лишь о помощью собственного “внутреннего зрения”. Но как только физика находит способы измерения параметров этих состояний, после этого они могут уже рассматриваться не только как субъективные, но и как объективные. Основная задача теории интеллекта как раз в том и состоит, чтобы превратить наши субъективные сведения о собственном разуме (обычно весьма фрагментарные) в стройную и полную систему физических знаний. Если этого удастся достичь, то интеллект человека можно будет искусственно воспроизводить по объективным знаниям о нем в виде специальных автоматически действующих устройств.

В свете сказанного можно утверждать, что постулаты, связывающие предикаты M, N и L, представляют собой просто сокращенные записи условий, ограничивающих вид предикатов A, B, P. При желании эти постулаты всегда можно развернуть и получить из них условия, характеризующие поведение испытуемого с помощью одних только чисто физических понятий. Чтобы продемонстрировать, как практически совершается переход к полной записи постулатов осуществим такой переход для постулата непересекаемости.

Как было сказано выше, каждое восприятие из множества M физически характеризуется как слой V_X разбиения R множества A, который состоит из всевозможных ситуаций $X' \in A$, метамерных ситуации X. О ситуации же X известно, что она порождает восприятие x, т.е. что $f(X) = x$. Множество M всех восприятий физически характеризуется разбиением R. Слой V_X разбиения R, согласно равенству (6) и свойству симметричности предиката E_1, описывается предикатом $V_X(X') = E_1(X, X')$. Ситуацию X можно рассматривать как имя слоя V_X. Имен слоев может оказаться больше, чем самих слоев, в этом случае какие-то слои получат более одного имени. Это, однако, не вредит делу. Разбиение R формально характеризуется предикатом $E_1(X, X')$. В самом деле, когда X пробегает всевозможные имена слоев разбиения R, то предикат $E_1(X, X')$ поочередно обращается в предикаты $V_X(X')$, соответствующие всевозможным слоям разбиения R. Таким образом, предикат E_1 задает систему всех слоев разбиения R.

Аналогично, мысль $y = g(Y)$ из множества N физически характеризуется как слой W_y разбиения S множества B, который состоит из всех текстов $Y' \in B$, тождественных тексту Y. Множество N всех мыслей физически характеризуется разбиением S. Слой W_y разбиения S, согласно равенству (7) и свойству симметричности предиката E_2, описывается предикатом $W_y(Y') = E_2(Y, Y')$. Текст Y можно рассматривать как имя слоя W_y. Разбиение S формально характеризуется предикатом $E_2(Y, Y')$.

Теперь мы можем приступить к формулировке в физических терминах постулата непересекаемости $\forall x \in M \forall y \in N \;\; \overline{D(x,y)}$. При переходе от субъективной формулировки к объективной восприятие x заменяем именем X слоя V_X, физически характеризующего восприятие x, а мысль y заменяем именем Y слоя W_y, физически характеризующего мысль y. Соответственно этому множество M заменяем множеством A, а множество N – множеством B. Неравенство восприятия x и мысли y заменяем неравенством слоев V_X и W_y. В результате получаем следующую объективную формулировку постулата непересекаемости: для любых $X \in A$ и $Y \in B$ $V_X \neq W_y$.

Неравенство $V_X \neq W_y$ формально записываем в виде: $\neg \forall Z \in A \cap B(E_1(X,Z) \sim E_2(Y,Z))$. Знак $\neg$ обозначает операцию отрицания предиката. В результате получаем следующую объективную формулировку постулата непересекаемости: $\forall X \in A \forall Y \in B \neg \forall Z \in A \cap B(E_1(X,Z) \sim E_2(Y,Z))$. Но это – еще только сокращенная его запись. Чтобы перейти к полной записи, нужно предикаты E_1 и E_2 выразить через предикат P с помощью равенств (2) и (3): $E_1(X,Z) = \forall Y_1 \in B(P(X,Y_1) \sim P(Z,Y_1))$, $E_2(Y,Z) = \forall X_1 \in A(P(X_1,Y) \sim P(X_1,Z))$. После подстановки окончательно получаем:

$$\forall X \in A \forall Y \in B \neg \forall Z \in A \cap B(\forall Y_1 \in B(P(X,Y_1) \sim \\ \sim P(Z,Y_1)) \sim \forall X_1 \in A(P(X_1,Y) \sim P(X_1,Z))).$$

Выводы

Как видим, новая формулировка постулата непересекаемости связывает предикаты A, B и P, т.е. только те факторы, которые можно непосредственно проконтролировать в физическом эксперименте. Однако, пользоваться этой формулировкой очень неудобно из-за ее громоздкости и труднообозримости. Аналогичное усложнение обнаруживается в еще большей степени и при переводе остальных постулатов на объективный язык. Поэтому нет смысла затрачивать труд на перевод постулатов на физические термины. Можно вполне обходиться простыми и прозрачными по смыслу субъективными формулировками, понимая их просто как графические записи физических свойств поведения испытуемого. Если же понадобится перейти от субъективной к объективной формулировке какого-то из постулатов, то это всегда можно будет сделать, затратив на это дело определенный объем механического труда (такую работу вполне возможно перепоручить вычислительной машине).

Литература: 1. *Рассел Б.* История западной философии. – М.: ИЛ, 1959. – С. 174. 2. Бондаренко М.Ф. Инструментарий компараторной идентификации / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко Ю.П., Шабанов-Кушнаренко С.Ю. // Біоніка інтелекту. – 2010. – № 2 (73). – С. 74-86. 3. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Математические средства. – Харьков; Выща шк., 1984. – 144 с. 4. Об относительности противопоставления материального и идеального см.: Рассел Б. История западной философии. – С. 676, 821.

Поступила в редколлегию 02.04.2010

УДК 519.7

Ситуаційно-текстовий предикат / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Н.В. Шаронова // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 87–98.

На основі методу компараторної ідентифікації пропонується математична модель біонічного підходу до проблеми побудови штучного інтелекту. Розвивається спеціалізований математичний апарат для ефективного моделювання роботи механізмів людського інтелекту.

Бібліогр.: 4 найм.

UDC 519.7

The situationally-text predicate / M.F. Bondarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko, N.V. Sharonova // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – C. 87–98.

It is offered bionic approach to a problem of construction of an artificial intelligence. The specialized mathematical instrument for effective simulation of activity of mechanism of human intellect develops.

Ref.: 4 items.

УДК 519.7

БУЛЕВА СТРУКТУРА ТЕКСТА

М.Ф. Бондаренко[1], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[2], Н.В. Шаронова[3]

[1, 2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина,

[3] ХПИ, г. Харьков, Украина

Одна из важных задач теории интеллекта – обосновать физическими методами эвристическое утверждение о том, что множество мыслей человека представляет собой некую алгебраическую систему. В работе изучено строение этой алгебрологической системы и ее свойства, разработан ее формальный язык, предложены методы описания мыслей в виде формул этого языка.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Самонаблюдение показывает, что человек может выполнять над своими мыслями определенные действия. Один вид действий – это операции. Операция воздействует на одну или несколько мыслей. Ее результатом является новая мысль. Например, действуя операцией отрицания на мысль “Идет дождь”, получаем новую мысль “Не идет дождь”. Это – одноместная операция. Примером двуместной операции может служить дизъюнкция мыслей, когда из мыслей “Идет дождь” и “Светит солнце” образуется мысль “Идет дождь, или светит солнце”.

Другой вид действия на мысли – это предикаты. Предикат представляет собой функцию с двоичными значениями. Он, как и операция, может быть одноместным или многоместным. В первом случае он воздействует на одну мысль, во втором – на набор мыслей. Значением предиката является положительная или отрицательная оценка предъявленных мыслей, которая обозначается соответственно символами 1 или 0. При определении значения предиката человек проверяет выполнение некоторого условия, которое и определяет вид предиката. Если предъявленный набор мыслей удовлетворяет заданному условию, то предикату приписывается значение 1, если не удовлетворяет, то – значение 0.

Примером одноместного предиката может служить предикат, проверяющий тождественную истинность мысли. Назовем его предикатом истинности. Мысль называется тождественно истинной, если она удовлетворяет любой ситуации. Берем мысль “Идет дождь”. Предикат истинности ставит ей в соответствие 0, т.к. дождь идет не в любой ситуации. Мысли же “Если ярко светит солнце, то солнце светит” предикат истинности поставит в соответствие значение 1, поскольку в любой ситуации, если солнце светит ярко, то оно обязательно светит. Возьмем мысль “Идет дождь, или не идет дождь”. Ей предикат истинности • ставит в соответствие также значение 1, так как в любой ситуации дождь идет, либо же он не идет.

Примером двуместного предиката может служить предикат, проверяющий, вытекает ли логически вторая мысль из первой. Назовем его предикатом следования. По определению мысль B логически вытекает из мысли A, если любая ситуация, соответствующая мысли A, соответствует также и мысли B. Возьмем в роли первой мысль “Идет дождь”, в роли второй – “Светит солнце”. Вторая мысль логически не вытекает из первой, так как не в любой ситуации, в которой идет дождь, также и светит солнце. Поэтому значение предиката следования для этой пары мыслей равно 0. А для пары мыслей “Идет дождь” и “Светит солнце, или идет дождь” значение предиката следования равно 1, поскольку вторая мысль логически вытекает из первой: ясно, что если в какой-то ситуации идет дождь, то всегда будет справедливо, что в ней также светит солнце, или идет дождь.

Любое множество, вместе с заданными на нем операциями и предикатами, в математике называется алгебраической системой. Таким образом, согласно интроспективным данным, множество мыслей человека представляет собой некую алгебраическую систему. Одна из важных задач теории интеллекта состоит в том, чтобы обосновать это эвристическое утверждение физическими методами, сделав его достоянием науки. Важно изучить строение этой алгебрологической системы и ее свойства, разработать ее формальный язык, научиться описывать мысли в виде формул этого языка. Поскольку мысли эффективно описываются текстами естественного языка, то возникает предположение, что тексты выполняют роль формул рассматриваемой нами алгебраической системы. Изучить структуру текстов естественного языка как формул некой алгебрологической системы, выражающих соответствующие этим текстам мысли, – еще одна важная задача теории интеллекта.

1. Множество мыслей как булева алгебра

Дадим физическое определение операции отрицания $\bar{y}$ мысли y, отображающей множество мыслей N в себя, а также операций дизъюнкции

$y_1 \vee y_2$ и конъюнкции $y_1 \wedge y_2$ мыслей y_1 и y_2, отражающих множество $N \times N$ в N. Определение этих операций достигается посредством их выражения через предикат осознания L. Предикат L задан на $M \times N$, где M – множество образов ситуаций. В [1] он был однозначно (с точностью до обозначений элементов множеств M и N) выражен через ситуационно-текстовый предикат P, характеризующий физически наблюдаемое поведение испытуемого. Предикат L характеризуется свойствами непересекаемости, объемности, существования противоречия, исчерпываемости и объединяемости [1].

Операцию отрицания $y = y_1$ мысли y_1 вводим с помощью соответствующего ей предиката отрицания $OTP(y_1, y)$. Полагаем, что $y = \overline{y_1}$ в том и только том случае, когда $OTP(y_1, y) = 1$. Предикат отрицания определяем следующим образом:

$$OTP(y_1, y) = \forall x \in M(\overline{L(x, y_1)} \sim L(x, y)) \tag{1}$$

Поскольку предикат L задан на $M \times N$, то предикат OTP задан на $N \times N$. Из перечисленных выше свойств предиката L логически вытекает, что предикат $OTP(y_1, y)$ функционален относительно переменной y, таким образом, он определяет некоторую операцию $y = \overline{y}$. Из тех же свойств предиката L следует, что операция $y = \overline{y}$ определена на всем множестве N.

Операцию дизъюнкции $y = y_1 \vee y_2$ мыслей y_1 и y_2 вводим с помощью соответствующего ей предиката дизъюнкции $ДИЗ(y_1, y_2, y)$. Полагаем, что $y = y_1 \vee y_2$ в том и только в том случае, когда $ДИЗ(y_1, y_2, y) = 1$. Предикат дизъюнкции определяем формулой

$$\begin{gathered} ДИЗ(y_1, y_2, y) = \\ = \forall x \in M(L(x, y_1) \vee L(x, y_2) \sim L(x, y)). \end{gathered} \tag{2}$$

Из (2) следует, что предикат $ДИЗ$ задан на N^3. Из характеристических свойств предиката L следует, что предикат $ДИЗ(y_1, y_2, y)$ функционален относительно переменной y, таким образом, он определяет некоторую операцию $y = y_1 \vee y_2$. Из них же логически вытекает, что операция $y_1 \vee y_2$ определена на всем квадрате множества N.

Операцию конъюнкции $y = y_1 \wedge y_2$ мыслей y_1 и y_2 вводим с помощью соответствующего ей предиката конъюнкции $KOH(y_1, y_2, y)$. Полагаем, что $y = y_1 \wedge y_2$ в том и только в том случае, когда $KOH(y_1, y_2, y) = 1$. Предикат конъюнкции определяем формулой

$$\begin{gathered} KOH(y_1, y_2, y) = \\ = \forall x \in M(L(x, y_1) \wedge L(x, y_2) \sim L(x, y)). \end{gathered} \tag{3}$$

Из (3) следует, что предикат KOH задан на всем множестве N^3. Из характеристических свойств предиката L следует, что предикат $KOH(y_1, y_2, y)$ функционален относительно переменной y. Таким образом, он определяет некоторую операцию $y = y_1 \wedge y_2$. Из этих же свойств вытекает, что операция $y_1 \wedge y_2$ определена всюду на $N \times N$.

Из определения операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции мыслей и из характеристических свойств предиката L вытекает, что для любых $a, b, c \in N$ выполняются все семь аксиом булевой алгебры [1]:

$$a \vee a = a, \tag{4}$$

$$a \vee b = b \vee a, \tag{5}$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \tag{6}$$

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \tag{7}$$

$$\overline{\overline{a}} = a, \tag{8}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}, \tag{9}$$

$$a \vee (b \wedge b) = a. \tag{10}$$

Следовательно, названия, данные нами этим операциям, в точности соответствуют тому содержанию, которое им приписывается булевой алгеброй. Тождественно истинная мысль определяется формулой

$$0 = x \vee \overline{x}, \tag{11}$$

мысль тождественно ложную определяем равенством

$$1 = x \wedge \overline{x}. \tag{12}$$

Как доказывается в булевой алгебре, эти определения не зависят от выбора $x \in N$.

Только что мы пришли к выводу о существовании операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции, определенных на множестве мыслей. Иными словами, мы установили, что множество мыслей человека представляет собой булеву алгебру. Если б это было, действительно, так, то такой результат можно было бы с полным правом считать заметным вкладом в дело познания интеллекта человека. Но так ли это на самом деле? Можно ли понимать сделанный вывод в том смысле, что разум человека фактически (т.е. на самом деле, а не в каком-то формальном смысле) способен без каких бы то ни было ограничений производить упомянутые булевы операции над любыми своими мыслями? Исчерпывающий образом ответить на этот вопрос непросто. Чтобы сделать это, нам придется на время остановиться и, не торопясь, внимательно рассмотреть все обстоятельства дела.

Прежде всего, можно считать надежно обоснованной формальную сторону вопроса. Полученный результат заключается в следующем. Если имеется произвольно выбранный предикат $P(X, Y)$, заданный на декартовом произведении $A \times B$ каких-нибудь множеств A и B, то отсюда следует существование множеств M, N и функций $x = f(X)$, $y = g(Y)$, отображающих соответственно A на M и B на N, а также существование предикатов эквивалентности $E_1(X_1, X_2)$, $E_2(Y_1, Y_2)$, заданных на $A \times A$ и $B \times B$, предикатов равенства $D_1(x_1, x_2)$, $D_2(y_1, y_2)$, заданных на $M \times M$ $N \times N$, и предиката $L(x, y)$, заданного на $M \times N$. Перечисленные математические объекты связаны следующими равенствами, справедливыми для любых $X, X_1, X_2 \in A$ и $Y, Y_1, Y_2 \in B$:

$$E_1(X_1, X_2) = \forall Y \in B(P(X_1, Y) \sim P(X_2, Y)), \quad (13)$$

$$E_2(Y_1, Y_2) = \forall X \in A(P(X, Y_1) \sim P(X, Y_2)), \quad (14)$$

$$E_1(X_1, X_2) = D_1(f(X_1), g(X_2)), \quad (15)$$

$$E_2(Y_1, Y_2) = D_2(f(Y_1), g(Y_2)), \quad (16)$$

$$P(X, Y) = L(f(X), g(Y)). \quad (17)$$

Предикаты E_1 и E_2 определяются предикатом P однозначно. Функции же f, g и предикаты D_1, D_2, L определяются предикатом P хотя и неоднозначно, но с точностью до обозначений элементов множеств M и N или, как говорят математики, с точностью до изоморфизма. Означает это следующее. Переобозначим элементы множеств M и N с помощью биекций φ и ψ, отображающих M на M' и N на N'. В результате получаем:

$$M'(x') = M(\varphi^{-1}(x')), \quad (18)$$

$$N'(y') = N(\psi^{-1}(y')). \quad (19)$$

После такого переобозначения функции $x = f(X)$ и $y = g(Y)$ превращаются в функции $x' = f'(X)$ и $y' = g'(Y)$, отображающие A на M' и B на N' и определяемые зависимостями

$$x' = \varphi(f(X)), \quad (20)$$

$$y' = \psi(g(Y)). \quad (21)$$

Предикаты $D_1(x_1, x_2)$ и $D_2(y_1, y_2)$ превращаются в предикаты $D_1'(x_1', x_2')$ и $D_2'(y_1', y_2')$, заданные на $M' \times M'$ и $N' \times N'$ и определяемые равенствами:

$$D_1'(x_1', x_2') = D_1(\varphi^{-1}(x_1'), \varphi^{-1}(x_2')), \quad (22)$$

$$D_2'(y_1', y_2') = D_2(\psi^{-1}(y_1'), \psi^{-1}(y_2')). \quad (23)$$

Предикат $L(x, y)$ превращается в предикат $L'(x', y')$, заданный на $M' \times N'$ и определяемый равенством

$$L'(x', y') = L(\varphi^{-1}(x'), \psi^{-1}(y')). \quad (24)$$

Если зафиксировать предикат P, то из предположения, что f, g, D_1, D_2, L удовлетворяют условиям (13) и (17), следует, что f', g', D_1', D_2', L' также будут им удовлетворять при любом выборе φ и ψ. Если же известно, что f', g', D_1', D_2', L', наряду с f, g, D_1, D_2, L, удовлетворяют уравнениям (13) и (17) при одном и том же P, то всегда найдутся такие биекций φ и ψ, для которых будут выполняться равенства (18) и (24) при любых $x', x_1', x_2' \in M'$ и $y', y_1', y_2' \in N'$.

Предположим, что множества M, N и предикат L обладают следующими свойствами:

$$\forall x \in M \forall y \in N \overline{D(x, y)}, \quad (25)$$

$$\forall y_1, y_2 \in N(\forall x \in M(L(x, y_1) \sim L(x, y_2)) \supset D(y_1, y_2)), \quad (26)$$

$$\exists y \in N \forall x \in M \overline{L(x, y)}, \quad (27)$$

$$\forall x \in M \exists y \in N(L(x, y) \wedge \wedge \forall x_1 \in M(L(x_1, y) \supset D(x, x_1))), \quad (28)$$

$$\forall y_1, y_2 \in N \exists y \in N \forall x \in M (L(x, y_1) \vee L(x, y_2) \sim L(x, y))). \quad (29)$$

Здесь буквой D обозначен предикат равенства, заданный на универсуме U. Тогда условиями (25) и (29) предикат L задается с точностью до изоморфизма. Последнее утверждение понимается в следующем смысле. Пусть при фиксированных M и N, обладающих свойством (25), существует заданный на $M \times N$ предикат $L(x, y)$, удовлетворяющий условиям (26) и (29). Пусть, кроме того, такое же утверждение справедливо для M', N' и $L'(x', y')$. Тогда найдутся биекции $\varphi : M \to M'$ и $\psi : N \to N'$ такие, что любых $x \in M$ и $y \in N$ $L(x, y) = L'(\varphi(x), \psi(y))$.

Если в роли M' принять множество M, в роли множества N' – систему всех подмножеств множества M (последнее можно сделать, поскольку мощность множества N' равна $2^{|M'|}$), а в роли предиката $L(x, y)$ принять принадлежность $x \in y$ элемента x множеству y, то все условия (25) и (29) выполнятся. Следовательно, предикат $L(x, y)$ с точностью до обозначений элементов множеств M и N есть принадлежность $x \in y$ элемента x множеству y. Этим объясняется существование определений (1), (3) операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции на множестве N, выводимых из условий (25) и (29). Таков, вкратце, формальный аспект обоснования утверждения о том, что множество мыслей человека представляет собой булеву алгебру.

2. Экспериментальные основания введения множества мыслей и булевых операций на нем

Кроме математического, имеется ещё и психофизический аспект проблемы. Он заключается в том, чтобы убедиться посредством объективных экспериментов на испытуемом и субъективных показаниях испытуемого в выполнении тех свойств его внешнего и внутреннего поведения, на которых основывается заключение о существовании предиката P. Говорить о физическом существовании предиката P можно только в том случае, когда имеются реально выделенные и четко очерченные исследователем множества A и B (ситуаций и текстов), на любые элементы x, y которых испытуемый однозначно реагирует двоичным ответом $P(x,y)$. Хотя множества A и B можно выбрать многими различными способами, но для достижения наибольшей общности постановки задачи целесообразно брать их предельно широкими. В роли элементов множества A будем брать любые ситуации, которые способен воспринять испытуемый, а в роли элементов множества B – любые тексты, которые он способен понять.

Понятия ситуации и текста подробно рассматривались в [1]. К сказанному там добавим, что как ситуации, так и тексты пока рассматривается нами лишь как нерасчлененные элементы множеств A и B. О любых двух ситуациях или текстах исследователю достаточно знать, идентичны они или же отличаются друг от друга. Хотя и ситуации и тексты обладают сложной собственной структурой, но для введения булевых операций над мыслями эту структуру знать не обязательно. Отыскание структуры ситуаций и текстов должно составить одну из дальнейших задач теории интеллекта. Любая ситуация представляет собой некоторую часть потока действительности, выделяемую органами чувств и вниманием испытуемого. Каждый текст - это некая последовательность символов, несущая испытуемому определенную мысль.

Как уже говорилось, из существования предиката P можно вывести существование множеств M, N и функций $f: A \to M$, $g: B \to N$. Однако существование это пока еще не фактическое, а только лишь логическое [2]. Элементы множества M представлены слоями разбиения множества A, соответствующего предикату эквивалентности E_1, а элементы множества N – слоями разбиений множества B, соответствующего предикату эквивалентности E_2. Предикаты E_1 и E_2 полностью определяются предикатом P, они выражаются через него по формулам (1) и (3). Здесь пока нет речи о субъективных состояниях испытуемого - образах ситуаций и смыслах текстов. Слоям разбиений множеств A и B еще не поставлены в соответствие никакие реальные объекты.

Для обоснования фактического существования элементов множеств M, N (субъективных по своей природе) и функций f, g (преобразующих физические состояния в психические) достаточно убедиться посредством интроспективных показаний испытуемого в том, что каждая ситуация порождает в его сознании единственный (т.е. стабильный, не зависящий от каких бы то ни было побочных обстоятельств, всегда повторяющийся при предъявлении одной и той же ситуации) субъективный образ, а каждый текст – единственную субъективную мысль. При этом элементам одного и того же слоя разбиения множества A должен соответствовать всегда один и тот же образ ситуации, элементам же разных слоев должны соответствовать разные образы. То же самое относится к элементам слоев разбиения множества B и смыслам текстов.

Субъективный опыт людей ясно показывает, что с определенной степенью приближения так оно и есть на самом деле. Из этого факта вытекает важный практический вывод: когда требуется сформировать в сознании испытуемого определенный образ ситуации или смысл текста, то исследователь всегда может этого практически достичь, предъявляя испытуемому для восприятия или понимания соответствующую ситуацию или текст. Последние берутся из слоя разбиения множества A или B, взаимно однозначно связанного с нужным образом ситуации или смыслом текста. Какая же конкретно ситуация или текст будут взяты из выбранного слоя для возбуждения образа или мысли, не имеет значения.

Теперь мы можем содержательно проинтерпретировать смежные слои разбиения множества A, соответствующего предикату E_1, как образы ситуаций, а смежные слои разбиения множества B, соответствующего предикату E_2, как смыслы текстов. Функцию f интерпретируем как процесс восприятия ситуаций испытуемым, а функцию g - как процесс понимания им смысла текстов. Начиная с этого момента, образы ситуаций и смыслы текстов можно рассматривать не только как субъективные состояния испытуемого, но и как объективные состояния физического мира. Основанием к этому служит сформулированный ранее принцип тождества природы психических и соответствующих им физических состояний.

Ранее было сказано, что из существования предиката P можно вывести существование (логическое) предикатов D_1 и D_2, заданных на $M \times M$ и $N \times N$ и удовлетворяющих условиям (15) и (16). Теперь мы должны убедиться в их фактическом существовании. Имеется два аспекта этой задачи – физический и психологический. Для обоснования физического существования предикатов D_1 и D_2 достаточно заметить, что испытуемый реагирует ответом $E_1(X_1, X_2) = 1$ на ситуации X_1, X_2, принадлежащие одинаковым слоям $f(X_1)$, $f(X_2)$ разбиения множества A, и ответом 0 – на ситуации из разных слоев. Такую реакцию испытуемый демонстрирует, получив задание установить совпадение или различие образов ситуаций X_1 и X_2. Таким образом, в этом опыте испытуемый фактически реализует предикат равенства D_1, фигурирующий в условии (15). Аналогичное соображение справедливо и для предиката D_2 (теперь уже со ссылкой на предикат E_2, тексты Y_1, Y_2, слоя $g(Y_1)$, $g(Y_2)$ разбиения множества B и условие (16).

Для обоснования существования предикатов D_1 и D_2 в психологическом смысле достаточно обратиться к интроспективному опыту испытуемого, который свидетельствует, что он формирует ответ $E_1(X_1,X_2)=1$ всякий раз, когда образы ситуаций X_1, X_2 субъективно совпадают, и ответ – $E_2(X_1,X_2)=0$, когда сознание испытуемого обнаруживает их различие. Аналогично, испытуемый свидетельствует, что в случае совпадения смыслов текстов Y_1, Y_2 он формирует ответ $E_2(Y_1,Y_2)=1$, а в случае их несовпадения – ответ $E_2(Y_1,Y_2)=0$.

После установления логического и фактического существования предикатов равенства D_1 и D_2 на множествах M и N последние становятся полноценными во всех отношениях, и на них теперь можно смело опираться при дальнейшей разработке теории интеллекта. Испытуемый непосредственно воспринимает элементы множеств M и N в виде субъективных образов ситуаций и смыслов текстов. Он обладает способностью отождествлять или различать образы ситуаций и смыслы текстов благодаря тому, что природа снабдила его специальными интроспективными измерительными приборами, реализующими предикаты D_1 и D_2.

Исследователь не имеет прямого доступа к элементам множеств M и N. Он их воспринимает абстрактно в виде слоев-разбиений множеств A и B. С физической точки зрения элементы множеств M и N – это некие “вещи в себе”. Информацию о них исследователь извлекает из слоев разбиения множеств A и B. Но как физические состояния, существующие сами по себе, элементы множеств M и N исследователю недоступны. Точно в таком же положении находится и физик, изучающий процессы, происходящие во внешней мире: он не знает, каковы они как “вещи в себе”, он получает о них информацию путем разработки теории и постановки экспериментов. Исследователь может отождествлять или различать элементы множеств M и N, устанавливая совпадение или различие соответствующих слоев разбиений множеств A и B.

Осталось еще удостовериться в фактическом существовании предиката $L(x,y)$, заданного на $M\times N$, для которого ранее было установлено логическое существование, вытекающее из существования предиката P. Оно устанавливается как в физическом, так и в психологическом смысле. Предъявляя всевозможные пары сигналов x и y из множеств M и N, исследователь убеждается в том, что испытуемый реагирует на них физическим двоичным ответом $L(x,y)$, согласующимся со значением предиката P в соответствии с равенством (17). О существовании же предиката $L(x,y)$ в психологическом смысле свидетельствует субъективный опыт испытуемого, согласно которому он осознаёт, что, действительно, сличает образ ситуации со смыслом текста и вырабатывает свой двоичный ответ в полном соответствии с фактом их согласования или несогласования.

Теперь, когда реальное существование множеств M, N и предиката L установлено, пришло время обратиться к вопросу о выполнении свойств предиката L, заданного на $M\times N$. Свойства эти выражены условиями (25) и (29). В условиях (25), (26) и (28) фигурирует предикат равенства D, заданный на квадрате универсума U. Под элементами множества U мы понимаем любые субъективные состояния испытуемого, в частности, образы ситуаций и смыслы текстов. Таким образом, множества M и N включены в множество U. Если $x_1,x_2\in U$ берутся только из множества M, то предикат D совпадает с предикатом D_1. Если $y_1,y_2\in U$ берутся только из множества N, то предикат D совпадает с предикатом D_2. Предикат $D(x,y)$, у которого значения переменных x, y ограничены соответственно множествами M и N, обозначим через $D_3(x,y)$. Ясно, что смысл условий не изменится, если в (25) предикат D заменить предикатом D_3, в (26) заменить D на D_2 и в (28) – D на D_1.

Предикат равенства $D(x,y)$, заданный на $U\times U$, содержательно интерпретируем как способность испытуемого устанавливать совпадение или различие любых двух его субъективных состояний. В существовании такой способности невозможно усомниться. В самом деле, человек может сравнивать одни восприятия с другими, мысли с мыслями, мысли с восприятиями, звуки с цветами, эмоции с побуждениями и т.д., четко отличая их друг от друга или отождествляя. Способность человека сравнивать между собой любые свои субъективные переживания и устанавливать их равенство или неравенство представляет собою, на наш взгляд, глубинное качество каждой личности, обеспечивающее ее единство.

Условие (25) означает, что множества M и N не пересекаются. С психологической точки зрения оно выражает тот бесспорный факт, что образы ситуаций (т.е. восприятия) качественно отличаются от смыслов текстов (т.е. мыслей), они относятся к разным видам субъективных переживаний, спутать их невозможно. В физическом плане условие (25) означает, что ни один из слоев разбиения множества A не может совпасть с каким-либо из слоев разбиения множества B. Сказанное, однако, вовсе не означает, что множества A и B не могут иметь общих элементов. Напротив, можно с уверенностью утверждать, что эти множества пересекаются. Так, одну и ту же запись на бумаге можно рассматривать и как ситуацию и как текст. Если она воспринимается испытуемым лишь как замысловатое переплетение чернильных пятен, то запись выступает в роли ситуации. Именно так воспринимает строчку иероглифов в пекинской газете человек, не владеющий китайский языком. Если же испытуемый осознаёт смысл записи, то в этом случае она выступает в роли текста.

Условие (26) означает, что при совпадении множества всех образов ситуаций, соответствующих мысли y_1, с множеством всех образов ситуаций, соответствующих мысли y_2, мысли y_1 и y_2 будут идентичными друг другу. Роль этого условия чрезвычайно важна, поскольку на нем основывается возможность объективизации мыслей человека. Каждой мысли ставится во взаимно однозначное соответствие вполне определенное множество ситуаций. Отсюда следует, что любую мысль можно выразить в виде некоторого предиката, заданного на множестве A и определяющего множество всех ситуаций, согласующихся с этой мыслью. Если условие (26) выполняется, то субъективные по своей природе мысли можно будет описывать в физических терминах на языке алгебры предикатов. Благодаря этому, операции над мыслями можно будет представить как операции над предикатами. Этим открывается путь к математическому описанию мышления человека.

Оказывается, существуют такие множества ситуаций A и текстов B, при которых условие (26) заведомо не выполняется. Рассмотрим пример. Пусть множество A состоит из трех ситуаций, каждая из которых представлена рисунком. На первом рисунке изображены треугольник и квадрат, на втором – треугольник, квадрат и круг, на третьем – только круг. Множество B состоит из трех фраз: 1) “На рисунке имеется треугольник”; 2) “На рисунке имеется круг”; 3) “На рисунке имеется квадрат”. Ясно, что первой фразе соответствуют только первый и второй рисунки, второй фразе - второй и третий рисунки, третьей фразе первый и второй рисунки. В соответствии с условием (26) первая и третья фразы должны обладать идентичным смыслом. Однако очевидно, что смысл их различен, поскольку треугольник и квадрат – это разные фигуры.

Причина этого парадокса ясна: мы слишком сузили множество ситуаций. Если бы в множестве A были рисунки, на которых есть треугольник, но нет квадрата или же есть квадрат, но нет треугольника, то первой и третьей фразам соответствовали бы разные множества в полном согласии с условием (26). Значит, в этом условии скрыто требование некой полноты множества A: чем больше разных понятий упоминается в текстах множества B, тем обширнее должно быть множество A. Последнее должно быть настолько большим, чтобы в нем присутствовали ситуации, в которых по-разному комбинируются предметы, упоминаемые в текстах множества B. Если же комбинации предметов в ситуациях, имеющихся в множестве A, окажутся недостаточно разнообразными, то множества ситуаций, соответствующие текстам разного смысла, будут “слипаться”, совпадая друг с другом. Именно это явление обнаружилось в рассмотренном нами примере.

Радикальный способ преодоления обнаруженного парадокса состоит в том, чтобы в роли A взять предельно широкое множество, т.е. множество всех возможных ситуаций. Так мы и поступили при выборе множества A. Поэтому можно не сомневаться, что условие (26) в принятой нами постановке задачи фактически выполняется. В этом случае, если смыслы текстов не совпадают, то, очевидно, всегда можно будет разыскать среди всевозможных ситуаций такую, которая соответствует одному из текстов, но не соответствует другому. Правда, можно возразить, что “множество всевозможных ситуаций” - это весьма неопределенное понятие, которое нуждается в уточнении. Соглашаясь с этим, заметим, что в теории интеллекта, как и в любом другом физической учении, нельзя всего достичь сразу, приходится действовать методом последовательных приближений, лишь постепенно уточняя и корректируя используемые понятия.

4. Условие (27) означает, что в роли множества N нельзя брать произвольное множество мыслей: в нем обязательно должна содержаться мысль, соответствующая пустому множеству образов ситуаций. Ранее мы приняли в качестве N множество всех возможных мыслей. Поэтому в нем должна содержаться также и мысль с требуемым свойством. Она называется противоречием. Выразить ее можно различными текстами, например, “Светит солнце, и не светит солнце”. Ясно, что не существует такой ситуации, которая смогла бы удовлетворить этому высказыванию. Из условия (27) непосредственно следует, что в множестве N имеется только одно противоречие. Заметим попутно, что человек обладает способностью распознавать противоречие в множестве всех мыслей. Предикат, с помощью которого он это делает, назовем предикатом ложности. Противоречие будем называть также тождественно ложной мыслью, она не удовлетворяет ни одной ситуаций. Противоречие обращает предикат ложности в единицу, любая другая мысль обращает его в нуль.

Условие (28) означает, что, кроме противоречия, в множестве N должны содержаться также и некоторые иные мысли, а именно - все такие мысли, каждой из которых соответствует одноэлементное множество ситуаций. Поскольку в множество N мы включили все возможные мысли, то, казалось бы, и требуемые мысли в нем должны содержаться. Трудность, однако, состоит в том, что такие мысли должны выражаться достаточно длинными текстами: ведь чтобы отличить данный образ ситуации от любого другого образа при условии, когда их очень много, нужно иметь весьма детальное его описание. Хватит ли у исследователя времени, чтобы передать такой текст испытуемому? Хватит ли у испытуемого ресурсов ума, чтобы извлечь из этого текста содержащуюся в ней мысль?

Это вопросы – из числа тех, которые требуют серьезного дополнительного изучения и уточнения. Приходится признать, что вопрос о фактическом выполнении условия (28) пока до конца выяснить не удается. Чувствуется, что универсальность человеческого разума ограничена определенными рамками, однако ограничения эти – чисто технические, они не носят принципиального характера. Развиваясь, разум, сможет преодолеть любые рамки, но и после этого он снова окажется в плену ограничений, хотя теперь они будут более слабыми. Видимо, все дело в том, что понятия "множество всех ситуаций" и "множество всех мыслей" задать жестко раз и навсегда нельзя, они относительны, с течением времени эти множества расширяются, поэтому обращаться с ними следует очень тонко и осторожно.

Условие (29) выражает требование замкнутости множества N относительно операции дизъюнкции мыслей: если в множестве N имеются две мысли, соответствующие множествам M_1 и M_2 образов ситуаций, то в нем обязательно должна найтись мысль, соответствующая объединению $M_1 \cup M_2$ этих множеств. В соответствии с определением операции дизъюнкции мыслей, сформулированным выше, это означает, что если в множестве N содержатся какие-то две мысли, то в нем должна отыскаться также и дизъюнкция этих мыслей. Из условия (29) (если приняты уже все предыдущие условия (25) и (28), следует, что в множестве N содержатся все возможные мысли. Последнее утверждение нужно понимать в том смысле, что для любого подмножества множества M в множестве N найдется соответствующая ему мысль. Условия (25) и (28), вместе взятые, таковы, что из них вытекает вполне определенное соотношения между числом элементов множества M и числом элементов множества N. А именно: если мощность множества M равна $|M|$, то множество N обязательно должно иметь мощность, равную $2^{|M|}$.

Можно ли утверждать, что условие (29) выполняется на практике? Если не копать слишком глубоко, то – да. В самом деле, имея какие-нибудь две фразы, всегда можно их соединить союзом "или" и получить дизъюнкцию соответствующих мыслей. Однако, в предельных случаях положение меняется. В принципе, можно взять исходные тексты настолько длинными, что испытуемый будет едва успевать прочитывать каждый из них за всю свою жизнь. Тогда результирующий текст, задающий дизъюнкцию мыслей, представленных этими текстами, испытуемый физически не сможет воспринять: ему не хватит для этого времени его жизни. Здесь мы снова сталкиваемся о "техническими" ограничениями человеческого разума.

Все несоответствия между теорией и опытом, описанные в этом параграфе, можно успешно обойти, если с самого начала удачно выбрать множества M и N. Для этого прежде надо правильно выбрать множества A и B ситуаций и текстов, т.е., в конечном счете, надо корректно сформулировать задачу исследования. Делать это надо с учетом условий (25) и (29). Не следует допускать, чтобы множества M и N оказались бесконечными. Более того, надо проследить, чтобы число элементов в них не было слишком большим. Числа элементов в множествах M и N надо согласовать друг с другом. Если в множество N помещены какие-то две мысли, то следует поместить в него также и их дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Множества M и N должны быть фиксированными. Нельзя допускать, чтобы они изменялись во времени.

Грубо говоря, нужно принять все необходимые и достаточные меры, чтобы "подогнать" постановку задачи исследования под заранее разработанную теоретическую схему. Кроме того, надо позаботиться о том, чтобы взять множества A и B как можно более широкими. Множества A и B, которые получатся в результате такого способа их формирования, мы и условимся называть "множеством всех ситуаций" и "множеством всех текстов". Можно не сомневаться, что поведение испытуемого при такой постановке задачи будет с высокой степенью точности удовлетворять условиям (25) и (29).

Эксперимент должен дать ответ на единственный вопрос: сможет ли испытуемый выполнить возложенную на него исследователем работу, или нет. Если сможет, значит, он обладает той частью интеллекта, которая заложена в теоретическую схему, если же не сможет, значит, - не обладает. Подгонка условий эксперимента под теоретическую схему - это обычный прием в физических исследованиях. Рассматриваемую здесь постановку задачи теории интеллекта тоже можно критиковать за ее не универсальность, так как она неприменима к обучающемуся или эволюционирующему интеллекту. Если исследователь хочет охватить явления обучения или эволюции разума, он должен так усовершенствовать свою теорию, чтобы "подогнанный" под нее эксперимент допускал изменяющиеся во времени множества ситуаций и текстов. При принятой же здесь постановке задачи изучается лишь "статика" интеллекта, но не его "динамика".

3. Уточнение понятия текста

1. Ранее было показано, что из условий (25) и (29) вытекает существование операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания мыслей. Было также установлено, что эти условия с определенной степенью приближения выполняются на практике. Однако, существование этих операций пока чисто логическое, оно доказано лишь в том смысле, что фактическое существование дизъюнкции, конъюнкции и отрицания мыслей возможно. Прегво-

ряется ли эта возможность в действительность — предстоит еще проверить. Нужно установить, что по заданию исследователя испытуемый на самом деле любым двум предъявленным мыслям ставит в соответствие третью, которая является их дизъюнкцией, причем эта мысль всегда однозначно определяется исходными мыслями. То же относится к операциям конъюнкции и отрицания мыслей.

Исследователь располагает эффективным практическим способом проверки этих утверждений. Сформированная испытуемым мысль будет на самом деле дизъюнкцией двух заданных мыслей в том и только в том случае, когда ей соответствует такое множество ситуаций, которое совпадает с объединением множеств ситуаций, соответствующих исходным мыслям. Конъюнкция мыслей соответствует пересечение, а отрицание мысли — дополнение соответствующих множеств ситуаций. Возможен и другой способ проверки, описываемый далее.

Пусть испытуемый реализует две двухместные и одну одноместную операции на множестве всех мыслей. Предположительно принимая эти операции в роли дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, исследователь проверяет для них выполнение всех аксиом булевой алгебры. Если эти операции такую проверку выдерживают, то, согласно теореме Стона, они с точностью до обозначений мыслей совпадают с операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Правда, этим способом не удается решить, какая из двух имеющихся двухместных операций является дизъюнкцией, а какая — конъюнкцией. Операция же отрицания идентифицируется однозначно.

Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания — не единственные, которые можно определить на множестве всех мыслей. Существует много других булевых операций, т.е. таких, которые можно получить суперпозицией операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания мыслей. Любые ли булевы операции может выполнять человек над своими мыслями? Может ли человек образовывать любые суперпозиции из имеющихся в его распоряжении булевых операций над мыслями? Можно доказать, что на множестве всех мыслей существуют операции, не сводящиеся к булевым. Может ли человек производить любые операции над мыслями и образовывать произвольные их суперпозиции? Каков механизм получения мыслей и операций над ними? Какими элементарными (т.е. базисными) мыслями и операциями человек пользуется при формировании своих мыслей и операций над ними?

Кроме операций, на множестве всех мыслей можно определить еще и различные предикаты (одноместные и многоместные). К их числу относятся упоминавшиеся ранее предикаты истинности и ложности, равенства и следования, а также предикаты дизъюнкции, конъюнкции и отрицания мыслей. Любые ли предикаты, действующие на множестве всех мыслей, может реализовать человеческий разум? Каков используемый людьми механизм образования предикатов, из каких элементарных предикатов и операций разум человека строит нужные ему предикаты? Может ли человек выразить в своей речи любые предикаты от мыслей и если — да, то как он это делает?

Всеми этими естественно возникающими вопросами мы сейчас специально заниматься не будем, а ограничимся пока кругом проблем, непосредственно связанных с выяснением фактического существования операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания над мыслями. Однако, исследуя эти вопросы, мы, вместе с тем, будем постепенно готовить почву и для изучения более широкой тематики о фактическом существовании произвольных операций и предикатов над мыслями.

Приступая к изучению фактического использования человеком операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания мыслей в его интеллектуальной деятельности, мы должны предварительно обзавестись именами для мыслей, чтобы иметь возможность беспрепятственно рассуждать о них. Лучше всего было бы в роли имени каждой мысли использовать множество ситуаций, ей взаимно однозначно соответствующее. К сожалению, каждое такое множество содержит в себе огромное и совершенно необозримое число ситуаций, записать его нет никакой возможности. Поэтому оперировать такими “именами” мыслей фактически не удается. Здесь имеется в виду случай, когда требуется снабдить системой имен все мысли сразу, а не какое-то избранное небольшое их число, что, конечно, всегда можно сделать.

Между тем, как мы знаем, каждой мысли соответствует, по крайней мере, один текст, ее выражающий. До сих пор мы использовали тексты как средство возбуждения тех или иных мыслей в сознании испытуемого. Однако, ничто не мешает воспользоваться этими же текстами в иной роли, а именно — в роли имен мыслей. Правда придется мириться с тем, что каждая мысль будет иметь много разных имен – текстов, но в этом нет ничего недозволенного. Использование многих имен для одного и того же объекта – это обычная практика в науке, в частности – в математике и физике.

Слово “текст” употребляется людьми в нескольких разных значениях. Постараемся выделить нужное нам значение этого слова среди других. В одной из своих смысловых ролей слово “текст” означает набор объектов, называемых знаками. В этом понимании любое множество текстов есть просто отношение. Такое значение слова “текст” охватывает нужное нам понятие, но оно еще чересчур общее. В более узком смысле под текстами понимают все те последовательности знаков, которыми пользуются люди в процессе общения между собой. В языкознании это понятие выражают словами "речевая продукция", "языковой материал", "сообщение", "синтаксическая конструкция", "сложное синтаксическое целое", "синтаксически завершенная структура", "грамматически связанное объединение слов" и т.п. В дальнейшем тексты, понимаемые в данном смысле слова, будем называть сообщениями.

Однако и такое понятие текста оказывается еще слишком широким для наших целей. Дело в том, что сообщения можно считать текстами в нужном для нас значении только в том случае, когда каждому из них соответствует свое множество вполне определенных ситуаций. Каждое такое множество принимается нами в качестве физического эквивалента смысла соответствующего ему текста. Под текстом же нами понимается любой физический объект, на который испытуемый может однозначно ответить, соответствует ли он произвольно выбранной ситуации или нет. Как показывает нижеприведенный анализ, далеко не каждое сообщение удовлетворяет этому требованию. Поэтому важно уметь выделять из множества любых сообщений все такие, которые подходят под нужное нам понятие текста.

Оказывается также, что сообщения несут в себе не только смысл (в принятом нами значении этого слова), но и много другой информации, которая не является существенной при изучении операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания мыслей. Поэтому важно уметь четко отличать смысловую информацию, заключенную в тексте, от любой иной информации, также содержащейся в нем. Ниже анализируется различный языковой материал, используемый людьми при передаче информации. Делается это с той целью, чтобы продемонстрировать возможность разделения всевозможных сообщений на тексты и не тексты, и возможность выявления в каждом тексте информации, характеризующей его смысл, и отделения ее от любой иной информации, содержащейся в тексте.

Рассмотрим сообщение «Снег покрыл землю. Деревья трещат от мороза. Санки и коньки уже готовы». Сообщения такого вида будем называть объективными. Они описывают события, внешние по отношению к человеку. Такие события можно объективно наблюдать как физические процессы. Никакой другой информации, кроме как о событиях, происходящих во внешнем мире, (если не обращать внимания на синтаксическую информацию, относящуюся к строению фраз) такие сообщения не содержат. Языковой материал, с которым люди повседневно имеют дело, изобилует объективными сообщениями. Любое такое сообщение исследователь может использовать в роли текста в своих опытах над испытуемым, в которых тот устанавливает соответствие или несоответствие текста и предъявленной ему ситуации. Все объективные сообщения будем считать текстами.

Однако далеко не любое сообщение можно отнести к разряду объективных. Так, фраза "Мне скучно и грустно" характеризует состояние не внешнего, а внутреннего мира человека. Сообщения такого вида мы будем называть субъективными. Они столь же широко распространены в языковом материале, как и объективные сообщения. Можно ли и их отнести к текстам в интересующем нас смысле? Выше мы определили ситуации как фрагменты физического мира. Отсюда, как будто, вытекает, что субъективные сообщения несравнимы с ситуациями: ведь первые характеризуют субъективные состояния, а вторые представляют собой объективные состояния. Вроде бы выходит, что субъективные сообщения не могут выступать в роли текстов.

Но такое заключение недостаточно обосновано. Дело в том, что любой текст в равной мере характеризует как соответствующую ему объективную ситуацию, так и субъективный образ этой ситуации. Если фраза "Идет дождь" соответствует ситуации, которую я наблюдаю из окна моей квартиры, то она будет соответствовать также и моему субъективному восприятию этой ситуации. Ведь всю информацию о ситуации испытуемый черпает только из ее образа. Знать, что такое ситуация как физический процесс - это дело исследователя, а не испытуемого. Поэтому, когда испытуемому предъявляется фраза "Мне скучно и грустно", он без затруднения ответит, так ли это или нет, в зависимости от того эмоционального состояния, в котором он в данный момент времени находится. Испытуемый сможет сделать это даже в том случае, если исследователь не разъяснит ему, с какой именно ситуацией он должен сравнивать данную фразу.

Возникает вопрос: а существуют ли ситуации, т.е. фрагменты физического мира, которые бы соответствовали эмоциональным состояниям человека? Если нет, то субъективные сообщения нельзя будет считать текстами, поскольку исследователь ничего не сможет предъявить испытуемому в качестве ситуации, и объективное исследование его поведения не состоится. Было бы неверным утверждать, что чувства человека возникают спонтанно, ничем не обусловлены. Существует масса внешних событий, влияющих на самочувствие человека. Последнее зависит и от физиологического состояния организма. В свою очередь, уровень здоровья человека обусловлен наследственными факторами и условиями его жизни. Таким образом, в конечном счете, душевное состояние человека всецело определяется внешними событиями. Именно их и следует принять в качестве ситуации, порождающей соответствующее состояние субъекта, которое с полным правом можно считать образом ситуации.

Но не превращается ли при таком подходе понятие ситуации в нечто неопределенное и совершенно необозримое? И всегда ли сможет исследователь по своему желанию предъявить испытуемому любую ситуацию? Ясно, что любую не сможет. Одно дело – предъявлять испытуемому в произвольном порядке кадры какого-нибудь кинофильма. Здесь исследователь, действительно, имеет неограниченную свободу действий. И другое – "предъявить" испытуемому других родителей и обеспечить ему жизнь со дня рождения в другой стране. Впрочем, в некотором смысле даже это достижимо: исследователь просто должен взять для своих опытов другого испытуемого с подходящей биографией. Очевидно также, что исследователь не может знать всего о каждой ситуации, но этого от него и не требуется. Он должен лишь обладать способностью отличать различные ситуации друг от друга и отождествлять одинаковые и в соответствии с этим давать им разные или одинаковые имена.

Следует сказать, что подобные проблемы возникают и в физических исследованиях. Физики делят эксперименты на активные и пассивные. Активные – это те, для которых исследователь формирует условия опыта по своему усмотрению. Пассивные – когда он довольствуется для своих опытов теми условиями, которые возникают сами по себе без его вмешательства. Можно считать, что эксперимент с предъявлением фразы "Мне скучно и грустно" отчасти активен (поскольку текст свободно выбран исследователем), а отчасти пассивен (фраза соотносится испытуемым с ситуацией, не зависящей от воли исследователя). Не в любом эксперименте физик имеет исчерпывающую информацию об условиях опыта. Тем не менее, физика успешно развивается, хотя подобные ограничения, несомненно, сильно сдерживают ее развитие. Все сказанное позволяет включить в рассматриваемое нами понятие текста также и субъективные сообщения.

Сообщения могут быть о настоящем ("Деревья трещат от мороза", "Я скучаю"), о прошлом ("Я в страхе бежал из города" – это сообщение характерно тем, что совмещает в себе черты объективного и субъективного) и о будущем ("Приеду в Москву уже с готовой пьесой", "Пойдет дождь"). Сообщения о настоящем испытуемый проверяет на соответствие ситуациям по их непосредственному впечатлению в момент восприятия. Для проверки сообщений о прошлом ему приходится пользоваться своей памятью, хранящей ведения о прошедших событиях. В обоих случаях эксперименты на испытуемом носят объективный характер, поэтому такие сообщения вполне можно считать текстами.

Однако относительно сообщений о будущем возникают сомнения. Существуют ли в этом случае физические ситуации, предъявляемые испытуемому в эксперименте? Если нет, тогда сообщения о будущем нельзя признать текстами в нужном нам смысле. Проблема сводится к следующему: можно ли еще не наступившие события считать существующими в физическом смысле? С первого взгляда кажется, что нельзя. Но почему же тогда физики только тем и заняты, что высказывают свои суждения о будущих (т.е. несуществующих) событиях и не видят в этом ничего крамольного?

Ответ заключается в том, что, благодаря причинной обусловленности событий, будущее связано с прошлым системой функциональных отношений (физических законов). Вследствие этого последующие события однозначно определяются предшествующими. И в этом смысле будущее существует уже сейчас. Относительно него можно высказывать различные суждения (верные или неверные). Поэтому неудивительно, что в ряде случаев испытуемый, не затрудняясь, реагирует на сообщения о будущих событиях. Он просто сверяет с ними свои ожидания событий. Реакция на фразу "Приеду в Москву уже с готовой пьесой" определяется представлениями испытуемого о свойствах собственного поведения, реакция на фразу "Пойдет дождь" — его представлениями о метеорологических закономерностях. Фактически, испытуемый реагирует на еще не свершившиеся события как на образы уже происшедших событий. Образы эти формируются испытуемым с помощью известных ему зависимостей будущих событий от прошлых. Если испытуемый руководствуется неправильными зависимостями, то и образы происшедших событий не будут совпадать с будущими событиями.

Но как же сможет исследователь объяснить испытуемому, какую именно ситуацию из будущего он имеет в виду? Очень просто: для этого он должен сообщить ему время и место, когда и где будут происходить интересующие его события. Эта информация может быть передана особо, но она может содержаться (явно или неявно) и в самом предъявленном тексте. Например, фраза "Пойдет дождь", сказанная без каких-либо комментариев, очевидно, относится к ближайшим минутам будущего и к месту, где испытуемый находится в данный момент времени. Высказыванием же "Приеду в Москву уже с готовой пьесой" неявно подразумевается, что будущая ситуация отделена от текущего момента более длительным интервалом времени (дни или даже недели). Место же действия (Москва) задано в тексте явно.

Указывая время и место событий, исследователь выделяет фрагмент действительности и тем самым очерчивает рамки будущей ситуации. Задача же испытуемого состоит в том, чтобы прогнозировать развитие событий, мысленно заполнить ими указанный пространственно-временной интервал и, таким образом, воссоздать в своем воображении образ будущей ситуации. Затеи испытуемый сравнивает воссозданную им ситуацию с предъявленным текстом и устанавливает их соответствие или несоответствие друг другу. Таким образом, испытуемый реагирует сразу же после получения задания, т.е. в настоящем, а не в будущем, не дожидаясь фактического наступления оцениваемых событий.

Знания о предъявляемой ситуации исследователь черпает из своего прогноза о будущем, а испытуемый – из своего. Имея дело с ситуациями из будущего, как исследователь, так и испытуемый вынуждены действовать в условиях неполного знания о них. Каждый дорисовывает ситуацию в своем воображении по-своему. Образ ситуации — теперь уже не восприятие, а представление. Поэтому не исключено, что испытуемый представит ситуацию не совсем так (или даже совсем не так), как того ожидает исследователь. С подобными явлениями сталкивается и физик: часто бывает, что результаты эксперимента не вполне соответствуют ожиданиям исследователя (или даже прямо противоположны им). И все же в ходе развития физики эти коллизии как-то преодолеваются, хотя и не без трудностей. Об этом свидетельствуют постоянный рост и расширение физического знания.

Истинность сообщения о будущем испытуемый может оценивать не только относительно своих ожиданий, но и относительно реальных физических ситуаций. Например, исследователь говорит: “Через пять минут пойдет дождь”. Испытуемый ждет пять минут, будущее превращается в настоящее и после этого им оценивается. В данном случае сообщение несет информацию о настоящем, т.е. о фактически наблюдаемом событии. Форма будущего времени предложения обусловлена здесь лишь тем, что текст предъявляется испытуемому раньше, чем происходит относящееся к нему событие. Между предъявлением фразы и реакцией испытуемого на нее должно пройти некоторое время.

Сообщения можно разделить на повествовательные (“Перед графинею стоял незнакомый мужчина”), вопросительные (“Какая сегодня погода?”, “Быстро ли идет поезд?”) и побудительные (“Пойдемте к реке”). Возможно совмещение этих качеств в одном сообщении. Например, фраза “Отойдите прочь, а то буду стрелять!” одновременно содержит в себе и побуждение (“Отойдите прочь”) и повествование (“Буду стрелять”). Все тексты, приведенные в двух предыдущих пунктах в качестве примеров, относятся к повествовательным сообщениям. Можно ли обнаружить тексты (в интересующем нас значении этого слова) также и среди вопросительных или побудительных сообщений? Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется еще раз обратиться к рассмотрению ситуационно-текстового предиката.

До сих пор мы смотрели на ситуационно-текстовый предикат $t = P(X,Y)$ как на функцию, преобразующую ситуацию X и текст Y в двоичный ответ испытуемого t. Но можно рассматривать его и как некое отношение, представленное равенством $t = P(X,Y)$, которое связывает три переменные X,Y,t. Это отношение назовем интеллектуальным треугольником. Раньше мы рассматривали испытуемого как физическую систему с двумя входами и одним выходом. Новому пониманию предиката P соответствует взгляд на испытуемого как на трехполюсник. Входные сигналы можно подать на любые из его двух полюсов, с третьего же полюса осуществляется съем информации. В зависимости от того, какой из полюсов выбран в роли выходного, возможны три вида экспериментов на испытуемом.

Если в роли выходной информации выбран двоичный ответ испытуемого t, то его реакция будет однозначно определяться сигналами X и Y. Совсем иное положение наблюдается в том случае, если в роли выходного сигнала выбрана ситуация X или текст Y. Значениями остальных двух переменных Y, t или X, t сигналы X и Y однозначно не определяются. Режим проведения эксперимента, при котором испытуемый вносит в ситуацию X такие изменения, чтобы она удовлетворяла уравнению $t = P(X,Y)$, называем режимом физического действия. Режим проведения эксперимента, при котором испытуемый формирует сигнал t по известной ситуации X и заданному тексту Y, назовем режимом логической оценки. Режим, при котором по известной ситуации X и заданному значению t испытуемый формирует один из текстов, удовлетворяющий уравнению $t = P(X,Y)$, назовем режимом текстового ответа.

Выполняя анализ сообщений, подобный приведенному в этом и предыдущих пунктах, можно для каждого из них установить, является ли данное сообщение текстом в нужном нам значении или нет. И если это — текст, то какая часть заключенной в нем информации характеризует смысл текста, а какая – что-то иное. Выполнение в полном объёме такого анализа сообщений весьма важно, так как его результаты позволят дать четкую характеристику множества текстов B - одного из исходных понятий теории восприятия, понимания и осознания. Важно выполнить работу по формальному описанию преобразования любых сообщений в содержащиеся в них тексты.

Выводы

Одна из важнейших задач теории интеллекта заключается в том, чтобы суметь добраться физическими методами до субъективных состояний человека. Мысли человека, его ощущения, восприятия, представления — все это субъективные состояния. Точные знания о них необходимы в теории интеллекта. Возможность получения таких знаний представляет использование метода компараторной идентификации, описанного в данной работе. Согласно методу компараторной идентификации, своим поведением испытуемый реализует некоторый конечный предикат, свойства которого экспериментально исследуются и математически описываются. Исследователь всегда может дать такое задание испытуемому, чтобы из свойств реализуемого им предиката можно было путем специального математического анализа чисто логически вывести математическое описание изучаемых субъективных состояний испытуемого, а также найти вид функции, лежащей в основе преобразования физических предметов в порождаемые ими субъективные образы.

Литература: 1. *Бондаренко М.Ф.* Ситуационно-текстовый предикат / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко Ю.П., Шабанов-Кушнаренко С.Ю. // Біоніка інтелекту. – 2010. – № 2 (73). – С. 87-98. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Начала теории интеллекта. Ч. 4. Метод и задачи. Подразд. 2.5.6. О фактическом и логическом существовании. – Деп. УкрНИИНТИ, №1743-90. 3. *Бондаренко М.Ф.* Инструментарий компараторной идентификации / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко Ю.П., Шабанов-Кушнаренко С.Ю. // Біоніка інтелекту. – 2010. – № 2 (73). – С. 74-86.

Поступила в редколлегию 02.04.2010

УДК 519.7

Булева структура тексту / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Н.В. Шаронова // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 99–110.

Пропонується біонічний підхід до проблеми побудови штучного інтелекту. Розвивається спеціалізований математичний апарат для ефективного моделювання роботи механізмів людського інтелекту.

Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

Boolean text structure / M.F. Bondarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko, N.V. Sharonova // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 99–110.

It is offered bionic approach to a problem of construction of an artificial intelligence. The specialized mathematical instrument for effective simulation of activity of mechanism of human intellect develops.

Ref.: 3 items.

УДК 519.7

О МЕТОДЕ НУЛЕВОГО ПРИБОРА

М. Ф. Бондаренко[1], Н. П. Кругликова[2], Н. Е. Русакова[3], Ю. П. Шабанов-Кушнаренко[4]

[1, 2, 3, 4] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Каждый человек обладает сознанием – универсальным средством, извещающим его о той огромной работе, которую совершает его мозг по приему, обработке и выдаче информации. Сведения, доставляемые сознанием, чрезвычайно ценны для специалистов в области компьютеризации и информатизации, более того – они незаменимы. Однако, сознание выдает эти сведения в «стенографической» форме *субъективных состояний.* Поэтому получаемая людьми от сознания информация нуждается в *объективизации*, заключающейся в ее расшифровке, дополнении, детализации и формализации. В статье рассматривается *метод нулевого прибора* – простейший и вместе с тем наиболее широко применяемый на практике метод объективизации сведений, доставляемых сознанием о работе мозга человека.

НУЛЕВОЙ ПРИБОР, СУБЪЕКТИВНЫЕ СОСТОЯНИЯ, ЦВЕТОВОЙ ПРЕДИКАТ, ЦВЕТОВАЯ ИНДУКЦИЯ

Введение

Созданию средств искусственного интеллекта содействует *бионика интеллекта*, которая изучает идеи Природы, реализованные ею в интеллекте человека. Компьютеры, на базе которых создается искусственный интеллект, – это математические машины, они могут усвоить только те знания, которые предварительно были выражены людьми на точном формализованном языке. Поэтому бионика интеллекта стремится формально описывать изучаемые ею идеи Природы [1]. Известны три основных подхода к формальному описанию интеллекта: функциональный, субъективный и материальный. *Функциональный подход* заключается в анализе наблюдаемого извне поведения интеллектуальной системы. *Субъективный подход* состоит в наблюдении интеллектуальной системы изнутри. При *материальном подходе* изучается структура материального носителя интеллекта (в том числе – нейронной сети мозга человека). Каждый из подходов имеет свои сильные и слабые стороны. Функциональный и материальный подходы характеризуются объективностью, однако они не обеспечивают доступа к внутреннему миру человека. Субъективный же подход легко проникает в богатейший внутренний мир человека, но он пользуется плохой репутацией в науке из-за фрагментарности получаемых сведений и своей кажущейся обманчивости.

1. Метод нулевого прибора

От указанных недостатков, упомянутых подходов к изучению интеллекта человека нетрудно избавиться, совместно применяя два из них, а именно – функциональный и субъективный. Оба эти подхода противостоят материальному, поэтому такой комбинированный подход называется *идеальным.* Правильность результатов, полученных при идеальном подходе, можно дополнительно проверить, обращаясь к материальному подходу. Возможны два варианта такой проверки. Первый вариант заключается в том, что пытаются отыскать в нейронной сети мозга человека такие ее части, которые бы имели структуру и функции, соответствующие формальному описанию, полученному при идеальном подходе к изучаемому объекту. Если это удается сделать, тогда найденный фрагмент нейронной сети можно будет с полным правом считать материальным механизмом, действующим в соответствии с найденным идеальным описанием объекта. При этом будет достигнуто комплексное (по всем трем подходам) продвижение вперед в деле познания некоторой части человеческого интеллекта. Второй вариант состоит в том, что пытаются построить техническое устройство (фрагмент системы искусственного интеллекта), имеющее структуру и внешнее поведение, неотличимые от тех, которые соответствуют упомянутому формальному описанию объекта. Если это удается достичь, то тем самым будет сделан очередной шаг в деле компьютеризации и информатизации и, что гораздо важнее, также и шаг в деле познания человеческого интеллекта.

Простейшим вариантом идеального подхода является *метод нулевого прибора*. Этим методом Исаак Ньютон (1642-1727) впервые осуществил объективное изучение ощущений цвета человека. Он воспользовался тем обстоятельством, что сам испытуемый (то есть человек, над которым производятся опыты) способен установить, равны или нет цвета любых предъявленных ему световых излучений. Делает он это субъективным способом, анализируя цвета собственным сознанием. В результате такого анализа испытуемый может отреагировать физическим сигналом, принимающим одно из двух значений: 1, если цвета совпадают, и 0, если не совпадают. Такая двоичная реакция испытуемого вполне объективна, ее можно зарегистрировать физическими приборами. Это кажется невероятным, но из такого, казалось бы, побочного и малоинформативного сигнала можно извлечь всю информацию о цвете и о виде преобразования светового излучения в цвет.

Метод нулевого прибора мы вначале рассмотрим на примере изучения цветового зрения человека. Световое излучение, действуя на сетчатку глаза, вызывает в сознании человека ощущение, называемое *цветом*. Раздел науки, в котором изучается преобразование $f(x) = y$ светового излучения x в цвет y, осуществляемые зрительной системой человека, называется *теорией цветового зрения*. Испытуемому предъявляют на полях сравнения (рис. 1) световые излучения x_1 и x_2 из множества M всех излучений, которые он воспринимает в виде вполне определенных цветов y_1 и y_2. Все цвета, вместе взятые, образуют множество N. Преобразование светового излучения x в соответствующий ему цвет y осуществляется с помощью некоторой функции $f(x) = y$, отображающей множество M на множество N. Если цвета y_1 и y_2 совпадают друг с другом, то испытуемый должен отреагировать на них ответом $t = 1$, если же не совпадают, то – ответом $t = 0$. Вводим множество $\Sigma = \{0, 1\}$ всевозможных ответов испытуемого, $t \in \Sigma$.

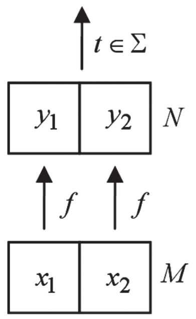


Рис. 1

В описанном эксперименте переплетаются два подхода – функциональный и субъективный. В соответствии с этим важно разделить источники поступления информации на *объективные* и *субъективные*. В интеллектуальную систему испытуемого $P(x_1, x_2) = t$ поступает извне пара (x_1, x_2) объективных световых излучений, которая произвольно выбирается из множества $M \times M$ (рис. 2).

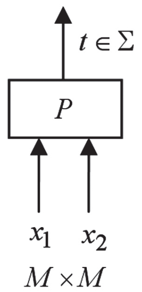


Рис. 2

В ответ на эту пару на выходе системы появляется тоже внешний (то есть объективно регистрируемый) сигнал t, принимающий одно из двух возможных значений 0 или 1 из множества $\Sigma = \{0, 1\}$. Преобразование $P(x_1, x_2) = t$ характеризуется предикатом P, отображающим множество $M \times M$ в множество Σ, функционирование которого можно наблюдать в чисто объективном эксперименте. Субъективное наблюдение обнаруживает внутри изучаемой интеллектуальной системы P состояния y_1, y_2, появляющиеся перед сознанием испытуемого в виде двух цветов на полях сравнения в ответ на предъявление световых излучений x_1, x_2. Цвета y_1, y_2 стабильны во времени при проведении опыта, они однозначно зависят от световых излучений x_1, x_2. Равным световым излучениям $x_1 = x_2$ соответствуют равные цвета $y_1 = y_2$, так что сигналы x_1 и x_2 преобразуются в сигналы y_1 и y_2 одной и той же функцией f: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Обнаруживается также, что при $y_1 = y_2$ испытуемый всегда реагирует сигналом $t = 1$, а при $y_1 \neq y_2$ – сигналом $t = 0$. Получаемая дополнительная субъективная информация позволяет вскрыть детали в преобразователе сигналов P (рис. 3).

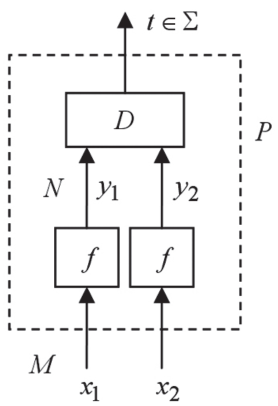


Рис. 3

Теперь мы можем конкретизировать вид предиката P:

$$P(x_1, x_2) = D(f(x_1),\ f(x_2)) = D(y_1, y_2).$$

Его мы назовем *цветовым предикатом*. Он задан на $N \times N$. Символом D обозначен *предикат равенства цветов*:

$$D(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } y_1 = y_2, \\ 0, \text{ если } y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

Предикат $D(y_1, y_2) = t$ задан на $N \times N$, он принимает значения 0 или 1 из множества Σ. Устройство, реализующее предикат равенства, называется *нулевым прибором*. Предикат D характеризует собой действие механизма сознания испытуемого, анализирующего ощущения цвета y_1, y_2 и сигнализирующего ответом t об их равенстве или неравенстве. Функция $f(x) = y$ отображает множество M на множество N, она характеризует собой преобразование объективного светового излучения $x \in M$ в субъективный цвет $y \in N$, осуществляемое зрительной системой человека. Функция f называется *характеристической функцией цветового предиката*.

2. Общий вид предиката эквивалентности

Кроме преобразования светового излучения в цвет, методом нулевого прибора можно успешно изучать преобразование цвета в его яркость, тон и насыщенность; звука — в его громкость и тембр; текста — в его смысл; ситуаций — в их оценку; предметов — в их образы и многие другие информационные процессы. В дальнейшем, для общности изложения, метод нулевого прибора будем описывать в нейтральных математических терминах, не переходя к конкретным задачам. Эти термины при необходимости всегда можно перевести на язык конкретной интересующей нас задачи, получив таким способом нужный вариант метода нулевого прибора.

Предикат P заданный на $M \times M$, называется *рефлексивным*, если

$$\forall x \in M \;\; P(x, x),$$

симметричным, если

$$\forall x_1, x_2 \in M \;\; (P(x_1, x_2) \supset P(x_2, x_1))$$

и *транзитивным*, если

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in M \;\; (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_3) \supset P(x_1, x_2)).$$

Любой рефлексивный, симметричный и транзитивный предикат называется *эквивалентностью.* Рассмотрим следующие два свойства предиката эквивалентности.

Свойство 1. Для любого предиката эквивалентности P заданного на $M \times M$, найдутся непустое множество N и функция f, отображающая множество M в множество N, такие, что при любых $x_1, x_2 \in M$ будет выполняться равенство

$$P(x_1, x_2) = D(f(x_1), f(x_2)). \qquad (1)$$

Доказательство. Для каждого $x_1 \in M$ существует единственное множество S_{x_1} всех $x_2 \in M$, таких что $P(x_1, x_2) = 1$. В роли множества N принимаем систему всех множеств S_{x_1}, где $x_1 \in M$. Множество N не пусто. В роли f принимаем функцию, которая ставит в соответствие каждому элементу $x_1 \in M$ множество S_{x_1}, так что $f(x_1) = S_{x_1}$. Докажем, что при таком выборе функции f равенство (1) выполняется при любых $x_1, x_2 \in M$. Рассмотрим случай, когда x_1 и x_2 таковы, что $P(x_1, x_2) = 1$. Чтобы убедиться в том, что в этом случае $D(f(x_1), f(x_2)) = 1$, достаточно доказать, что $S_{x_1} = S_{x_2}$. Докажем это. Пусть $x \in S_{x_1}$, тогда $P(x_1, x) = 1$. По свойству симметричности предиката P из $P(x_1, x_2) = 1$ выводим $P(x_2, x_1) = 1$. По свойству транзитивности предиката P из $P(x_2, x_1) = 1$ и $P(x_1, x) = 1$ выводим $P(x_2, x) = 1$. Отсюда следует, что $x \in S_{x_2}$. Итак, мы получили, что $S_{x_1} \subseteq S_{x_2}$. Предположим теперь, что $x \in S_{x_2}$. Тогда $P(x_2, x) = 1$. По свойству транзитивности предиката P из $P(x_1, x_2) = 1$ и $P(x_2, x) = 1$ выводим $P(x_1, x) = 1$. Отсюда следует, что $x \in S_{x_1}$. Итак, мы получили, что $S_{x_2} \subseteq S_{x_1}$. Вместе взятые, эти два включения дают равенство $S_{x_1} = S_{x_2}$ множеств S_{x_1} и S_{x_2}. Рассмотрим оставшийся случай, при котором x_1 и x_2 таковы, что $P(x_1, x_2) = 0$. Чтобы убедиться в том, что теперь и $D(f(x_1), f(x_2)) = 0$, достаточно доказать, что $S_{x_2} \neq S_{x_1}$. Докажем это. Из $P(x_1, x_2) = 0$ следует $x_2 \notin S_{x_1}$. По свойству рефлексивности предиката P имеем $P(x_2, x_2) = 1$, отсюда выводим $x_2 \in S_{x_2}$. Следовательно, $S_{x_1} \neq S_{x_2}$. Мы доказали, что значения предикатов $P(x_1, x_2)$ и $D(f(x_1), f(x_2))$ совпадают при любых $x_1, x_2 \in M$.

Свойство 2. Любой предикат P, заданный на $M \times M$ и выражающийся при любых $x_1, x_2 \in M$ в виде (1), есть предикат эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность, симметричность и транзитивность предиката P непосредственно следуют из равенства (1) и из рефлексивности, симметричности и транзитивности предиката равенства D.

Функция f, отображающая множество M в множество N и фигурирующая в равенстве (1), называется *характеристической функцией предиката эквивалентности* [3]. Из свойств 1 и 2 непосредственно следует, что любые предикаты эквивалентности и только предикаты эквивалентности могут быть представлены в виде (1) при подходящем выборе множества N и функции f. Каким бы ни был предикат P, если он оказывается рефлексивным, симметричным и транзитивным, то для него всегда найдутся множество N и функция f, при помощи которых можно будет адекватно математически выразить строение этого предиката. Таким образом, правая часть равенства (1) представляет собой *общий вид предиката эквивалентности.* С математической точки зрения полученный результат очень прост, тем не менее он весьма важен, поскольку указывает систему легко проверяемых в чисто физическом эксперименте необходимых и достаточных признаков, с помощью которых всегда можно установить, допускает ли объект, реализующий предикат P, полноценное формальное описание методом нулевого прибора. Если система, имеющая два входа x_1 и x_2 и один выход t, реализует предикат $P(x_1, x_2) = t$, и этот предикат удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности, то ее можно описать в точных терминах, применяя метод нулевого прибора. Если же хотя бы одно из этих трех условий не выполняется, то метод нулевого прибора для такого объекта неприменим. Методом нулевого прибора можно изучать любые системы преобразования сигналов, для которых выполняются свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности.

В применении к зрительной системе человека элементы $x_1, x_2 \in M$ интерпретируются как световые излучения, предъявляемые испытуемому для восприятия, M — это множество всех таких излучений. Элементы множества N $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ интерпретируются как цвета, возбуждаемые в сознании испытуемого излучениями x_1 и x_2. Устанавливая совпадение или различие цветов

y_1 и y_2, испытуемый реализует предикат $D(y_1, y_2)$. Реагируя на излучения x_1, x_2, испытуемый реализует предикат $P(x_1, x_2) = D(f(x_1), f(x_2))$. Значение предиката $D(y_1, y_2) = 1$ соответствует реакции испытуемого, выражающей равенство цветов y_1 и y_2. Значение предиката $D(y_1, y_2) = 0$ соответствует реакции испытуемого, выражающей несовпадение цветов y_1 и y_2. Множество N представляет собой совокупность всех цветов, которые могут быть возбуждены в сознании испытуемого излучениями из множества M. Функцию f содержательно интерпретируем как преобразование светового излучения в цвет, реализуемое зрительной системой испытуемого.

Требование, что P есть предикат, означает: двоичный ответ испытуемого $t = P(x_1, x_2)$ существует и единственен для каждой пары x_1, x_2 световых излучений из множества M. Рефлексивность предиката P означает, что одинаковым световым излучениям на полях сравнения соответствуют одинаковые цвета. Симметричность предиката P означает, что изменение порядка предъявления излучений испытуемому не влияет на его двоичную реакцию. Транзитивность предиката P означает: если для данного испытуемого излучения x_1, x_2 и x_2, x_3 одноцветны, то для него будут одноцветными также и излучения x_1, x_3.

3. Актуальное и потенциальное существование

Необходимо различать два вида существования внутренних сигналов y_1, y_2 в преобразователе информации, изображенном на рис. 3. Один из них – *фактическое существование*. Если утверждается, что сигналы y_1, y_2 фактически существуют, то это означает, что испытуемый реально наблюдает своим сознанием субъективные состояния y_1, y_2, фактически «переживает» их. Оказывается, что из объективного наблюдения за поведением преобразователя сигналов $P(x_1, x_2) = t$ невозможно вывести фактическое существование сигналов $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. В формулировке свойства 1 утверждается, что для каждого из световых излучений x_1, x_2 найдутся (то есть существуют) внутренние состояния $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, системы P. Однако слово «существование» здесь не означает, что испытуемый фактически переживает эти сигналы. Имеется в виду лишь то, что для системы P можно подобрать такую функцию f, при которой система преобразования сигналов $D(f(x_1), f(x_2))$ будет для любой пары x_1, x_2 своих входных сигналов вырабатывать точно такой же выходной двоичный сигнал, что и система $P(x_1, x_2)$. В системе $D(f(x_1), f(x_2))$, если ее реализовать в натуре техническими средствами, сигналы $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ будут, конечно, существовать фактически, но это еще не означает, что сигналы y_1 и y_2 можно будет реально наблюдать и в системе $P(x_1, x_2)$.

Такой вид существования сигналов называется *логическим*. Логическое существование появляется тогда, когда можно доказать, что исходную систему $F(x) = y$ преобразования сигнала x в сигнал y *можно* представить в виде суперпозиции двух преобразователей сигналов $G(x) = z$ и $H(z) = y$ так, что преобразователи $F(x) = y$ и $H(G(x)) = y$ будут выдавать одинаковые выходные сигналы y при любых входных сигналах x, то есть демонстрировать идентичное поведение. Но идентичное поведение двух систем еще не означает идентичности их устройства. Система $F(x) = y$ может быть искусственно построена так, что в ней вообще не будет внутри такого места, которое находилось бы в состоянии z.

Приведем пример такой задачи изучения цветового зрения человека, когда представление системы $P(x_1, x_2)$ в виде конструкции $D(f(x_1), f(x_2))$ с внутренними сигналами $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ возможно, однако фактически этих сигналов в системе $P(x_1, x_2)$, судя по субъективному свидетельству испытуемого, нет и быть не может. Схема эксперимента в данном случае несколько отличается от той, которая изображена на рис.1. Теперь соседние поля, на которых испытуемому предъявляются световые излучения x_1, x_2 окружены обширным третьим полем с формируемым на нем излучением x. В сознании испытуемого возникают цвета y_1, y_2, являющиеся субъективными образами излучений x_1, x_2. Так же, как и в исходном эксперименте, испытуемый на равенство цветов $y_1 = y_2$ реагирует сигналом $t = 1$, а на неравенство $y_1 \neq y_2$ – сигналом $t = 0$ (рис. 4).

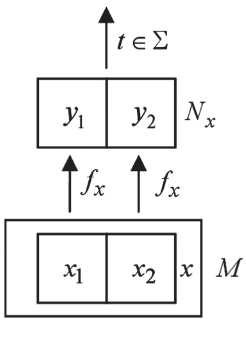


Рис.4

Во время проведения этого эксперимента обнаруживается эффект *цветовой индукции*, заключающийся в том, что цвета y_1 и y_2 теперь зависят не только от излучений x_1 и x_2, но и от излучения x окружающего их поля. Таким образом, $y_1 = f_x(x_1)$ и $y_2 = f_x(x_2)$, так что излучение x меняет вид функции f_x, которая имеет параметр x. Если сохраняя неизменными сигналы x_1 и x_2, изменить значение параметра x, то цвета y_1 и y_2, вообще говоря, будут изменяться. Однако, изменение цветов происходит на обоих полях сравнения по-одинаковому. Если при одном значении сигнала x цвета y_1 и y_2 излучений x_1 и x_2 окажутся одинаковыми, то они будут оставаться равными и при любом ином фоне x. В результате оказывается, что значение сигнала

t совершенно не зависит от выбора значения излучения фона x. Получается, что промежуточные сигналы y_1 и y_2 новой системы зависят от значений сигнала x, а выходной сигнал t всей системы P в целом от сигнала x не зависит. Как и в прежней системе, в новой системе поведение ее описывается предикатом $P(x_1, x_2) = t$, который рефлексивен, симметричен и транзитивен. А значит, согласно свойству 1, поведение системы $P(x_1, x_2)$ идентично поведению системы $D(f(x_1), f(x_2))$.

В системе $D(f(x_1), f(x_2))$ фактически существуют стабильные сигналы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, определяемые одной и той же функцией f. Вместе с тем, в исходной системе $P(x_1, x_2)$ сигналы y_1 и y_2 нестабильны и говорить об их фактическом существовании – это значит вступать в противоречие с очевидными фактами. Итак, мы видим, что в системе, представляемой схематически на рис. 4, промежуточные сигналы y_1 и y_2 в логическом смысле существуют, а в фактическом смысле – не существуют. Отсюда можно сделать важный вывод: функциональный подход, взятый сам по себе, не дает полной информации об изучаемой системе преобразования сигналов по методу нулевого прибора. Для полноценности изучения информационной системы испытуемого функциональный подход необходимо дополнять субъективным подходом.

Фактическое существование можно назвать еще *актуальным (действительным)*, а логическое – *потенциальным (возможным)*. Нарисуем на листе бумаги две различные точки и проведем через них прямую линию. Такая прямая существует актуально, фактически, ее мы можем наблюдать в действительности в виде субъективного образа. Если же на листе бумаги имеются только две различные точки без прямой, то актуально прямая линия, проходящая через них, не существует, ее попросту нет. Но она существует потенциально в том смысле, что мы можем, если пожелаем, эту линию через заданные точки провести. Возьмем какой-нибудь равносторонний треугольник. Через его три вершины невозможно провести прямую. Она не существует ни в актуальном, ни в потенциальном смысле.

Актуальное существование с логической точки зрения сильнее потенциального: если прямая фактически проходит через две точки, то есть актуально существует, то она существует и потенциально, иначе говоря, ее можно было бы через эти две точки провести. Если же потенциальное существование какого-то объекта невозможно, то отсюда следует невозможность и его актуального существования. Есть такой шуточный стишок-каламбур: «Все быть может, всё быть может, все, конечно, может быть, одного лишь быть не может: то, чего не может быть». Из бессодержательного высказывания это утверждение превращается в формулировку одного из глубинных законов природы, если в первой части этого высказывания словосочетание «быть может» понимать в смысле актуального существования, а во второй те же слова понимать в смысле существования потенциального. Теперь стишок приобретает следующий вполне серьезный смысл: «Тот и только тот объект, который существует потенциально, можно превратить в объект, существующий актуально».

Заключение

Мир, в котором мы живем, похож на детскую игру «Конструктор». В нем имеется множество разных деталей, которые можно соединять по определенным правилам. В роли полного свода таких правил выступает система всех законов логики. Человек не имеет прямого доступа к деталям в том смысле, что он не знает, каковы они на самом деле (как «вещи в себе»). Однако Природа снабдила человека органами чувств, которые формируют перед его сознанием субъективные образы этих деталей. Руководствуясь этими образами, человек может свободно оперировать с самими деталями, строить любые конструкции, разрешенные законами логики. Правильность создаваемых конструкций, то есть соответствие их своим замыслам, он проверяет показаниями своих органов чувств. Мир, кроме законов логики, подчинен еще и законам физики, согласно которым в нем совершаются процессы и без участия человека. Обладая свободной волей, человек может вмешиваться в эти процессы и изменять их по собственному желанию, внося тем самым свой вклад в эволюцию мира.

Список литературы: 1. Бондаренко, М. Ф. О бионике интеллекта [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Бионика интеллекта научн.-техн. журнал. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 2004. – № 1 – С. 3–14. 2. Ньютон И. Оптика. Изд. 2-е. – М.: Гостехтеориздат, 1954. 3. Бондаренко, М. Ф. Об общей теории компараторной идентификации [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Бионика интеллекта научн.-техн. журнал. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 2008. – № 2 – С. 14–25.

Поступила в редколлегию 06.04.2010

УДК 519.7

Про метод нульового приладу / М. Ф. Бондаренко, Н. П. Круглікова, Н. Є. Русакова, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 111–115.

У статті розглядається метод нульового приладу як один з найпростіших і разом з тим найбільш широко використовуваних на практиці методів об'єктивізації відомостей про роботу мозку людини, що доставляються свідомістю.

Іл.: 4. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

About the method of null-instrument / M.F. Bondarenko, N. P. Kruglikova, N.E. Rusakova, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 111–115.

The method of null-instrument is examined in the article – the simplest and at the same time most the method of objectivization information, delivered consciousness about work of brain of man widely applied in practice.

Fig. 4. Ref.: 3 items.

УДК 658.512.011:681.326:519.713

ЛОГИЧЕСКИЙ АССОЦИАТИВНЫЙ МУЛЬТИПРОЦЕССОР ДЛЯ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИИ

М.Ф. Бондаренко[1], В.И. Хаханов[2]

[1]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина,

[2]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, hahanov@kture.kharkov.ua

Предлагается архитектура быстродействующего мультипроцессора параллельного анализа информации, представленной в виде аналитических, графовых и табличных структур ассоциативных отношений, для поиска, распознавания и принятия решений в n-мерном векторном дискретном пространстве. Рассматриваются векторно-логические процесс-модели актуальных прикладных задач, качество решения которых оценивается введенной интегральной неарифметической метрикой взаимодействия булевых векторов.

МУЛЬТИПРОЦЕССОР, АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИИ, ГРАФ, ТАБЛИЦА, АССОЦИАТИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ, ПРОЦЕСС-МОДЕЛЬ.

Введение

Мозг и компьютер. 1) Сходство и различие. Технологическая основа примитивных функций мозга и компьютера – логические операции: and, or, not, xor. Различие тоже понятно – кремниевая (цифровая) и биологическая (аналоговая) природа реализации элементарных операций. 2) Функциональность. Как в мозге, так и в компьютере, «выращиваются» более сложные функциональные пространственно-временные логические преобразователи, использующие упомянутые выше примитивные операции. Логические операции лежат в основе алгоритмов компьютерного решения любой задачи: арифметической, логической или комбинированной. Однако утяжеление универсального компьютера путем возведения на базисе логических функций (and, or, not) приводит не только к расширению его функциональностей, но и к удорожанию и снижению быстродействия по отношению к конкретной задаче. Специализация компьютерного изделия, ориентированная на использование логических операций, дает возможность приблизиться к ассоциативно-логическому мышлению человека и вместе с тем существенно (x100) повысить быстродействие решения специальных задач. Исключение арифметических операций в специализированном процессоре, использование векторной логики, мультипроцессорность архитектуры для параллельного анализа информации есть старый и забытый маршрут повышения быстродействия решения прикладных задач на современной технологической основе. 3) Структурная организация. Мозгоподобность компьютера здесь рассматривается не как перенос нейроструктуры в архитектуру компьютера, а как имплементация в него ассоциативно-логической функциональности мозга. Создание компьютера с мозгоподобной структурой, выполняющей аналоговые вычисления, пока бесперспективно для эффективной реализации цифрового вычислительного устройства. Тем не менее, соединение биотехнологий и наноэлектроники уже через 5 лет может дать практически ориентированный результат в виде сети или матрицы элементарных логических процессоров (здесь структурное подобие мозгу), параллельно решающих ассоциативно-логические задачи (функциональное подобие мозгу) на информационных массивах большой размерности. Не следует также переносить идеально выверенную тысячелетней эволюцией биологическую модель мозга на несовершенную и незрелую структуру кремниевого кристалла. Такого рода мозгоподобность для решения практических задач в недалеком прошлом уже терпела неудачи. Другое дело, когда функциональности, присущие мозгу, реализуются в кристалле кремния путем соединения выверенных временем аналитических и синтетических свойств мозга с преимуществом быстродействующих цифровых платформ для решения ассоциативно-логических задач.

Определение. Мозгоподобность мультипроцессорной цифровой системы на кристалле есть концепция создания архитектуры и моделей вычислительных процессов, ориентированных на эффективную и быстродействующую реализацию функциональностей, свойственных мозгу, на основе использования векторных логических операций для решения задач поиска, распознавания и принятия решений.

1. Класс задач для мозгоподобного мультипроцессора

Существует большой класс логических задач, которые в настоящее время решаются не эффективно на универсальных компьютерах путем использования арифметических операций. Система логических команд является универсальным и полным базисом, а согласно теореме Поста способна описать и решить любую задачу. Однако практические разработчики программно-аппаратных систем уже забыли об изначальной логической сущности компьютера. Они привыкли неэффективно (на 5-10%) использовать мощности системы команд, компиляторов, операционных систем, отдавая компаниям-производителям порядка 90% денежных средств безвозмездно при покупке компьютера. Решение логических задач с помощью арифметического процессора не есть правильный выбор с позиции технологической и математической культуры. В настоящее время существующая платформа цифровых систем на кристаллах предоставляет практически неограниченные возможности для переориентации инфраструктуры моделей и методов на создание специализированных компьютеров с минимальной системой логических векторных операций или команд. Мотивация – создание мультипроцессора, как специализированной системы на кристалле для анализа и синтеза логических ассоциативных отношений, свойственных мозгу. Подтверждением актуализации таких изделий является появление на рынке iPad планшета (толщиной 12 мм и весом 0,68 кг), процессор которого выполнен в виде системы на кристалле Apple A4 на базе многоядерного ARM-процессора Cortex-A9 MPCore с использованием контроллеров памяти и графики. Наличие аппаратного, быстродействующего и дешевого специализированного логического вычислителя позволяет эффективно решать интересные для рынка информационных технологий задачи: 1. Анализ и синтез синтаксических и семантических языковых конструкций (реферирование, исправление ошибок, оценивание качества текстов). 2. Распознавание видео- и аудио-образов путем их представления вектором существенных параметров в дискретном пространстве. 3. Сервисное обслуживание сложных технических изделий и восстановление работоспособности в процессе их функционирования. 4. Тестирование знаний и экспертное обслуживание объектов или субъектов для определения их валидности. 5. Идентификация объекта или процесса для принятия решения в условиях неопределенности. 6. Точный поиск заданной вектором параметров информации в Internet, где по запросу пользователя очень часто выдаются два сообщения: отсутствуют данные или слишком много информации, слабо ассоциируемой с входным запросом. Здесь нужна правильная метрика оценивания и валидный запрос. 7. Коррекция текста в процессе его набора, когда автоматически исправляются только тривиальные ошибки, такие как повторение буквы в слове. Можно также корректировать более сложные семантические ошибки, связанные с неверным окончанием, и предлагать более приемлемые варианты порядка слов в предложении или в его части. Данная задача актуальна для 100% пользователей компьютеров. 8. Более серьезная проблема выбора принадлежит критическим технологиям: целеуказание в истребителе или в автоматической системе посадки лайнера, работающих в реальном масштабе времени в микросекундном диапазоне измерения. 9. Обратной задачей выбора цели в критических технологиях является разведение объектов во времени и в пространстве, например, в диспетчерской службе аэропорта или оптимизация инфраструктуры городского транспорта для исключения коллизий. Практически все упомянутые задачи решаются в реальном масштабе времени, являются сходными по логической структуре процесс-моделей на основе использования ассоциативных таблиц. Для их решения необходима быстродействующая и специализированная аппаратная платформа в виде логического ассоциативного мультипроцессора (LAMP – Logical Associative MultiProcessor), ориентированного на параллельное выполнение процедур поиска, распознавания и принятия решений, оцениваемых путем использования интегрального критерия качества.

Цель – существенное повышение быстродействия процедур поиска, распознавания и принятия решений путем мультипроцессорной реализации параллельных средств обработки аналитических, графовых и табличных форм задания информации для определения детерминированного многозначного решения в n-мерном дискретном булевом пространстве.

Задачи: 1) Актуальность создания мозгоподобных вычислителей. 2) Метрика оценивания векторно-логических решений. 3) Архитектуры структур данных и ассоциативных отношений: таблицы, графы, уравнения. 4) Оптимизация логических структур данных. 5) Архитектура логического ассоциативного мультипроцессора. 6) Процесс-модели решения практически интересных задач на основе архитектуры LAMP.

Сущность – аппаратное обеспечение экспертного обслуживания запросов в реальном масштабе времени в виде мультипроцессорной системы на кристалле, ориентированной на анализ логических ассоциативных структур данных для получения точного детерминированного и многозначного решения, валидность (состоятельность) которого оценивается интегральным критерием качества взаимодействия запроса с векторами n-мерного ассоциативного пространства.

Объект исследования – аппаратная инфраструктура экспертного обслуживания задач поиска, распознавания и принятия решений в дискретном булевом пространстве на основе использования интегрального критерия качества и иерархических структур данных.

Предмет исследования – аппаратная платформа и технологии для реализации мультипроцессорной системы на кристалле, ориентированной на обслуживание задач поиска, распознавания и выбора решения в ассоциативных информационных структурах путем использования интегрального критерия качества в дискретном булевом пространстве.

Источники. 1. Аппаратные вычислительные изделия, ориентированные на решение логических задач ассоциативного поиска [1-4]. 2. Ассоциативные и логические структуры данных для решения информационных задач [5-8]. 3. Модели и методы дискретного анализа информации [9-12]. 4. Мультипроцессорные модели и средства для решения информационно-логических задач [13-19].

2. Интегральная метрика оценивания решения

При создании аппаратной платформы для информационно-логических задач акцент делается на следующие характеристики: 1) Высокое быстродействие параллельного выполнения минимального множества логических команд. 2) Исключение из процессора мощной системы арифметических вычислений, как функциональностей, несвойственных человеку. 3) Логический секвенсор – элементарный процессор – содержит 4 команды, которые кодируются двумя разрядами. 4) Устройство управления логическим ассоциативным мультипроцессором должно обеспечивать параллельное выполнение задач логического анализа. 5) Каждый секвенсор имеет ассоциативную память, а также регистры для хранения результатов логических вычислений и связи с другими секвенсорами.6) Компилятор для языка описания аппаратуры или программирования есть внешняя программа по отношению к мультипроцессору, которая обеспечивает квазиоптимальное планирование вычислительного процесса во времени и в пространстве секвенсоров с учетом ограничений на размерность блоков ассоциативной памяти. 7) Память прямого доступа обслуживает мультипроцессор и хранит программу вычислительного процесса, полученную от компилятора, для решения логической задачи. 8) Гибкая инфраструктура ассоциативной памяти обеспечивает размещение таблиц произвольной размерности. 9) GUI (Guide User Interface) предназначен для эффективного и дружественного общения с пользователем в процессе решения логических задач. 10) Точный и экономичный по времени подсчета критерий качества получаемого решения.

В последнем случае речь идет о качестве взаимодействия запроса (входного многозначного, в частности, троичного вектора m) с системой ассоциативных векторов (ассоциаторов), в результате которого должен быть сгенерирован конструктивный ответ в виде одного или нескольких ассоциаторов (A), а также численной характеристики степени принадлежности (функции качества) входного вектора m к найденному решению: $\mu(m \in A)$. Входной вектор $m = (m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_q)$, $m_i \in \{0,1,x\}$ и матрица A_i ассоциаторов

$$A_{ijr} (\in A_{ij} \in A_i \in A) = \{0,1,x\}$$

должны иметь одинаковую размерность, равную q . Далее, для удобства изложения материала, степень принадлежности m-вектора к одному ассоциатору или A-вектору будет обозначаться в виде $\mu(m \in A)$.

Существует всего 5 видов или результатов логического (теоретико-множественного) Δ -взаимодействия (пересечения) двух векторов $m \cap A$, определенных на рис. 1. Они формируют все первичные примитивные варианты реакции обобщенной ПРП-системы (Поиска, Распознавания и Принятия решения) на входное воздействие-запрос. В технологической отрасли знаний – технической диагностике (Design & Test) – указанная последовательность действий трансформируется к маршруту: поиск дефектов, их (распознавание) идентификация, (принятие решения на) восстановление работоспособности. Все три стадии технологического маршрута нуждаются в метрике оценивания решений для выбора оптимального варианта.

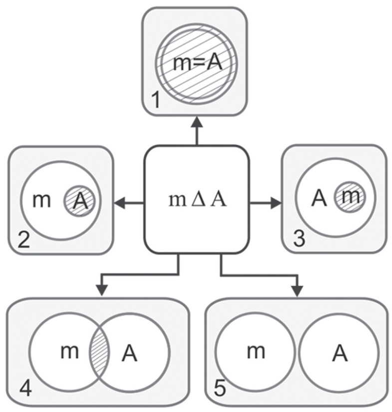


Рис. 1. Результаты пересечения двух векторов

Определение. Интегральная теоретико-множественная метрика для оценивания качества запроса есть функция качества взаимодействия многозначных векторов $m \cap A$, которая определяется средней суммой трех нормированных параметров: кодовое расстояние $d(m,A)$, функция принадлежности $\mu(m \in A)$ и эффективность использования входного запроса – функция принадлежности $\mu(A \in m)$:

$$Q = \frac{1}{3}[d(m,A) + \mu(m \in A) + \mu(A \in m)],$$

$$d(m,A) = \frac{1}{n}[n - card(m_i \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing)];$$

$$\begin{aligned} &\mu(m \in A) = 2^{card(m \cap A) - card(A)} \leftarrow card(m \cap A) = \\ &= card(m_i \bigcap_{i=1}^{n} A_i = x) \,\&\, card(A) = card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = x); \\ &\mu(A \in m) = 2^{card(m \cap A) - card(m)} \leftarrow card(m \cap A) = \\ &= card(m_i \bigcap_{i=1}^{n} A_i = x) \,\&\, card(m) = card(\bigcup_{i=1}^{n} m_i = x). \end{aligned} \qquad (1)$$

Пояснения. Нормирование параметров позволяет оценивать уровень взаимодействия векторов в интервале [0,1]. Если зафиксировано предельное максимальное значение каждого параметра, равное 1, то векторы равны между собой. Минимальная оценка, $Q=0$, фиксируется в случае полного несовпадения векторов по всем n координатам. Если мощность пространства вектора m ($m \cap A = m$) равна половине пространства вектора A, то функции принадлежности и качества соответственно равны:

$$\mu(m \in A) = \frac{1}{2}; \mu(A \in m) = 1; d(m, A) = 1;$$

$$Q(m, A) = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}.$$

Аналогичное значение будет иметь параметр Q, если мощность пространства вектора A равна половине вектора m. Если мощность пространства пересечения $card(m \cap A)$ равна половине мощностей пространств векторов A и m, то функции принадлежности имеют значения:

$$\mu(m \in A) = \frac{1}{2}; \mu(A \in m) = \frac{1}{2}; d(m, A) = 1;$$

$$Q(m, A) = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Следует также заметить, что если результат пересечения двух векторов равен пустому множеству, то степень двойки от символа «пусто» равна нулю (но не единице): $2^{card(m \cap A) = \varnothing} = 2^{\varnothing} = 0$. Это действительно означает, что количество общих точек при пересечении двух пространств равно нулю.

3. Процесс-модель поиска, распознавания и принятия решения

Метрика качества, представленная в (1), дает возможность оценивать близость пространственных объектов друг к другу, а также взаимодействие векторных пространств. Практическим примером полезности интегрального критерия качества может служить стрельба по цели, которая иллюстрируется ранее приведенными диаграммами (см. рис. 1) взаимодействия векторов: 1) пуля попала точно в цель и поразила ее полностью; 2) мишень поражена необоснованно большим калибром пули (снаряда); 3) калибра пули недостаточно для поражения крупной цели; 4) неэффективный и неточный выстрел снарядом большого калибра; 5) пуля пролетела мимо мишени. Для решения практических задач взаимодействия $P(m,A)$ интегральный критерий качества дает точную оценку попадания или промаха, а также эффективность использования «калибра оружия».

Аналитическая модель описания и решения логических ассоциативных отношений представлена системой уравнений:

$$\begin{gathered} P(m, A) = \max Q_i (m \overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} A_i); \\ Q(m, A) = (Q_1, Q_2, ..., Q_i, ..., Q_n); \\ A = (A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n); \\ Q(m, A_i) = \frac{1}{3}[d(m, A_i) + \mu(m \in A_i) + \mu(A_i \in m)]; \\ Q(m, A_i) = [0,1] \vee (1 \leftarrow m = A); \\ \Delta = \{and, or, xor, not, slc, nop\}; \\ A_i = (A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ij}, ..., A_{is}); \\ A_{ij} = (A_{ij1}, A_{ij2}, ..., A_{ijr}, ..., A_{msq}); \\ m = (m_1, m_2, ..., m_r, ..., m_q). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь определены предикаты (высказывания) трех уровней иерархии: 1) Системный уровень функциональности $P(m,A)$ задает не структуры данных, а аналитическую модель вычислительного процесса в виде предиката, максимизирующего интегральный критерий принадлежности в интервале $Q(m,A) = [0,0-1,0]$, на множестве введенных операций. 2) Система предикатов среднего уровня представляется в виде вершин-таблиц графа $A = (A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m)$, логически взаимодействующих между собой. 3) Предикат нижнего уровня задает упорядоченную совокупность вектор-строк ассоциативной таблицы $A_i = (A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ij}, ..., A_{is})$, где строка $A_{ij} = (A_{ij1}, A_{ij2}, ..., A_{ijr}, ..., A_{msq})$ есть истинное высказывание. Предикат $A_i = (A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ij}, ..., A_{is}) = 1$ задается совокупностью ассоциативных векторов, формирующих многозначную таблицу явных решений. Поскольку функционал не имеет постоянных во времени входных и выходных переменных, то данная структура отличается от последовательной машины фон Неймана, задаваемой конечными автоматами Мили и Мура. Ассоциативность или равнозначность всех переменных в векторе $A_{ij} = (A_{ij1}, A_{ij2}, ..., A_{ijr}, ..., A_{msq})$ создает равные условия их существования, что означает инвариантность решения задач прямой и обратной импликации в пространстве $A_i \in A$. Ассоциативный вектор A_{ij} определяет собой явное решение, где каждая переменная задается в конечном, многозначном и дискретном алфавите $A_{ijr} \in \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k\} = \beta$. Взаимодействие $P(m,A)$, входного вектора-запроса $m = (m_1, m_2, ..., m_r, ..., m_q)$ с графом $A = (A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m)$, формирует множество решений с выбором лучшего из них по максимальному критерию качества:

$$P(m, A) = \max Q_i [m \wedge (A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_i \vee ... \vee A_m)].$$

Конкретное взаимодействие вершин графа между собой создает функциональность $A = (A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m)$, которая может быть оформлена в следующие структуры: 1) Единственная ассоциативная таблица, содержащая все решения логической задачи в явном виде. Преимущество – максимальное быстродействие параллельного ассоциативного поиска решения по таблице. Недостаток – максимально высокая аппаратурная сложность решения задачи. 2) Древовидная (графовая) структура бинарных отношений между предикатами, каждый из которых формирует таблицу истинности для незначительного количества (двух) переменных. Преимущество – максимально низкая аппаратурная сложность решения задачи. Недостаток – минимальное быстродействие последовательного ассоциативного поиска решения по дереву. 3) Компромиссная графовая структура логически понятных для пользователя отношений между предикатами, каждый из которых формирует таблицу истинности для логически сильно взаимосвязанных переменных. Преимущество – высокое быстродействие параллельного ассоциативного поиска решений по минимальному числу таблиц. Сравнительно невысокая аппаратурная сложность решения задачи. Недостаток – снижение быстродействия из-за последовательной логической обработки графовой структуры решений, найденных в таблицах. Разбиение одной таблицы (ассоциативной памяти) на k частей приводит к уменьшению аппаратных затрат, выраженных в компонентах (лутах) (LUT – Look Up Table) программируемой логической матрицы. Каждая ячейка памяти создается с помощью четырех лутов. Учитывая, что ассоциативную матрицу можно представить квадратом со стороной n, то суммарные аппаратные затраты для реализации памяти системы имеют функциональную зависимость от числа разбиений, которая определяется следующим выражением:

$$Z(n) = k \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{n}{k}\right)^2 + h = \frac{n^2}{4 \times k} + h, (h = \{n, const\}\ . \quad (3)$$

Второе слагаемое, равное h – есть затраты на общую схему управления системой ассоциативных памятей. Платой за уменьшение аппаратуры является снижение быстродействия обработки структуры памятей или увеличение периода анализа компонентов системы. Функциональная зависимость времени анализа логического ассоциативного графа от числа вершин или разбиений памяти имеет следующий вид:

$$T(n) = \frac{4 \times k}{t_{clk}} + \frac{4}{t_{clk}} = \frac{4}{t_{clk}}(k+1),\ (t_{clk} = const). \quad (4)$$

Здесь период обработки одной ассоциативной памяти представлен циклом, содержащим 4 синхроимпульса. Число разбиений k пропорционально увеличивает количество тактов в худшем варианте последовательного соединения памятей. Второе слагаемое $\frac{4}{t_{clk}}$ задает время, необходимое для подготовки данных на входе системы, а также для их декодирования на выходе вычислительной структуры. Функциональные зависимости аппаратных затрат и времени анализа графа ассоциативных памятей от числа вершин или разбиений представлены на рис. 2.

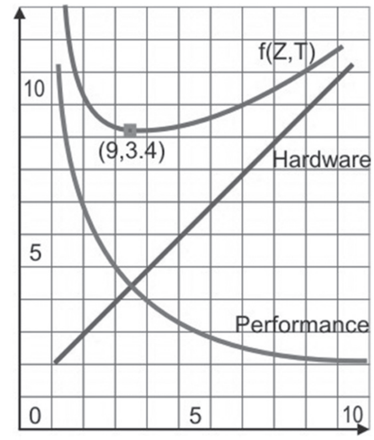


Рис. 2. Функции аппаратуры и времени от числа разбиений

Построение обобщенной функции эффективности графовой структуры от числа вершин

$$f[Z(n), T(n)] = Z(n) + T(n) = \\ = \left(\frac{n^2}{4 \times k} + h\right) + \left(\frac{4}{t_{clk}}(k+1)\right) \quad (5)$$

позволяет определить оптимальное разбиение совокупного и наперед заданного объема ассоциативной памяти. В данном случае это есть минимум аддитивной функции, который определяется значением k, обращающим производную функции в нуль. В данном случае ($n = 600$, $h = 200$, $t_{clk} = 4$) оптимальное число разбиений k для матрицы памяти, размерностью 600x600, равно 4.

4. Векторно-логический критерий качества решения

Цель введения критерия заключается в использовании только логических операций и исключении арифметических вычислений из процедуры формирования оценки взаимодействия компонентов m и A для существенного повышения быстродействия логического анализа структур информационных данных.

Идея – оценивать решение задачи взаимодействия входного вектора m с ассоциативными таблицами мощностью единиц в векторе качества Q путем использования векторных логических операций. Арифметическая оценка качества взаимодействия может формироваться сложением без усреднения приведенных критериев принадлежности и кодового расстояния, что определяется следующими формулами:

$$Q = d[m, A_{i(j)}] + \mu[m \in A_{i(j)}] + \mu[A_{i(j)} \in m], \\ d(m, A_{i(j)}) = card[m \bigoplus_{i(j)=1}^{n(m)} A_{i(j)} = 1]; \quad (6)$$

$$\mu(m \in A_{i(j)}) = card[A_{i(j)} = 1] - card[m \bigwedge_{i(j)=1}^{n(m)} A_{i(j)} = 1];$$

$$\mu(A_{i(j)} \in m) = card[m = 1] - card[m \bigwedge_{i(j)=1}^{n(m)} A_{i(j)} = 1].$$

Первый компонент, составляющий критерий, формирует степень несовпадения n-мерных векторов – кодовое расстояние, путем выполнения операции xor, второй и третий определяют степень непринадлежности результата конъюнкции к числу единиц каждого из двух взаимодействующих векторов. Понятия принадлежности и непринадлежности являются взаимодополняющими, но в данном случае технологичнее высчитывать именно непринадлежность. Таким образом, идеальный критерий качества равен нулю, когда два вектора равны между собой. Оценка качества взаимодействия двух двоичных векторов убывает по мере роста критерия от 0 к 1. Чтобы окончательно уйти от арифметических операций при подсчете уже векторного критерия качества, необходимо выражения (6) преобразовать к виду:

$$\begin{gathered} Q = d(m,A) \vee \mu(m \in A) \vee \mu(A \in m), \\ d(m,A) = m \oplus A; \\ \mu(m \in A) = A \wedge \overline{m \wedge A}; \\ \mu(A \in m) = m \wedge \overline{m \wedge A}. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь критерии представлены уже не числами, а векторами, которые оценивают взаимодействие между компонентами m, A. При этом число нулей в трех оценках есть хорошо, а единицы ухудшают качество взаимодействия. Оптимизация решения логической задачи направлена на минимизацию числа единиц и максимизацию количества нулевых координат в векторах критерия качества. Для сравнения двух оценок необходимо определять мощность единиц в каждом векторе без выполнения операций суммирования. Это можно сделать, например, с помощью регистра [4] уплотнения единиц и их сдвига влево, представленного на рис. 3. Регистр позволяет за один такт выполнить сдвиг влево и уплотнить все единичные координаты n-разрядного двоичного вектора.

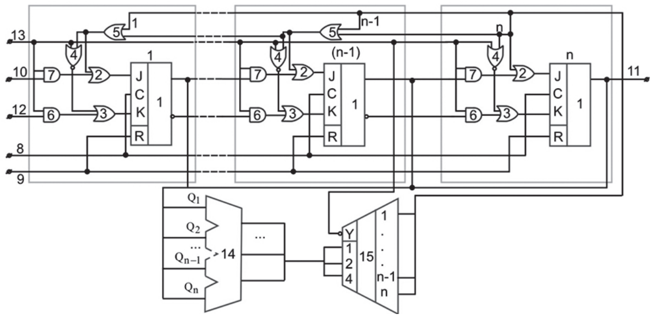


Рис. 3. Регистр уплотнения единиц

После процедуры сжатия номер последнего или правого единичного бита уплотненной серии единиц формирует индекс качества взаимодействия векторов. Для двоичных векторов $m = (110011001100)$, $A = (000011110101)$ определение качества их взаимодействия в соответствии с моделью (7) представлено в следующем виде (нулевые координаты отмечены точками):

m	1 1 . . 1 1 . . 1 1 . .
A	. . . . 1 1 1 1 . 1 . 1
$m \wedge A$	. . . . 1 1 . . . 1 . .
$\overline{m \wedge A}$	1 1 1 1 . . 1 1 1 . 1 1
$d(m,A) = m \oplus A$	1 1 . . . . 1 1 1 . . 1
$\mu(A \in m) = m \wedge \overline{m \wedge A}$	1 1 . . . . . . 1 . . .
$\mu(m \in A) = A \wedge \overline{m \wedge A}$	. . . . . . 1 1 . . . 1
$Q = d(m,A) \vee \mu(m \in A) \vee \mu(A \in m)$	1 1 . . . . 1 1 1 . . 1
$Q(m,A) = (6/12)$	1 1 1 1 1 1 . . . . . .

Здесь сформирована не только оценка качества взаимодействия векторов, равная $Q(m,A) = (6/12)$, но, что самое главное, единичные координаты строки $Q = d(m,A) \vee \mu(m \in A) \vee \mu(A \in m)$ идентифицируют все те места или позиции, по которым существует некачественное взаимодействие векторов. Другой пример иллюстрирует формирование максимального критерия качества для двоичных векторов $m = (110000110011)$; $A = (110000110011)$, имеющих совпадение по всем координатам:

m	1 1 . . . . 1 1 . . 1 1
A	1 1 . . . . 1 1 . . 1 1
$m \wedge A$	1 1 . . . . 1 1 . . 1 1
$\overline{m \wedge A}$	. . 1 1 1 1 . . 1 1 . .
$d(m,A) = m \oplus A$	. . . .
$\mu(A \in m) = m \wedge (\overline{m \wedge A})$	. . . .
$\mu(m \in A) = A \wedge (\overline{m \wedge A})$	. . . .
$Q = d(m,A) \vee \mu(m \in A) \vee \mu(A \in m)$	. . . .
$Q = (0/12)$	. . . .

Здесь критерий качества, равный нулю во всех 12 разрядах $Q = (0/12)$, является максимальным или самым лучшим для взаимодействующих векторов $m = (110000110011)$; $A = (110000110011)$, поскольку он определен минимальным числом единиц на двенадцати координатах вектора. Для сравнения двух решений, полученных в результате логического анализа, следует использовать сжатые векторы качества Q, над которыми необходимо выполнить процедуру, включающую следующие векторные операции:

$$Q(m,A) = \begin{cases} Q_1(m,A) \leftarrow Q_1(m,A) \oplus Q_1(m,A) \wedge Q_2(m,A) = 0; \\ Q_2(m,A) \leftarrow Q_1(m,A) \oplus Q_1(m,A) \wedge Q_2(m,A) \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Для двоичных векторов, представляющих собой критерии качества, выполнена процедура выбора лучшего их них на основе выражения, представленного в (8):

$Q_1(m,A) = (6{,}12)$	1 1 1 1 1 1 . . . . . .
$Q_2(m,A) = (8{,}12)$	1 1 1 1 1 1 1 1 . . . .
$Q_1(m,A) \wedge Q_2(m,A)$	1 1 1 1 1 1 . . . . . .
$Q_1(m,A) \oplus Q_1(m,A) \wedge Q_2(m,A)$	. . . .
$Q(m,A) = Q_1(m,A)$	1 1 1 1 1 1 . . . . . .

Предложенная модель вычислительного процесса на основе векторных логических операций и разработанные аналитические модели и методы анализа таблиц, а также критерии качества решения позволяют использовать все упомянутое в виде инфраструктуры для поиска квазиоптимального покрытия, диагностирования одиночных и кратных дефектов программных и/или аппаратных блоков. Модель векторных вычислений может служить основой для разработки специализированной мультипроцессорной архитектуры, ориентированной на решение, например, следующих задач технической диагностики: моделирование исправного поведения цифрового устройства, заданного таблицей истинности; определение качества теста по таблице неисправностей; минимизация тестовых наборов; поиск тестовых последовательностей, распознающих дефект; идентификация кратной неисправности, имеющей место в цифровом изделии.

5. Архитектура логического ассоциативного мультипроцессора

Для анализа больших информационных объемов логических данных существует несколько практически ориентированных технологий: 1. Использование рабочей станции, где анализ решается программным путем и последовательно, поскольку существует только один процессор. Стоимость решения проблемы, а также временные затраты очень высоки. 2. Разработка специализированного параллельного процессора на основе PLD. Высокий параллелизм обработки информации компенсирует сравнительно низкую по сравнению с CPU тактовую частоту. Такое схемотехническое решение с возможностью перепрограммирования является по производительности выигрышным вариантом. Недостаток – отсутствие гибкости программных методов решения логических задач и высокая стоимость реализации системы на кристалле PLD при больших объемах промышленного выпуска изделия. 3. Лучшее решение связано с объединением достоинств CPU, PLD и ASIC. Это – гибкость программирования системы уравнений, которая позволяет оперативно корректировать спецификацию в виде исходных кодов; минимальная мощность команд и простые схемотехнические решения аппаратной реализации мультипроцессора; распараллеливание процесса решения логических задач на структуре однобитовых процессоров. Имплементация мультипроцессора в кристалл ASIC дает возможность получить максимальную тактовую частоту, минимальную стоимость чипа при больших объемах выпуска изделия, низкое энергопотребление.

Базовая конфигурация LAMP имеет сферическую структуру мультипроцессора (рис. 4), состоящую из 16 векторных секвенсоров, каждый из которых, включая граничные элементы, соединен с восемью соседними. Каждый секвенсор содержит блок векторных логических операций, ассоциативную память, блок регистров, интерфейс, а также входной и выходной мультиплексоры для связи с другими процессорами.

LAMP есть ad hoc технология и специализированное вычислительное устройство, реализуемое в кристалле ASIC, для быстрого решения логических (предикатных) уравнений ассоциативного поиска (ЛУАП) информации. Структура LAMP и модель обработки уравнений имеет прототип в виде процессора PRUS [1], разработанного доктором Stanley Hyduke (CEO Aldec, USA). Она представляет собой сеть параллельных синхронизированных векторных процессоров.

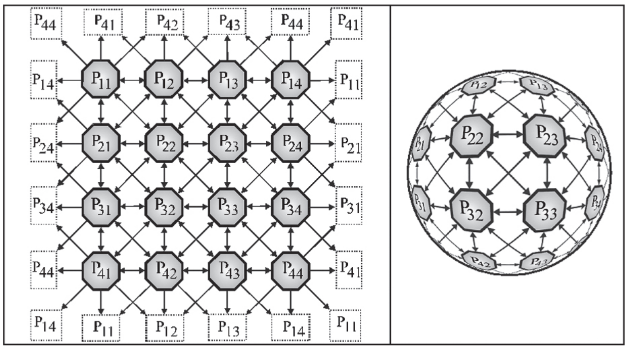


Рис. 4. Макроархитектура LAMP

Занесение информации в процессор подобно классической схеме (design flow), за исключением того, что стадия place and route заменяется фазой распределения ЛУАП между всеми логическими бит-процессорами, работающими параллельно. ЛУАП Compiler обеспечивает размещение уравнений по процессорам, задает время формирования решения на выходе каждого из них, а также планирует передачу полученных результатов другому процессору. LAMP есть эффективная сеть процессоров, которая обрабатывает систему ЛУАП и обеспечивает обмен данными между компонентами сети в процессе их решения. Простая схемотехника каждого процессора позволяет эффективно обрабатывать сверхбольшие массивы, насчитывающие миллионы бит информации, затрачивая на это в сотни раз меньше времени по сравнению с универсальным процессором. Базовая ячейка –

векторный процессор для LAMP может быть синтезирован на 200 вентилях, что дает возможность сеть, содержащую 4096 вычислителей, легко имплементировать в ASIC, используя современную силиконовую технологию. Учитывая, что затраты памяти для эмуляции ЛУАП весьма незначительны, LAMP может представлять интерес для проектирования систем управления в таких областях человеческой деятельности, как: индустрия, медицина, защита информации, геология, прогнозирование погоды, искусственный интеллект, космонавтика. LAMP представляет особый интерес для цифровой обработки данных, распознавания образов и криптоанализа. Одним из основных приложений LAMP в EDA (Electronic Design Automation) технологиях является эмуляция больших проектов, имплементируемых в ASICs и FPGA. Учитывая изложенное выше, далее формулируется проблема, цель и задачи исследования в связи с основным предназначением мультипроцессора.

Одним из возможных вариантов архитектуры мультипроцессора LAMP может служить структура, представленная на рис. 5.

Основным компонентом структуры является мультипроцессорная матрица $P=[P_{ij}], card(4\times 4)$, содержащая 16 вектор-процессоров, каждый из которых предназначен для выполнения 4-х логических векторных операций над содержимым памяти данных, представленной в виде таблицы, размерностью $A = card(m \times n)$.

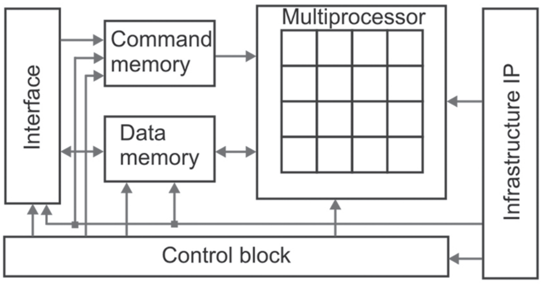


Рис. 5. Архитектура мультипроцессора LAMP

Интерфейсный блок служит для обмена данными и загрузки программы обработки данных в соответствующую память команд. Блок управления осуществляет инициализацию выполнения команд логической обработки данных и синхронизирует функционирование всех комопнентов мультипроцессора. Блок Infrastructure IP предназначен для сервисного обслуживания всех модулей, диагностирования дефектов и восстановления работоспособности компонентов и устройства в целом.

6. Инфраструктура векторно-логического анализа

Инфраструктура – совокупность моделей, методов и средств описания, анализа и синтеза структур данных для решения функциональных задач. Модель (системная) – совокупность взаимосвязанных, определенных в пространстве и времени компонентов с заданной адекватностью описывающая процесс или явление и используемая для достижения поставленной цели при наличии ограничений и метрики оценивания качества решения. Здесь ограничения есть аппаратурные затраты, время разработки и производства до появления изделия на рынке (time-to-market), подлежащие минимизации. Метрика оценивания решения при использовании модели определена двоичным вектором в дискретном булевом пространстве. Концептуальная модель вычислительного изделия в общем случае представлена совокупностью управляющего и операционного автоматов. Системная модель LAMP функциональности использует новейшую GALS (Global Asynhronus Local Synchronus) технологию создания цифровых изделий с выраженной иерархией. Модель предполагает высокое быстродействие взаимодействующих компонентов, которое обеспечивается локальной синхронизацией отдельных модулей и одновременно глобальной асинхронностью функционирования всего устройства. Если говорить о функционировании (системы) LAMP, то ее основная цель есть получение квазиоптимального решения в интегрированной задаче поиска и/или распознавания путем использования компонентов инфраструктуры, ориентированных на выполнение векторных логических операций:

$$P(m,A) = \max Q_i(m \overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} A_i), \quad m = \{m_a, m_b, m_c, m_d\}. \tag{9}$$

Структура интерфейса системы, соответствующая данным функционалам, представлена на рис. 6. Все компоненты $\{A, m_a, m_b, m_c, m_d\}$ могут быть как входными, так и выходными. Двунаправленная детализация интерфейса связана с инвариантностью отношения всех переменных, векторов, А-матрицы и компонентов к входам и/или выходам инфраструктуры. Поэтому структурная модель системы LAMP может быть использована для решения любых задач прямой и обратной импликации в дискретном логическом пространстве, чем подчеркивается ее отличие от концепции автоматной модели вычислительного устройства с выраженными входами и выходами.

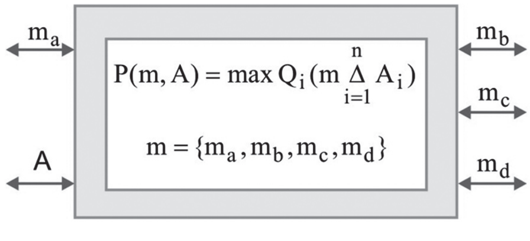


Рис. 6. Обобщенный интерфейс системы

Компоненты или регистры $m=(m_a, m_b, m_c, m_d)$ используются для получения решения в виде буферных, входных и выходных векторов, а также для идентификации оценки качества удовлетворения входного запроса. В целях детализации структуры векторного процессора или секвенсора необходимо синтезировать основные практически ориентированные процедуры анализа информационных таблиц. Процессные модели (процесс-модели), соответствующие аналитической записи вычислений, дифференцируются в две структуры: анализ А-матрицы по столбцам и по строкам. Первая из них представлена на рис. 7 и предназначена для определения множества всех допустимых решений относительно входного запроса m_b. Вторая процедурная структура (рис. 8) осуществляет поиск оптимального решения из всех возможных, найденных в первой процессной модели путем анализа строк. Кроме того, вторая структура имеет и самостоятельное применение, ориентированное на определение однозначного и многозначного решения, например, при поиске дефектов в техническом изделии.

$$m_{ai}^m = \overline{\vee}\,[(m_b \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} A_i) \oplus m_b];$$

$$A_i = (m_b \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} A_i).$$

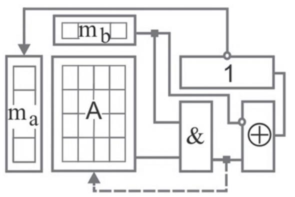


Рис. 7. Поиск всех допустимых решений

Все операции, представленные в двух моделях процессов, являются векторными. Процесс-модель анализа строк (см. рис. 7) формирует вектор m_a – идентификации допустимых $m_{ai} = 1$ или противоречивых $m_{ai} = 0$ решений относительно входного условия m_b за n тактов обработки всех m-разрядных векторов таблицы $A = card(m \times n)$. Качество (допустимость) решения определяется для каждого взаимодействия входного вектора m_b и строки $A_i \in A$ на блоке (девекторизации) дизъюнкции. Матрица A может быть модифицирована путем пересечения со входным вектором на основе использования операции $A_i = (m_b \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} A_i)$, если необходимо исключить из А-таблицы все незначимые для решения координаты и векторы, отмеченные единичными значениями в m_a.

Интересное решение для задач диагностирования путем анализа строк таблицы, представленное на рис. 8, необходимо интерпретировать следующим образом.

После выполнения диагностического эксперимента формируется двоичный вектор экспериментальной проверки m_a, который маскирует А-таблицу неисправностей для поиска одиночных или кратных дефектов. Векторы m_b и m_c используются для накопления результатов выполнения операций конъюнкции и дизъюнкции. Затем осуществляется логическое вычитание из первого регистра m_b содержимого второго вектора m_c с последующей записью результата в регистр m_d. Для реализации второго уравнения, которое формирует множественное решение, элемент and заменяется функцией or. Схема имеет также переменную выбора режима поиска решения: single или multiple. Процесс-модель использует в качестве входного условия вектор m_a, который управляет выбором векторной операции and, or для обработки единичных $A_i(m_{ai} = 1) \in A$ или нулевых $A_i(m_{ai} = 0) \in A$ строк А-таблицы. В результате выполнения n тактов осуществляется накопление единичных и нулевых относительно значений координат вектора m_a решений в регистрах A_1, A_0 соответственно. Априори в указанные регистры заносится вектор единиц и нулей: $A_1 = 1, A_0 = 0$. После обработки всех n строк А-таблицы за n тактов выполняется векторная конъюнкция содержимого регистра A_1 с инверсией регистра A_0, которая формирует результат в виде вектора m_b, где единичные значения координат определяют решение. При анализе таблицы неисправностей цифрового изделия единичным координатам вектора m_b соответствуют столбцы, отождествляемые с номерами дефектов или неисправных блоков, подлежащих восстановлению или ремонту.

$$m_b^s = (\bigwedge_{\forall m_{ai}=1} A_i) \wedge (\overline{\bigvee_{\forall m_{ai}=0} A_i})$$

$$m_b^m = (\bigvee_{\forall m_{ai}=1} A_i) \wedge (\overline{\bigvee_{\forall m_{ai}=0} A_i})$$

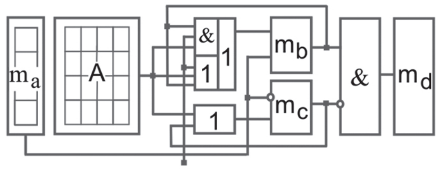


Рис. 8. Универсальная структура выбора оптимального решения

Можно пойти еще дальше в части сервисного обслуживания функциональных модулей: на универсальной структуре системы векторного логического анализа решить оптимизационную задачу восстановления работоспособности. С помощью минимального числа ремонтных запасных строк и/или столбцов, например, памяти, необходимо покрыть все обнаруженные в ячейках неисправности. Технологическая и математическая культура векторной логики в данном случае предлагает простое и интересное схемотехническое решение для получения квазиоптимального покрытия, представленное на рис. 9. Преимущества: 1) Вычислительная сложность процедуры: $Z = n$ векторных операций, равное числу строк таблицы. 2) Минимум аппаратных затрат: таблица и два вектора m_b, m_a – для хранения промежуточных покрытий и накопления результата в виде единичных координат, соответствующих строкам таблицы, которые составляют квазиоптимальное покрытие. 3) Отсутствие классического деления задачи покрытия на поиск ядра покрытия и дополнения. 4) Отсутствие сложных процедур манипулирования ячейками строк и столбцов. Недостаток – получение квазиоптимального покрытия, что является платой за технологичность векторной процедуры, представленной на рис. 9.

$$\begin{cases} m_b = (m_b \vee A_i); \\ m_{ai} = \bigvee\limits_{i=1}^{n} [(m_b \vee A_i) \wedge \bar{m}_b]. \end{cases}$$

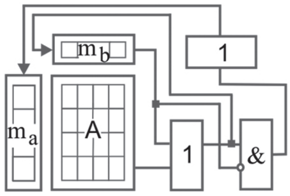


Рис. 9. Процесс-модель поиска квазиоптимального покрытия

Здесь имеется операция девекторизации, которая на последнем этапе превращает векторный результат в бит m_{ai} вектора по функции or $m_{ai} = \vee[(m_b \vee A_i) \wedge \bar{m}_b]$. В общем случае операция девекторизации в алгебре векторных операций записывается в виде <бинарная операция><вектор>: $\vee A_i, \wedge m, \bar{\wedge}(m \vee A_i)$. Обратная процедура – векторизация есть конкатенация булевых переменных: $m_a(a,b,c,d,e,f,g,h)$.

В процедуре поиска покрытия априори векторы $m_b = 0, m_a = 0$ обнуляются. Квазиоптимальное покрытие накапливается за n тактов в векторе m_a путем последовательного сдвига. Биты, заносимые в регистр m_a, формируются схемой or, которая выполняет дефекторизацию, путем анализа входного полученного результата $[(m_b \vee A_i) \wedge \bar{m}_b]$ на присутствие единиц.

Эффективность процедуры иллюстрируется поиском покрытия единицами строк всех столбцов, имеющих хотя бы одну единицу. Для матрицы покрытия, представленной в форме:

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} A_i \setminus B_j & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 \\ \hline A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ A_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ A_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

применение векторной процедуры поиска квазиоптимального покрытия дает следующий результат: $P = \{A_1, A_2, A_3, A_5\}$. Оптимальное покрытие для данной таблицы имеет на одну строку меньше:

$$P = \{A_1, A_4, A_5\}.$$

В целях получения более оптимального покрытия можно использовать дополнительную предварительную процедуру упорядочения покрывающей способности векторов таблицы в порядке ее убывания. Вычислительная сложность процедуры равна

$$Z = \frac{1}{2} n^2,$$

где n – число строк таблицы покрытия. Процесс-модель упорядочения векторов таблицы покрытия по убыванию количества единиц изображена на рис. 10.

$$f = \{[\vee((\overleftarrow{m}_b = A_i) \wedge (\overleftarrow{m}_A = A_r) \wedge \overleftarrow{m}_b)]_{\substack{\wedge \\ i=1,n-1}}^{r=i+1,n}$$

$$\wedge [(m_c = A_i) \to (A_i = A_r) \to (A_r = m_c)]\}$$

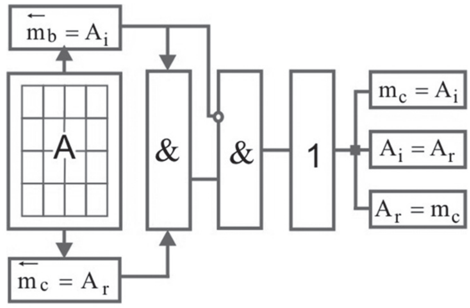


Рис. 10. Процесс-модель упорядочения векторов таблицы покрытия

Здесь левая часть логического произведения формулы есть условия обмена двумя строками, если последующая из них имеет большую покрывающую способность. В этом случае формируется единица на дизъюнктивном элементе девекторизации, которая инициирует строковый обмен. Правая часть реализует три последовательные операции обмена. Процедура упорядочения вектор-строк должна быть выполнена до запуска процесс-модели, представленной на рис. 9.

Таким образом, встроенная система диагностирования и ремонта функциональных блоков цифровой системы на кристалле имеет следующие стадии аппаратной поддержки: 1) Тестирование цифрового изделия. 2) Поиск всех допустимых решений дефектных блоков и выбор оптимального варианта. 3) Оптимизация числа ремонтных модулей для восстановления работоспособности цифрового изделия. 4) Ремонт цифровой системы на кристалле путем адресной замены неисправных компонентов.

Следующий пример интересен функциональной законченностью цикла диагностирования, когда после получения квазиоптимального покрытия данная информация используется для восстановления работоспособности дефектных ячеек памяти. Размерность модуля памяти – 13x15 ячеек не влияет на вычислительную сложность получения покрытия десяти дефектных ячеек с помощью резервных строк (2) и столбцов (5) (рис. 11).

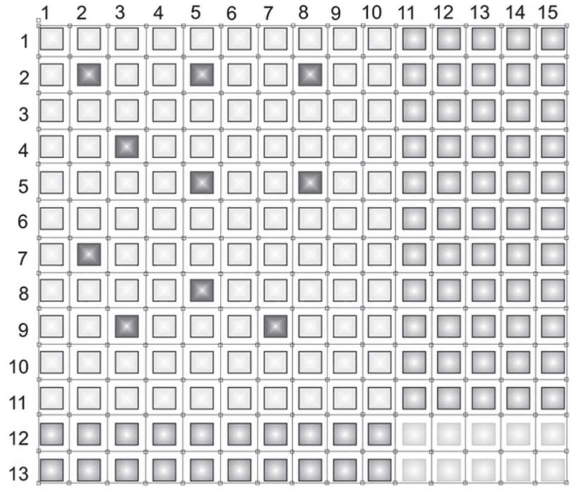


Рис. 11. Топология модуля памяти с резервом строк и столбцов

Для решения оптимизационной задачи выполняется построение таблицы покрытия неисправных ячеек, которая имеет следующий вид:

$A =$

$X_i \setminus F_{i,j}$	$F_{2,2}$	$F_{2,5}$	$F_{2,8}$	$F_{4,3}$	$F_{5,5}$	$F_{5,8}$	$F_{7,2}$	$F_{8,5}$	$F_{9,3}$	$F_{9,7}$
$C_2 \to X_1$	1						1			
$C_3 \to X_2$				1					1	
$C_5 \to X_3$		1			1			1		
$C_7 \to X_4$										1
$C_8 \to X_5$			1			1				
$R_2 \to X_6$	1	1	1							
$R_4 \to X_7$				1						
$R_5 \to X_8$					1	1				
$R_7 \to X_9$							1			
$R_8 \to X_{10}$								1		
$R_9 \to X_{11}$									1	1

Здесь столбцы соответствуют координатам дефектных ячеек, а строки идентифицируют резервные компоненты (строки и столбцы), которые могут восстановить работоспособность неисправных координат. Применение вычислительной процесс-модели, представленной на рис. 8, дает возможность получить оптимальное решение в виде вектора $m_a = \boxed{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}$. Данному вектору ставится в соответствие оптимальное покрытие: $R = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{C_2, C_3, C_5, C_7, C_8\}$, которое является одним из трех $R = X_1X_2X_3X_4X_5 \vee X_1X_2X_3X_5X_{11} \vee X_1X_3X_5X_7X_{11}$ возможных минимальных решений для приведенной выше таблицы неисправностей. Технологическая структурная модель встроенного диагностирования и ремонта памяти представлена на рис. 12. Она имеет четыре стадии: 1) Testing – тестирование модуля памяти (UUT – Unit Under Test) с использованием эталонной модели (MUT – Model Under Test) для формирования вектора экспериментальной проверки m_a, размерность которого соответствует числу тестовых наборов. 2) Diagnosis – поиск дефектов на основе анализа таблицы неисправностей A в соответствии с процесс-моделью, представленной на рис. 8. 3) Optimization – оптимизация покрытия дефектных ячеек ремонтными строками и столбцами на основе анализа таблицы A в соответствии с процесс-моделью, представленной на рис. 9. 4) Repairing – восстановление работоспособности модуля памяти путем замены адресов (AD – Address Decoder) неисправных строк и столбцов, представленных вектором m_a, на адреса компонентов из ремонтного запаса SM – Spare Memory.

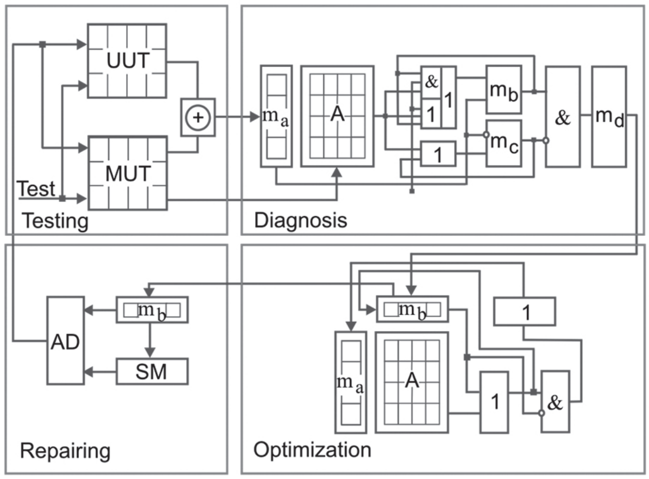


Рис. 12. Схема встроенного тестирования и восстановления памяти

Процесс-модель встроенного сервисного обслуживания, изображенная на рис. 12, работает в реальном масштабе времени и позволяет поддерживать в работоспособном состоянии, без вмешательства человека, цифровую систему на кристалле, что является интересным решением для критических технологий, связанных с дистанционной эксплуатацией изделия.

Исходя из описанных выше процесс-моделей анализа данных можно предложить относительно универсальную структуру секвенсора (рис. 13), как компонента логического ассоциативного мультипроцессора, который включает: 1) Логический процессор (LP), имеющий 5 базовых операций. 2) Ассоциативную память в виде A-матрицы для параллельного выполнения базовых операций. 4) Блок векторов m, предназначенный для параллельного обслуживания строк и столбцов A-матрицы, а также обмена данными в процессе вычислений. 5) Память прямого доступа (CM), сохраняющую команды программы обработки информации. 6) Устройство или автомат (CU), управляющий выполнением логических операций. 7) Интерфейс (I), осуществляющий связь секвенсора с другими элементами и устройствами мультипроцессора.

Логический процессор (LP) (рис. 14) осуществляет выполнение пяти операций (and, or not, xor, s1c – shift left bit crowding), которые являются базой для создания алгоритмов и процедур информационного поиска и оценивания решения. Модуль LP имеет мультиплексор на входе для выбора одного из четырех операндов, который подается на один из выбранных логических элементов, выполняющий векторную операцию. Сформированный результат через мультиплексор (элемент or) заносится в один из четырех операндов, который выбирается соответствующим адресом.

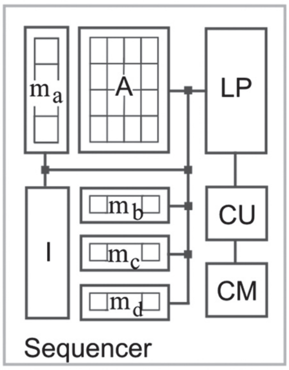


Рис. 13. Структура секвенсора

Особенности реализации логического процессора заключаются в наличии трех бинарных (and, or, xor) и двух унарных (not, slc) операций. Последние можно присоединять к такту обработки регистровых данных путем выбора одной из трех операций (not, slc, nop – нет операции). Для повышения эффективности работы логического устройства вводятся два элемента с пустой операцией. Если, например, необходимо выполнить только унарную операцию, то на уровне (слое) бинарных команд следует выбрать nop, что практически означает передачу данных через проводник (повторитель) ко второму уровню унарных операций. Все операции в LP – регистровые или регистрово-матричные. Последние предназначены для анализа вектор-строк таблицы при использовании входного m-вектора как запроса для точного поиска информации.

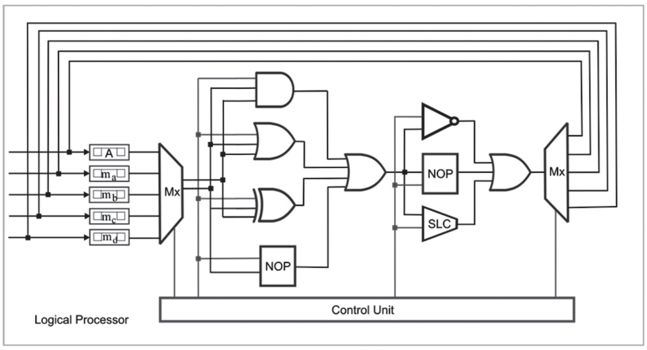


Рис. 14. Структура блока логических вычислений

В блоке логических вычислений допустимо следующее сочетание операций и операндов:

$$C = \begin{cases} \{m_a, m_b, m_c, m_d\}\Delta A_i; \\ \{m_a, m_b, m_c, m_d\}\Delta\{m_a, m_b, m_c, m_d\}; \\ \{not, nop, slc\}\{m_a, m_b, m_c, m_d, A_i\}. \end{cases}$$

$$\Delta = \{and, or, xor\}.$$

Реализация всех векторных операций блока логических вычислений для одного секвенсора в среде Verilog с последующей послесинтезной имплементацией в кристалл программируемой логики дает результаты:

Logic Block Utilization:
Number of 4 input LUTs: 400 out of 9,312 4%
Logic Distribution:
Number of occupied Slices: 200 out of 4,656 4%
Number of Slices only related logic: 200 out of 200 100 %
Total Number of 4 input LUTs: 400 out of 9,312 4%
Number of bonded IOBs: 88 out of 320 29%
Total equivalent gate count for design: 2400

Тактовая частота выполнения регистровой операции в кристалле Virtex 4, Xilinx, равна 100МГц, что на порядок выше, чем реализация аналогичных процедур на универсальном компьютере с частотой 1ГГц.

Выводы

Научная новизна представлена новыми процесс-моделями анализа табличных форм задания информации на основе использования векторных логических операций для решения задач поиска, диагностирования, распознавания образов и принятия решений в векторном дискретном булевом пространстве. Модели ориентированы на достижение высокого быстродействия процедур параллельного векторного логического анализа информации, в пределе полностью исключающего использование арифметических операций, в том числе и для подсчета критерия качества решения. Разработаны новые методы и алгоритмы решения задач диагностирования цифровых изделий, нахождения квазиоптимального покрытия, использующие векторные операции для параллельного выполнения вычислительных процессов и подсчета критериев качества.

Практическая значимость заключается в ориентации предложенных процесс-моделей, использующих векторные операции, для анализа ассоциативных таблиц на основе логического мультипроцессора с ограниченной системой команд, обеспечивающей высокое быстродействие параллельной обработки больших массивов информации, представленных в общем случае графовыми структурами ассоциативных матриц или таблиц. Дальнейшие исследования будут направлены на разработку прототипа мультипроцессора в целях решения актуальных практических задач с помощью предложенной инфраструктуры векторных логических операций.

Список литературы: 1. Zorian Y. Test Strategies for System-in-Package / Y. Zorian // Plenary Paper of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'08). – Lviv, Ukraine. – 2008. 2. Smith L. 3D Packaging Applications, Requirements, Infrastructure and Technologies / L. Smith // Fourth Annual International Wafer-Level Packaging Conference. – San Jose, California. – September, 2007. 3. The next Step in Assembly and Packaging: System Level Integration in the package (SiP) / Editors: William Chen, W. R. Bottoms, Klaus Pressel, Juergen Wolf // SiP White Paper. International Technology Roadmap for Semiconductors. – 2007. –P. 17-23. 4. А.с. №1439682. 22.07.88. Регистр сдвига / Какурин Н.Я., Хаханов В.И., Лобода В.Г., Какурина А.Н. – 4с. 5. Бондаренко М.Ф. О мозгоподобных ЭВМ / М.Ф. Бондаренко, З.В. Дударь, И.А. Ефимова, В.А. Лещинский, С.Ю. Шабанов–Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика.– Харьков: ХНУРЭ. – 2004, № 2. – С. 89–105. 6. Бондаренко М.Ф. Об алгебре предикатов / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов–Кушнаренко // Бионика интеллекта. – Харьков: ХНУРЭ. – 2004, № 1. – С. 15–26. 7. Бондаренко М.Ф. Теория интеллекта. Учебник. / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов–Кушнаренко; Харьков: СМИТ. – 2006. – 592 с. 8. Бондаренко М.Ф. Модели языка / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов–Кушнаренко // Бионика интеллекта. – Харьков: ХНУРЭ. – 2004, № 1. – С. 27–37. 9. Акритас А. Основы компьютерной алгебры с приложениями: Пер. с англ. / А. Акритас.– М.: Мир.– 1994.– 544 с. 10. Гилл Ф. Практическая оптимизация. / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт.– М.: Мир.– 1985.– 509 с. 11. Аттетков А.В. Методы оптимизации / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин.– Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.– 2003.– 440 с. 12. Дегтярев Ю. И. Методы оптимизации: Учебное пособие для вузов / Ю. И. Дегтярев. – М.: Сов. Радио.–1980.– 270 с. 13. Bergeron J. Writing Testbenches Using SystemVerilog / J. Bergeron // Springer Science and Business Media, Inc.– 2006. – 414 p. 14. Abramovici M. Digital System Testing and Testable Design / M. Abramovici, M.A. Breuer and A.D. Friedman.– Comp. Sc. Press.– 1998.– 652 p. 15. Densmore D. A Platform–Based taxonomy for ESL Design / Douglas Densmore, Roberto Passerone, Alberto Sangiovanni–Vincentelli // Design & Test of computers.– 2006. – P. 359–373. 16. Хаханов В.И. Проектирование и тестирование цифровых систем на кристаллах / В.И. Хаханов, Е.И. Литвинова, О.А. Гузь. – Харьков: ХНУРЭ, 2009.– 484с. 17. Hahanov V.I. SIGETEST – Test generation and fault simulation for digital design / V.I. Hahanov, D.M. Gorbunov, Y.V. Miroshnichenko, O.V. Melnikova, V.I. Obrizan, E.A. Kamenuka // Proc. of Conf. «Modern SoC Design Technology based on PLD».– Kharkov.–2003.– С. 50-53. 18. Автоматизация диагностирования электронных устройств/ Ю.В.Малышенко и др./ Под ред. В.П.Чипулиса.– М.: Энергоатомиздат, 1986.– 216с. 19. Хаханов В.И. Проектирование и верификация цифровых систем на кристаллах / В.И. Хаханов, И.В. Хаханова, Е.И. Литвинова, О.А. Гузь.– Харьков.– Новое слово.– 2010.– 528 с.

Поступила в редколлегию 12.04.2010

УДК 681.326:519.713

Логічний асоціативний мультипроцесор для аналізу інформації / М.Ф. Бондаренко, В.І. Хаханов // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 116–128.

Запропоновано нові процес-моделі аналізу табличних форм опису інформації на основі використання векторних логічних операцій для вирішення задач пошуку, діагностування, розпізнавання образів і прийняття рішень у векторному дискретному булевому просторі. Моделі зорієнтовані на досягнення високої швидкодії процедур паралельного векторного логічного аналізу інформації, що в ідеалі повністю виключає використання арифметичних операцій.

Іл. 14. Бібліогр.: 19 назв.

UDC 681.326:519.613

Logical associative multiprocessor for the information analysis. / M.F. Bondarenko, V.I. Hahanov // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 116–128.

Novel process-models for analyzing information in the tabular form based on using vector logical operations to solve the problems of search, diagnosis, pattern recognition and decision-making in the vector discrete Boolean space are proposed. The models are focused to realization of high-performance vector concurrent logical analysis of information that in the limit completely excludes the use of arithmetic operations.

Fig. 14. Ref.: 19 items.

УДК 519.7

О ТЕОРИИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

М.Ф. Бондаренко[1], Н.П. Кругликова[2], С.А. Пославский[3], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[4]

[1, 2, 4] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина
[3] ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

Предпринята попытка формального описания категории количества. С этой целью на языке алгебры подстановочных операций дана аксиоматическая характеристика понятий натурального числа, счета, сложения, умножения и порядка на множестве натуральных чисел. Идентифицированы первичные понятия теории положительных и произвольных рациональных чисел. Средствами логической математики проведена аксиоматическая характеризация понятий теории действительных чисел и арифметических действий над ними. В статье развиваются идеи, сформулированные в работах [1, 2].

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, ПРЕДИКАТ, АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Введение

Одна из важнейших задач теории интеллекта состоит в том, чтобы формально описать *понятия*, которыми пользуются люди. Если это удастся сделать, тогда откроются дополнительные возможности для создания систем искусственного интеллекта, обладающих способностью к понятийному мышлению. Большинство понятий выражается с помощью прямых определений через другие понятия в виде словосочетаний, предложений и текстов, например, “Рекорд – это высшее достижение в некоторой области”. Такого рода определения понятий содержатся в словарях и энциклопедиях. Выражая формально смысл словосочетаний и предложений через смысл слов, из которых они составлены, можно свести содержание сложных понятий к содержанию более простых [3]. Понятия, которые на данном этапе развития науки не представляется возможным прямо выразить через другие, уже введенные ранее понятия, называются *категориями*. Аристотель [4, с. 220] полагал, что все известные понятия, можно свести к следующим десяти категориям: сущность, количество, качество, отношение, место, время, положение, состояние, действие и страдание.

Совокупность $\boldsymbol{K}$ всех категорий какого-либо множества понятий $\boldsymbol{A}$ характеризуется следующими свойствами: 1) каждое понятие совокупности $\boldsymbol{K}$ включено в множество $\boldsymbol{A}$; 2) ни одно из понятий совокупности $\boldsymbol{K}$ не выражается с помощью прямого определения через другие понятия совокупности $\boldsymbol{K}$; 3) все понятия множества $\boldsymbol{A}$, не принадлежащие совокупности $\boldsymbol{K}$, выражаются прямо через понятия совокупности $\boldsymbol{K}$. Как формально определить (*идентифицировать*) содержание категорий? Науке известен лишь один способ решения этой задачи – *метод построения аксиоматических теорий*. Существо этого метода состоит в том, что каждой категории ставится в соответствие некоторая *предикатная переменная* [5]. Все такие переменные связываются логическими уравнениями, называемыми *аксиомами*. Последние записываются на каком-нибудь алгебро-логическом языке достаточно выразительной силы.

Аксиомы строятся на основе неформализованных (интуитивных) представлений о свойствах идентифицируемых понятий и связях между ними. Разнообразные аксиомы накопляются до тех пор, пока все категории, характеризуемые ими, не определятся в абстрактном смысле однозначно. Это значит, что описываемые понятия задаются аксиомами единственным образом с точностью до обозначений тех предметов, к которым они относятся, или, как говорят математики, – с точностью до изоморфизма тех предикатов, которые соответствуют определяемым понятиям. Современная наука не считает множество категорий, указанное Аристотелем, достаточно обоснованным. Тем не менее, все сходятся на том, что понятие *количества* должно быть отнесено к числу основополагающих.

При логико-математическом анализе категория количества расчленяется на более простые понятия натурального, рационального и действительного числа. Целью настоящей статьи является формальное описание этих понятий на языке *алгебры подстановочных операций* [5]. В первой части статьи формально описывается понятие натурального числа, которое, в свою очередь, расчленяется на первичные понятия счетного множества, счета, сложения и умножения натуральных чисел. После выражения понятия количества через более простые понятия оно перестает выполнять роль категории, а категориями, в соответствии с приведенным выше определением, становятся более глубинные понятия (счетного множества, счета и т.д.). Т.о. понятие категории относительно, и в этом смысле оно родственно такому понятию как физическая элементарная частица. Когда-то роль элементарной частицы выполнял атом, затем – электрон, протон и нейтрон. В настоящее время на роль элементарных частиц претендуют еще более глубинные физические объекты.

Решение поставленной задачи облегчается тем, что к настоящему времени выполнены глубокие и обширные разработки по аксиоматизации арифметики. Первые результаты в этой области были получены еще в 17 веке Лейбницем (доказательство соотношения $2\times 2=4$). В середине 19-го столетия Грассман сформулировал аксиомы сложения и умножения натуральных чисел. Построения Грассмана были продолжены работами Пеано, который в 80-х годах прошлого столетия сформулировал аксиомы натурального ряда чисел. Основания теории действительных чисел заложены во второй половине 19-го века в публикациях Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора [6, с. 324].

В 1930 г. Ландау опубликовал обширную работу [7], подводящую итог исследованиям в области аксиоматизации арифметики натуральных, рациональных и действительных чисел, которая до настоящего времени остается непревзойденной по строгости и полноте изложения. Однако эти результаты не решают задачу формального описания категории количества до конца, поскольку они выражены на не полностью формализованном логическом языке. Современные системы искусственного интеллекта не могут усвоить понятия, описанные с привлечением выразительных средств естественного языка, поскольку последние пока недоступны машине. При выполнении приведенного ниже в этой статье перевода уже известных формулировок на язык алгебры подстановочных операций нами был выявлен в них ряд пробелов, что потребовало их дополнения и доработки.

Вначале введем некоторые логические понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем. *Прямым определением* предиката Q через предикаты P_1, $P_2,\dots, P_n$ называется связь вида:

$$\forall\, x \in A(Q(x) \sim \mathbf{F}(P_1, P_2, \dots, P_n))(x)) = 1. \qquad \text{(а)}$$

Здесь $\mathbf{F}$ – некоторая *предикатная операция* [5]; $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – набор предметных переменных, заданный на декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ каких-либо множеств $A_1, A_2, \dots, A_m$ предметов, включенных в универсум U. Предикаты $P_1, P_2, \dots, P_n$ могут быть определены на множествах, вообще говоря, отличных от A. Уравнение (а) имеет единственное решение относительно переменной Q:

$$Q = \mathbf{F}(P_1, P_2, \dots, P_n). \qquad \text{(б)}$$

Косвенным определением предикатов $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ через предикаты $P_1, P_2, \dots, P_n$ называется связь вида:

$$\mathbf{P}(P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_r) = 1, \qquad \text{(в)}$$

где $\mathbf{P}$ – некоторый *предикат второго порядка* [8, 9]. Прямое определение является частным случаем косвенного. Определение предикатов $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ называется *абсолютным*, если в характеризующем его уравнении (в) отсутствуют параметры $P_1, P_2, \dots, P_n$, и *относительным* – в противном случае.

Определение предикатов $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ при фиксированных значениях параметров $P_1, P_2, \dots, P_n$ называется *коэкстенсивным*, если задающее его уравнение (в) имеет единственное решение относительно набора $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_r)$ переменных предикатов $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$, заданных на A. Все прямые определения коэкстенсивны, существуют также и косвенные коэкстенсивные определения. Пусть предикаты $P_1, P_2, \dots, P_n$ зафиксированы, а наборы предикатов $(Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_r(x))$ и $(Q_1'(x'), Q_2'(x'), \dots, Q_r'(x'))$ ($x \in A$; $x' \in A'$; $A' = A_1' \times A_2' \times \dots \times A_m'$; $A_1', A_2', \dots, A_m' \subseteq U$) удовлетворяют определению (в). Тогда определение (в) понятий $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ называется *полным*, если найдутся биекции $\varphi_i{:}A_i \to A'_i$, ($i = \overline{1,m}$), для которых при любых $x \in A$

$$Q_j(x) = Q_j'(\varphi(x)), \qquad \text{(г)}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, $j = \overline{1,r}$. В этом случае говорят, что условие (в) определяет понятия $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ *с точностью до набора* φ *изоморфизмов* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. Более подробно условие (г) записывается в виде:

$$Q_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = Q_j'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi_m(x_m)). \qquad \text{(д)}$$

В противном случае определение понятий Q_1, $Q_2, \dots, Q_r$ называется *неполным*.

Определение системы предикатов $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ называется *непротиворечивым* при фиксированных значениях параметров $P_1, P_2, \dots, P_n$, если задающее его условие (в) имеет хотя бы одно решение относительно набора Q переменных предикатов Q_1, $Q_2, \dots, Q_r$, определенных на A. В противном случае оно называется *противоречивым*. Пусть $\mathbf{S}$ – какая-нибудь совокупность предикатов. Предикаты совокупности $\mathbf{S}$, выраженные прямо через другие предикаты этой же совокупности, называются *вторичными*, а предикаты, оставшиеся невыраженными, – *первичными*. Совокупность $\mathbf{S}$ предикатов называется *несократимой*, если ни один из них невозможно выразить прямо через остальные предикаты совокупности $\mathbf{S}$. В противном случае она называется *сократимой*.

Для построения теории совокупности каких-нибудь понятий каждое из них представляем формально в виде некоторого предиката. В результате приходим к совокупности $\mathbf{S}$ предикатов. Введенные выше термины переносятся с предикатов на соответствующие им понятия. Т.о. можно говорить о *прямых* и *косвенных*, *однозначных* и *многозначных*, *абсолютных* и *относительных определениях понятий*, о *первичных* и *вторичных понятиях*, о *непротиворечивых* и *противоречивых*, *несократимых* и *сократимых совокупностях понятий* теории. Категории представляют собой первичные понятия теории. Они определяются неявно с помощью связывающего их уравнения (в), записываемого обычно в виде системы (точнее, конъюнкции) логических условий. Первичные понятия, вводимые на начальном этапе формирования теории, задаются косвенными абсолютными определениями. Логические условия, неявно определяющие первичные понятия теории, называются ее *аксиомами*.

Теорией **T** *совокупности понятий* **S** называется множество всех утверждений, которые можно логически вывести из аксиом, формально определяющих понятия совокупности **S**. Вторичные понятия теории **T** вводятся с помощью прямых определений. Этими определениями новые понятия однозначно выражаются через уже введенные ранее понятия. С введением каждого нового вторичного понятия достигается так называемое *консервативное расширение теории*. Новые аксиомы при консервативном расширении теории не привлекаются. Если же в процессе развития теории вводятся новые первичные понятия, то говорят, что этим достигается *неконсервативное расширение теории*. В этом случае новые первичные понятия вводятся косвенными относительными определениями. В зависимости от того, вводятся ли первичные понятия теории до или после других понятий, они делятся на *начальные* и *не начальные*. Соответственно этому делятся на начальные и не начальные первичные предикаты теории.

1. Натуральный ряд чисел

Первым шагом на пути к идентификации категории количества является формальное описание понятий *натурального числа* и *счета*. У каждого человека есть достаточно четкое и определенное интуитивное понятие натурального числа. Именно оно служит объектом формального описания. Натуральные числа возникают в результате *счета*. Счет – это добавление единицы к уже имеющемуся числу. Начинается счет с единицы. Прибавляя к любому натуральному числу единицу, получаем каждый раз новое число. Получаемая таким способом бесконечная последовательность чисел называется *натуральным рядом*. Натуральные числа можно складывать и умножать. Операции сложения и умножения натуральных чисел коммутативны и ассоциативны. Сложение и умножение связаны друг с другом дистрибутивным законом. Числа в натуральном ряду упорядочены.

Приступаем к формальному описанию понятий натурального числа и счета. Множество всех натуральных чисел обозначаем символом N. Числа в натуральном ряду упорядочиваем *отображением* [5] *счета* $q{:}N\to N$. Если $q(x) = y$, то будем говорить, что натуральное число x *предшествует* натуральному числу y или же что число y *следует за* числом x. Отображение счета ставит в соответствие каждому натуральному числу одно следующее за ним натуральное число, т.е. оно всюду определено и однозначно. У каждого натурального числа не может быть более одного предшествующего числа, т.е. отображение счета инъективно. Отображению счета $q(x) = y$ *соответствует* [5] *предикат счета* $Q(x, y)$, определенный на $N\times N$. Аксиомы натурального ряда указывают связи предиката счета Q с множеством N. Множество N следует рассматривать как некоторое подмножество универсума U. Универсум U можно выбрать любым, даже таким, в котором не содержится ни одного множества натуральных чисел (т.е. конечным). В последнем случае система аксиом, определяющая натуральный ряд, будет *противоречивой*. Это означает, что она не определяет ни одного множества N, а значит, и никакого предиката Q. Если же универсум U бесконечен, то, каким бы он ни был, система аксиом определяет в абстрактном смысле единственное множество N (с точностью до обозначений содержащихся в нем натуральных чисел).

С логической точки зрения аксиомы связывают два предиката: $N(x)$ на U и $Q(x, y)$ на $U\times U$. Полагаем, что за пределами области $N\times N$ предикат Q принимает нулевые значения. Поскольку предикаты N и Q вводятся аксиомами одновременно, естественно не ограничивать область определения предиката Q заранее неизвестным множеством N. Для этого к системе аксиом надо добавить еще одно условие, носящее, скорее, более логический, чем арифметический, характер:

$$\forall\, x, y \in U(\neg(N(x)\wedge N(y))\supset\neg Q(x,y)).$$

Это условие позволяет вводить предикат Q на множестве $U\times U$ так, что всюду вне множества $N\times N$ его значения оказываются равными нулю. К числу необходимых логико-арифметических условий относятся также требования унарности предиката N и бинарности предиката Q.

Множество N и предикат Q формально определяем следующими пятью свойствами, называемыми *аксиомами натурального ряда*:

всюду определенности счета

$$\forall\, x\in N\ \exists y\in N\ \ Q(x,y); \tag{1}$$

однозначности счета

$$\forall\, x, y_1, y_2 \in N(Q(x,y_1)\wedge Q(x,y_2)\supset D(y_1,y_2)); \tag{2}$$

инъективности счета

$$\forall\, x_1, x_2, y \in N(Q(x_1,y)\wedge Q(x_2,y)\supset D(x_1,x_2)); \tag{3}$$

существования единицы

$$\exists\, y\in N(\forall x\in N\neg Q(x,y)); \tag{4}$$

индукции

$$\begin{gathered}\forall\, M\subseteq N((\exists y\in M(\forall\, x\in N\neg Q(x,y)))\wedge \\ \wedge(\forall\, x,y\in N(M(x)\wedge Q(x,y)\supset M(y)))\supset\forall\, x\in N\ M(x)).\end{gathered} \tag{5}$$

Аксиомы (1)-(5) представлены в сокращенной форме [5]. В полной записи они выразятся следующим образом:

$$\forall\, x \in U(N(x) \supset \exists y \in U(N(y) \wedge Q(x,y))); \qquad (1')$$

$$\begin{gathered}\forall\, x, y_1, y_2 \in U(N(x) \wedge N(y_1) \wedge N(y_2) \supset \\ \supset (Q(x,y_1) \wedge Q(x,y_2) \supset D(y_1,y_2)));\end{gathered} \qquad (2')$$

$$\begin{gathered}\forall\, x_1, x_2, y \in U(N(x_1) \wedge N(x_2) \wedge N(y) \supset \\ \supset (Q(x_1,y) \wedge Q(x_2,y) \supset D(x_1,x_2)));\end{gathered} \qquad (3')$$

$$\exists y \in U(N(y) \wedge \forall\, x \in U(N(x) \supset \neg Q(x,y))); \qquad (4')$$

$$\begin{gathered}\forall\, M, N \subseteq U(\forall z \in U(M(z) \supset N(z)) \supset \\ \supset ((\exists y \in U(M(y) \wedge \forall\, x \in U(N(x) \supset \neg Q(x,y)))) \wedge \\ \wedge(\forall\, x, y \in U(N(x) \wedge N(y) \supset (M(x) \wedge Q(x, y \supset M(y)))) \supset \\ \supset \forall\, x \in U(N(x) \supset M(x)))).\end{gathered} \qquad (5')$$

Содержательно аксиома (1) означает, что за каждым членом натурального ряда следует хотя бы одно натуральное число, т.е. отображение $q{:}N \to N$ всюду определено. Аксиома (2) гласит, что за каждым членом натурального ряда следует не более одного числа. Поэтому отображение q однозначно. Вместе взятые, аксиомы (1) и (2) означают, что отображение q функционально. Условие функциональности отображения q можно записать следующим образом:

$$\forall\, x \in N\ \exists\, !y \in N\ \ Q(x,y). \qquad (6)$$

Аксиома (3) гласит, что в натуральном ряду каждому числу может предшествовать не более одного числа. Это означает, что отображение q инъективно. Аксиома (4) гласит, что в натуральном ряду содержится число, у которого нет предшествующего числа. Наконец, аксиома (5) выражает *принцип математической индукции*: если свойством M обладает первое число натурального ряда и, кроме того, из предположения, что свойством M обладает число x, следует, что тем же свойством обладает и число $y = q(x)$, то свойством M обладают все натуральные числа.

Приведем пример объекта, удовлетворяющего всем аксиомам натурального ряда. Это – ряд кодов 1, 11, 111,... . Роль первого числа в нем выполняет символ 1. Каждый последующий код получается из предыдущего приписыванием к нему слева символа 1. Ясно, что для каждого кода существует единственный следующий. У каждого кода не может быть более одного предшествующего. Код 1 не имеет предшествующего. Наконец, начиная с кода 1 и переходя на каждом шаге к следующему коду, мы можем обойти все коды.

Определим понятие единицы. С этой целью обозначим символом J множество, включенное в N, элементы которого называются *единицами*. Множество J определим соответствующим ему предикатом J на N, который выражается формулой

$$J(y) = \forall\, x \in N \neg Q(x,y). \qquad (7)$$

Согласно определению (7), множество J состоит из всех натуральных чисел, для каждого из которых нет предшествующего натурального числа. Согласно аксиоме (4), в множестве J содержится, по крайней мере, одна единица. Аксиомы существования единицы и индукции можно записать короче, используя предикат J:

$$\exists y \in N\ J(y); \qquad (8)$$

$$\begin{gathered}\forall\, M \subseteq N((\exists x \in M\ J(x)) \wedge (\forall\, x, y \in N(M(x) \wedge Q(x,y) \supset \\ \supset M(y))) \supset \forall\, x \in N\ M(x)).\end{gathered} \qquad (9)$$

Теорема 1 (о единственности единицы). *Не может существовать более одной единицы.*

Доказательство. Предположим, что существуют две различные единицы e_1 и e_2. Образуем множество $M \subseteq N$ из единицы e_1 и всех не единиц, т.е. всех таких натуральных чисел, для каждого из которых существует предшествующее натуральное число. Так построенное множество M удовлетворяет посылке аксиомы индукции, поскольку а) $M \subseteq N$; б) в M содержится единица; в) из предположения, что натуральное число x содержится в M и предшествует натуральному числу y, вытекает, что $y \in M$. Следовательно, согласно аксиоме индукции, множество M содержит все натуральные числа. Но $e_2 \notin M$. Получили противоречие. Это означает, что в множестве J не может содержаться более одной единицы. Теорема доказана.

Формально теорема о единственности единицы записывается следующим образом

$$\forall\, y_1, y_2 \in N(J(y_1) \wedge J(y_2) \supset D(y_1,y_2)). \qquad (10)$$

В развернутом виде ее можно записать условием

$$\begin{gathered}\forall\, y_1, y_2 \in N((\forall\, x \in N \neg Q(x,y_1)) \wedge \\ \wedge(\forall\, x \in N \neg Q(x,y_2)) \supset D(y_1,y_2)),\end{gathered} \qquad (11)$$

называемым *свойством единственности единицы*. Объединяя аксиому существования единицы со свойством ее единственности, получаем следующее утверждение

$$\exists\, !y \in N\ J(y). \qquad (12)$$

В более развернутом виде оно записывается условием

$$\exists\, !y \in N(\forall\, x \in N \neg Q(x,y)), \qquad (13)$$

называемым *основным свойством единицы*. Единственный элемент множества J обозначаем символом 1.

Переходим к рассмотрению вопроса о независимости аксиом натурального ряда. Аксиомы называются *независимыми* друг от друга, если ни одну из них невозможно вывести из совокупности остальных.

Теорема 2 (о независимости аксиом натурального ряда). *Каждая из аксиом натурального ряда логически не зависит от совокупности остальных.*

Доказательство ведем *методом интерпретаций*. Его существо состоит в следующем. Для каждой (i-той) аксиомы изобретают такие предикаты, которые, будучи подставлены вместо предикатных переменных во все аксиомы, кроме i-той, обращают их в *истину* (т.е. превращают логические уравнения, представленные этими аксиомами, в тождества вида $1=1$). Подстановка тех же предикатов в i-тую аксиому обращает ее в *ложь* (в противоречие вида $0=1$). Если бы i-тая аксиома следовала из остальных, то она выполнялась бы вместе с ними. В противном случае эта аксиома независима от остальных.

Доказываем независимость аксиомы (1). Принимаем $N=\{1,\ 2\}$, $Q\,(x,\ y)=x^1y^2$. Аксиома (1) не выполняется:

$$\forall\, x\in N\ \exists y\in N\ \ Q(x,y)=\forall\, x\in\{1,2\}\exists y\in\{1,2\}(x^1y^2)=$$
$$=\forall\, x\in\{1,2\}(x^1 1^2\vee x^1 2^2)=\forall\, x\in\{1,2\}(x^1)=1^1 2^1=0.$$

Аксиома (2) выполняется:

$$\forall\, x,y_1,y_2\in N(Q(x,y_1)\wedge Q(x,y_2)\supset D(y_1,y_2))=$$
$$=\forall\, x,y_1,y_2\in\{1,2\}(x^1y_1^2\wedge x^1y_2^2\supset y_1^1y_2^1\vee y_1^2y_2^2=$$
$$=\forall\, x,y_1\in\{1,2\}(x^1y_1^2 1^2\supset y_1^1)(x^1y_1^2 2^2\supset y_1^2=$$
$$=\forall\, x,y_1\in\{1,2\}(x^1y_1^2\supset y_1^2)=\forall\, x,y_1\in\{1,2\}(1)=1.$$

Аналогично доказывается выполнение аксиом (3)–(5). Итак, аксиома (1) не зависит от совокупности остальных аксиом натурального ряда. Тем же методом доказывается независимость аксиом (2)–(5). Для доказательства независимости аксиомы (2) полагаем: $N=\{1,\ 2,\ 2',\ 3,\ 3',\ 4,\ 4',...\}$, $Q(x,\ y)=x^1y^2\vee x^1y^{2'}\vee x^2y^3\vee\ x^{2'}y^{3'}\vee x^3y^4\vee x^{3'}y^{4'}\vee...$; аксиомы (3) – $N=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Q(x,\ y)=x^1y^2\vee x^2y^3\vee x^3y^2$; аксиомы (4) – $N=\{2,\ 3\}$, $Q(x,\ y)=x^2y^3\vee x^3y^2$; аксиомы (5) – $N=\{1,\ 2,\ 2',\ 3,\ 4,...\}$, $Q(x,\ y)=x^1y^2\vee x^{2'}y^{2'}\vee x^2y^3\vee x^3y^4\vee...$. Теорема доказана.

Переходим к рассмотрению вопроса об изоморфности натуральных рядов. Любые множество N и определенное на нем какое-нибудь бинарное отношение Q, которые удовлетворяют аксиомам (1)–(5), называются *натуральным рядом чисел* (N, Q). Множество N называется *множеством натуральных чисел*. Отношение Q называется *отношением счета*. Функция $q(x)=y$ (q:$N\to N$), задаваемая условием xQy, называется *операцией счета*. Совокупность всех утверждений о свойствах предикатов N и Q, выводимых из аксиом натурального ряда, называется *теорией натурального ряда*. Предикаты N и Q являются первичными и начальными предикатами теории натурального ряда. Соответственно этому первичными и начальными понятиями теории натурального ряда будут множество натуральных чисел и отношение счета. Теория называется *категоричной*, если все ее первичные предикаты определяются аксиомами с точностью до изоморфизма.

Теорема 3 (об изоморфности натуральных рядов). *Если множества N, N' и предикаты Q на $N\times N$, Q' на $N'\times N'$ удовлетворяют аксиомам натурального ряда, то существует биекция φ:$N\to N'$, такая что для любых x, $y\in N$*

$$Q(x,y)=Q'(\varphi(x),\varphi(y)). \tag{14}$$

Доказательство. Определим предикат Φ на $N\times N'$ следующим образом. Полагаем $\Phi(1,\ 1')=1$, где 1 и $1'$ – единицы множеств N и N'. Существование элементов 1 и $1'$ следует из аксиомы существования единицы, единственность следует, как было установлено выше, из аксиомы индукции. Берем элементы $a_1\in N$ и $a_1'\in N'$, такие что $Q(1,\ a_1)=Q'(1',\ a_1')=1$. Согласно аксиомам всюду определенности и однозначности, эти элементы определяются единственным образом. Полагаем $\Phi(a_1,\ a_1')=1$. Берем, далее, элементы $a_2\in N$, $a_2'\in N'$, такие что $Q(a_1,\ a_2)=Q'(a_1',\ a_2')=1$, и полагаем $\Phi(a_2,\ a_2')=1$. Продолжая аналогично, получаем не более, чем счетные, множества $M=\{1,\ a_1,\ a_2,...\}$, $M'=\{1',\ a_1',\ a_2',...\}$. Из аксиомы индукции следует, что $M=N$, $M'=N'$. Для всех $i=1,\ 2,...$ имеем $\Phi(a_i,\ a_i')=1$. Для всех остальных пар элементов $b\in N$, $b'\in N'$ (т.е. таких, что не существует i, при котором $b=a_i$, $b'=a_i'$) полагаем $\Phi(b,\ b')=0$. Докажем, что для любых значений индексов i, j если $i\neq j$, то $a_i\neq a_j$, $a_i'\neq a_j'$. В самом деле, если бы это было не так, например, $a_s=a_p$ и $s<p$, то, согласно аксиоме инъективности, $a_{s-1}=a_{p-1}$, $a_{s-2}=\ a_{p-2},...,a_{p-s}=1$. Но тогда $Q(a_{p-s-1},\ 1)=1$, что, согласно аксиоме существования единицы, невозможно. Определим отображение $\varphi(x)=x'$ условием $\Phi(x,\ x')=1$. В силу доказанного, отображение φ:$N\to N'$ есть биекция. Из способа определения предиката Φ непосредственно следует (14) для всех x, $y\in N$. Теорема доказана.

Равенство (14) означает, что предикаты Q и Q' изоморфны. Изоморфность натуральных рядов не нарушится, даже если взять разные универсумы U и U', поскольку всегда можно образовать единый универсум $U''=U\cup U'$ и, согласно только что доказанной теореме, предикаты Q и Q' будут изоморфными. Т.о. имеется по существу (т.е. в абстрактном смысле) лишь один натуральный ряд чисел. Построение теории натурального ряда завершается фиксацией конкретных множества N и отношения счета Q. Если же возникает необходимость перейти от N и Q к другим N' и Q', то это можно сделать при помощи некоторого соответствия φ, взаимно однозначно отображающего часть N универсума U в часть $N'\subseteq U$. Важно отметить, что возможно изменение отношения счета Q при сохранении множества N.

Множество B называется *собственным подмножеством* множества A, если $B\subseteq A$ и $B\neq A$ (пишут

$B \subset A$). Множество A называется *бесконечным*, если существует его собственное подмножество B, равномощное множеству A. В противном случае множество A называется *конечным*. Множество натуральных чисел бесконечно. Действительно, в множестве $N = \{1, 2, ...\}$ имеется собственное подмножество $M = \{2, 4, ...\}$ всех четных чисел, равномощное множеству N. Множества N и M можно связать биекцией $2x = y$, отображающей N на M. Любое множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным*. (Заметим, что понятие счетного множества можно определить, не пользуясь аксиомами натурального ряда, как *минимальное бесконечное множество*, т.е. такое бесконечное множество A, все бесконечные подмножества которого равномощны множеству A.) Определение натурального ряда (N, Q) при заданном универсуме U непротиворечиво, если множество U бесконечно. Действительно, в этом случае существует последовательность подмножеств $\mathbf{V} = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$, такая что каждое A_i ($i = 1, 2, ...$) есть собственное подмножество множества A_{i-1}. Выбирая последовательно по одному элементу $a_1 \in A_0 \backslash A_1$, $a_2 \in A_1 \backslash A_2, ..., a_i \in A_{i-1} \backslash A_i, ...$, получим натуральный ряд. В случае конечного универсума система логических уравнений (1)-(5) решений не имеет.

2. Сложение на множестве натуральных чисел

В арифметике натуральных чисел сложение определяют как операцию $x + y = z$, отображающую $N \times N$ в N, которая обладает следующими двумя свойствами, называемыми *аксиомами сложения*: 1) для всех $x \in N$ $x+1 = q(x)$; 2) для всех x, $y \in N$ $x+(y+1) = (x+y)+1$. Первая аксиома означает, что операция счета $q(x)$ совпадает с операцией прибавления единицы к произвольно взятому натуральному числу x. Т.о. операция счета поглощается (охватывается) операцией сложения натуральных чисел. Вторая аксиома выражает свойство ассоциативности сложения натуральных чисел в том частном случае, когда третье слагаемое равно единице. Оказывается, что этих двух свойств достаточно для однозначного определения операции сложения натуральных чисел при условии, что множество натуральных чисел и операция счета уже фиксированы. Множество натуральных чисел, а также операции счета и сложения вводятся косвенными определениями. Вместе с тем, для одноместной операции $x + 1$ дается прямое определение. Первые два понятия вводятся абсолютными определениями, а третье понятие – сложение – относительным определением. Все три понятия относятся к первичным и начальным. Определение сложения коэкстенсивно: для заданного натурального ряда (N, Q) операция сложения вводится единственным способом.

С помощью определения сложения, можно найти сумму любых двух натуральных чисел, которая, как оказывается, не зависит от порядка выполняемых действий. Для примера найдем сумму каких-нибудь двух натуральных чисел, пользуясь вышеприведенным определением сложения. Отыскиваем сумму чисел 4 и 3: $4+3 = 4+(2+1) = (4+2)+1$. Число 3 представляем в виде суммы 2+1 на основании того, что каждому натуральному числу, отличному от единицы, предшествует единственное натуральное число (в данном случае числу 3 предшествует число 2). Отыскиваем сумму чисел 4 и 2: $4+2 = 4+(1+1) = (4+1)+1 = 5+1 = 6$. Предполагается, что функция счета к моменту определения операции сложения уже задана. Окончательно имеем: $4+3 = (4+2)+1 = 6+1 = 7$.

Приведенное определение сложения натуральных чисел нуждается в переводе на язык алгебры подстановочных операций. При таком переводе нельзя принять заранее, что сложение есть операция. Это свойство сложения еще предстоит вывести из аксиом сложения. Сложение можно рассматривать лишь как отображение (быть может, частичное или многозначное), действующее из $N \times N$ в N. В соответствии с этим вводим предикат $S(x, y, z)$ на $N \times N \times N$, отвечающий отображению $x + y = z$. Первую аксиому сложения, называемую *аксиомой добавления единицы*, формулируем следующим образом:

$$\forall\, x, x' \in N(S(x,1,x') \sim Q(x,x')). \tag{15}$$

Смысл этой аксиомы состоит в том, что запись $x+1 = x'$ равносильна записи $q(x) = x'$. Для формулировки второй аксиомы сложения, называемой *аксиомой ассоциативности*, приходится использовать гораздо более сложную логическую конструкцию:

$$\begin{aligned} \forall\, x, y, z' \in N(\exists y' \in N(Q(y,y') \wedge S(x,y',z')) \sim \\ \sim \exists z \in N(S(x,y,z) \wedge Q(z,z'))). \end{aligned} \tag{16}$$

Аксиома выражает утверждение о равносильности соотношений $x + (y + 1) = z'$ и $(x + y)+1 = z'$. Кванторы существования использованы для выражения композиции отображений $y + 1 = y'$ и $x + y' = z'$, а также отображений $x + y = z$ и $z + 1 = z'$. Любой предикат S на $N \times N \times N$ называется *предикатом сложения* для натурального ряда (N, Q), если он удовлетворяет так сформулированным аксиомам сложения.

Выводим свойства сложения натуральных чисел.

Теорема 4 (о функциональности предиката сложения). *Пусть* (N, Q) *– натуральный ряд. Тогда любой предикат* S *на* $N \times N \times N$, *удовлетворяющий аксиомам сложения, функционален, т.е. для него выполняется условие*:

$$\forall\, x, y \in N\ \exists\, !z \in N\ S(x,y,z). \tag{18}$$

Доказательство ведем индукцией по y. Пусть для любого $x \in N$ $M_x = \{y \in N \mid \exists! z \in N\ S(x, y, z)\}$. Согласно аксиомам всюду определенности и однозначности счета для любого $x\in N$ найдется единственный $z\in N$, такой что $Q(x, z) = 1$. По аксиоме (15) для любых x, $z\in N$ равенство $Q(x, z) = 1$ равносильно равенству $S(x, 1, z) = 1$. Следовательно, равенство $S(x, 1, z) = 1$ определяет функциональную зависимость z от x. Т.о. $1\in M_x$. Выберем произвольно $y\in N$ и предположим, что $y\in M_x$. Тогда $\exists!\ z\in N\, S(x, y, z)$. Пусть $z'\in N$ таково, что $Q(z, z') = 1$. Тогда $\exists\ z\in N(S(x, y, z)\wedge Q(z, z'))$ и, в силу аксиомы ассоциативности, $\exists\ y'\in N(Q(y, y')\wedge S(x, y', z'))$. Покажем, что любой элемент $z''\in N$, для которого $S(x, y', z'') = 1$, совпадает с z'. Элемент z'' обладает свойством $\exists\ y'\in N(Q(y, y')\wedge S(x, y', z''))$, и поэтому, согласно аксиоме ассоциативности, $\exists\ z\in N(S(x, y, z)\wedge \wedge Q(z, z''))$. Но $y\in M_x$, т.е. элемент z определен однозначно. В силу аксиомы однозначности, из равенств $Q(z, z'') = Q(z, z') = 1$ следует, что $z'' = z'$. Отсюда вытекает, что $y'\in M_x$. Применяя аксиому индукции, получаем $M_x = N$. Теорема доказана.

Теорема 5 (о существовании и единственности предиката сложения). *Пусть* (N, Q) *— натуральный ряд. Тогда существует, притом единственный, предикат* S *на* $N\times N\times N$, *удовлетворяющий аксиомам сложения.*

Доказательство. *Существование.* Сначала для каждого $x\in N$ определим специальным образом двухместный предикат S_x на $N\times N$. Фиксируя $x\in N$, обозначим $a_1 = 1$, $b_1 = q(x)$ (т.е. $Q(x, b_1) = 1$). Образуем два множества: $A = \{a_1, a_2,...\}$, $B = \{b_1, b_2,...\}$, где $a_{i+1} = q(a_i)$, $b_{i+1} = q(b_i)$, $i = 1,2,...$. Из аксиомы индукции вытекает, что $A = N$. Кроме того, для любых значений индексов i, j, если $i\neq j$, то $a_i\neq a_j$ (см. доказательство теоремы 3 об изоморфности натуральных рядов). Положим для всех $z\in N$ $S_x(a_i, z) = D(b_i, z)$, $i = 1,2,...$. Тогда будем иметь (при $i = 1$)

$$S_x(1,z) = D(q(x),z) = Q(x,z). \qquad \text{(а)}$$

Для любого $y\in N$ существует номер i, такой что $y = a_i$, и поэтому

$$\begin{aligned} S_x(y,z) &= S_x(a_i,z) = D(b_i,z) = D(q(b_i),q(z)) = \\ &= D(b_{i+1},q(z)) = S_x(a_{i+1},q(z)) = S_x(q(y),q(z)). \end{aligned} \qquad \text{(б)}$$

Положим $S(x, y, z) = S_x(y, z)$ для всех $x, y, z\in N$. Из свойств (а), (б) предикатов S_x вытекает, что предикат S на $N\times N\times N$ удовлетворяет аксиомам сложения.

Единственность. Доказательство ведем индукцией по y. Пусть S и S' — предикаты сложения. Если $y = 1$, то условие

$$\forall\ x,z\in N(S(x,y,z)\sim S'(x,y,z)) \qquad (17)$$

выполняется, т.к. по аксиоме добавления единицы для любых $x, z\in N$ $S(x, 1, z)\sim Q(x, z)$ и $S'(x, 1, z)\sim Q(x, z)$. Предположим теперь, что (17) верно для некоторого $y\in N$. Покажем, что тогда $\forall x, y', z'\in N(Q(y, y')\supset \supset (S(x, y', z')\sim S'(x, y', z')))$. Действительно, если $Q(y, y') = 1$, то по аксиоме ассоциативности из $S(x, y, z) = 1$ вытекает, что высказывания $S(x, y', z')$ и $Q(z, z')$ равносильны для любого $z'\in N$. Аналогично, из $S'(x, y, z) = 1$ следует $\forall\ z'\in N\,(S'(x, y', z')\sim Q(z,z'))$. По теореме о функциональности предиката сложения, значение z определено однозначно значениями x и y, если $S(x, y, z)=1$. Тогда, в силу аксиом всюду определенности и однозначности, единственным образом определяется и значение z', если $Q(z, z') = 1$. Причем z' не зависит от выбора предиката сложения (S или S'). Итак, для любого x существует единственный $z'\in N$, такой что $S(x, y', z') = S'(x, y', z') = 1$. В силу функциональности предиката сложения, отсюда следует $S(x, y', z')\sim S'(x, y', z')$ для любого z'. Осталось применить аксиому индукции. Теорема доказана.

Доказав функциональность, существование и единственность предиката сложения $S(x, y, z)$, мы получаем возможность ввести функцию $z = x + y$, соответствующую этому предикату, которая называется *операцией сложения* натуральных чисел. Определяем ее следующим образом: для любых $x, y, z\in N$ $z = x + y$ в том и только том случае, когда $S(x, y, z) = 1$.

Теорема 6 (об ассоциативности сложения). *Для всех* $x, y, z\in N$ $(x + y)+z = x + (y + z)$.

Доказательство. Пусть для всех $x, y\in N$ $M_{x,y} = \{z\in N \mid (x + y)+z = x + (y + z)\}$. По аксиоме *ассоциативности* $(x + y) + 1 = x + (y + 1)$, т.е. $1\in M_{x,y}$. Покажем, что для любого $z\in N$ из $z\in M_{x,y}$ следует $(z+1)\in M_{x,y}$ (а). Пусть $z\in M_{x,y}$, т.е. $(x + y) + z = x + (y + z)$. Тогда, в силу аксиомы ассоциативности, $(x + y) + (z + 1) = ((x + y) + z) + 1$. Поскольку $z\in M_{x,y}$, то $((x + y) + z) + 1 = (x + (y + z)) + 1$. Т.к. $1\in M_{x,(y+z)}$, то $(x + (y + z)) + 1 = x + ((y + z) + 1)$. По аксиоме ассоциативности $(y + z) + 1 = y + (z + 1)$. Итак, $(x+y) + (z + 1) = x + (y + (z + 1))$, т.е. $(z+1)\in M_{x,y}$. Справедливость (а) доказана. Применяя аксиому индукции, получаем, что множество $M_{x,y}$ совпадает с множеством всех натуральных чисел. Теорема доказана.

Теорема 7 (о коммутативности сложения). *Для всех* $x, y\in N$ $x+y = y + x$.

Доказательство. Пусть для всех $x\in N$ $M_x = \{y\in N \mid x+y = y+x\}$. Поскольку $1+1=1+1$, то $1\in M_1$. Пусть $y\in M_1$, т.е. $1+y = y+1$. В силу ассоциативности сложения, $1+(y+1) = (1+y)+1$. По предположению $1+y = y+1$. Поэтому $1+(y+1) = (y+1)+1$. Итак, $1\in M_1$, и для всех $y\in N$ из $y\in M_1$ следует $y+1\in M_1$. Тогда из аксиомы индукции следует, что множество M_1 совпадает с N, т.е. что для всех $x\in N$ $x+1 = 1+x$. Покажем теперь, что для любого $x\in N$ множество M_x совпадает с N. Действительно, $1\in M_x$ по только что доказанному. Предположим далее, что $y\in M_x$, т.е. $x+y = y+x$. Тогда $x+(y+1) = (x+y)+1$ в силу аксиомы ассоциативности; $(x+y)+1 = 1+(x+y)$, т.к. $1\in M_{x+y}$; $1+(x+y) = 1+(y+x)$, в силу сделанного предположения; $1+(y+x) = (1+y)+x$, поскольку сложение ассоциативно; $(1+y)+x = (y+1)+x$, т.к. $1\in M_y$. Итак, $x+(y+1) = (y+1)+x$, и для всех $y\in N$ из $y\in M_x$ следует $y+1\in M_x$. Применяя аксиому индукции, приходим к выводу, что M_x совпадает с N. Теорема доказана.

3. Порядок на множестве натуральных чисел

Отношение порядка $x < y$ для любых натуральных чисел x и y определяется следующим образом: $x < y$ в том и только том случае, если существует натуральное число z, такое что $x+z = y$. Это утверждение называется *определением порядка*. Определение порядка – прямое и однозначное. Отношение порядка определяется не только множеством N, но и предикатом Q, так что на одном и том же множестве натуральных чисел может быть задано много разных отношений порядка. Высказывание $x < y$ будем записывать также и в виде $y > x$. В первом случае говорят "x меньше y", во втором "y больше x". Для формальной записи аксиомы порядка вводим предикат $H(x, y)$ на $N\times N$, соответствующий отношению $x < y$. Определение порядка теперь запишется в виде:

$$\forall\, x, y \in N(H(x,y) \sim \exists z \in N\ S(x,z,y)). \tag{19}$$

Предикат H, удовлетворяющий определению порядка, называется *предикатом порядка* для натурального ряда (N, Q). Очевидно, что для каждого натурального ряда (N, Q) существует единственный предикат порядка H.

Теорема 8 (о неповторяемости чисел в натуральном ряду). *Для любых x, $y\in N$, если $x<y$, то $y \neq x$.*

Доказательство. Установим вначале, что для всех x, $z\in N$ $x + z \neq x$ (а). Доказательство ведем индукцией по x. Рассмотрим множество элементов $M = \{x\in N \mid \forall z\in N\ x + z \neq x\}$ Поскольку для любого $z\in N$ $1+z = z + 1 \neq 1$, то $1\in M$. Пусть $x\in M$. Тогда для любого $z\in N$ $(x + 1)+ z = x+(1 + z) = x+(z+1) = (x + z)+1$ (б). Поскольку $x\in M$, то $x+z \neq x$. Отсюда следует, что $(x+ z)+1 \neq x+1$, или (с учетом равенства (б)) $(x+1)+z \neq x + 1$. Поэтому $x+1\in M$. По аксиоме индукции получаем $M = N$. Утверждение (а) доказано. Пусть теперь $x < y$. Тогда найдется $z\in N$, такое что $x+z = y$. Согласно (а) $x+z \neq x$, следовательно $x \neq y$. Теорема доказана.

Теорема 9 (о сравнимости натуральных чисел). *Для любых x, $y\in N$ либо $x = y$, либо $x< y$, либо $x > y$.*

Доказательство. Несовместимость любых двух из трёх утверждений, указанных в формулировке теоремы, непосредственно следует из предыдущей теоремы. Образуем множество $M_x = M_x'\cup M_x''\cup M_x'''$, где $M_x' = \{y\in N \mid x = y\}$, $M_x''= \{y\in N \mid x<y\}$, $M_x''' = \{y\in N \mid x>y\}$. Доказав, что $M_x=N$, мы тем самым установим, что для любых x, $y\in N$ хотя бы одно из соотношений $x = y$, $x< y$, $x>y$ имеет место. Если $x = 1$, то $1\in M_x'$, если же $x \neq 1$, то $x>1$, поэтому $1\in M_x'''$. Итак, мы получили, что $1\in M_x$. Предположим теперь, что $y\in M_x$. Отсюда следует, что $y\in M_x'$ или $y\in M_x''$, или $y\in M_x'''$. Если $y\in M_x'$, то $x = y$, $x+1 = y+1$, $x < y +1$, $y + 1\in M_x''$. Если $y\in M_x''$, то $x < y$. Следовательно, существует $z\in N$, такое что $x + z = y$, а значит $x+(z+1) = y+1$, $x< y+1$, $y +1\in M_x''$. Если же $y\in M_x'''$, то $x > y$. Следовательно, существует $z\in N$, такое что $x = y + z$. При $z = 1$ получаем $x = y + 1$, т.е. $y + 1\in M_x'$. При $z \neq 1$ существует $z'\in N$, такое что $z = z'+1$, и тогда $y + z = y +(1+z') = (y+1)+ +z' = x$. Отсюда вытекает, что $x > y +1$, а значит, $y + 1\in M_x'''$. Итак, из $y\in M_x$ следует $y + 1\in M_x$. В силу аксиомы индукции, $M_x = N$. Теорема доказана.

Введем *отношение $\leq$ нестрогого порядка*, определяемое следующим образом: для всех x, $y\in N$ $x \leq y$ равносильно $x< y$ или $x = y$. Отношение $<$ называется еще *отношением строгого порядка*, чтобы отличить его от отношения $\leq$. Запись $x \leq y$ читается "x меньше или равно y". Вместо $x \leq y$ также пишут $y \geq x$, последняя запись читается "y больше или равно x". Говорят, что произвольный предикат $K(x, y)$ на $A\times A$ обладает *свойством сравнимости*, если он удовлетворяет условию: $\forall x,\ y\in A(K(x,\ y)\vee K(y,\ x))$. Любой бинарный предикат на $A\times A$, обладающий свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности и сравнимости, называется *линейным порядком* на A. Линейный порядок выстраивает все элементы множества, на котором он определен, в линию, упорядочивает их. Множество, на котором определен линейный порядок, называется *цепью*.

Теорема 10 (об упорядоченности множества натуральных чисел). *Множество натуральных чисел с определенным на нем отношением нестрогого порядка является цепью.*

Доказательство. Поскольку $x = x$ для любого $x\in N$, то всегда $x \leq x$, так что отношение нестрогого порядка рефлексивно. Кроме того, оно антисимметрично. Действительно, пусть x, $y\in N$ таковы, что $x \leq y$ и $y \leq x$. Тогда $x< y$ или $x = y$, и, вместе с тем, ложно, что $y>x$. Следовательно, $x = y$. Доказываем транзитивность отношения $\leq$. Пусть x, y, $z\in N$ таковы, что $x < y$ и $y < z$. Тогда существуют x', y', такие что $y = x+x'$ и $z = y+y'$. Поэтому $z = (x + x')+ y' = x +(x' + y')$, следовательно $x< z$. Если же $x = y$ и $y < z$, или $x < y$ и $y = z$, то $x < z$,. Наконец, если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$. Итак, во всех случаях из $x \leq y$ и $y \leq z$, следует $x \leq z$. Покажем, наконец, что отношение $\leq$ обладает свойством сравнимости. В силу теоремы о сравнимости натуральных чисел, для любых x, $y\in N$ $y\in M_x'\cup M_x''\cup M_x'''$. Если $y\in M_x'\cup M_x''$, то $x \leq y$, если же $y\in M_x'\cup M_x'''$, то $x \geq y$. Теорема доказана.

4. Умножение на множестве натуральных чисел

В арифметике натуральных чисел умножение определяют как операцию $xy = z$, отображающую $N\times N$ в N, которая обладает следующими двумя свойствами, называемыми *аксиомами ум-*

ножения: 1) для всех $x \in N$ $x1 = x$; 2) для всех $x, y \in N$ $x(y+1) = xy + x$. Первая аксиома определяет правило умножения произвольного числа на единицу, вторая выражает свойство дистрибутивности умножения натуральных чисел относительно сложения в том частном случае, когда второе слагаемое равно единице.

Для формальной записи аксиом умножения введем предикат $P(x, y, z)$ на $N \times N \times N$, соответствующий отношению $xy = z$. Первую аксиому умножения формулируем следующим образом, называя ее *аксиомой умножения на единицу*:

$$\forall\, x,x' \in N(P(x,\,1,x') \sim D(x,x')). \tag{20}$$

Смысл этой аксиомы состоит в том, что запись $x1 = x'$ равносильна записи $x = x'$. Вторая аксиома, называемая *аксиомой дистрибутивности*, формулируется следующим образом:

$$\begin{gathered}\forall\, x,y,z' \in N((\exists y' \in N\;\; Q(y,y') \wedge P(x,y',z')) \sim \\ \sim (\exists z \in N\;\; P(x,y,z) \wedge S(z,x,z'))).\end{gathered} \tag{21}$$

Она выражает утверждение о равносильности равенств $x(y+1) = z'$ и $xy + x = z'$. Любой предикат P на $N \times N \times N$ называется *предикатом умножения* для натурального ряда (N, Q), если он удовлетворяет так сформулированным аксиомам –умножения.

Теорема 11 (о функциональности предиката умножения). *Пусть (N, Q) – натуральный ряд. Тогда любой предикат P на $N \times N \times N$, удовлетворяющий аксиомам умножения, функционален, т.е. для него выполняется условие*:

$$\forall\, x,y \in N\; \exists\, !z \in N\;\; P(x,y,z). \tag{22}$$

Доказательство ведем индукцией по y. При $y = 1$ условие (22) выполняется в силу аксиомы умножения на единицу. Предположим, что (22) выполняется для некоторого $y \in N$, т.е. $\forall x \in N\, \exists! z \in N\, P(x, y, z)$. Покажем, что тогда (22) справедливо и для $y + 1 \in N$. Пусть $P(x, y, z) = 1$. По предположению, значение z однозначно определено значениями x и y. В силу функциональности предиката сложения, равенство $S(z, x, z') = 1$ однозначно разрешимо относительно z'. Но тогда, в силу аксиомы дистрибутивности, и уравнение $P(x, y+1, z') = 1$ однозначно разрешимо при фиксированных x, $y + 1 \in N$. Осталось использовать аксиому индукции. Теорема доказана.

Теорема 12 (о существовании и единственности предиката умножения натуральных чисел). *Пусть (N, Q) – натуральный ряд чисел. Тогда существует хотя бы один предикат P на $N \times N \times N$, удовлетворяющий аксиомам умножения* (20), (21), *и все такие предикаты совпадают друг с другом. Последнее означает*: *если P и P' – предикаты на $N \times N \times N$, удовлетворяющие аксиомам умножения*, *то*

$$\forall\, x,y,z \in N(P(x,y,z) \sim P'(x,y,z)). \tag{23}$$

Доказательство. *Существование.* Сначала для каждого $x \in N$ строим двухместный предикат P_x на $N \times N$. Обозначим $a_1 = 1$, $b_1 = x$. Образуем два множества $A = \{a_1, a_2, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, ...\}$, где $a_{i+1} = q(a_i)$, $b_{i+1} = b_i + x$, $i=1,2,...$. Из аксиомы индукции следует, что $A = N$. Кроме того, $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. Положим для любого $z \in N$ $P_x(a_i, z) = D(z, b_i)$, $i = 1,2,...$. Тогда при $i = 1$ будем иметь $P_x(1, z) = D(z, x)$ (а). Для любого $y \in N$ существует единственный номер i, такой что $y = a_i$, и тогда $P_x(y, z) = P_x(a_i, z) = D(b_i, z) = D(b_{i+1}, z+x) = P_x(a_{i+1}, z+x) = P_x(q(a_i), z + x) = P_x(q(y), z + x)$ (б).

Положим $P(x, y, z) = P_x(y, z)$ для всех $x, y, z \in N$. Из свойств (а), (б) предикатов P_x вытекает, что предикат P на $N \times N \times N$ удовлетворяет аксиомам умножения. Существование предиката P доказано.

Единственность. В силу теоремы о функциональности предиката умножения, достаточно показать, что для произвольных $x, y, z, z' \in N$ из равенств $P(x, y, z) = P'(x, y, z') = 1$ следует $z = z'$ (а). Доказательство ведем индукцией по y. При $y = 1$ утверждение (а) справедливо, т.к. по аксиоме (20) из равенств $P(x, 1, z) = P'(x, 1, z') = 1$ следует $z = z'$. Пусть (а) имеет место для некоторого $y \in N$. Покажем, что тогда для $y' = y+1$ верно утверждение $\forall\, x, z, z' \in N(P(x, y', z') \wedge P'(x, y', z'') \supset z' = z'')$ (б). Действительно, в силу аксиомы (21) равносильны утверждения $P(x, y+1, z') = 1$ и $z' = z+x$, $P'(x, y+1, z'') = 1$ и $z'' = z + x$, при условии $P(x, y, z) = 1$. Отсюда следует справедливость (б).

Осталось применить аксиому индукции для множества $M = \{y \in N \mid \forall x, z, z' \in N(P(x, y, z) \wedge P'(x, y, z') \supset \supset z = z')\}$. Теорема доказана.

Доказав функциональность, существование и единственность предиката умножения $P(x, y, z)$, мы получаем возможность ввести функцию $z = xy$, соответствующую этому предикату, которая называется *операцией умножения* натуральных чисел. Определяем ее следующим образом: для любых $x, y, z \in N$ $z = xy$ в том и только том случае, когда $P(x, y, z) = 1$.

Теорема 13 (о дистрибутивности умножения). *Для всех $x, y, z \in N$ $(x + y)z = xz + yz$.*

Доказательство. Обозначим для произвольных $x, y \in N$ $M_{x,y} = \{z \in N \mid (x+y)z = xz+yz\}$. В силу аксиомы (20) $1 \in M_{x,y}$. Пусть для некоторого $z \in N$ имеет место равенство $(x + y)z = xz + yz$, т.е. $z \in M_{x,y}$. Тогда, используя аксиому (21), коммутативность и ассоциативность сложения, получаем: $(x+y)(z+1) = (x+y)z + (x+y) = (xz+yz)+(x+y) = xz+(yz+(x+y)) = xz+((x+y)+yz) = xz+(x+(y+yz)) = (xz + x) + (yz + y) = x(z + 1) + y(z + 1)$. Отсюда следует $z + 1 \in M_{x,y}$. Применяя аксиому индукции, получаем $M_{x,y} = N$. Теорема доказана.

Теорема 14 (о коммутативности умножения). *Для всех $x, y \in N$ $xy = yx$.*

Доказательство. Пусть $M = \{y \in N \mid 1y = y1\}$. Т.к. $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$, то $1 \in M$. Предположим, что некоторый

$y \in M$. Тогда $1(y+1) = 1y+1 = y1+1 = (y+1)1$ (согласно аксиомам умножения). Поэтому $y + 1 \in M$. По аксиоме индукции отсюда следует $M = N$, т.е. для любого $y \in N$ $1y = y1$. Для произвольного $x \in N$ рассмотрим множество $M_x = \{y \in N | \ xy = yx\}$. По только что доказанному $1 \in M_x$. Пусть $y \in M_x$. Тогда, с использованием аксиомы (21) и дистрибутивности умножения, получаем $x(y+1) = xy+x = yx+x = (y+1)x$. Отсюда следует $y + 1 \in M_x$. Согласно аксиоме индукции, получаем $M_x = N$. Теорема доказана.

Теорема 15 (об ассоциативности умножения). *Для всех* $x, y, z \in N$ $(xy)z = x(yz)$.

Доказательство. Обозначим для произвольных $x, \ y \in N$ $M_{x,y} = \{z \in N \,|\, (xy)z = x(yz)\}$. Очевидно, что, $1 \in M_{x,y}$, т.к. $(xy)1 = xy = x(y1)$. Пусть для некоторого $z \in N$ $(xy)z = x(yz)$, т.е. $z \in M_{x,y}$. Тогда, в силу аксиомы (21) и теорем 13, 14, $(xy)\ (z + 1) = (xy)z + xy = x(yz + xy) = (yz)x + yx = (yz + y)x = x(yz+y) = x(y(z+1))$. Отсюда следует $z + 1 \in M_{x,y}$. Применяя аксиому индукции, получаем $M_{x,y} = N$. Теорема доказана.

Выводы

При написании данной статьи авторы базировались на работе Ландау [7], которая, как это явствует из ее названия “Основы анализа”, нацелена на решение задачи обоснования математики (в части, касающейся введения чисел). Работы подобной направленности часто подвергаются критике, как содержащие *circulus vitiosus* (порочный круг) [10, с. 115, 6, с.29]. В применении к задаче обоснования теории натурального ряда указывается на невозможность формулировки и доказательства утверждений этой теории без фактического привлечения натуральных чисел и их свойств. Вместе с тем, ясно, что логически недопустимо основывать введение натуральных чисел на них же самих.

Задача, решаемая в настоящей работе, формулируется иначе: натуральные числа рассматриваются как нечто уже существующее, изначально данное. Поэтому нет необходимости извлекать их из небытия. Требуется лишь математически описать первичные понятия арифметики, которые в ней уже имеются и фактически используются. К такой постановке возражение *circulus vitiosus* неприменимо, поскольку об обосновании понятия натурального числа речь теперь не идет. Если анализируемые понятия недоброкачественны, то таким же недоброкачественным будет и результат их формального описания. Идентифицируя то, что реально существует в умах математиков и присутствует в их трудах, исследователь не отвечает за безупречность прототипа. Решая эту задачу, нет необходимости воздерживаться от использования натуральных чисел и их свойств в качестве одного из средств записи аксиом, формулировки необходимых теорем и построения их доказательств. Более того, в качестве инструмента описания арифметических понятий и их анализа не запрещается использовать любые логические и математические средства, которые признаются надежными современной наукой.

Решая задачу формального описания понятий, исследователь не вправе претендовать на абсолютную истинность получаемых результатов. Ведь степень их надежности зависит от уровня доброкачественности идентифицируемых понятий, от эффективности аппарата формального описания, вообще – от надежности функционирования человеческого разума, т.е. от факторов, которые ему не вполне подвластны. Доказательством безошибочности, абсолютной надежности и эффективности разума человека наука не располагает, и нет оснований надеяться, что оно когда-нибудь будет получено. Приходится довольствоваться верой в доброкачественность человеческого интеллекта, т.е., в конечном счете, полагаться на высокую квалификацию и добросовестность его создателя (предположительно – *генетического интеллекта* [9, с. 151]).

Только что мы охарактеризовали труд Ландау как работу, нацеленную на решение одной из задач обоснования математики. Но на него можно посмотреть также и как на работу, вносящую вклад в решение задачи идентификации первичных арифметических понятий, хотя, возможно, сам автор такую задачу перед собой и не ставил. Ландау вводит четыре первичных понятия: натуральное число, счет, сложение и умножение натуральных чисел; задает их с помощью девяти аксиом и выводит из них основные свойства первичных понятий. Все эти построения послужили базой для нашей работы.

Отличительной особенностью данной работы является то, что натуральный ряд (N, Q), предикаты сложения S и умножения P определяются как решения системы логических уравнений, именуемых аксиомами. Существование решения этой системы, как указывалось выше, зависит от выбора универсума U. В соответствии с методикой идентификации понятий, описанной в начале этой статьи, нами вводятся переменные предикаты $N(x)$, $Q(x, y)$, $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$, отвечающие понятиям натурального числа, счета, сложения и умножения натуральных чисел. Чтобы обеспечить корректность введения предикатов, каждый из них должен быть снабжен областью определения для набора своих переменных [11, с. 62, 69]. Значения аргументов предикатов N и Q должны быть ограничены каким-то универсумом U. Лучше всего было бы взять в качестве универсума множество всевозможных элементов, однако такое множество не существует. Пришлось принять в роли U произвольно выбираемое фиксированное множество. В качестве области изменения аргументов предикатов S и P принимается множество N, которое к моменту появления сложения и умножения уже оказывается введенным.

Полученные нами выражения (1′)-(5′), (15), (16), (20) и (21) представляют собой перевод на формальный язык аксиом натурального ряда, содержание которых пришлось несколько усложнить по сравнению с формулировками Пеано и Грассмана. Изменение содержания аксиом Пеано вызвано введением универсума U. Формулировка аксиом Грассмана была усложнена из-за того, что в них предикаты $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$ содержательно представлены равенствами $x+y=z$ и $xy=z$, которыми нельзя пользоваться, пока не доказано, что сложение и умножение – это операции. Но предикаты S и P изначально не обладают свойством функциональности, они выражают собой не операции, а всего лишь отношения, связывающие переменные x, y, z. Именно аксиомы, характеризующие эти предикаты, должны превратить их в функции. Только после того, как из аксиом выведены функциональность, существование и единственность предикатов S и P, можно на законных основаниях использовать выражения $x+y=z$ и $xy=z$. При записи аксиом сложения и умножения универсум U не привлекается, поскольку предикат $N(x)$ к этому моменту уже определен и зафиксирован, а значит множество N имеется в наличии и может теперь само выступать в роли универсума.

Изменение формулировок аксиом привело к необходимости замены доказательств большинства теорем, а иногда и их формулировок. К ним, в частности, относятся теоремы о существовании и единственности предикатов S и P, без которых вывод основных свойств сложения и умножения не представляется возможным. В заключение подчеркнем, что полученные в настоящей статье результаты следует расценивать лишь как перевод достижений уже существующей аксиоматической теории натуральных чисел, ориентированный на решение формального описания категории количества. Как это обычно бывает при выполнении подобных работ, в ранее полученных не полностью формализованных описаниях выявляются некоторые пробелы и производятся соответствующие дополнения и доработки, которые, однако, не затрагивают существа теории, созданной предшественниками.

Список литературы: 1. *Баталин, А. В.* О теории натурального ряда [Текст] / *А. В. Баталин, З. В. Дударь, С. А. Пославский, С. Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. – С. 135-144. 2. *Баталин, А. В.* О теории рациональных и вещественных чисел [Текст] / *А. В. Баталин, С. А. Пославский, С. Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. С. 155-164. 3 *Баталин, А. В.* О лингвистической алгебре [Текст] / *А. В. Баталин, З. В. Дударь, А. В. Стороженко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко* // Радиоэлектроника и информатика. Науч.-техн. журнал – 1998. № 4. – С. 101-109. 4. *Рассел, Б.* История западной философии. [Текст] / *Б. Рассел.*– М.: ИЛ, 1959. –932 с. 5. *Баталин, А. В.* О системном анализе информационных процессов [Текст] / *А. В. Баталин, А. Д. Тевяшев, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко* // Радиоэлектроника и информатика. Науч.-техн. журнал – 1998. № 3. – С. 102-110. 6. *Бурбаки, Н.* Теория множеств. [Текст] / *Н. Бурбаки.*– М.: Мир, 1965.– 449 с. 7. *Ландау, Э.* Основы анализа. [Текст] / *Э. Ландау.*– М.: ИЛ, 1947.–182 с. 8. *Шабанов-Кушнаренко, Ю. П.* Теория интеллекта. Математические средства. [Текст] / *Ю. П. Шабанов-Кушнаренко.*– Х.: Вища школа, 1984.– 142 с. 9. *Шабанов-Кушнаренко, Ю. П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. [Текст] / *Ю. П. Шабанов-Кушнаренко.*– Х.: Вища школа, 1987.– 159 с. 10. *Вейль, Г.* Математическое мышление. [Текст] / *Г. Вейль.*– М.: Наука, 1989.– 398 с. 11. *Куратовский, К.* Теория множеств. [Текст] / *К. Куратовский, А.. Мостовский.*– М.: Мир, 1970.– 413 с.

Поступила в редколлегию 15.04.2010

УДК 519.7

Про теорію натурального ряду/ М.Ф. Бондаренко, Н.П. Круглікова, С.О. Пославський, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 129–139.

З категорії кількості виділено поняття натурального, числа, яке в свою чергу, зведене до понять лічильної множини, операцій лічби, складання та множення натуральних чисел. Мовою алгебри підстановочних операцій описані характеристичні властивості цих понять, доказана повнота опису. З визначень понять, які розглянуті, виведені основні властивості натуральних чисел та арифметичних операцій над ними.

Бібліогр.: 11 найм.

UDC 519.7

On the natural series theory / M.F. Bondarenko, N.P. Kruglikova, S.A. Poslavsky, Ju.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – C. 129–139.

The concept of natural number is selected from the category of quantity which is reduced in one’s turn to concepts of the calculating set, operations of calculation, addition and multiplication. On the language of algebra substitutional operations characteristical properties of these concepts are described and the completeness of descriptions is proved. The main properties of natural numbers and arithmetical operations with them were deduced from considered definitions.

Ref.: 11 items.

УДК 519.7

О ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

М.Ф. Бондаренко[1], Н.П. Кругликова[2], С.А. Пославский[3], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[4]

[1, 2, 4] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина
[3] ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

Предпринимается попытка формального описания категории количества. С этой целью на языке алгебры подстановочных операций дается аксиоматическая характеристика понятий натурального числа, счета, сложения, умножения и порядка на множестве натуральных чисел. Идентифицируются первичные понятия теории положительных и произвольных рациональных чисел. Средствами логической математики проводится аксиоматическая характеризация понятий теории действительных чисел и арифметических действий над ними. В статье развиваются идеи, сформулированные в работах [1, 2].

РАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, ПРЕДИКАТ, АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Введение

Вначале остановимся на интуитивном понимании рациональных чисел. Рациональные числа можно наглядно представить как точки на прямой. Нанесем на прямой, двигаясь слева направо, на равных расстояниях друг от друга бесконечный ряд точек 1, 2, 3,..., представляющих собой все натуральные числа. Слева от точки 1 наносим на том же расстоянии точку 0 (рис. 1).

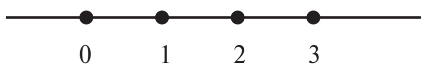


Рис. 1. Наглядное представление рационального числа

Разделим отрезок $0m$, где m — какое-нибудь натуральное число, на n равных частей. Полученный отрезок откладываем вправо от точки 0, его правый конец интерпретируем как положительное рациональное число m/n. На рис. 2 на прямой нанесена точка 3/2, получаемая при m=3 и n=2.

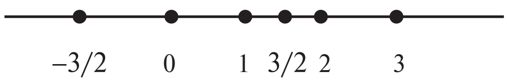


Рис. 2. Множество всех рациональных чисел

Точки, соответствующие всевозможным парам натуральных чисел (m, n), вместе взятые, образуют множество всех положительных рациональных чисел. Откладывая полученный ранее отрезок влево от точки 0, получаем отрицательное рациональное число $-m/n$. На рис. 2 нанесена точка, соответствующая числу –3/2. Положительные и отрицательные рациональные числа, вместе с числом 0, образуют множество всех рациональных чисел. Все натуральные числа являются также положительными рациональными числами. Сложение $x+y$ рациональных чисел x и y определяем как присоединение справа к отрезку, представляющему число x, сдвинутого отрезка, представляющего число y. Вычитание определяем как операцию, обратную сложению. Умножение рационального числа m/n на натуральное p осуществляется его p-кратным сложением с самим собой. При умножении на $-p$ полученный отрезок откладываем в противоположную от точки 0 сторону. Умножение m/n на рациональное число p/q достигается умножением его на целое p с последующим делением полученного отрезка на q частей. Деление рациональных чисел определяем как операцию, обратную умножению. Полагаем, что $x<y$, если точка, представляющая рациональное число x, находится на прямой левее, чем точка, представляющая рациональное число y.

1. Положительные рациональные числа

Приступаем к формальному определению понятия положительного рационального числа. Вводим множество всех положительных рациональных чисел, которое обозначаем символом A. Полагаем, что множество N натуральных чисел с определенными на нем операциями сложения и умножения и отношением строгого порядка уже выбраны. Вводим, далее, предикат $R(x, y, z)$, определенный на $N\times N\times A$. Соответствующее ему отношение интерпретируем как связь между натуральными числами x, y и положительным рациональным числом $z=x/y$. Числа x, y и z связывает уравнение $yz=x$.

Если z рассматривать как натуральное число, то это уравнение будет разрешимо относительно z не при любых натуральных x и y. Требуя, чтобы уравнение $yz=x$ было разрешимо относительно z при любых натуральных x и y, мы, тем самым, расширяем множество натуральных чисел до множества всех положительных рациональных чисел. Предикат $R(x, y, z)$ связывает положительное рациональное число z с породившей его парой натуральных чисел x, y.

Множество A и предикат R на $N\times N\times A$ формально определяем следующими четырьмя свойствами, называемыми *аксиомами положительных рациональных чисел*:

включения

$$\forall\, x,y,z \in N\ \forall z' \in A(yz = x \wedge R(x,y,z') \supset z = z'); \quad (1)$$

функциональности

$$\forall\, x,y \in N\ \exists\, !z \in A\ R(x,y,z); \quad 2)$$

сюръективности

$$\forall\, z \in A\ \exists\, x,y \in N\ \ R(x,y,z); \quad (3)$$

равенства дробей

$$\forall\, x,x'y,y' \in N((\exists z \in A\ R(x,y,z) \wedge \wedge R(x',y',z)) \sim xy' = x' = x'y). \quad (4)$$

Содержательно аксиома (1) означает, что если имеется натуральное число z, удовлетворяющее условию $yz = x$, где x, y — произвольно выбранные натуральные числа, и положительное рациональное число z', удовлетворяющее условию $x/y = z'$ (то есть уравнению $yz' = x$), то $z = z'$. Таким образом, отображение $x/y = z'$, когда x нацело делится на y, дает тот же результат, что и решение уравнения $yz = x$, относительно переменной z. Иными словами, если область определения переменной z предиката $R\,(x, y, z)$ сузить до множества N, то предикат $R\,(x, y, z)$ превратится в предикат $P\,(y, z, x)$. Аксиома (2) означает, что предикат $R\,(x, y, z)$ определяет некоторую функцию $r\,(x,\ y) = z$, $r{:}N\times N\to A$. То есть решение уравнения $yz = x$ относительно z всегда существует и единственно в области положительных рациональных чисел. Функция $r\,(x, y)$ запишется в виде дроби: $r\,(x,\ y) = x/y$. Равенство $x/y = z$ означает то же самое, что и условие $R\,(x, y, z) = 1$. Аксиома (3) означает, что любое положительное рациональное число можно представить в виде дроби. Иначе говоря, функция r сюръективна. Аксиома (4) выражает известное правило, определяющее равенство дробей: при любых натуральных x, x', y, y' значения дробей x/y и x'/y' совпадают в том и только том случае, когда $xy' = x'y$. Множество A, удовлетворяющее аксиомам (1)÷(4), называется *множеством положительных рациональных чисел*. Предикат $R\,(x, y, z)$ называется *формирователем положительных рациональных чисел*. Он ставит в соответствие каждой паре натуральных чисел x, y единственное положительное рациональное число $z = x/y$.

Лемма 1. *Для любых x, y, $z\in N$ условия $x = y$, $x + z = y + z$ и $xz = yz$ равносильны. Также равносильны условия $x < y$, $x + z< y + z$ и $xz< yz$.*

Доказательство. Для любых x, y, $z\in N$ выполнено в точности одно из условий $x = y$ (а), $x < y$ (б), $y < x$ (в). В случае (а) для любого $z\in N$ имеем $x + z = y + z$ и $xz = yz$. Если верно (б), то существует $x'\in N$, такой что $x + x' = y$ и для любого $z\in N$ $(x + x') + z = y + z$, $(x + z) + x' = y + z, x + z < y + z$, а также $(x + x')\, z = yz$, $xz + x'z = yz$, $xz < yz$. Аналогично, в случае (в) для любого $z\in N$ $y{+}z < x{+}z$ и $yz < xz$. Поскольку перечисленные случаи взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности, доказательство леммы завершено.

Лемма 2. *Любое непустое множество натуральных чисел содержит минимальный элемент.*

Доказательство. Пусть M — непустое подмножество множества N. Рассмотрим множество $M_1 = \{x\in N | \forall y\in N(y\leq x \supset \neg M(y))\}$. Предположим, что в M нет минимального элемента. Тогда $1\in M_1$ в силу условия $\neg M(1)$ (иначе 1 — минимальный элемент в M). Пусть теперь $z\in M_1$. Тогда и $(z{+}1)\in M_1$, так как иначе $(z{+}1)$ будет минимальным элементом в M. Применяя аксиому индукции, получаем, что M_1 совпадает с N, что невозможно в силу предположения о непустоте множества M. Значит, в M имеется минимальный элемент. Лемма доказана.

Теорема 1 (о существовании множества положительных рациональных чисел и их формирователя). *Пусть (N, Q) — натуральный ряд. Тогда существуют множество A и предикат R на $N{\times}N{\times}A$, удовлетворяющие аксиомам положительных рациональных чисел.*

Доказательство. Определим на множестве $M{=}N{\times}N$ предикат E условием: $\forall(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)\in M$ $(E((x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)){\sim}x_1y_2 = x_2y_1)$.

Этот предикат, очевидно, обладает свойствами рефлексивности и симметричности. Покажем, что E транзитивен. Пусть $E\,((x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)) = E((x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3)) = 1$ для некоторых x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, $y_3 \in N$. Тогда $x_1y_2 = x_2y_1$, $x_2y_3 = x_3y_2$ и поэтому $(x_1y_2)(x_2y_3) = (x_2y_1)(x_3y_2)$, откуда, в силу свойств коммутативности и ассоциативности умножения натуральных чисел, следует $(x_1y_3)(x_2y_2) = (x_3y_1)(x_2y_2)$. Из последнего равенства вытекает, что $x_1y_3 = x_3y_1$ (в силу леммы 1). Поэтому предикат E транзитивен. А значит, E — эквивалентность, которой соответствует разбиение множества M на смежные классы, такое что $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $x_1y_2 = x_2y_1$. Образуем множество A, выбирая из каждого класса по элементу с наименьшим (в данном классе) натуральным числом на второй позиции. Такой выбор возможен в силу леммы 2, и условия, что если $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ эквивалентны и $x_1 \neq x_2$, то $y_1 \neq y_2$ (в силу аксиомы равенства дробей и леммы 1). Если класс эквивалентности содержит элемент вида $(x, 1)$, то в качестве представителя этого класса выбираем x. Далее, для удобства будем отождествлять элементы $(x, 1) \in N\times N$ и $x\in N$ (используя естественную биекцию φ множеств N и $\{(x,\ 1)| x\in N\}$, $\varphi{:}x\to(x,\ 1)$). Предикат R на $N{\times}N{\times}A$ определим условием: $\forall x$, $y\in N$ $\forall$ $z'\in A$ $(R\,(x, y, z') \sim (\ \forall x', y'\in N\, z' = (x', y')\supset xy' = x'y))$.

Проверяем, что множество A и предикат R удовлетворяют всем аксиомам положительных рациональных чисел. 1) Пусть для некоторых x, y, $z\in N$ выполнено условие $yz = x$. Тогда для любого $z'\in N$, $z' = (x',\ y')$ условие $R\,(x, y, z')$ влечет $xy' = x'y$. Используя лемму 1 и свойства коммутативности и ассоциативности умножения натуральных чисел, получаем $(yz)y' = x'y$, $(y'z)y = x'y$, $y'z = x'$, $zy' = x'1$, то есть $E((x',\ y'),\ (z,\ 1)) = 1$. В силу выбора множества A, последнее условие означает, что $(x', y') = (z, 1)$, или $z' = z$. 2) Для любых $x, y \in N$ существует, притом единственный, элемент $z' \in A$, такой что $E((x, y), z') = 1$. Пусть $z' = (x', y')$, тогда $xy' = x'y$ и по определению предиката R получаем $R(x, y, z') = 1$. 3) Пусть $z' \in A$ и $z = (x, y)$. Тогда, в силу очевидного равенства $xy = xy$, имеем $R(x, y, z) = 1$. 4) Для любых $x, x', y, y' \in N$ условие $xy' = x'y$ означает, что $E((x, y), (x', y')) = 1$. Поэтому существует $z' \in A$, такой что $R(x, y, z) = R(x', y', z) = 1$. Проверка выполнения аксиом положительных рациональных чисел для множества A и предиката R завершена. Теорема доказана.

Теорема 2 (о включении натуральных чисел в положительные рациональные). *Все натуральные числа являются также и положительными рациональными числами.*

Теорема означает, что множество положительных рациональных чисел является расширением множества натуральных чисел, то есть что $N \subseteq A$.

Доказательство. Из аксиомы (2) следует, что для любого $z \in N$ существует $z' \in A$, такое что $R(z, 1, z') = 1$. Тогда положив $x = z$, $y = 1$, из аксиомы (1) выводим $z = z'$. Итак, если $z \in N$, то $z \in A$. Теорема доказана.

Теорема 3 (об изоморфности множеств положительных рациональных чисел). *Пусть (N, Q) – натуральный ряд, а множества A, A' и предикаты R, R' на $N \times N \times A$ и $N \times N \times A'$ удовлетворяют аксиомам положительных рациональных чисел. Тогда существует биекция $\varphi: A \to A'$, такая что для любых $x, y \in N$ и $z \in A$ $R(x, y, z) = R'(x, y, \varphi(z))$.*

Смысл теоремы состоит в том, что положительные рациональные числа определяются аксиомами (1)÷(4) в абстрактном смысле однозначно (то есть с точностью до обозначений).

Доказательство. Рассмотрим отношение Φ на $A \times A'$, определяемое следующим образом: для всех $z \in A$ и $z' \in A'$

$$\Phi(z, z') = \exists x, y \in N(R(x, y, z) \wedge R'(x, y, z')).$$

Покажем, что отношение Φ определяет биекцию $\varphi(z) = z'$, отображающую A на A'. Выберем произвольно $z \in A$. По аксиоме (3) существуют $x, y \in N$, такие что $R(x, y, z) = 1$. Из аксиомы (2) следует существование единственного $z' \in A'$, для которого $R'(x, y, z') = 1$. По определению отношения Φ имеем $\Phi(z, z') = 1$. Покажем, что значением z элемент z' определяется однозначно. Предположим, что существует элемент $z'' \in A'$, такой что $\Phi(z, z'') = 1$ и $z'' \neq z'$. Тогда, по определению отношения Φ, существуют $x', y' \in N$, такие что $R(x', y', z) = R'(x', y', z'') = 1$. По аксиоме (4) из $R(x, y, z) = R(x', y', z) = 1$ следует $xy' = x'y$. Но тогда по той же аксиоме (4) существует $z''' \in A'$, такое что $R'(x', y', z''') = R'(x, y, z''') = 1$.

Итак, $R'(x, y, z') = R'(x, y, z''') = R'(x', y', z''') = R'(x', y', z'') = 1$. Тогда, в силу аксиомы (2), $z' = z'''$ и $z''' = z''$, а значит $z'' = z'$, что противоречит предположению. Единственность элемента z' доказана. Итак, для любого $z \in A$ существует единственный $z' \in A'$, такой что $\Phi(z, z') = 1$. Аналогично доказывается для любого $z' \in A'$ существование единственного $z \in A$, такого что $\Phi(z, z') = 1$. Это означает, что Φ определяет биекцию $\varphi: A \to A'$. Теорема доказана.

Переходим к аксиоматическому определению сложения и умножения положительных рациональных чисел. Запись x/y пары чисел x, y, определяющей положительное рациональное число $r(x, y)$, называется *дробью*. Рациональные положительные числа выражаются соответствующими им дробями. Дробей "больше", чем положительных рациональных чисел. Одно и то же положительное рациональное число можно представить разными дробями. Как узнать, какие дроби выражают одинаковые числа, а какие – разные? Ответ на этот вопрос дает *правило отождествления дробей*, основанное на аксиоме равенства дробей: равенство $x_1/y_1 = x_2/y_2$ равносильно равенству $x_1 y_2 = x_2 y_1$. Этим условием определяется отношение эквивалентности, разбивающее множество всех дробей на смежные классы. В каждом классе содержатся все дроби, обозначающие одно и то же положительное рациональное число. Эти классы можно принять в роли соответствующих положительных рациональных чисел.

Операции сложения и умножения положительных рациональных чисел определяются следующими правилами: если $x_1/y_1 = z_1$ и $x_2/y_2 = z_2$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1 y_2 + x_2 y_1)/y_1 y_2, \tag{5}$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 / y_1 y_2 \tag{6}$$

для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in N$; $z_1, z_2 \in A$. Важно подчеркнуть, что равенствами (5) и (6) определяются суммы и произведения не самих положительных рациональных чисел, а дробей, соответствующих этим числам. Поэтому необходимо убедится в корректности таких определений.

Определим на $A \times A \times A$ предикат сложения S и предикат умножения P положительных рациональных чисел условиями:

$$\begin{gathered}\forall z_1, z_2, z \in A(S(z_1, z_2, z) \sim (\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in N,\\ R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \supset R(x_1 y_2 + x_2 y_1, x_1 y_2, z)));\end{gathered} \tag{1'}$$

$$\begin{gathered}\forall z_1, z_2, z \in A(P(z_1, z_2, z) \sim (\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in N,\\ R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \supset R(x_1 x_2, y_1 y_2, z))).\end{gathered} \tag{2'}$$

Чтобы обосновать корректность введения операций сложения и умножения, нужно доказать, что предикты S и P обладают свойством функциональности.

Теорема 4 (о функциональности предикатов сложения и умножения положительных рациональных чисел). *Предикаты S и P на $A \times A \times A$ функциональны, то есть удовлетворяют условиям*:

$$\forall z_1, z_2, \in A \; \exists\, ! z \in A \; S(z_1, z_2, z); \tag{3'}$$

$$\forall z_1, z_2, \in A\ \exists\ !z \in A\ P(z_1, z_2, z). \qquad (4')$$

Доказательство. Выберем произвольно z_1, $z_2 \in A$ и пусть для некоторых $x_1, y_1, x_2, y_2 \in N$ $R(x_1, y_1, z_1) = R(x_2, y_2, z_2) = 1$ (а). По аксиоме функциональности (2) $\exists! z \in A$ $R(x_1y_2+x_2y_1, y_1y_2, z)$ (б). Покажем, что z не зависит от выбора x_1, y_1, x_2, y_2, а зависит только от z_1, z_2. Пусть для некоторых $x_1', y_1', x_2', y_2' \in N$ $R(x_1', y_1', z_1) = R(x_2', y_2', z_2) = 1$ (в). Тогда из аксиомы равенства дробей (4) и (а) следует $x_1y_1' = x_1'y_1$, то есть $(x_1y_2 + x_2y_1)y_1'y_2 = (x_1y_1'y_2 + x_2y_1y_1')y_2 = (x_1'y_1y_2 + x_2y_1'y_1)y_2 = (x_1'y_2 + x_2y_1')y_1y_2$.

Используя снова аксиому (4), получаем $R(x_1'y_2 + x_2y_1', y_1'y_2, z) = R(x_1y_2 + x_2y_1, y_1y_2, z) = 1$. Аналогично доказываем, что $R(x_1'y_2' + x_2'y_1', y_1'y_2', z) = 1$. С учетом (а), (б), (в), последнее равенство означает, что элемент $z \in A$ определяется из условия (б) однозначно по заданным z_1, $z_2 \in A$ и что $S(z_1, z_2, z) = 1$. Аналогично доказывается функциональность предиката умножения P. Теорема доказана.

Теорема 5 (об ассоциативности сложения положительных рациональных чисел). *Для всех* $z_1, z_2, z_3 \in A$ $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ (*a*).

Доказательство. Для любых $z_1, z_2, z_3 \in A$ и $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in N$ из условий $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \wedge R(x_3, y_3, z_3)$ и определения (1′) следует $R(x_1y_2+x_2y_1, y_1y_2, z_1+z_2) \wedge R(x_2y_3+x_3y_2, y_2y_3, z_2+z_3) \wedge R((x_1y_2+x_2y_1)y_3 + x_3(y_1y_2), (y_1y_2)y_3, (z_1+z_2)+z_3) \wedge R(x_1(y_2y_3)+(x_2y_3+x_3y_2)y_1, y_1(y_2y_3), z_1+(z_2+z_3))$. В силу ассоциативности сложения, а также ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности умножения натуральных чисел, имеем $(x_1y_2+x_2y_1)y_3 + x_3(y_1y_2) = (x_1(y_2y_3) + (x_2y_3)y_1) + (x_3y_2)y_1 = x_1(y_2y_3)+(x_2y_3+x_3y_2)y_1$, $(y_1y_2)y_3 = y_1(y_2y_3)$. Используя теперь аксиому функциональности (2), непосредственно получаем условие (а). Теорема доказана.

Теорема 6 (о коммутативности сложения положительных рациональных чисел). *Для всех* z_1, $z_2 \in A$ $z_1+z_2 = z_2+z_1$.

Доказательство. Для любых z_1, $z_2 \in A$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 \in N$ из условия $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2)$, в силу определения (1′), получаем $R(x_1y_2 + x_2y_1, y_1y_2, z_1 + z_2) \wedge R(x_2y_1 + x_1y_2, y_2y_1, z_2 + z_1)$. В силу коммутативности сложения и умножения натуральных чисел, $x_1y_2 + + x_2y_1 = x_2y_1 + x_1y_2$, $y_1y_2 = y_2y_1$, откуда (по аксиоме функциональности (2)), сразу получаем $z_1+z_2 = z_2+z_1$. Теорема доказана.

Теорема 7 (об ассоциативности умножения положительных рациональных чисел). *Для всех* $z_1, z_2, z_3 \in A$ $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.

Доказательство. Для всех $z_1, z_2, z_3 \in A$ и $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in N$ из условий $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \wedge R(x_3, y_3, z_3)$ и определения (2′) следует $R(x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2) \wedge R(x_2x_3, y_2y_3, z_2z_3) \wedge R((x_1x_2)x_3, (y_1y_2)y_3, (z_1z_2)z_3) \wedge R(x_1(x_2x_3), y_1(y_2y_3), z_1(z_2z_3))$. В силу ассоциативности умножения натуральных чисел, имеем $(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$, $(y_1y_2)y_3 = y_1(y_2y_3)$. Используя аксиому функциональности (2), получаем $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$. Теорема доказана.

Теорема 8 (о коммутативности умножения положительных рациональных чисел). *Для всех* z_1, $z_2 \in A$ $z_1z_2 = z_2z_1$.

Доказательство. Для любых z_1, $z_2 \in A$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 \in N$ из условия $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2)$ и определения (2′) следует $R(x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2) \wedge R(x_2x_1, y_2y_1, z_2z_1)$. В силу коммутативности умножения натуральных чисел, имеем $x_1x_2 = x_2x_1$, $y_1y_2 = y_2y_1$. Отсюда следует (по аксиоме функциональности (2)), что $z_1z_2 = z_2z_1$. Теорема доказана.

Теорема 9 (о дистрибутивности умножения положительных рациональных чисел относительно сложения). *Для всех* $z_1, z_2, z_3 \in A$ $(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3+z_2z_3$ (а).

Доказательство. Для любых $z_1, z_2, z_3 \in A$ и $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in N$ из условий $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \wedge R(x_3, y_3, z_3)$ и определений (1′), (2′) следует $R(x_1y_2+x_2y_1, y_1y_2, z_1+z_2) \wedge R((x_1y_2+x_2y_1)x_3, (y_1y_2)y_3, (z_1+z_2)z_3)) \wedge R((x_1x_3)(y_2y_3)+(x_2x_3)(y_1y_3), (y_1y_3)(y_2y_3), z_1z_3 + z_2z_3)$. В силу ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности умножения натуральных чисел, имеем $(x_1x_3)(y_2y_3) + (x_2x_3)(y_1y_3) = ((x_1y_2 + x_2y_1)x_3)y_3$, $(y_1y_3)(y_2y_3) = ((y_1y_2)y_3)y_3$. Применяя аксиому равенства дробей (4), получаем (а). Теорема доказана.

Определим далее отношение порядка на множестве положительных рациональных чисел. *Отношение порядка* $<$ на множестве A определяется правилом: для любых z_1, $z_2 \in A$ ($z_1 = x_1/y_1$, $z_2 = x_2/y_2$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in N$) условие $z_1 < z_2$ равносильно условию $x_1y_2 < x_2y_1$. Формально вводим *предикат порядка* $H(x, y)$ на $A \times A$, соответствующий отношению $x < y$, следующим прямым определением:

$$\begin{gathered}\forall\ z_1, z_2 \in A(H(z_1, z_2) \sim (\forall\ x_1, y_1, x_2, y_2 \in N,\\ R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \supset x_1y_2 < x_2y_1)).\end{gathered} \qquad (5')$$

Теорема 10 (о сравнимости положительных рациональных чисел). *Для любых* z_1, $z_2 \in A$ *выполнено ровно одно из условий* $z_1 = z_2$, $H(z_1, z_2) = 1$, $H(z_2, z_1) = 1$.

Доказательство. Выберем произвольно z_1, $z_2 \in A$. Тогда существуют $x_1, y_1, x_2, y_2 \in N$, такие что $R(x_1, y_1, z_1) = R(x_2, y_2, z_2) = 1$. По теореме о сравнимости натуральных чисел либо $x_1y_2 = x_2y_1$, либо $x_1y_2 < x_2y_1$, либо $x_2y_1 < x_1y_2$. Рассмотрим, например, случай $x_1y_2 < x_2y_1$ (а). Покажем, что тогда $H(z_1, z_2) = 1$. Пусть $x_1', y_1', x_2', y_2' \in N$, такие что $R(x_1', y_1', z_1) = R(x_2', y_2', z_2) = 1$. Тогда $x_1y_1' = x_1'y_1$ (б) и $x_2y_2' = x_2'y_2$ (по аксиоме равенства дробей). Из леммы 1 и условия (а) получаем $(x_1y_2)(x_1'y_1') < (x_2y_1)(x_1'y_1')$. Пользуясь свойствами коммутативности и ассоциативности умножения натуральных чисел, будем иметь $(x_1'y_2)(x_1y_1') < (x_2y_1')(x_1'y_1)$. Учитывая (б) и снова используя лемму 1, получаем $x_1'y_2 < x_2y_1'$. Продолжая аналогично, приходим к условию $x_1'y_2' < x_2'y_1'$. Это и означает, что $H(z_1, z_2) = 1$. В случае $x_2y_1 < x_1y_2$ подобное рассмотрение приводит к условию $H(z_2, z_1) = 1$. Если же имеет место равенство $x_1y_2 = x_2y_1$, то, по аксиоме равенства дробей (4), $\exists z \in A$ $R(x_1, y_1, z) \wedge R(x_2, y_2, z)$ и тогда, в силу аксиомы функциональности (2), получаем $z_1 = z_2 = z$. Теорема доказана.

Теорема 11 (о соответствиии операций сложения, умножения и отношения порядка на множествах натуральных чисел и положительных рациональных чисел). *Для любых* z_1, z_2, $z \in N$ *условия* $z_1+z_2=z$ (а), $z_1z_2=z$ (б), $z_1<z_2$ (в) *равносильны, соответственно, условиям* $S(z_1, z_2, z)=1$ (а′), $P(z_1, z_2, z)=1$ (б′), $H(z_1, z_2)=1$ (в′), *где S, P, H – предикаты сложения, умножения и порядка на множестве положительных рациональных чисел.*

Смысл этой теоремы состоит в том, что на множестве натуральных чисел вводимые теперь предикаты сложения, умножения и порядка совпадают с введенными ранее.

Доказательство. Пусть z_1, z_2, $z \in N$. Тогда имеем z_1, z_2, $z \in A$ (по теореме 2) и $R(z_1, 1, z_1)=R(z_2, 1, z_2)=$ $=R(z, 1, z)=1$ (г) (см. доказательство теоремы 2). Если выполнено условие (а′), то, согласно (г) и определению (1′), получаем $R(z_1+z_2, 1, z)=1$. Используя аксиому включения (1), выводим отсюда (а). По теореме 4, предикат S обладает свойством функциональности. Поэтому условия (а) и (а′) равносильны. Предположим теперь, что выполнено условие (б′). Тогда (согласно (г) и определению (2′)) получаем $R(z_1z_2, 1, z)=1$, откуда вытекает (б). Используя функциональность предиката P, приходим к выводу о равносильности условий (б) (б′). Пусть, наконец, выполнено условие (в′). Тогда, в силу (г) и определения (5′), получаем (в), а из теоремы о сравнимости положительных рациональных чисел выводим равносильность условий (в) и (в′). Теорема доказана.

Эта теорема позволяет в дальнейшем использовать единые обозначения для операций сложения, умножения и для записи отношения порядка на множествах натуральных чисел и положительных рациональных чисел.

Лемма 3. *Для любых* z_1, $z_2 \in A$ *условия* $z_2<z_1$ и $\exists z \in A$ $z_1=z_2+z$ *равносильны.*

Доказательство. Пусть z_1, $z_2 \in A$ и $z_2<z_1$. Тогда существуют такие x_1, y_1, x_2, $y_2 \in N$, что $R(x_1, y_1, z_1)=$ $=R(x_2, y_2, z_2)=1$ и $x_2y_1<x_1y_2$. В силу определения отношения порядка для натуральных чисел, найдется $u \in N$ такое, что $x_1y_2=x_2y_1+u$. По аксиоме функциональности (2) $\exists ! z \in A$ $R(u, y_1y_2, z)$. Тогда из условий $R(x_1, y_1, z_1)=R(x_1y_2, y_1y_2, z_1)=$ $=R(x_2y_1+u, y_1y_2, z_1)=R((x_2y_1+u)y_2, (y_1y_2)y_2, z_1)=$ $=R(x_2(y_1y_2)+uy_2, y_2(y_1y_2), z_1)=1$ и $R(x_2, y_2, z_2)=1$ следует $z_1=z_2+z$. (Здесь были использованы аксиома равенства дробей (4), а также свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности умножения натуральных чисел). Пусть теперь для некоторых z_1, z_2, $z \in A$ выполнено условие $z_1=z_2+z$. Тогда существуют $x_2, y_2, x, \in N$, удовлетворяющие условиям $R(x_2, y_2, z_2)=R(x, y, z)=R(x_2y+$ $+xy_2, y_2y, z_1)=1$. И поскольку $x_2(y_2y)<(x_2y+xy_2)y_2=$ $=x_2(y_2y)+(xy_2)y_2$, то получаем $z_2<z_1$. Лемма доказана.

Теорема 12 (о транзитивности отношения порядка на множестве положительных рациональных чисел). *Для всех* x, y, $z \in A$ *из* $x<y$ *и* $y<z$ *следует* $x<z$.

Доказательство. Пусть x, y, $z \in A$ и $x<y$, $y<z$. Тогда (по лемме 3) существуют u, $v \in A$, такие что $y=x+u$, $z=y+v$. Отсюда вытекает $z=(x+u)+v=x+(u+v)$ (в силу ассоциативности сложения), то есть $x<z$. Теорема доказана.

Дальнейшее развитие теории положительных рациональных чисел выходит за рамки теории интеллекта и поэтому здесь не рассматривается.

2. Произвольные рациональные числа

Пусть задано множество A положительных рациональных чисел, для которых определены операции сложения и умножения. Определим множество B всех *рациональных чисел* и предикат $T(x, y, z)$ на $A \times A \times B$, называемый *формирователем рациональных чисел*, который связывает рациональное число z с задающими его положительными рациональными числами x и y, следующими аксиомами:

включения

$$\forall\ x,y,z \in A, \forall\ z' \in B(y+z=x \wedge T(x,y,z') \supset z=z'); \quad (7)$$

функциональности

$$\forall\ x,y \in A\ \exists\ !z \in B\ \ T(x,y,z); \quad (8)$$

сюръективности

$$\forall\ z \in B\ \exists\ x,y \in A\ \ T(x,y,z); \quad (9)$$

равенства разностей

$$\begin{aligned}\forall\ x,x',y,y' \in A((\exists\ z \in zT(x,y,z) \wedge T(x',y',z')) \sim \\ \sim x+y'=x'+y).\end{aligned} \quad (10)$$

Лемма 4. *Для любых* x, y, $z \in A$ *условие* $x=y$ *равносильно* $x+z=y+z$, *а* $x<y$ *равносильно* $x+z<y+z$.

Доказательство. Для произвольных x, $y \in A$ выполнено в точности одно из условий $x=y$ (а), $x<y$ (б), $y<x$ (в). В случае (а), очевидно, имеем для любых $z \in A$ $x+z=y+z$. Если выполнено условие (б), то по лемме 3 существует $u \in A$, такое что $y=x+u$. Тогда $y+z=(x+u)+z=(x+z)+u$ при любом $z \in A$ и, снова используя лемму 3, получаем $x+z<y+z$. Аналогично, в случае (в) имеем для произвольного $z \in A$ $y+z<x+z$. Поскольку перечислены все возможные случаи и они взаимно исключают друг друга, доказательство леммы завершено.

Теорема 13 (о существовании множества рациональных чисел и их формирователя). *Существуют множество B и предикат T на* $A \times A \times B$, *удовлетворяющие аксиомам рациональных чисел.*

Доказательство. Определим на множестве $M=A \times A$ предикат E условием $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$ $E((x_1, y_1), (x_2,y_2)) \sim (x_1+y_2=x_2+y_1)$. Этот предикат, очевидно, обладает свойствами рефлексивности и симметричности. Покажем, что он транзитивен. Пусть $E((x_1, y_1), (x_2, y_2))=E((x_2, y_2), (x_3, y_3))=1$ для некоторых x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, $y_3 \in A$. Тогда $x_1+y_2=x_2+y_1$, $x_2+y_3=x_3+y_2$ и поэтому $(x_1+y_2)+(x_2+y_3)=$ $=(x_2+y_1)+(x_3+y_2)$, $(x_1+y_3)+(x_2+y_2)=(x_3+y_1)+(x_2+y_2)$. Используя лемму 4, получаем $x_1+y_3=x_3+y_1$, то есть

$E((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = 1$. Поэтому предикат E транзитивен. А следовательно E – эквивалентность, и множество M разбивается на смежные классы так, что (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $x_1+y_2 = x_2+y_1$. В каждом классе имеется, притом единственный, элемент $(x, 1)$, где $x \geq 1$, либо $(1, y)$, где $y \geq 1$. Действительно, если в паре (x_1, y_1) $x_1>y_1$, то по лемме 3 существует $z\in A$, такой что $x_1 = y_1+z$. Тогда $x_1+1 = (y_1+z)+1 = (z+1) + y_1$, то есть выполнено условие $E((x_1, y_1), (z+1,1)) = 1$, а значит $E((x_1, y_1), (x,1)) = 1$, где $x = z + 1 > 1$. Аналогично, если в паре (x_1, y_1) $y_1> x_1$, то существует $y\in A$, $y>1$, такой что $E((x_1, y_1),(1, y)) = 1$. Если же $x_1= y_1$, то, очевидно, выполнено условие $E((x_1, y_1), (1, 1)) = 1$. В случае $E((x, 1), (1, y)) = 1$, где $x\geq 1$, $y\geq 1$, получаем $x+y = 1+1$. Тогда $x = y =1$, иначе либо $x>1$, либо $y>1$, либо верны оба неравенства, и в любом из этих случаев существует $u\in A$, такое что $x + y = (1+1)+ u$, а значит (по лемме 3) $x + y > 1+1$. Если $E((x, 1), (x', 1))=1$ (или $E((1, y), (1, y')) = 1$), то $x+1 = 1+x'$ (соответственно $y+1 = 1+y'$), откуда (по лемме 4) получаем $x = x'$ (соответственно $y = y'$). Сформируем теперь множество B, выбирая из каждого класса эквивалентности такого представителя (x, y), что либо $x\geq 1$ и $y = 1$, либо $x = 1$ и $y\geq 1$. Элементы множества B вида $(x, 1)$, где $x >1$, будем отождествлять с элементами $z\in A$, такими что $x = 1 + z$. (единственность такого представления вытекает из леммы 4). Предикат T на $A\times A\times B$ определим условием $\forall x, y$, то $x+1=1+x'$ $\forall z\in B$ $T(x, y, z) \sim (\forall x', y'\in A\ z = (x', y') \supset x+y' = x'+y)$. Проверим, что множество B и предикат T удовлетворяют всем аксиомам рациональных чисел. 1) Пусть для некоторых x, y, $z\in A$ $y+z = x$. Для любого $z'\in B$, $z' = (x', y')$ условие $T(x, y, z') = 1$ означает, что $x+y'=x'+y$, тогда $(y+z)+y'=x'+y$, $((z+1)+y')+y=(x'+1)+y$, $(z+1)+y'=x'+1$, то есть $E((z+1), 1), (x', y'))=1$, $z'=z$ (так как элемент $(z+1, 1)\in B$ отождествляется с z). 2) Для любых x, $y\in A$ существует единственный $z\in B$, $z =(x', y')$, такой что $E((x, y), z) = 1$. Тогда $x+y' = x'+y$ и, по определению предиката T, $T(x, y, z) = 1$. 3) Для любого $z\in B$ существуют x, $y\in A$, такие что $z = (x, y)$. Тогда, в силу очевидного равенства $x+y = x+y$, имеем $T(x, y, z)=1$. 4) Для произвольных $x, x', y, y'\in A$ условие $x+y'=x'+y$ означает, что пары (x, y) и (x', y') принадлежат одному смежному классу. Но у каждого такого класса есть свой представитель во множестве B, то есть существует такой $z\in B$, что $T(x, y, z) = T(x', y', z) = 1$. Теорема доказана.

Теорема 14 (о включении положительных рациональных чисел в рациональные). *Все положительные рациональные числа являются также рациональными.*

Теорема означает, что множество рациональных чисел является расширением множества положительных рациональных чисел, то есть что $A \subseteq B$.

Доказательство. Выберем произвольно y, $z\in A$ и пусть $y+z = x$, где $x\in A$. По аксиоме (8) существует, притом единственный, элемент $z'\in B$, такой что $T(x, y, z')$. Но тогда, в силу (7), получим $z = z'$, то есть $z\in B$. Теорема доказана.

Теорема 15 (об изоморфности множеств рациональных чисел). *Пусть A - множество положительных рациональных чисел, а множества B, B' и предикаты T, T' на $A\times A\times B$ и $A\times A\times B'$ удовлетворяют аксиомам* (7)-(10). *Тогда существует биекция* φ: $B\to B'$, *такая что для любых x, $y\in A$ и $z\in B$* $T(x, y, z) = T'(x, y, \varphi(z))$.

Доказательство. В силу аксиомы (8), для любых x, $y\in A$ $(\exists! z\in B\ T(x, y, z))\wedge(\exists! z'\in B'\ T'(x, y, z'))$. Рассмотрим следующее отношение Φ на $B\times B'$: $\forall z\in B$ $\forall z'\in B'(\Phi(z, z') \sim (\exists x, y\in A\ T(x, y, z)\wedge T'(x, y, z')))$. Покажем, что Φ порождает биекцию $\varphi: B\to B'$. В силу (9), для любого $z\in B$ существуют такие x, $y \in A$, что $T(x, y, z)$. По аксиоме (8) $\exists! z'\in B'$ $T'(x, y, z')$. Поэтому $\Phi(z, z') = 1$. Покажем, что последнему равенству удовлетворяет единственный $z'\in B'$ (при фиксированном $z\in B$). Предположим, что $z''\in B'$ и $\Phi(z, z'') = 1$.

Тогда, согласно определению отношения Φ, $\exists x'$, $y'\in A(T(x', y', z) \wedge T'(x', y', z''))$. В силу аксиомы (10), из $T(x, y, z) = T(x', y', z) = 1$ следует $x+y' = x'+y$. Тогда, по той же аксиоме, существует $z'''\in B'$, такой что $T'(x, y, z''') = T'(x', y', z''')=1$. Используя аксиому (8), получаем $z''' = z'' = z'$. Поэтому $\forall z\in B\ \exists! z'\in B'$ $\Phi(z, z')$. Аналогично, $\forall z'\in B'\ \exists! z\in B\ \Phi(z, z')$. Поэтому отношение Φ определяет биекцию $\varphi: B\to B'$, при этом $T(x, y, z) = T'(x, y, \varphi(z))$ для любых x, $y\in A$ и $z\in B$. Теорема доказана.

Переходим к определению сложения и умножения рациональных чисел**.** Пусть задано множество A положительных рациональных чисел и операции сложения и умножения на нем. Пусть, кроме того, множество B и предикат T на $A\times A\times B$ удовлетворяют условиям (7)$\div$(10). Предикат S на $B\times B\times B$ называется *предикатом сложения рациональных чисел*, если для любых z_1, z_2, $z\in B$

$$S(z_1,z_2,z,) \sim (\forall\ x_1,x_2,y_1,y_2 \in A\ \ T(x_1,y_1,z_1) \wedge \wedge T(x_2,y_2,z_2,) \supset T(x_1+x_2,y_1+y_2,z)). \qquad (6')$$

При выполнении условия (6′) будем писать $z_1+z_2 = z$. Предикат P на $B\times B\times B$ называется *предикатом умножения рациональных чисел*, если для любых z_1, z_2, $z\in B$

$$P(z_1,z_2,z,) \sim (\forall\ x_1,x_2,y_1,y_2 \in A\ \ T(x_1,y_1,z_1) \wedge \wedge T(x_2,y_2,z_2,) \supset T(x_1x_2+y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2,z)). \qquad (7')$$

При выполнении условия (7′) будем писать $z_1z_2=z$.

Теорема 16 (о функциональности предикатов сложения и умножения рациональных чисел). *Предикаты S и P на $B\times B\times B$ функциональны, то есть удовлетворяют условиям*:

$$\forall\ z_1,z_2 \in B\ \exists\ !z \in B\ S(z_1,z_2,z); \qquad (8')$$

$$\forall\ z_1,z_2 \in B\ \exists\ !z \in B\ P(z_1,z_2,z). \qquad (9')$$

Доказательство. Выберем произвольно z_1, $z_2 \in B$ и пусть для некоторых x_1, x_2, y_1, $y_2 \in A$ $T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2) = 1$ (а). По аксиоме функциональности (8) $\exists! \, z \in B$ $T(x_1+x_2, y_1+y_2, z)$ (б). Покажем, что z не зависит от выбора x_1, x_2, y_1, y_2, а зависит только от z_1, z_2. Пусть для некоторых x_1', y_1', x_2', $y_2' \in A$ $T(x_1', y_1', z_1) = T(x_2', y_2', z_2) = 1$ (в). Тогда из аксиомы равенства разностей (10) и (а) следует $x_1 + y_1' = x_1' + y_1$, $x_2 + y_2' = x_2' + y_2$, то есть $(x_1 + x_2) + (y_1' + y_2') = (x_1' + x_2') + (y_1 + y_2)$ (в силу коммутативности и ассоциативности сложения положительных рациональных чисел). Снова используя аксиомы (8) и (10), получаем $T(x_1'+x_2', y_1'+y_2', z) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z) = 1$. С учетом (а), (б), (в), последнее равенство означает, что по заданным z_1, $z_2 \in B$ элемент $z \in B$, удовлетворяющий условию (б), определяется однозначно, независимо от выбора x_1, x_2, y_1, y_2, и что $S(z_1, z_2, z) = 1$. Функциональность предиката сложения S доказана.

Доказываем функциональность предиката умножения P. Покажем, что для любых z_1, $z_2 \in B$ существует, притом единственный, $z \in B$, такой, что для любых x_1, x_2, y_1, $y_2 \in A$ $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \supset T((x_1x_2 + y_1y_2), (x_1y_2 + y_1x_2), z)$. Предположим, что $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_1', y_1', z_1) = 1$ (г), $T(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2, z) = 1$ (д), $T((x_1'x_2+y_1'y_2), (x_1'y_2 + y_1'x_2), z') = 1$ (ж). Покажем, что тогда $z' = z$. Из (г) следует $x_1+y_1' = x_1' + y_1$. Тогда $(x_1+y_1')x_2 = (x_1'+y_1)x_2$, $(x_1'+y_1)y_2 = (x_1+y_1')y_2$. Складывая соответственно правые и левые части последних двух равенств, получаем $(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1'y_2 + y_1'x_2) = (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1'x_2 + y_1'y_2)$. Учитывая (д), (ж), будем иметь $z = z'$ (в силу аксиомы (10)). Отсюда следует, что если $T(x_1, y_1, z_1)$ $T(x_2, y_2, z_2)$ $\wedge$ $T(x_1x_2+y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2, z) = 1$, то z не зависит от выбора пары x_1, $y_1 \in A$, а зависит только от z_1 (при фиксированных z_2, x_2, y_2). Аналогично z не зависит от выбора пары x_2, $y_2 \in A$, а только от z_2. Утверждение, сформулированное в начале доказательства, верно. А из этого утверждения, в свою очередь, следует справедливость теоремы, то есть для любых z_1, $z_2 \in B$ существует единственный $z \in B$, такой что $P(z_1, z_2, z)=1$. Этот элемент $z \in B$ определяется условием $T((x_1x_2 + y_1y_2), (x_1y_2 + y_1x_2), z) = 1$, где x_1, x_2, y_1, $y_2 \in A$ – любые, удовлетворяющие равенству $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) = 1$. Теорема доказана.

При выполнении условий (6′) или (7′) будем писать, соответственно, $z = z_1 + z_2$ или $z = z_1z_2$.

Теорема 17 (об ассоциативности сложения рациональных чисел). *Для всех* z_1, z_2, $z_3 \in B$ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (а).

Доказательство. Для любых $z_1, z_2, z_3 \in B$ и $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_3, y_3, z_3)$ и определения (6′) вытекает $T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \wedge T(x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3) \wedge T((x_1+x_2)+x_3, (y_1+y_2)+y_3, (z_1+z_2)+z_3) \wedge T(x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3), z_1+(z_2+z_3))$. В силу ассоциативности сложения положительных рациональных чисел, имеем $(x_1+x_2)+x_3 = x_1+(x_2+x_3)$, $(y_1+y_2)+y_3 = y_1+(y_2+y_3)$. Тогда, используя аксиому функциональности (8), получаем (а). Теорема доказана.

Теорема 18 (о коммутативности сложения рациональных чисел). *Для всех* z_1, $z_2 \in B$ $z_1 + z_2 = z_2+z_1$.

Доказательство. Для любых z_1, $z_2 \in B$, x_1, x_2, y_1, $y_2 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2)$ и определения (6′) получаем $T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \wedge T(x_2+x_1, y_2+y_1, z_2+z_1)$. Отсюда, используя коммутативность сложения положительных рациональных чисел и аксиому функциональности (8), выводим $z_1+z_2 = z_2+z_1$. Теорема доказана.

Теорема 19 (об ассоциативности умножения рациональных чисел). *Для всех* z_1, z_2, $z_3 \in B (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (а).

Доказательство. Для любых z_1, z_2, $z_3 \in B$ и x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, $y_3 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_3, y_3, z_3)$ и определения (7′) вытекает $T(x_1x_2+y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2, z_1z_2) \wedge T(x_2x_3+y_2y_3, x_2y_3+y_2x_3, z_2z_3) \wedge T((x_1x_2+y_1y_2)x_3+(x_1y_2+y_1x_2)y_3, (x_1x_2+y_1y_2)y_3+(x_1y_2+y_1x_2)x_3, (z_1z_2)z_3) \wedge T(x_1(x_2x_3 + y_2y_3) + y_1(x_2y_3+y_2x_3), x_1(x_2y_3+y_2x_3) + y_1(x_2x_3+y_2y_3), z_1(z_2z_3))$. В силу ассоциативности и дистрибутивности умножения и сложения положительных рациональных чисел, получаем $(x_1x_2+y_1y_2)x_3 + (x_1y_2+y_1x_2)y_3 = x_1(x_2x_3+y_2y_3) + y_1(x_2y_3+y_2x_3)$, $(x_1x_2+y_1y_2)y_3 + (x_1y_2+y_1x_2)x_3 = x_1(x_2y_3+y_2x_3) + y_1(x_2x_3+y_2y_3)$. Учитывая аксиому функциональности (8), получаем (а). Теорема доказана.

Теорема 20 (о коммутативности умножения рациональных чисел). *Для всех* z_1, $z_2 \in B$ $z_1z_2 = z_2z_1$.

Доказательство. Для любых z_1, $z_2 \in B$ и x_1, x_2, y_1, $y_2 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2)$ и определения (7′) получаем $T(x_1x_2+ y_1y_2, x_1y_2+ y_1x_2, z_1z_2) \wedge T(x_2x_1 + y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1, z_2z_1)$. Используя коммутативность сложения и умножения положительных рациональных чисел и аксиому функциональности (8), выводим отсюда $z_1z_2 = z_2z_1$. Теорема доказана.

Теорема 21 (о дистрибутивности умножения рациональных чисел относительно сложения). *Для всех* z_1, z_2, $z_3 \in B$ $(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3+z_2z_3$ (а).

Доказательство. Для любых $z_1, z_2, z_3 \in B$ и $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_3, y_3, z_3)$ и определений (6′), (7′) следует $T((x_1+x_2)x_3+(y_1 + y_2)y_3, (x_1+x_2)y_3 + (y_1+ y_2)x_3, (z_1 + z_2)z_3) \wedge T((x_1x_3+y_1y_3)+(x_2x_3+y_2y_3), (x_1y_3+y_1x_3)+(x_2y_3+ y_2x_3), z_1z_3+z_2z_3)$. Используя коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность умножения и сложения положительных рациональных чисел, получаем $(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2) y_3 = (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3)$, $(x_1+x_2)y_3+ (y_1+y_2) x_3 = (x_1y_3+y_1x_3) + (x_2y_3+y_2x_3)$. Применяя аксиому функциональности (8), выводим отсюда условие (а). Теорема доказана.

Определяем порядок на множестве рациональных чисел. Пусть задано множество A положительных рациональных чисел, а множество B и предикат T на $A \times A \times B$ удовлетворяют аксиомам (7)÷(10).

Предикат порядка $H(x, y)$ на $B{\times}B$, соответствующий *отношению порядка* $x < y$, вводим прямым определением:

$$\forall\, z_1, z_2 \in B(H(z_1,z_2) \sim (\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in A \;\; T(x_1, y_1, z) \wedge$$
$$\wedge T(x_2, y_2, z_2) \supset x_1 + y_2 < x_2 + y_1)). \qquad (11)$$

Для доказательства корректности этого определения понадобится следующая

Теорема 22 (о сравнимости рациональных чисел). *Для любых* z_1, $z_2 \in B$ *выполнено в точности одно из условий* $z_1 = z_2$, $H(z_1, z_2) = 1$, $H(z_2, z_1) = 1$.

Доказательство. Выберем произвольно z_1, $z_2 \in B$. Тогда существуют x_1, x_2, y_1, $y_2 \in A$, такие что $T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2) = 1$. По теореме о сравнимости положительных рациональных чисел либо $x_1+y_2 = x_2+y_1$ (а), либо $x_1+y_2 < x_2+y_1$ (б), либо $x_2+y_1 < x_1+y_2$ (в). Пусть, например, выполнено условие (б). Покажем, что тогда $H(z_1, z_2) = 1$ (очевидно, что возможности $z_1 = z_2$ и $H(z_2, z_1) = 1$ исключены). Пусть x_1', x_2', y_1', $y_2' \in A$ – такие, что $T(x_1', y_1', z_1) = T(x_2', y_2', z_2) = 1$. Тогда по аксиоме равенства разностей (10) $x_1 + y_1' = x_1' + y_1$ (г) и $x_2+y_2' = x_2'+y_2$. Из леммы (3) и условий (б), (г) получаем $(x_1+y_2)+(x_1'+y_1) < (x_2+y_1)+(x_1+y_1')$. Пользуясь свойствами коммутативности и ассоциативности сложения положительных рациональных чисел, имеем $(x_1' + y_2) + (x_1 + y_1) < (x_2 + y_1') + (x_1 + y_1)$. Снова используя лемму 3, получаем $x_1'+y_2 < x_2+y_1'$. Продолжая аналогично, приходим к условию $x_1' + y_2' < x_2' + y_1'$. Это означает, что $H(z_1, z_2) = 1$. В случае (в) подобное рассмотрение приводит к выводу $H(z_2, z_1) = 1$. Если же выполнено условие (а), то, по аксиоме равенства разностей (10), $\exists z \in B\; T(x_1, y_1, z) = T(x_2, y_2, z) = 1$ и тогда, в силу аксиомы функциональности (8), получаем $z_1 = z_2 = z$. Теорема доказана.

Лемма 5. *Для любых* $x, y \in A$ $T(x + y, y, x) = 1$.

Доказательство. Согласно аксиоме функциональности (8), для произвольных $x, y \in A$ существует $z \in B$ такой, что $T(x+y, y, z) = 1$. Из аксиомы включения (7) и коммутативности сложения положительных рациональных чисел получаем $x = z$. Лемма доказана.

Теорема 23 (о соответствии операций сложения, умножения и отношения порядка на множествах рациональных и положительных рациональных чисел). *Для любых* z_1, z_2, $z \in A$ *условия* $z_1+z_2 = z$ (а), $z_1z_2 = z$ (б), $z_1 < z_2$ (в) *равносильны, соответственно, условиям* $S(z_1, z_2, z) = 1$ (а′), $P(z_1, z_2, z) = 1$ (б′), $H(z_1, z_2) = 1$ (в′), *где* S, P, H *– предикаты сложения, умноженя и порядка на множестве рациональных чисел.*

Доказательство. Пусть z_1, z_2, $z \in A$. По теореме 7, имеем z_1, z_2, $z \in B$, а из леммы 5 получаем $T(z_1+1, -, z_1) = T(z_2 + 1, 1, z_2) = 1$ (г). Если выполнено условие (а′), то, согласно (г) и определению (6′), будем иметь $T((z_1+1)+(z_2+1), 1+1, z) = 1$, $T((z_1+z_2)+(1+1), 1+1, z) = 1$. Полагая в лемме 5 $x = z_1+z_2$, $y = 1+1$ и пользуясь аксиомой функциональности (8), из последнего условия получаем (а). С учетом функциональности предиката S, выводим отсюда равносильность условий (а) и (а′). Предположим теперь, что выполнено условие (б′). Тогда из (г) и определения (7′) получаем $T((z_1+1)(z_2+1)+1{\cdot}1, (z_1+1)1+1(z_2+1), z) = 1$, $T(z_1z_2+((z_1+z_2)+(1+1)), (z_1+z_2)+(1+1), z) = 1$. Пользуясь леммой 5 (полагая в ней $x = z_1z_2$, $y = (z_1+z_2)+(1+1)$) и аксиомой функциональности (8), получаем (б). Учитывая функциональность предиката P, приходим к выводу о равносильности условий (б) и (б′). Пусть, наконец, выполнено условие (в′). Тогда из (г) и определения (11) получаем $(z_1+1)+1 < (z_2+1)+1$, $z_1+(1+1) < z_2+(1+1)$, или (с учетом леммы 4) $z_1 < z_2$. Отсюда и из теоремы о сравнимости рациональных чисел выводим равносильность условий (в) и (в′). Теорема доказана.

Определяем число нуль. *Нулем* называется любой элемент $0 \in B$, такой что для любого $x \in A$ $T(x, x, 0) = 1$.

Теорема 24 (о существовании и единственности нуля). *Существует единственный нуль.*

Доказательство Выберем произвольный $x \in A$. Тогда по аксиоме (8) существует, притом единственный, элемент $0 \in B$, такой что $T(x, x, 0)$. Пусть $y \in A$ и $y \neq x$. Существует элемент $z \in B$, такой что $T(y, y, z)$. Покажем, что $z = 0$. Действительно, из аксиомы (10) следует существование $u \in B$, такого что $T(x, x, u) = T(y, y, u) = 1$, поскольку $x + y = y + x$. В силу аксиомы (8), этот элемент единственный, то есть $u = z = 0$. Теорема доказана.

Теорема 25 (о свойствах нуля). *Для любого* $x \in B$ 1) $x+0 = x$, 2) $x0 = 0$.

Доказательство. Выберем произвольно $x \in B$ и пусть $T(y, z, x) = 1$, где y, $z \in A$. 1) Из $T(y, y, 0) = T(y, z, x) = 1$ следует $T(y + y, y + z, 0 + x) = 1$ (а). Поскольку $y+(y+z) = (y+y)+z$, то, в силу аксиомы (10), существует $x_1 \in B$, такой что $T(y+y, y+z, x_1) = T(y, z, x_1) = 1$ (б). Используя аксиому (8), получим $x_1 = x$, а из (а) и (б) следует $0 + x = x$. 2) По определению произведения рациональных чисел, из $T(y, z, x) = T(y, y, 0) = 1$ следует $T(yy + zy, yy + zy, x0) = 1$. Отсюда вытекает $x0 = 0$. Теорема доказана.

Определяем понятие противоположного числа. Числом, *противоположным* числу $x \in B$, называется любой элемент $-x \in B$, такой что $x+(-x)=0$.

Теорема 26 (о противоположном рациональном числе). *Для любого* $x \in B$ *существует единственное противоположное число* $-x \in B$.

Доказательство. Выберем произвольно $x \in B$, и пусть $T(y, z, x)=1$, где y, $z \in A$. Обозначим через $-x$ такой элемент из B, что $T(z, y, -x)=1$. Тогда выполняется условие $T(y+z, z+y, x+(-x))$, откуда следует, что $x+(-x)=0$. Если существует $x_1 \in B$, такой что $x + x_1 = 0$, то $(x + x_1) + (-x) = 0 + (-x)$, $(x+(-x))+x_1 = -x$, $x_1 = -x$. Отсюда вытекает, что для любого $x \in B$ элемент $-x$ определен единственным образом. Теорема доказана.

Введение рациональных чисел не сопровождалось комментариями, поскольку оно осуществлялось по той же методике, что и введение положительных рациональных чисел. Различие состоит лишь в том, что теперь для дальнейшего расширения множества чисел используется не операция умножения, а сложение. Рациональные числа определяются как значения функции $t(x, y) = x–y$, где x и y – положительные рациональные числа. Рациональное число $z = x–y$ появляется в результате решения уравнения $y + z = x$ или, что то же, уравнения $T(x, y, z) = 1$. Разности положительных рациональных чисел отождествляются по правилу: $x–y = x'–y'$ равносильно $x+y' = x'+y$. Сложение и умножение рациональных чисел определяются равенствами: $(x–y)+(x'–y') = (x+x')–(y+y')$; $(x–y)(x'–y') = (xx'+yy') – (xy'+yx')$. Порядок на множестве рациональных чисел определяется правилом: $x–y<x'–y'$ равносильно $x+y'<x'+y$. Число 0 вводится равенством $0 = x–x$, оно не зависит от выбора $x\in A$. Все рациональные числа линейно упорядочены.

Далее понадобятся следующие леммы.

Лемма 6. *Для любых* $z_1, z_2\in B$ *условия* $z_2 < z_1$ *и* $\exists z\in A$ $z_1 = z_2+z$ *равносильны.*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2\in B$ и $z_2 < z_1$. Тогда существуют такие $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A$, что $T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2) = 1$ и $x_2+y_1 < x_1+y_2$. По лемме 3 существует $z\in A$, такой что $x_1+y_2 = (x_2+y_1) + z$, или, в силу коммутативности и ассоциативности сложения положительных рациональных чисел и леммы 4, $x_1+(y_2+1) = (x_2+(z+1)) + y_1$. Тогда из аксиомы равенства разностей следует $T(x_2+(z+1), y_2+1, z_1) = T(x_1, y_1, z_1) = 1$, а поскольку $T(x_2, y_2, z_2) = T(z + 1, 1, z)=1$, то $z_1 = z_2 + z$. Пусть теперь для некоторых $z_1, z_2\in B$, $z\in A$ выполнено условие $z_1=z_2+z$. Тогда существуют $x_1, y_1, x_2, y_2\in A$ такие, что $T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2) = T(z+1, 1, z) = T(x_2 + (z+1), y_2+1, z_1) = 1$. Используя аксиому равенства разностей и лемму 3, получаем отсюда $x_1+(y_2+1) = (x_2+(z+1))+y_1$, $x_1+y_2 = (x_2+y_1)+ z$, $x_2+y_1 < x_1+y_2$, то есть $z_2 < z_1$. Лемма доказана.

Теорема 27 (о транзитивности отношения порядка на множестве рациональных чисел). *Для всех* $x, y, z\in B$ *из* $x < y$, $y < z$ *следует* $x < z$.

Доказательство. Пусть $x, y, z\in B$ и $x < y$, $y < z$. Тогда, по лемме 6, существуют такие $u, v\in A$, что $y = x + u$, $z = y + v$. Отсюда и из теоремы об ассоциативности сложения рациональных чисел следует $z = (x + u) + v = x + (u + v)$. Снова используя лемму 6, получаем $x < z$. Теорема доказана.

Отношение *нестрогого порядка* для рациональных чисел определяем условием $\forall x, y\in B\,((x\le y) \sim ((x<y) \vee (x=y)))$.

Теорема 28 (об упорядоченности множества рациональных чисел). *Множество рациональных чисел с определенным на нем отношением нестрогого порядка является цепью.*

Доказательство. Отношение нестрогого порядка рефлексивно, так как для любого $x\in B$ имеем $x = x$, а значит $x \le x$. Доказываем антисимметричность этого отношения. Пусть $x, y\in B$ и одновременно $x\le y$, $y\le x$, то есть выполнены условия $(x < y) \vee (x = y)$ и $(y<x) \vee (y = x)$. Из теоремы о сравнимости рациональных чисел следует, что такое возможно лишь в случае $x = y$. Поэтому нестрогий порядок обладает свойством антисимметричности. Свойство транзитивности нестрогого порядка выводится из предыдущей теоремы с учетом того, что для любых $x, y, z\in B$ условие $(x < y) \wedge \wedge(y = z)$ или $(x = y) \wedge (y < z)$ влечет $x < z$, а условие $(x = y) \wedge (y = z)$ влечет $x = z$. Наконец, для любых $x, y\in B$ всегда либо $x = y$, либо $x < y$, либо $y < x$ (по теореме о сравнимости рациональных чисел), и поэтому условие $(x\le y) \vee (y\le x)$ выполнено. Теорема доказана.

Лемма 7. *Для всех* $z\in B$ $1z = z$ *и* $(–1)z = –z$.

Доказательство. Для любого $z\in A$ существуют $x, y\in N$, такие что $R(x, y, z)=1$. Тогда, в силу условия $R(1, 1, 1)=1$ и определения умножения, получаем $R(1x, 1y, 1z) = 1$, $R(x, y, 1z) = 1$. По аксиоме (2), отсюда имеем $1z = z$. Пусть теперь $z\in B$, $x, y\in A$ и $T(x, y, z)=1$. Тогда, в силу условия $T(1+1, 1, 1)=1$ и определения умножения, получаем $T((1+1)x+1y, (1+1)y+1x, 1z)=1$. Используя равенство $x +((1+1)y+ x1) = (1+1)\,x +(1+1)y =((1+1)x+1y)+y$, аксиомы функциональности (8) и равенства разностей (10), получаем $z = 1z$. Доказываем вторую часть леммы. Для любого $z\in B$ имеем $z + (–1)\,z = (1 + (–1))\,z = 0z = 0$. По теореме о противоположном рациональном числе, получаем отсюда $(–1)z = –z$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Для всех* $z\in B$ *условия* $z > 0$ (а), $z\in A$ (б) *и* $(–z) < 0$ (в) *равносильны. Также равносильны условия* $z < 0$ (г) *и* $(–z) > 0$ (д).

Доказательство. В силу леммы 6, условие (а) равносильно условию $\exists z'\in A$ $z = 0+z'$, $z = z'$. Поэтому (а) и (б) равносильны. С другой стороны, по лемме 6, условие (в) выполняется тогда и только тогда, когда существует $z''\in A$, такой что $(–z) + z'' = 0$, то есть $z'' = –(–z) = z$ и верно (а). Доказываем равносильность условий (г) и (д). Для любого $z\in B$ имеем $z + (–z) = 0$, то есть $z < 0$ тогда и только тогда, когда $–z\in A$ (в силу леммы 6), то есть когда $–z > 0$. Лемма доказана.

Определяем понятие обратного числа, Числом, *обратным* числу $z\in B$ $z\ne 0$, называется любой элемент $z^{-1}\in B$, такой что $zz^{-1} = 1$.

Теорема 29 (об обратном рациональном числе). *Для любого* $z\in B$, $z\ne 0$ *существует, притом единственное, обратное число.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $z\in A$. По аксиоме (3), существуют $x, y\in N$, такие что $R(x, y, z)=1$. В силу аксиомы (2) найдется такой $z_1\in A$, что $R(y, x, z_1)=1$. Тогда из условий $R(xy, yx, zz_1) = R(xy, xy, zz_1) = 1$, $(xy)1 = xy$ и аксиомы включения (1) будем иметь $zz_1 = 1$. Предположим, существует такой $z_2\in A$, что $zz_2 = 1$. Тогда из равенства $zz_1 = zz_2$ получаем $z_1(zz_1) = z_1(zz_2)$, $(z_1z)z_1 = (z_1z)z_2$, $1z_1 = 1z_2$, $z_1 = z_2$. Поэтому $z_1 = z^{-1}$ и это обратное число определено для каждого $z \in A$ единственным образом. Пусть теперь $z \in B$ и $z < 0$. Тогда, по лемме 8, $(-z) \in A$ и поэтому существует $(-z)^1 \in A$, такой что $(-z)(-z)^{-1}=1$. Используя коммутативность и ассоциативность умножения и лемму 7, получаем $((-1)z)(-z)^{-1} = 1$, $z((-1)(-z)^{-1}) = 1$, $(-(-z)^{-1})z=1$, $z(-(-z)^{-1})=1$, то есть число $-(-z)^{-1}$ является обратным числу z. Доказательство единственности обратного числа для отрицательных рациональных чисел проводится точно так же, как для положительных. Теорема доказана.

Лемма 9. *Для любых* $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A$ *условие* $(x_2<x_1) \wedge \wedge (y_2<y_1)$ (а) *влечет* $x_2y_2 < x_1y_1$.

Доказательство. Пусть для некоторых $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A$ верно (а). Тогда, по лемме 3, существуют u, $v \in A$, такие что $x_1 = x_2 + u$, $y_1 = y_2 + v$, и значит $x_1y_1 = x_2y_2 + ((x_2v + uy_2) + uv)$. Снова используя лемму 2, получаем $x_2y_2 < x_1y_1$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Для любых* $x_1, y_1, x_2, y_2 \in B$ *условие* $(x_2<x_1) \wedge (y_2<y_1)$ (б) *влечет* $x_2+y_2 < x_1+y_1$.

Доказательство. Пусть для некоторых $x_1, y_1, x_2, y_2 \in B$ верно (б). Тогда, по лемме 6, существуют u, $v \in A$, такие что $x_1 = x_2 + u$, $y_1 = y_2 + v$, то есть $x_1 + y_1 = (x_2 + y_2) + (u + v)$. Снова используя лемму 6, получаем $x_2+y_2 < x_1+y_1$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Для любых* x, $y \in B$ *условия* $x < y$ *и* $-y < -x$ *равносильны.*

Доказательство. Если x, $y \in B$ *и* $x < y$, то невозможно $-x = -y$. Также неверно $-x < -y$, потому что иначе имеем $x+(-x) < y+(-y)$ (по лемме 10), $0<0$ – противоречие. Поэтому условие $x < y$ влечет $-y < -x$, а в силу равенств $-(-x) = x$, $-(-y) = y$ верно и обратное утверждение. Лемма доказана.

Выводы

Полученные здесь результаты по идентификации понятия числа имеют много общего с известными положениями из учения об основаниях арифметики, поэтому необходимо проанализировать различие между ними. В нашей постановке речь идет только об идентификации (то есть о математическом описании) понятия числа, вопрос об обосновании этого понятия не ставится. При решении задачи идентификации объектов все средства формального описания хороши, лишь бы они были надежны; нет необходимости их ограничивать, как это делается в математической логике при обосновании понятий арифметики. Снятие запрета на средства формального описания дает возможность идентифицировать именно ту арифметику, которая фактически используется в математической практике, а не тот ее вариант, который носит название *формальной арифметики*.

Наиболее близкую к формулируемой здесь постановку задачи мы находим в классической работе Ландау [3], опубликованной впервые в 1930 году. Насколько нам известно, до настоящего времени результаты этой работы не пересматривались и не улучшались. Главный недостаток данной работы, оцениваемой нами с точки зрения задачи идентификации (а такая задача в ней не ставится, поскольку речь там идет только об обосновании арифметики), заключается в том, что в ней все аксиомы арифметики записаны на неформализованном логическом языке, то есть. на том языке, который был общепринятым среди математиков в то время, когда эта работа была написана. При решении задачи идентификации этого недостаточно. Для этой цели мы использовали язык алгебры подстановочных операций [1]. Аксиомы (1)-(5), (15), (16), (20) и (21) из первой части настоящей работы, по существу, повторяют формулировки Ландау, различие заключается лишь в языке описания. Аксиомы (1)-(4) из второй части этой работы у Ландау вовсе отсутствуют. Это обусловлено тем, что он вводит положительные рациональные числа прямым определением, как классы эквивалентных дробей (пар натуральных чисел). Однако при использовании языка алгебры подстановочных операций необходимо вводить предикат R, связывающий пары натуральных чисел с положительными рациональными. То же самое относится и к аксиомам (7)-(10), которые определяют множество всех рациональных чисел и предикат T, связывающий их с парами положительных рациональных чисел.

Список литературы: 1. *Баталин, А.В.* О теории натурального ряда [Текст] / *А.В. Баталин, З.В. Дударь, С.А. Пославский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. – С. 135-144. 2. *Баталин, А.В.* О теории рациональных и вещественных чисел [Текст] / *А.В. Баталин, С.А. Пославский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. – С. 155-164. 3. *Ландау, Э.* Основы анализа. [Текст] / *Э. Ландау*.– М.: ИЛ, 1947. – 182 с.

Поступила в редколлегию 20.04.2010

УДК 519.7

Про теорію раціональних чисел / М.Ф. Бондаренко, Н.П. Круглікова, С.О. Пославський, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 140–149.

Категорія кількості представлена поняттями натурального, раціонального та дійсного числа. Мовою алгебри предикатних операцій описані характеристичні властивості цих понять, доказана повнота опису. З визначень понять, які розглянуті виведені їх основні властивості, на яких базується будова математичного аналізу.

Ил. 2. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

On the rational numbers theory / M.F. Bondarenko, N.P. Kruglikova, S.A. Poslavsky, Ju.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 140–149.

The category of a quantity represented by concepts natural, rational and real quantities. In language of algebra of predicate operations the characteristic properties of these concepts are described, the completeness of the descriptions is proved. From definitions of considered concepts their main properties are introduced, on which the building of a calculus bases.

Fig. 2. Ref.: 3 items.

УДК 519.7

О ТЕОРИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

М.Ф. Бондаренко[1], А.Д. Дрюк[2], Н.П. Кругликова[3], С.А. Пославский[4], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[5]

[1, 2, 3, 5] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

[4] ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

Предпринимается попытка формального описания категории количества. С этой целью на языке алгебры подстановочных операций дается аксиоматическая характеристика понятий натурального числа, счета, сложения, умножения и порядка на множестве натуральных чисел. Идентифицируются первичные понятия теории положительных и произвольных рациональных чисел. Средствами логической математики проводится аксиоматическая характеризация понятий теории действительных чисел и арифметических действий над ними. В статье развиваются идеи, сформулированные в работах [1, 2].

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, ПРЕДИКАТ, АЛГЕБРА ПОДСТАНОВОЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Введение

Сначала остановимся на интуитивном понимании действительных чисел. Ранее было сказано, что рациональные числа можно наглядно представить как точки на прямой. Хотя между двумя, даже сколь угодно близкими, точками можно вставить еще одну рациональную точку, тем не менее рациональные точки заполняют прямую не полностью. Так например, длина диагонали квадрата со сторонами длины 1 не является рациональным числом. Иными словами, уравнение $xx = 1+1$ в рациональных числах неразрешимо. Всех точек на прямой гораздо больше, чем всех рациональных точек. Чтобы иметь возможность каждой точке прямой поставить в соответствие свое число, приходится множество рациональных чисел расширить до множества действительных. Представить наглядно действительные числа можно в виде так называемых сечений.

Сечением называется любое множество рациональных чисел, обладающее следующими тремя свойствами: 1) в сечении содержатся рациональные числа, но не все; 2) каждое содержащееся в сечении число меньше не содержащегося в нем; 3) в сечении нет наибольшего числа. Сечение можно уподобить части прямой, расположенной левее некоторой точки. Интуиция подсказывает, что каждому сечению должно соответствовать вполне определенное число, ограничивающее его сверху. Однако, оказывается, что сечений больше, чем рациональных чисел, поэтому не для каждого сечения существует его верхняя рациональная граница. Это следует из того, что множество сечений континуально, а множество всех рациональных чисел лишь счетно, поэтому мощность первого множества больше мощности второго. Действительных же чисел достаточно: между сечениями и их действительными верхними границами существует взаимно однозначное соответствие.

1. Аксиомы действительных чисел

Мы рассмотрели содержательную сторону вопроса. Теперь займемся формальным введением действительных чисел. Предполагаем, что множество B всех рациональных чисел уже введено и на нем определены операции сложения и умножения и отношение порядка. Множество всех действительных чисел обозначим символом C. Вводим предикат $L(x, y)$ на $B\times C$, называемый *формирователем действительных чисел*. Предикат L требуется определить аксиомами действительных чисел так, чтобы для каждого действительного числа y множество всех корней уравнения $L(x, y) = 1$ относительно переменной x было некоторым сечением α. Сечение α должно обладать свойством: если $L(x, y) = 1$, то $x\in\alpha$, если же $L(x, y) = 0$, то $x\notin\alpha$. Иными словами, предикат $L(x, y)$ взаимно однозначно связывает действительное число y с соответствующим ему сечением. Если существует рациональная граница a сечения α, то в роли действительного числа y принимается рациональное число a, то есть $y = a$. Такое действительное число называется *рациональным*. Если для сечения α рациональная граница не существует, то соответствующее ему действительное число y называется *иррациональным*. После пополнения множества всех рациональных чисел иррациональными ось рациональных чисел превращается в ось действительных чисел. В результате у каждого сечения появляется единственная верхняя граница – рациональная или иррациональная. Каждому действительному числу соответствует единственное сечение, для которого это число является верхней границей. В силу наличия взаимно однозначного соответствия между всеми действительными числами и сечениями, действительные числа можно считать просто именами сечений.

Переходим к формулировке аксиом действительных чисел. Всего имеется семь аксиом действительных чисел, они связывают множество C и предикат L:

аксиома непустоты сечения

$$\forall\, y \in C\ \exists x \in B\ L(x,y); \qquad (1)$$

аксиома неполноты сечения

$$\forall\, y \in C\ \exists x \in B \neg L(x,y); \qquad (2)$$

аксиома упорядоченности сечения

$$\forall\, x,y \in B\ \forall z \in C(L(x,z) \wedge \neg L(y,z) \supset x < y); \qquad (3)$$

аксиома плотности сечения

$$\forall\, z \in C\quad \forall\, x \in B(L(x,z) \supset \exists y \in B(L(y,z) \wedge x < y)); \qquad (4)$$

аксиома включения рациональных чисел

$$\begin{aligned} &\forall\, z \in C\quad \forall\, x \in B((\forall\, y \in B(\neg L(x,z) \wedge \\ &\wedge \neg L(y,z) \supset x \leq y)) \supset x = z); \end{aligned} \qquad (5)$$

аксиома единственности

$$\forall\, y,z \in C((\forall\, x \in B(L(x,y) \sim L(x,z))) \supset y = z); \qquad (6)$$

аксиома существования

$$\begin{aligned} &\forall\, M \subseteq B((\exists\, x \in B\ M(x) \wedge \exists\, x \in B \neg\, M(x)) \wedge \\ &\wedge \forall\, x \in B\quad \forall\, y \in B(M(x) \wedge \neg\, M(y) \supset x < y) \wedge \\ &\wedge \forall\, x \in B(M(x) \supset \exists\, y \in B(M(y) \wedge x < y)) \supset \\ &\supset \exists z \in C\quad \forall\, x \in B(M(x) \sim L(x,z))). \end{aligned} \qquad (7)$$

Аксиома (1) гласит, что любое сечение y не пусто. Аксиома (2) выражает мысль, что в каждом сечении y содержится не любое рациональное число. Вместе взятые, эти два свойства формально выражают первое свойство сечений. Аксиома (3) выражает второе свойство сечений: любое рациональное число из сечения z меньше любого рационального числа вне этого сечения. Третье свойство сечений формулируется аксиомой (4): для любого рационального числа из сечения z найдется еще большее. Аксиома (5) гласит: если x – рациональная граница сечения z, то $z = x$. Смысл аксиомы (6) состоит в том, что каждому сечению соответствует не более одного действительного числа. Если сечения совпадают, то совпадают и соответствующие им действительные числа. Аксиома (7) гласит: если множество M рациональных чисел обладает первым, вторым и третьим свойствами сечений, то существует действительное число, соответствующее ему. Иными словами, для каждого сечения найдется соответствующее ему действительное число. Свойства (1)–(7) называются *аксиомами действительных чисел*. Теория предикатов C и L, основанная на аксиомах (1)–(7), называется *теорией действительных чисел*.

Теорема 1 (о независимости аксиом действительных чисел). *Каждая из аксиом действительных чисел, кроме аксиомы* (2), *логически не зависит от совокупности остальных.*

Доказательство. Доказательство ведем методом интерпретаций. Убеждаемся в независимости аксиомы (1). Для этого примем $C = R \cup \{a\}$, где R – множество всех действительных чисел, которое, как мы полагаем, имеется в нашем логическом инструментарии (и которое содержит в качестве подмножества множество B всех рациональных чисел), a – произвольный элемент универсума, не принадлежащий R. Определяем предикат L: $\forall z \in C$ $\forall x \in B(L(x, z) \sim \neg\, z^a \wedge x < z)$, где $<$ – имеющееся в инструментарии отношение “меньше” на множестве R; z^{a} – предикат узнавания ($z^{\mathrm{a}} \sim z = a$). Тогда аксиома (1) не выполняется, так как $\forall x \in B \neg\, L(x, a)$. Аксиома (2) выполняется: для любого числа из R найдется большее рациональное число, то есть $\forall z \in R\ \exists x \in B \neg\, L(x, z)$, кроме того, условие $\neg\, L(x, a)$ выполнено для всех $x \in B$. Аксиома (3) выполняется, так как имеем $\forall z \in C\, \forall x, y \in B(L(x, z) \wedge \neg L(x, z) \supset$ $\supset R(z) \wedge x < z \wedge \neg\, (y < z))$, но $x < z, \neg\, (y < z)$ влечет $x < y$. Аксиома (4) выполняется, так как для любых $z \in R$, $x \in B$, таких что $x < z$, найдется $y \in B$, для которого $x < y < z$. Аксиома (5) выполняется: если для некоторых $z \in R$, $x \in B$ при любом $y \in B$ условие $z \leq x$ и $z \leq y$ влечет $x \leq y$, то $x = z$, так как иначе $z < x$ и $\exists y\, x \in B$ $z < y < x$; если $z = a$, то условие $\forall y \in B(\neg L(x, z) \wedge \neg L(y, z)$ $\supset x \leq y)$ не выполняется ни при каком $x \in B$, но тогда имеем $\forall x \in B\, (\forall y \in B(\neg\, L(x, z) \wedge \neg\, L(y, z) \supset x \leq$ $\leq y) \supset x = z)$. Проверяем выполнение аксиомы (6). Если для некоторых $y, z \in C$ имеем $\forall x \in B(\neg\, y^a \wedge x <$ $< y \sim \neg\, z^a \wedge x < z)$, то либо $y = z = a$, либо $y \in R$, $z \in R$ и $y = z$ (иначе найдется такой $x \in B$, что $z<x<y$ или $y<x<z$). Поэтому $\forall y, z \in C(\forall x \in B(L(x, y) \sim L(x, z)) \supset$ $\supset y = z) = \forall y, z \in C\, (\forall x \in B\, (\neg\, y^a \wedge x < y \sim \neg\, z^a \wedge x < z) \supset$ $\supset y = z\,) = 1$, т.е. аксиома выполняется. Аксиома (7) выполняется, так как для любого $M \subseteq B$, удовлетворяющего посылкам этой аксиомы, найдется такой $z \in R$, что $\forall x \in B(M(x) \sim x < z)$, то есть $\exists z \in C$ $\forall x \in B(M(x) \sim \neg\, z^a \wedge x < z)$.

Покажем теперь, что аксиома (2) зависима от остальных аксиом. Для этого достаточно убедиться в том, что если условие (2) не выполнено, то нарушается и какое-то из оставшихся условий. Предположим $\exists z_1 \in C\ \forall x \in B\ L(x, z_1)$. Тогда из аксиомы (5) получаем $\forall x \in B((\forall y \in B(\neg\, L(x, z_1) \wedge \neg\, L(y, z_1) \supset$ $\supset x \leq y)) \supset x = z_1)$, $\forall x \in B(\forall y \in B(0 \supset x \leq y) \supset x = z_1)$, $\forall x \in B\, (1 \supset x = z_1), \forall x \in B\ x = z_1$, что заведомо ложно. Таким образом, аксиома (2) не является независимой от остальных.

Независимость других аксиом проверяется так же, как и независимость аксиомы (1). Для проверки независимости аксиомы (3) полагаем $C = R \cup \{a\}$ и $\forall z \in C\, \forall x \in B(L(x, z) \sim z^a \wedge N(x) \vee \neg\, z^a \wedge$ $\wedge\, x < z)$, где N – множество натуральных чисел; аксиомы (4) – $C = R \cup \{a\}$ и $\forall z \in C\, \forall x \in B(L(x, z) \sim z^a \wedge x \leq$ $\leq 0 \vee \neg\, z^a \wedge x < z)$; аксиомы (5) – $C = (R \setminus \{0\}) \cup \{a\}$ и $\forall z \in C\ \forall x \in B(L(x,\ z) \sim z^a \wedge x < 0 \vee \neg\, z^a \wedge x < z)$; аксиомы (6) – $C = R \cup \{a\}$ и $\forall z \in C\, \forall x \in B(L(x, z) \sim z^a \wedge x <$ $< \sqrt{2}\ \vee \neg\, z^a \wedge x < z)$; аксиомы (7) – $C = R \setminus \{0\}$ и $\forall z \in C$ $\forall x \in B(L(x, z) \sim x < z)$. Теорема доказана.

Следующие две леммы относятся к теории рациональных чисел [5], но они необходимы для доказательства нижеследующих утверждений.

Лемма 1. *Для любых u, $v \in B$ условие $u < v$ влечет* $\exists w \in B(u < w \wedge w < v)$.

Доказательство. Пусть u, $v \in B$ и $u < v$. Положим $w = (u+v)(1+1)^{-1}$. Тогда, в силу леммы 10 из второй части этой статьи, будем иметь $u+u<u+v<v+v$, $u(1+1)<u+v<v(1+1), u(1+1)(1+1)^{-1}<(u+v)(1+1)^{-1}<$ $<v(1+1)(1+1)^{-1}$, $u<w<v$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любых* $x, y\in B$ *условия* $x<y$ *и* $-y<-x$ *равносильны.*

Доказательство. Пусть x, $y\in B$ и $x<y$. Тогда, по лемме 6 из [5], существует такой $z\in A$, что $y=x+z$, где A – множество положительных рациональных чисел. Используя лемму 7 из части 2, получаем $-y=(-1)(x+z)$, то есть $-y=(-x)+(-z)$, $-y+z=-x$, $-y<-x$. Лемма доказана.

Теорема 2 (о включении рациональных чисел в действительные). *Все рациональные числа являются также и действительными, и для любого* $z\in B$ *выполнено условие* $\neg L(z, z)\wedge\forall y\in B(L(y, z)\sim y<z)$.

Теорема означает, что множество действительных чисел является расширением множества рациональных чисел, то есть что $B\subseteq C$.

Доказательство. Выберем произвольно $z\in B$. Рассмотрим множество $M_z=\{y\in B|\, y<z\}$. Покажем, что это множество удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7), то есть обладает всеми свойствами, определяющими понятие сечения. а) Положим $x=z+(-1)$. Тогда $x+1=(z+(-1))+1=z+((-1)+1)=z+0=z$, то есть $x<z$ и верно $M_z(x)$. б) Положим $x=z+1$. Тогда имеем $z<x$ и $\neg M_z(x)$. в) Пусть для некоторых x, $y\in B$ выполнено условие $M_z(x)\wedge\neg M_z(y)$. Тогда $x<z$ и $z\le y$, откуда получаем $x<y$. г) Пусть $x\in B$ и $M_z(x)$. Тогда, по лемме 1, $\exists y\in B\, x<y<z$, то есть $\exists y\in B$ $(M_z(y)\wedge x<y)$. Итак, все посылки аксиомы (7) выполнены. Поэтому существует $z'\in C$ такой, что для любого $y\in B$ условия $M_z(y)$ и $L(y, z')$ равносильны. В силу определения множества M_z, получаем $\neg L(z, z')$ $\wedge\forall y\in B(\neg L(y, z')\supset z\le y)$. Используя аксиому (5), выводим отсюда $z'=z$, то есть $z\in C$ и верно $\neg L(z, z)$. Теорема доказана.

Теорема 3 (об изоморфности множеств действительных чисел). *Пусть* B *– множество рациональных чисел, а множества* R, R_1 *и предикаты* L, L_1 *на* $B\times R$ *и* $B\times R_1$ *соответственно удовлетворяют аксиомам* (1)–(7) *действительных чисел. Тогда найдется биекция* φ: $R\to R_1$, *такая что для любых* $x\in B$ и $u\in R$ $L(x, u)=L_1(x, \varphi(u))$.

Теорема означает, что в нашей власти – лишь менять обозначения действительных чисел (и то только тех, которые являются иррациональными, поскольку для рациональных чисел обозначения уже были выбраны заранее). Из теоремы непосредственно следует, что все множества действительных чисел равномощны. Любое множество, равномощное множеству всех действительных чисел, называется *континуальным* (*континуумом*).

Доказательство. Выберем произвольно $u\in R$. Пусть $M=\{x\in Q|\, L(x, u)\}$ (то есть $M(x)\sim L(x, u)$). Множество M удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7). Поэтому существует $u_1\in R_1$, такой что для любого $x\in Q$ $M(x)\sim L_1(x, u_1)$. Такой элемент u_1 – единственный (для множества M) согласно аксиоме (6). Таким образом, каждому $u\in R$ ставится в соответствие единственный $u_1=\varphi(u)\in R_1$. Покажем, что φ – биекция (φ:$R\to R_1$). Действительно, повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что для любого $u_1\in R_1$ найдется, притом единственный, $u\in R$, такой что $\forall x\in Q$ $L_1(x, u_1)=L(x, u)$, то есть $\forall u_1\in R_1$ $\exists! u\in R$ $u_1=\varphi(u)$. Поэтому φ – биекция. Теорема доказана.

2. Порядок на множестве действительных чисел

Вводим *предикат порядка* $H(u, v)$ на $R\times R$, соответствующий *отношению порядка* $u<v$, следующим прямым определением:

$$\forall\, u,v\in R(H(u,v)\sim\neg(u=v)\wedge \wedge(\forall\, x\in B(L(x,u)\supset L(x,v)))). \qquad (8)$$

Теорема 4 (о сравнимости действительных чисел). *Для любых* u, $v\in R$ *выполняется только одно из следующих условий*: а) $u=v$, б) $H(u, v)=1$, в) $H(v, u)=1$.

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in R$. Если $u=v$, то условия б) и в) не могут быть выполнены. Пусть $u\ne v$. Тогда существует $x\in B$, такой что $\neg(L(x, u)\sim L(x, v))$, – это следует из аксиомы единственности (6). Если справедливо $\neg L(x, u)\wedge L(x, v)$, то не существует такого $y\in B$, что $L(y, u)\wedge\neg L(y, v)$ (иначе, по аксиоме (3), с одной стороны, $x<y$, а с другой $-y<x$, что невозможно в силу теоремы о сравнимости рациональных чисел). Поэтому имеем $\forall y\in B(L(y, u)\supset L(y, v))$, то есть $H(u, v)=1$ и справедливо б). Если же, наоборот, верно $L(x, u)\wedge\neg L(x, v)$, то $H(v, u)=1$, то есть выполнено условие в). Теорема доказана.

Теорема 5 (о транзитивности отношения порядка на множестве действительных чисел). *Для всех* u, v, $w\in C$ *из* $u<v$ *и* $v<w$ *следует* $u<w$.

Доказательство. Пусть u, v, $w\in C$ и $u<v$, $v<w$. Если $u=w$, то $u<v$ и $v<u$, что противоречит теореме 4 (о сравнимости действительных чисел). Поэтому $u\ne w$. Далее, имеем $\forall x\in B((L(x, u)\supset L(x, v))\wedge(L(x, v)\supset$ $\supset L(x, w)))$, то есть $\forall x\in B(L(x, u)\supset L(x, w))$. Значит $u<w$. Теорема доказана.

3. Сложение на множестве действительных чисел

Переходим к определению сложения действительных чисел. Предикат S на R^3 называется *предикатом сложения*, если

$$\forall\, u,v,w\in R(S(u,v,w)\sim(\forall\, x,y\in B(L(x,u)\wedge L(y,v)\supset \supset L(x+y,w))\wedge(\neg L(x,u)\wedge\neg L(y,v)\supset\neg L(x+y,w))). \qquad (9)$$

Из этого прямого определения непосредственно следует, что предикат S определен единственным образом по заданным R и L.

Теорема 6 (о функциональности предиката сложения действительных чисел). *Для любых* u, $v\in R$ *существует, притом единственный*, $w\in R$, *такой что* $S(u, v, w)=1$.

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in R$. Рассмотрим множество $M=\{z\in B|\,\exists x, y\in B((z=x+y)\wedge$ $\wedge L(x, u)\wedge L(y, v))\}$. Покажем, что существует $w\in R$, такой что для любого $x\in B$ $M(x) \sim L(x, w)$. Для этого проверим, что выполнены все посылки аксиомы (7) действительных чисел. а) Поскольку существуют x, $y\in B$ такие, что $L(x, u)\wedge L(y, v)$, то, положив $z = x+y$, получим $M(z) = 1$. б) Существуют x, $y\in B$, такие что $\neg L(x, u) \wedge \neg L(y, v)$. Тогда для любых x_1, $y_1\in B$ из $L(x_1, u)\wedge L(y_1, v)$ следует $(x_1< x)\wedge(y_1< y)$. Отсюда вытекает, что $x_1+y_1< x+y$, то есть $\neg M(x + y)$. Здесь была использована лемма 6. в) Пусть z_1, $z_2\in Q$ и $M(z_1) \wedge\neg M(z_2)$. Существуют x_1, y_1, $y_2\in Q$, такие что $L(x_1, u) \wedge L(y_1, v)\wedge(z_1 = x_1+y_1)\wedge(z_2 = x_1+y_2)$. Из $\neg M(z_2)$ следует $\neg L(y_2, v)$, то есть $y_1< y_2$. Отсюда вытекает $x_1+y_1< x_1+y_2$, то есть $z_1< z_2$ (см. лемму 4 из второй части этой работы). г) Пусть $z\in B$ и $M(z)$. Тогда существуют x, $y\in B$, такие что $L(x, u) \wedge L(y, v) \wedge \wedge(z = x+y)$. По аксиоме (4) существует $y_1\in B$, такой что $L(y_1, v)\wedge(y< y_1)$. Полагая $z_1 = x+y_1$, получим $(z< z_1) \wedge M(z_1)$. Итак, все посылки аксиомы (7) выполнены, то есть существует элемент $w\in R$, такой что $M(x) \sim L(x, w)$, причем для любых x, $y\in B$ условие $L(x, u)\wedge L(y, v)$ влечет $L(x+y, w)$. В силу аксиомы (6), такой элемент w – единственный. Пусть теперь $x, y\in B$, $\neg L(x, u)\wedge\neg L(y, v)$. Тогда, если предположить, что $L(x+y, w)$, то существуют x_1, $y_1\in B$, такие что $x+y = x_1+y_1$ и $L(x_1, u)\wedge L(y_1, v)$. Но последнее условие означает, что $x_1< x$, $y_1< y$, то есть равенство $x+y = x_1+y_1$ неверно (по лемме 10 из части 2). Получили противоречие с предположением $L(x+y, w)$. Поэтому $\forall x, y\in B(\neg L(x, u) \wedge\neg L(y, v) \supset\neg L(x+y, w))$. Теорема о функциональности S доказана.

Функциональность предиката S позволяет ввести на множестве $C\times C$ функцию $w = u+v$, называемую *операцией сложения действительных чисел*, следующим правилом: для любых u, v, $w\in C$ $w = u+v$ тогда и только тогда, когда $S(u, v, w) = 1$.

Теорема 7 (о сложении действительного числа с нулем). Для всех $u\in C$ $u+0 = u$.

Доказательство. Выберем произвольно $u\in C$. Для любых $x, y\in B$, удовлетворяющих условию $L(x, u)\wedge L(y, 0)$, имеем $y< 0$, $x+y< x$, $L(x+y, u)$ (в силу леммы 10 и теоремы 25 из второй части этой работы, а также аксиомы (3)). С другой стороны, для всех x, $y\in B$, удовлетворяющих условию $\neg L(x, u) \wedge\neg L(y, 0)$, получаем $0 \le y$, $x \le x+y$, $\neg L(x+y, u)$. Учитывая определение операции сложения действительных чисел и аксиому (9), приходим к выводу $u+0 = u$. Теорема доказана.

Лемма 3. *Для любых u, $v\in C$, $z\in B$ условия $L(z, u+v)$ (а) и $\exists x, y\in B(L(x, u) \wedge L(y, v)\wedge(z=x+y))$ (б) равносильны.*

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in C$ и рассмотрим множество M, определенное в доказательстве теоремы 6. Тогда для любого $z \in B$ условие $M(z)$ равносильно каждому из условий (а), (б) (с учетом определения операции сложения действительных чисел), то есть (а) и (б) тоже равносильны. Лемма доказана.

Теорема 8 (об ассоциативности сложения действительных чисел). *Для всех u, v, $w\in C$ $(u+v)+w = = u+(v+w)$* (а).

Доказательство. Выберем произвольно u, v, $w\in C$. Используя лемму 3 и ассоциативность сложения рациональных чисел, получаем следующую цепочку равносильных для любого $z\in B$ условий: $L(z, (u+v)+w)$; $\exists x, y\in B((z = x+y)\wedge L(x, u+v) \wedge L(y, w))$; $\exists x_1, y_1, y\in B((z = (x_1+y_1) + y) \wedge L(x_1, u) \wedge L(y_1, v)\wedge L(y, w))$; $\exists x_1, y_1, y\in B((z = x_1+(y_1+y)) \wedge L(x_1, u) \wedge L(y_1, v)\wedge L(y, w))$; $\exists x_1, y_2 \in B((z = x_1+y_2) \wedge L(x_1, u) \wedge L(y_2, v+w))$; $L(z, u+(v+w))$. В силу аксиомы (6), получаем отсюда (а). Теорема доказана.

Теорема 9 (о коммутативности сложения действительных чисел). *Для всех u, $v\in C$ $u+v = v+u$* (а).

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in C$. Используя лемму 3 и коммутативность сложения рациональных чисел, получаем цепочку равносильных для любого $z\in B$ условий: $L(z, u+v)$; $\exists x, y \in B((z = x+y) \wedge L(x, u) \wedge L(y, v))$; $\exists x, y\in B((z = y+x) \wedge \wedge L(y, v) \wedge L(x, u))$; $L(z, v+u)$. В силу аксиомы (6), получаем отсюда (а). Теорема доказана.

Число $-u\in R$ называется *противоположным* числу $u\in R$, если $u+(-u) = 0$.

Лемма 4. *Для любых $u\in C$ и $x\in B$ условия $L(x, u)$ и $x< u$ равносильны.*

Доказательство. Заметим, что случай $u \in B$ был уже рассмотрен в теореме 2. Пусть для некоторых $u \in C$, $x \in B$ выполнено условие $L(x, u)$. Тогда, с одной стороны, невозможно $x = u$ (в силу теоремы 2). С другой стороны, имеем $L(x, u) \wedge L(x, x)$, то есть $\neg (L(x, u) \supset L(x, x))$. Используя определение (8) и теорему о сравнимости действительных чисел, приходим к выводу $x< u$. Если же для $u\in C$, $x\in B$ выполнено условие $x< u$, то, по определению (8), $\forall y \in B (L (y, x) \supset L(y, u))$, или $\forall y \in B(\neg L(y, u) \supset \supset \neg L(y, x))$, $\forall y \in B(\neg L(y, u) \supset x \le y)$. Но тогда верно $L(x, u)$, поскольку в противном случае имеем $\forall y \in B(\neg L(x, u) \wedge\neg L(y, u) \supset x \le u)$ и, по аксиоме (5), получаем $x = u$, что противоречит условию $x < u$. Лемма доказана.

Теорема 10 (о противоположном действительном числе). *Для любого $u\in C$ существует, притом единственное, противоположное число $(-u)\in C$.*

Доказательство. Для произвольного $u\in C$ рассмотрим множество $M_u = \{z\in B | \neg L(-z, u) \wedge\neg (-z = u)\}$. Проверим, что M_u удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7) действительных чисел. а) По аксиоме (2), существует $y\in B$ такой, что выполнено условие $\neg L(y, u)$. Если при этом оказалось, что $y = u$ (это возможно, когда $u\in B$), то положим $y = u+1$. В результате получаем, что $\exists y\in B \neg L(y, u) \wedge\neg (y = u)$. А поскольку для любого рационального числа y существует противоположное ему число $z = -y$, то $\exists z\in B$ $\neg L(-z, u) \wedge\neg (-z = u)$, иными словами, множество M_u не пусто. б) Условие $\exists z\in B \neg M_u(z)$ выполнено, так как $\exists y\in B$ $L(y, u)$, или $\exists z\in B$ $L(-z, u)$. в) Для любых x, $y\in B$ условие $M_u(x) \wedge\neg M_u(y)$ влечет $\neg L(-x, u) \wedge\neg$

$\neg(-x=u)\wedge(L(-y,u)\vee(-y=u)),(\neg L(-x,u)\wedge L(-y,u))\vee \vee(\neg L(-x,u)\wedge\neg(-x=u)\wedge(-y=u))$. В силу аксиомы (3) и теоремы 2, получаем отсюда $-y<-x$, или (по лемме 2) $x<y$. г) Покажем, что для любого $x\in B$ условие $M_u(x)$ влечет существование такого $y\in B$, что $M_u(y)\wedge(x<y)$. Сначала рассмотрим случай $u\in B$. Из $M_u(x)$ вытекает $\neg L(-x, u)\wedge\neg(-x=u)$, или (по теореме 2) $u<-x$. В силу леммы 1, существует такой $z\in B$, что $u<z<-x$. Полагая $y=-z$, получаем $\neg L(-y, u)\wedge\neg(-y=u)\wedge(-y<-x)$. Отсюда имеем (по определению множества M_u и по лемме 2) $M_u(y)\wedge(x<y)$. Пусть теперь $\neg(u\in B)$. Если для некоторого $x\in B$ выполнено $M_u(x)$, то имеем $\neg L(-x, u)$. Предположим, что не существует такого $y\in B$, что $M_u(y)\wedge(x<y)$. Тогда для любого $y\in B$ условие $\neg L(-y, u)$ влечет $\neg(x<y)$, $\neg(-y<-x)$ (по лемме 2), $-x\le -y$. Отсюда имеем $\forall y\in B\,(\neg L(-x, u)\wedge\neg L(-y, u)\supset -x\le -y)$, или (по аксиоме (5)) $-x=u$, что противоречит условиям $x\in B$ и $\neg(u\in B)$. Исходное предположение оказалось неверным. Поэтому $\exists y\in B\,(M_u(y)\wedge x<y)$. Итак, множество M_u удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7) действительных чисел. Поэтому существует, притом единственный, $v\in C$ такой, что для любого $x\in B$ $M_u(x)\sim L(x, v)$. Пусть x, $y\in B$ и $L(x, u)\wedge\wedge L(y, v)$. Поскольку $L(y, v)\sim M_u(y)$, то имеем $\neg L(-y, u)\wedge\neg(-y=u)$, или $u<-y$ (в силу леммы 4 и теоремы 4). С другой стороны, $L(x, u)$ влечет $x<u$ (по лемме 4). Отсюда следует $x<-y$, то есть $x+y<0$, $L(x+y, 0)$. Аналогично доказывается, что если x, $y\in B$ и $\neg L(x, u)\wedge \mathrm{v}L(y, v)$, то $x+y\ge 0$, или $\neg L(x+y, 0)$. Поэтому (в силу определения (9)) $u+v=0$, то есть $v=-u$. Доказываем единственность противоположного числа. Пусть для некоторых u, v, $w\in C$ $u+v=0$ и $u+w=0$. Тогда $u+v=u+w$, $v+(u+v)=v+(u+w)$, $(v+u)+v=(v+u)+w$, $0+v=0+w$, $v=w$ (по теореме о сложении действительного числа с нулем). Теорема доказана.

Разностью $u-v$ действительных чисел u и v называется число $u+(-v)$.

Лемма 5. *Для любых* u, v, $w\in C$ *условие* $u>v$ *влечет* $u+w>v+w$.

Доказательство. Пусть u, v, $w\in C$ и $u>v$. *Тогда* $u\ne v$ *и* $\forall x\in B(L(x, v)\supset L(x, u))$ (а). Возьмем $z\in B$, такой что $L(z, v+w)=1$. Тогда (по лемме 3) $\exists x$, $y\in B$ $(L(x, v)\wedge L(y, w)\wedge z=x+y)$. С другой стороны, в силу условия $u>v$, имеем (а) и поэтому $\exists x, y\in B$ $(L(x, u)\wedge L(y, w)\wedge z=x+y)$, то есть $L(z, u+w)=1$. Итак, $L(z, v+w)=1$ влечет $L(z, u+w)=1$. Кроме того $u+w\ne v+w$, иначе $(u+w)+(-w)=(v+w)+(-w)$, $u+(w+(-w))=v+(w+(-w))$, $u+0=v+0$, $u=v$, а это противоречит исходному предположению $u>v$. Значит, $u+w>v+w$. Лемма доказана.

Лемма 6. Для любых x_1, y_1, x_2, $y_2\in C$ условие $(x_2>x_1)\wedge(y_2>y_1)$ влечет $x_2+y_2>x_1+y_1$.

Доказательство. По лемме 5 и теореме 9 $x_2+y_2<x_1+y_2$ и $x_1+y_2=y_2+x_1<y_1+x_1=x_1+y_1$, откуда по свойству транзитивности отношения порядка на множестве действительных чисел получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 7. Для любого $u\in C$ условия $u>0$ и $-u<0$ равносильны.

Доказательство. Пусть $u\in C$ и $u>0$. Тогда, по лемме 5, $u+(-u)>0+(-u)$, $0>-u$. Лемма доказана.

Лемма 8. Для любых u, $v\in C$ условия $u<v$ и $-v<-u$ равносильны.

Доказательство. Если u, $v\in C$ и $u<v$, то невозможно $-u=-v$. Также неверно $-u<-v$, так как иначе имеем $u+(-u)<v+(-v)$, $0<0$ – противоречие. Поэтому условие $u<v$ влечет $-v<-u$, а в силу равенств $-(-u)=u$ и $-(-v)=v$ верно и обратное. Лемма доказана.

Лемма 9. Для любого $u\in C$ условие $u>0$ влечет $\exists x\in A\ L(x, u)$.

Доказательство. Пусть для некоторого $u\in C$ выполнено условие $\forall x\in A\neg L(x, u)$. Тогда, очевидно, если для некоторого $x\in B$ $L(x, u)=1$, то $x\le 0$. Кроме того, $L(0, u)=0$, так как в противном случае $\exists y\in B(L(y, u)\wedge 0<y)$ (по аксиоме (4)). Поэтому имеем $\forall x\in B(L(x, u)\supset x<0)$, то есть $\forall x\in B(L(x, u)\supset L(x, 0))$ (по лемме 4), или $u\le 0$ (в силу определения (8)). Итак, доказано $\forall u\in C(\forall x\in A(\neg L(x, u)\supset u\le 0)$. Отсюда сразу следует утверждение леммы. Лемма доказана.

4. Умножение на множестве действительных чисел

Рассмотрим определение умножения действительных чисел. Введем функцию $|x|$, называемую *модулем действительного числа*: $|x|=x$, если $x\ge 0$; $|x|=-x$, если $x<0$, и функцию $\mathrm{sgn}(x)$, называемую *знаком действительного числа*: $\mathrm{sgn}(x)=1$, если $x>0$; $\mathrm{sgn}(x)=0$, если $x=0$; $\mathrm{sgn}(x)=-1$, если $x<0$. Предикат P на C^3 называется *предикатом умножения*, если

$$\begin{gathered}\forall\ u,v,w\in C(P(u,v,w)\sim \mathrm{sgn}(w)=\mathrm{sgn}(u)\mathrm{sgn}(v)\wedge\\ \wedge(\forall\ x,y\in B(x>0\wedge y>0\supset L(x,|u|)\wedge L(y,|v|)\supset\\ \supset L(xy,|w|))\wedge\neg L(x,|u|)\wedge\neg L(y,|v|)\supset\\ \supset\neg L(xy,|w|)))))).\end{gathered}\tag{10}$$

Из этого определения непосредственно следует, что предикат P определен единственным образом по заданным C и L.

Теорема 11 (о функциональности предиката умножения действительных чисел). *Для любых* u, $v\in C$ *существует, притом единственный,* $w\in C$, *такой что* $P(u, v, w)=1$.

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in C$. Если $u=0$ или $v=0$, то из (10) получаем $\forall w\in \in C(P(u, v, w)\sim \mathrm{sgn}(w)=0)$, или $\forall w\in C(P(u, v, w)\sim w= =0)$. Рассмотрим теперь случай $u\ne 0$ и $v\ne 0$. Образуем множество $M=\{z\in B|z\le 0\vee(\exists x, y\in A(L(x, |u|)\wedge \wedge L(y, |v|)\wedge z=xy))\}$. Проверим, что для этого множества выполнены все посылки аксиомы (7) действительных чисел. а) Очевидно, $M(0)=1$. б) Существуют x, $y\in A$, такие что $\neg L(x, |u|)\wedge\neg L(y, |v|)$. Тогда для любых x_1, $y_1\in A$, удовлетворяющих условию $L(x_1, |u|)\wedge L(y_1, |v|)$, имеем (в силу аксиомы (3)) $x_1<x$ и $y_1<y$. По лемме 9 из части 2, получа-

ем отсюда $x_1y_1< xy$, и поэтому $M(xy) = 0$. в) Пусть $z_1, z_2\in B$ и выполнено условие $M(z_1) \wedge \neg M(z_2)$ (а). Тогда либо $z_1 \le 0$, и в этом случае имеем $z_1< z_2$ (так как $0< z_2$), либо $0< z_1$. Во втором случае существуют такие $x_1, y_1\in A$, что $L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|) \wedge z_1 = x_1y_1$ (б), и $z_2 = x_1y_2$, где $y_2 = x_1^{-1}z_2$. Из условий (а), (б) и определения множества M следует $y_1 = y_2$ (иначе имели бы $L(y_2, |v|) = 1$ и $M(z_2) = 1$), откуда получаем $z_1< z_2$. г) Пусть $z\in B$ и $M(z) = 1$. Покажем, что тогда $\exists z_1\in B(M(z_1) \wedge z< z_1)$ (в). Не ограничивая общности, будем считать, что $z\in A$, так как $|u| > 0$, $|v| > 0$ и, согласно лемме ..., существуют такие $x, y\in A$, что $L(x, |u|) \wedge L(y, |v^{-1}|)$, то есть $M(xy) = 1$ и $xy\in A$. По аксиоме (4), найдутся $x_1, y_1\in A$, такие что $L (x_1, |u|) \wedge \wedge L (y_1, |v|) \wedge x < x_1 \wedge y < y_1$. Тогда, полагая $z_1 = x_1y_1$, получаем (в). Итак, множество M удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7) и поэтому $\exists w\in C$ $\forall z\in B(M(z) \sim L(z, w))$. В силу аксиомы (6), такой элемент w – единственный. При этом очевидно, что $w > 0$. Согласно определению множества M, имеем $\forall x, y\in A(L (x, |u|) \wedge L (y, |v|) \supset L(xy, w))$. Пусть теперь $x, y\in A$ и $\neg L(x, |u|) \wedge\neg L(y, |v|)$. Если предположить, что $L(xy, w) = 1$, то существуют $x_1, y_1\in A$, такие что $xy = x_1y_1$ и $L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|)$. Но тогда, согласно аксиоме (3), $x_1< x$ и $y_1< y$, то есть $x_1y_1< xy$ (по лемме 9 из части 2) и равенство $xy = x_1y_1$ не выполняется. Поэтому имеем $L(xy, w) = 0$. Значит, условие $\forall x, y\in \in A(\neg L(x, |u|) \wedge \neg L(y, |v|) \supset \neg L(xy, w))$ выполнено. Положим $w_1 = w$, если $\mathrm{sgn}(u)\mathrm{sgn}(v) = 1$, и $w_1 = -w$ в противном случае. Тогда $|w_1|=w$ и w_1 – искомый (притом единственный) элемент множества C, для которого $P(u, v, w_1) = 1$. Теорема доказана.

Функциональность предиката P позволяет ввести *операцию умножения действительных чисел*: для любых $u, v, w\in C$ $w = uv$ тогда и только тогда, когда $P(u, v, w) = 1$.

Теорема 12 (об умножении действительного числа на нуль). *Для всех $u\in C$ $u0 = 0u = 0$ (а).*

Доказательство. Как было отмечено в начале доказательства теоремы 11, для любых $u, v\in C$ условие $u = 0 \vee v = 0$ влечет $\forall w\in C(P(u, v, w) \sim w = 0)$, то есть $uv = 0$. Отсюда выводим (а). Теорема доказана.

Теорема 13 (о коммутативности умножения действительных чисел). *Для всех $u, v\in C$ $uv = vu$.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из определения (10) предиката умножения, теоремы 11 о его функциональности и свойства коммутативности умножения рациональных чисел. Теорема доказана.

Лемма 10. *Для всех $u, v\in C$ $|u||v| = |uv|$ (а).*

Доказательство. Поскольку модуль действительного числа не меньше нуля (в силу леммы 7 и определения модуля числа), то $\mathrm{sgn}(|uv|) = 1$ тогда и только тогда, когда $uv \neq 0$, то есть когда $\mathrm{sgn}(|u|)\mathrm{sgn}(|v|) = 1$ (в силу теоремы 12). Поэтому $\mathrm{sgn}(|uv|) = \mathrm{sgn}(|u|)\mathrm{sgn}(|v|)$. Отсюда, используя определение (10) и теорему 11, выводим (а). Лемма доказана.

Лемма 11. *Для любых $u, v\in C$, $z\in A$ условия* $L(z, |uv|) = 1$ (а) и $\exists x, y\in A(L(x, |u|) \wedge L(y, |v|) \wedge z = xy)$ (б) равносильны.

Доказательство. Выберем произвольно $u, v\in C$ и рассмотрим множество $M = \{z\in B|z \le 0 \vee \exists x, y\in A(L(x, |u|) \wedge L(y, |v|) \wedge z = xy)\}$. Тогда, по определению операции умножения действительных чисел, для любого $z\in A$ условие $M(z) = 1$ равносильно каждому из условий (а), (б) (см. доказательство теоремы 11), то есть (а) и (б) равносильны. Лемма доказана.

Теорема 14 (об ассоциативности умножения действительных чисел). *Для всех $u, v, w\in C$ $(uv)w = u(vw)$* (а).

Доказательство. Для любых $u, v, w\in C$ имеем $(\mathrm{sgn}(u)\mathrm{sgn}(v))\mathrm{sgn}(w) = \mathrm{sgn}(u)(\mathrm{sgn}(v)\mathrm{sgn}(w))$ (б), в силу свойства ассоциативности умножения рациональных чисел. Используя снова это свойство и леммы 10, 11, получаем цепочку равносильных для любого $z\in A$ условий: $L(z, |(uv)w|)$; $L(z, |uv||w|)$; $\exists x, y\in A(L(x, |uv|) \wedge \wedge L(y, |w|)\wedge z = xy)$; $\exists x_1, y_1, y\in A(L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|) \wedge \wedge L(y, |w|) \wedge z = (x_1y_1)y)$; $\exists x_1, y_1, y\in A(L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|)\wedge \wedge L(y, |w|) \wedge z = x_1(y_1y))$; $L(z, |u||vw|)$; $L(z, |u(vw)|)$. *Но тогда* $|(uv)w| = |u(vw)|$. С учетом условия (б), получаем (а). Теорема доказана.

Для доказательства теоремы о дистрибутивности умножения действительных чисел введем понятие А-сечений и действий над ними. При этом несколько отойдем от заданного стиля, и будем ссылаться на книгу Э. Ландау «Основы анализа» [3].

А-сечением назовем любое множество X положительных рациональных чисел, которое обладает следующими свойствами:

а) $\exists x\in A$ $x\in X$;

б) $\exists x\in A$ $x\notin X$;

в) $\forall x, y\in A$ $(x\in X \wedge y\notin X) \supset x< y$;

г) $\forall x\in X$ $\exists y\in X$ $y> x$.

Если $x\in X$, будем называть его *нижним числом* относительно X, а если $x\notin X$ – соответственно *верхним числом* относительно X.

А-сечения X и Y называются *равными* (обозначается $X= Y$), если $\forall x\in A$ $(x\in X) \sim (x\in Y)$. В противном случае А-сечения X и Y *не равны* (обозначается $X\neq Y$).

А-сечение X *больше* А-сечения Y (обозначается $X> Y$), если $\exists x\in A$: $(x\in X) \wedge (x\notin Y)$.

Пусть X и Y – А-сечения. Множество положительных рациональных чисел, представимых в виде $x + y$, где $x\in X$, а $y\in Y$, называется *суммой А-сечений* X и Y и обозначается $X+ Y$.

Пусть X и Y – А-сечения. Множество положительных рациональных чисел, представимых в виде xy, где $x\in X$, а $y\in Y$, называется *произведением* А-сечений X и Y и обозначается XY.

Сумма и произведение сечений также являются сечениями [3].

Лемма 12 (дистрибутивность для А-сечений). *Пусть X, Y и Z – А-сечения. Тогда выполняется соотношение* $X(Y + Z) = XY+XZ$.

Доказательство.

1) Каждое нижнее число относительно $X(Y+Z)$ имеет вид $x(y+z) = xy + xz$, где $x \in X$, а $y \in Y$, $z \in Z$. Но $xy + xz$ – нижнее число относительно $XY+XZ$.

2) Каждое нижнее число относительно $XY+XZ$ имеет вид $xy + x'z$, где $x, x' \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. В случае $x \geq x'$ обозначим через x'' число x; в случае $x < x'$ – число x'. В обоих случаях $x'' \in X$ и, значит, $x''(y+z)$ – нижнее число относительно $X(Y+Z)$. Из неравенств $xy \leq x''y$, $x'z \leq x''z$ следует $xy+x'z \leq x''y+x''z = x''(y+z)$, а значит, $xy+x'z$ будет нижним числом и относительно $X(Y+Z)$. Лемма доказана.

Следующие три леммы относятся к теории действительных чисел.

Лемма 13. *Для всех $u,v \in C$ $-(u+v) = -u + (-v)$.*

Доказательство. Из коммутативности сложения действительных чисел следует, что $-(u+v) = -(v+u)$ и $-u+(-v) = -v + (-u)$, поэтому без ограничения общности можно предполагать, что $u \geq v$.

1) Если $u>0$, $v>0$, то $-u+(-v) = -(u+v)$.

2) Если $u>0$, $v=0$, то $-u+(-v) = -u+0 = -u = -(u+0) = -(u+v)$.

3) Если $u>0$, $v<0$, то либо а) $u>|v|$, и, следовательно, $u+v = u-|v|$, $-u+(-v) = -u+|v| = -u(-|v|) = -(u+v)$; либо б) $u=|v|$, и, следовательно, $-u+v=0$, $-u+(-v) = -u+|v| = 0 = -(u+v)$; либо в) $u<|v|$, и, следовательно, $u+v = -(|v|-u)$, $-u+(-v) = -u+|v| = |v|-u = -(u+v)$.

4) Если $u=0$, то $-u+(-v) = 0+(-v) = -v = -(0+v) = -(u+v)$.

5) Если $u<0$, то $v<0$, $u+v = -(|u|+|v|)$ и $-u+(-v) = |u|+|v| = -(u+v)$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Для всех $u,v \in C$ $-(u-v) = v-u$.*

Доказательство. По лемме 13 имеем $-(u-v) = -(u+(-v)) = -u+(-(v)) = -u+v = v+(-u) = v-u$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Любое действительное число $u \in C$ может быть представлено в виде разности двух положительных чисел.*

Доказательство. Если $u>0$, то $u = (u+1)-1$. Если $u=0$, то $u = 1-1$. Если $u<0$, то $-u = |u| = (|u|+1)-1$ и $u = -((|u|+1)-1) = 1-(|u|+1)$. Лемма доказана.

Поскольку между А-сечениями и положительными действительными числами существует взаимно однозначное соответствие, положительные действительные числа можно считать именами А-сечений. Таким образом, под разностью двух А-сечений будем понимать разность двух соответствующих положительных действительных чисел. Эти числа будем обозначать так же, как и А-сечения, заглавными латинскими буквами.

Лемма 16. *Из $u = X_1-X_2$, $v = Y_1-Y_2$, следует $u+v = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.*

Доказательство.

1) Пусть $u>0$, $v>0$. Поскольку для произвольных положительных чисел K, L, M, N $(K+L)+(M+N) = (K+L)+(N+M) = ((K+L)+N)+M = M+((K+L)+N) = (M+K)(L+N)$, то $(u+v)+(X_2+Y_2) = X_1+Y_1$, и, значит, утверждение леммы справедливо.

2) Пусть $u<0$, $v<0$. Тогда, по лемме 13, $X_2-X_1 = -u>0$, $Y_2-Y_1 = -v>0$ и, значит, в силу 1), $-u+(-v) = (X_2+Y_2)-(X_1+Y_1)$, $u+v = -(-u+(-v)) = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

3) Пусть $u>0$, $v<0$, так что $X_1-X_2>0$, $Y_2-Y_1>0$.

а) Если $u>|v|$, то $X_1-X_2 > Y_2-Y_1$ и, следовательно, $X_1+Y_1 = ((X_1+X_2)-X_2)+Y_1 = (X_1-X_2)+(X_2+Y_1) = (X_2+Y_1)+(X_1-X_2) = (X_2+Y_1)+((Y_2-Y_1)+((X_1-X_2)-(Y_2-Y_1))) = ((X_2+Y_1)+(Y_2-Y_1))+((X_1-X_2)-(Y_2-Y_1)) = (X_2+(Y_1+(Y_2-Y_1)))+((X_1-X_2)-(Y_2-Y_1)) = (X_2+Y_2)+((X_1-X_2)-(Y_2-Y_1))$, откуда $(X_1+Y_1)-(X_2+Y_2) = (X_1-X_2)-(Y_1-Y_2) = -u-|v| = u+v$.

б) Если $u<|v|$, то, в силу а), $-((Y_2-Y_1)+(X_2-X_1)) = u+v = -(-u+(-v)) = -((Y_2+X_2)-(Y_1+X_1)) = (Y_1+X_1)-(Y_2+X_2) = (X_1+Y_1)-(X_1+Y_2)$.

в) Если $u=|v|$, так что $X_1-X_2 = Y_2-Y_1$, то $X_1 = X_2+(Y_2-Y_1)$, $X_1+Y_1 = X_2+Y_2$, и $u+v=0 = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

4) Пусть $u<0$, $v>0$. Тогда, в силу 3), $u+v = (Y_1+X_1)-(Y_2+X_2)$ и $u+v = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

5) Пусть $u=0$. Тогда $X_1 = X_2$, $u+v = v$.

а) При $Y_1>Y_2$ имеем $(Y_1-Y_2)+(X_1+Y_2) = ((Y_1-Y_2)+Y_2)+X_1 = Y_1+X_1 = X_1+Y_1$, $v = Y_1-Y_2 = (X_1+Y_1)-(X_1+Y_2) = (X_1+Y_1)-(X_1+Y_2)$.

б) При $Y_1 = Y_2$ имеем $v = 0 = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

в) При $Y_1>Y_2$, в силу а), имеем $-v = Y_2-Y_1 = (X_2+Y_2)-(X_1+Y_1)$ и $v = -(-v) = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

6) Пусть $v=0$. Тогда, в силу 5), $u+v = v+u = (Y_1+X_1)-(Y_2+X_2) = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$. Лемма доказана.

Лемма 17. *Для произвольных положительных чисел X, Y, Z выполняется соотношение $X(Y-Z) = (XY-XZ)$.*

Доказательство.

1) При $X>Z$ имеем $(Y-Z)+Z = Y$, и, следовательно, по лемме 12, $X(Y-Z)+XZ = XY$, откуда $X(Y-Z) = XY-XZ$.

2) При $Y=Z$ имеем $XY = XZ$, откуда получаем $X(Y-Z) = X0 = 0 = XY-XZ$.

3) При $Y<Z$, в силу 1), имеем $X(Z-Y) = XZ-XY$, откуда $X(Y-Z) = X(-(Z-Y)) = -(X(Z-Y)) = -(XZ-XY) = XY-XZ$. Лемма доказана.

Теорема 15 (о дистрибутивности умножения действительных чисел). *Для всех $u, v, w \in C$ $u(v+w) = uv+uw$.*

Доказательство.

1) Пусть $u>0$. По лемме 15, $v = Y_1-Y_2$, $w = Z_1-Z_2$. Тогда, по лемме 16, $v+w = (Y_1+Z_1)-(Y_1+Z_2)$, следовательно, по леммам 12 и 17, $u(v+w) = u(Y_1+Z_1)-u(Y_1+Z_2) = (uY_1+uZ_1)-(uY_2+uZ_2)$ и, значит, по леммам 16 и 17, $u(v+w) = u(Y_1-Y_2)+u(Z_1-Z_2) = uv+uw$.

2) Пусть $u=0$. Тогда $u(v+w) = 0 = uv+uw$.

3) Пусть $u<0$. Тогда, в силу 1), $(-u)(v+w) = (-u)v+(-u)w$, следовательно, $(-u(v+w)) = (-u)v+(-u)w$, и $u(v+w) = -((-u)v+(-u)w) = -((-u)v)+(-((-u)w)) = uv+uw$. Теорема доказана.

Теорема 16 (о соответствии операций сложения, умножения и отношения порядка на множествах рациональных и действительных чисел). *Для любых z_1, z_2, $z\in B$ условия $z_1+z_2=z$ (а), $z_1z_2=z$ (б), $z_1< z_2$ (в) равносильны, соответственно, условиям $S(z_1, z_2, z)=1$ (аг), $P(z_1, z_2, z)=1$ (бг), $H(z_1, z_2)=1$ (вг), где S, P, H — предикаты сложения, умножения и порядка на множестве действительных чисел.*

Доказательство. Пусть z_1, z_2, $z\in B$. Тогда, по теореме 2 $z_1, z_2, z\in C$. Предположим, что выполнено условие (а). Выберем $x, y\in B$ так, что $x< z_1$, $y< z_2$, то есть $L(x, z_1)=L(y, z_2)=1$. Тогда (по лемме 10 из второй части этой работы) $x+y< z_1+z_2$, то есть $L(x+y, z)=1$. Если же $z_1\le x$, $z_2\le y$, то есть $L(x, z_1)=L(y, z_2)=0$, то $z_1+z_2\le x+y$, $L(x+y, z)=0$. Поэтому условие (а) влечет (аг). В силу теоремы о функциональности предиката S, последнее означает равносильность условий (а) и (аг). Предположим, что выполнено условие (б). Тогда, если $x, y\in A$ и $x<|z_1|$, $y<|z_2|$, то, по лемме 9 из части 2, $xy<|z_1||z_2|=|z|$, то есть условие $L(x, |z_1|)=L(y, |z_2|)=1$ влечет $L(xy, |z|)=1$. Если же $|z_1|\le x$, $|z_2|\le y$, то $|z|=|z_1||z_2|\le xy$, то есть условие $L(x, |z_1|)=L(y, |z_2|)=0$ влечет $L(xy, |z|)=0$. Легко убедиться также в том, что $\mathrm{sgn}(z)=\mathrm{sgn}(z_1)\mathrm{sgn}(z_2)$. Например, если $z_1< 0$, $z_2> 0$, то есть $\mathrm{sgn}(z_1)=-1$, $\mathrm{sgn}(z_2)=1$, то $(-z_1)>0$ (по лемме 8 из части 2), $(-z_1)z_2=((-1)z_1)z_2=(-1)(z_1z_2)=-z_1z_2>0$, $z_1z_2<0$, $\mathrm{sgn}(z)=\mathrm{sgn}(z_1z_2)=-1=\mathrm{sgn}(z_1)\mathrm{sgn}(z_2)$. Таким образом, условие (б) влечет (бг). В силу теоремы о функциональности предиката P, выводим отсюда равносильность (б) и (бг). Предположим, наконец, что выполнено условие (в). Тогда $z_1\ne z_2$ и для любого $x\in B$ условие $x< z_1$ влечет $x< z_2$ (в силу транзитивности отношения порядка на множестве рациональных чисел), то есть $L(x, z_1)=1$ влечет $L(x, z_2)=1$. Значит (вг) следует из (в). Аналогично, условие $z_2< z_1$ влечет $H(z_2, z_1)=1$. Используя теорему о сравнимости действительных чисел, приходим к выводу о равносильности условий (в) и (вг). Теорема доказана.

Теорема 17 (об упорядоченности множества действительных чисел). *Множество действительных чисел с определенным на нем отношением нестрогого порядка является цепью.*

Доказательство. Отношение нестрогого порядка рефлексивно, так как для любого $u\in C$ имеем $u=u$, а значит $u\le u$. Доказываем антисимметричность этого отношения. Пусть u, $v\in C$ и одновременно $u\le v$, $v\le u$, то есть выполнены условия $(u<v)\vee(u=v)$ и $(v<u)\vee(v=u)$. Из теоремы о сравнимости действительных чисел следует, что такое возможно лишь в случае $u=v$. Поэтому нестрогий порядок обладает свойством антисимметричности. Свойство транзитивности нестрогого порядка выводится из теоремы 5 с учетом того, что для любых u, v, $w\in C$ условие $(u<v)\wedge(v=w)$ или $(u=v)\wedge(v<w)$ влечет $u< w$, а условие $(u=v)\wedge(v=w)$ влечет $u=w$. Наконец, по теореме о сравнимости действительных чисел, для любых u, $v\in C$ всегда либо $u=v$, либо $u< v$, либо $v< u$, и поэтому условие $(u\le v)\vee(v\le u)$ выполнено. Теорема доказана.

Покажем теперь, что среди действительных чисел имеются такие, которые не являются рациональными числами.

Лемма 18. *При любом $a\in A$ уравнение $xx=a$ имеет решение $x\in C$.*

Доказательство. Выберем произвольно $a\in A$ и рассмотрим множество $M=\{y\in B| y< 0\vee yy< a\}$. Покажем, что это множество удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7) действительных чисел. а) Множество M не пусто, так как содержит 0. б) Выбирая $y\in A$ так, чтобы выполнялось условие $a<y\wedge 1<y$ (например, полагая $y=a+1$), получаем, по лемме 9 из части 2, что $a< yy$, то есть $\neg M(y)$. в) Пусть $z_1, z_2\in B$ и выполнено условие $M(z_1)\wedge\neg M(z_2)$. Тогда имеем $0\le z_2\wedge a\le z_2z_2\wedge$ $\wedge(z_1< 0\vee z_1z_1< a)$. Если $z_1< 0$, то сразу получаем $z_1< z_2$ Если же $z_1z_1< a$ (и $0\le z_1$), то из условия $a\le z_2z_2$ и леммы 9 из части 2 следует $z_1z_1< z_2z_2$, $z_1< z_2$. г) Пусть для некоторого $y\in B$ верно $M(y)$. Если $y< 0$, то достаточно заметить, что $M(0)=1$. Рассмотрим случай $0\le y$. Определим такой $u\in A$, чтобы удовлетворить условию $(y+u)(y+u)< a$. Так как $yy< a$, то $L(yy, a)$ (по лемме 4) и существует $w\in A$ такой, что $yy< w< a$ (в силу аксиомы (4)). Выберем в качестве u меньшее из чисел 1 и $(a+(-w))\,(y+y+1+1)^{-1}$. Тогда будем иметь $(y+u)(y+u)=yy+yu+yu+uu\le yy+yu+yu+u=$ $=yy+(y+y+1)u\le yy+(y+y+1)(a+(-w))(y+y+1+1)^{-1}\le$ $\le yy+(a+(-w))=a+(yy+(-w))< a$. Здесь было использовано очевидное условие $y+y+1< y+y+1+1$, $(y+y+1)(y+y+1+1)^{-1}< 1$. Полагая $z=y+u$, получим $y< z$ и $M(z)$. Все посылки аксиомы (7), таким образом, выполнены. Поэтому существует $x\in C$ такой, что для любого $y\in B$ $M(y)\sim L(y, x)$. Пусть какие-то u, $v\in A$ удовлетворяют условию $L(u, x)\wedge L(v, x)$. Тогда $uu< a\wedge vv< a$ и если, например, $u\le v$, то $uv\le vv< a$, то есть верно $L(uv, a)$. Пусть теперь для некоторых u, $v\in A$ имеем $\neg L(u, x)\wedge\neg L(v, x)$. Тогда $a\le uu$, $a\le vv$ и если, например, $u\le v$, то $a\le uu\le uv$, а значит $\neg L(uv, a)$. Из определения (10) предиката умножения выводим, что $xx=a$. Лемма доказана.

Лемма 19. *Для любого $z\in A$ найдутся такие x, $y\in N$, что $zy=x$* (а).

Доказательство. Выберем произвольно $z\in A$. По аксиоме (2) из части 2, существуют x, $y\in N$ такие, что $R(x, y, z)=1$. Поскольку $R(y, 1, y)=1$ (теорема 2 из части 2), то, по определению умножения положительных рациональных чисел, имеем $R(xy, y1, zy)=1$ (б). Тогда из условий (б), $R(x, 1, x)=1$, $(xy)1=x(y1)$ и аксиом (2), (4) положительных рациональных чисел (в части 2 настоящей работы) выводим (а). Лемма доказана.

Теорема 18. *Существует действительное число, не принадлежащее множеству рациональных чисел.*

Доказательство. По лемме 18, найдется такой $x\in C$, $x> 0$, который удовлетворяет условию $xx=1+1$

(а). Предположим, что $x \in A$. Тогда, в силу леммы 19, существует такой $q \in N$, что $xq \in N$ (б). Выберем среди всех натуральных q, удовлетворяющих условию (б), наименьшее (это можно сделать, по лемме 2 из части 2). Обозначим $xq = p$. Тогда $pp = (xq)(xq) = (xx)(qq) = (1+1)(qq)$, то есть $qq+qq = pp$ (в). Поскольку $q < q+q$, то из (в) получаем $q < p < q+q$ и $p+(-q) < q$. С другой стороны, непосредственной проверкой из (а), (б) и (в) выводим условие $xx(p+(-q))(p+(-q)) = (q+q+(-p))(q+q+(-p))$. Поэтому $x(p+(-q)) = q+q+(-p)$, и q не есть минимальное натуральное число, удовлетворяющее условию (б). Получили противоречие с исходным предположением о том, что x – рациональное число. Теорема доказана.

Действительные числа, не принадлежащие множеству рациональных чисел, называются *иррациональными*.

Выводы

Полученные здесь результаты по идентификации понятия числа имеют много общего с известными положениями из учения об основаниях арифметики, поэтому необходимо проанализировать различие между ними. В нашей постановке речь идет только об идентификации (то есть о математическом описании) понятия числа, вопрос об обосновании этого понятия не ставится. При решении задачи идентификации объектов все средства формального описания хороши, лишь бы они были надежны; нет необходимости их ограничивать, как это делается в математической логике при обосновании понятий арифметики. Снятие запрета на средства формального описания дает возможность идентифицировать именно ту арифметику, которая фактически используется в математической практике, а не тот ее вариант, который носит название *формальной арифметики*.

Наиболее близкую к формулируемой здесь постановку задачи мы находим в классической работе Ландау [3], опубликованной впервые в 1930 году. Насколько нам известно, до настоящего времени результаты этой работы не пересматривались и не улучшались. Главный недостаток данной работы, оцениваемой нами с точки зрения задачи идентификации (а такая задача в ней не ставится, поскольку речь там идет только об обосновании арифметики), заключается в том, что в ней все аксиомы арифметики записаны на неформализованном логическом языке, то есть на том языке, который был общепринятым среди математиков в то время, когда эта работа была написана. При решении задачи идентификации этого недостаточно. Для этой цели мы использовали язык алгебры подстановочных операций [1]. Аксиомы (1)-(5), (15), (16), (20) и (21) из первой части настоящей работы, по существу, повторяют формулировки Ландау, различие заключается лишь в языке описания. Аксиомы (1)-(4) из второй части этой работы у Ландау вовсе отсутствуют. Это обусловлено тем, что он не различает дроби как пары натуральных чисел и как положительные рациональные числа и поэтому не вводит связывающий их предикат R. Однако при использовании языка алгебры подстановочных операций сделать это необходимо. То же самое относится и к аксиомам (7)-(10) из второй части работы, в которых фигурирует отсутствующий у Ландау предикат T, связывающий пары положительных рациональных чисел с соответствующими им рациональными числами. У Ландау отсутствует также предикат L, связывающий сечения с соответствующими им вещественными числами. Введение предиката L потребовало существенно иной системы аксиом для теории действительного числа (аксиомы (1)-(7)).

Список литературы: 1. *Баталин, А.В.* О теории натурального ряда [Текст] / *А.В. Баталин, З.В. Дударь, С.А. Пославский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. – С. 135-144. 2. *Баталин, А.В.* О теории рациональных и вещественных чисел [Текст] / *А.В. Баталин, С.А. Пославский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. С. 155-164. 3. *Ландау, Э.* Основы анализа. [Текст] / *Э. Ландау.* – М.: ИЛ, 1947. – 182 с. 4. *Баталин, А.В.* Идентификация категории количества. 1 [Текст] / *А.В. Баталин, С.А. Пославский, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко* // Радиоэлектроника и информатика. Науч.-техн. журнал – 1999. № 1. С. 95-104. 5. *Баталин, А.В.* Идентификация категории количества. 2 [Текст] / *А.В. Баталин, С.А. Пославский, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко* // Радиоэлектроника и информатика.. Науч.-техн. журнал – 2001. № 5. С. 136-148.

Поступила в редколлегию 22.04.2010

УДК 519.7

Про теорію дійсних чисел / М.Ф. Бондаренко, О.Д. Дрюк, Н.П. Круглікова, С.О. Пославський, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 150–158.

Категорія кількості представлена поняттями натурального, раціонального та дійсного числа. Мовою алгебри предикатних операцій описані характеристичні властивості цих понять, доказана повнота опису. З визначень понять, які розглянуті виведені їх основні властивості, на яких базується будова математичного аналізу.

Бібліогр.: 5 назв.

UDC 519.7

On the real numbers theory / M.F. Bondarenko, A.D. Dryuk, N.P. Kruglikova, S.A. Poslavsky, Ju.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 150–158.

The category of a quantity represented by concepts natural, rational and real quantities. In language of algebra of predicate operations the characteristic properties of these concepts are described, the completeness of the descriptions is proved. From definitions of considered concepts their main properties are introduced, on which the building of a calculus bases.

Ref.: 5 items.

УДК 519.766.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ СЕТИ ДЛЯ СЕМАНТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СВЯЗНЫХ ФРАГМЕНТОВ ТЕКСТА

Н. Ф. Хайрова[1], **Н. В. Шаронова**[2]

[1, 2] НТУ «ХПИ», г. Харьков, Украина, nina_khajrova@yahoo.com, nvsharonova@mail.ru

Проведен анализ основных задач семантического анализа в современных системах автоматической обработки текстов на естественном языке. Предлагается модель построения логической сети отношений переводных эквивалентов многозначных слов сверхфразовых единств. Для построения сети используется математический аппарат конечных предикатов. Строится логическая сеть позволяющая определять значение многозначного переводного эквивалента по предыдущим многозначным словам сверхфразовых единств.

СЕМАНТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ТЕКСТОВ НА ЕСТЕСТВЕННОМ ЯЗЫКЕ, ЛОГИЧЕСКАЯ СЕТЬ, ПЕРЕВОДНОЙ ЭКВИВАЛЕНТ, СВЕРХФРАЗОВОЕ ЕДИНСТВО

Введение

Сегодня этапы морфологического и синтаксического анализа достаточно хорошо разработаны в современных системах машинного перевода. Существует много моделей синтаксических структур словосочетаний и предложений. Эти модели хорошо формализуются и соответственно автоматизируются. Этапы морфологической обработки также практически полностью реализованы для большинства европейских языков. Тогда как задача правильного перевода смысла фразы и всего связного текста по-прежнему остается актуальной. Семантический анализ остается одним из наиболее актуальных направлений исследований компьютерной лингвистики. В современных системах машинного перевода под задачей семантического анализа понимают задачу правильного выбора переводного эквивалента многозначного слова. Обычно она решается двумя способами. Первый способ — подключение тематических словарей и указание приоритетности их подключения. Второй способ — привлечение к переводу знаний о микротеме предложения. Первый способ существенно повышает качество перевода при переводе специальных текстов. Второй способ достаточно трудоемкий и дорогостоящий, практически используемый так же только на словарях небольшого объема. В работе предлагается в качестве объекта реализации метода семантического анализа использовать сверхфразовое единство.

1. Постановка задачи исследования

Ведущей и неотъемлемой функцией языка является его коммуникативная функция, которая наиболее полно реализуется именно на сверхфразовом уровне языка: человеческое общение осуществляется, в основном, текстами, а не предложениями, и тем более не словосочетаниями и словами. Связный текст характеризуется не только целостностью и организованностью по цели и смыслу, но связанностью фраз различными языковыми средствами (с использованием цепочек замещения и графемного оформления).

Мы рассматриваем текст не как конгломерат отдельных не связанных между собой предложений, а как сложную многоуровневую систему сверхфразовых единств.

Под сверхфразовым единством будет понимать группу тесно связанных между собой предложений, цепочку фраз, объединенных общностью значения и представляющих собой новое семантико-синтаксическое целое [1].

Выбор сверхфразового единства в качестве объекта исследования обусловлен тем, что данный элемент связанного текста обладает относительной законченностью и структурной независимостью от окружающего контекста. Сверхфразовые единства состоят из предложений, объединенных посредством сверхфразовых связей, каждая сверхфразовая единица полностью раскрывает какую-то микротему. На синтаксические связи сверхфразовых структур накладываются определенные ограничения, обусловленные объемом оперативной памяти человека. «Непрерывная связность» в тексте определяется обычно на трех-пяти, но не более чем семи последовательных предложениях, тем самым ограничивается длина (или «глубина») сверхфразовых единиц.

Ближе всего к сверхфразовому единству лежит абзац, и хотя лингвистических закономерностей построения абзаца не существует, примем логическое разбиение текста на абзацы соответствующим разбиению текста на сверхфразовые единства.

2. Используемый математический аппарат

Введем универсум элементов U, включающий всевозможные единицы языковой системы на уровне сверхфразового единства: лексемы, предложения, словосочетания, значения слов и словосочетаний входного и выходного языках и т.п.

Универсум является конечным, так как значения лексем предложения извлекаются из конечных словарных статей словарей. Из элементов универсума образуются подмножества M_{1i}, M_{2i}, ..., M_{mi}, в соответствие с конкретной лексемой и ее переводными эквивалентами. На декартовых произведениях $M_{1i} \times M_{2i} \times ... \times M_{mi}$ определяются предикаты P_j, характеризующие перевод данного предложения. Предикатом P, заданным на U, называется любая функция $\varepsilon = P(x_1, x_2, . . ., x_n)$, отображающая множество U, в множество $\Sigma = \{0,1\}$. При n=1 предикат P является унарным, при n=2 — бинарным, при n=3 — тернарным. Т.к. множество U, при построении модели определения смысла сверхфразового единства, конечно, то и предикат P конечен. Предикаты, обозначаемые 1 и 0, называются тождественно истинными и тождественно ложными соответственно.

Множество всех *n-арных* предикатов, заданных на U^n, на котором определены операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, называется алгеброй *n-арных* предикатов на U. При этом операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания являются базисными для алгебры предикатов. Алгебра предикатов при любом значении n является разновидностью булевой алгебры, в ней выполняются все основные тождества булевой алгебры [2]. Переменные x_1, x_2, ... , x_n, называемые предметными, и их значения, называемые предметами, представлены предикатом узнавания предмета a, по переменной x_i, являющегося базисными для алгебры предикатов:

$$x_i^a = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i = a \\ 0, \text{ если } x_i \neq a \end{cases} (1 \le i \le n), \qquad (1)$$

где $i = \{1,2, ... , n\}$, a – любой элемент универсума.

В качестве предметных переменных будем использовать лексемы сверхфразового единства, имеющие многозначные переводные эквиваленты.

3. Моделирование зависимостей значений многозначных лексем сверхфразовых единств

Рассмотрим сверхфразовое единство, состоящее из четырех английских предложений:

“Client **(x_9)** – server**(x_3)** architecture like most Internet applications**(x_1)** the Web **(x_2),** adheres to the client**(x_9)** – server **(x_3),** model in which two separate **(x_4)** software **(x_5),** programs work together to perform some specific task. The software **(x_5)** on the user’s computer is called the client **(x_9)**, while the software **(x_5)** on the remote computer is called the server **(x_3)**. The Web **(x_2)** client **(x_9)** does the job of asking for, and displaying**(x_6)** electronic documents. Some common Web **(x_2)** client**(x_9)** interfaces**(x_7)** – also Known as Web browsers**(x_8)** – include NetScape, which claims about 90% of market share, as well as Mosaic and Internet Assistant”[3].

В сверхфразовом единстве выделяем девять предметных переменных x_i, $1 \le i \le 9$, соответствующих многозначным лексемам: *application*, *Web*, *server*, *separate*, *software*, *display*, *interfaces*, *browsers*, *client.*

Значения, соответствующие предметным переменным представлены соответствующими множествами X_i, $1 \le i \le 9$ переводных эквивалентов многозначных лексем, определяемыми по словарной статье переводного словаря [4]. Данные множества переводных эквивалентов многозначных слов определяются на основании словарной статьи переводного словарях $X_1=\{x_1^j\}$, $1 \le j \le 6$: x_1^1= прикладная программа, x_1^2=форма заявления, x_1^3= отнесение платежа, x_1^4=вышивка, x_1^5= применение лекарств, x_1^6= внесение удобрений.

Значения предметной переменной x_2 определяются множеством $X_2=\{x_2^j\}$, $1 \le j \le 7$:, где x_2^1=паутина, x_2^2=всемирная сеть, x_2^3=анатомическая соединительная ткань, x_2^4=перепонки (у утки, летучей мыши и т.д.), x_2^5=плетение, x_2^6=соединительная конструкция, x_2^7=серцевина сверла.

Значения предметной переменной x_3 определяются множеством $X_3=\{x_3^j\}$, $1 \le j \le 5$:, где x_3^1= поднос (для тарелок), x_3^2= игрок в теннис, x_3^3 = сервер, x_3^4 = причетник, x_3^5 = судебный исполнитель.

Значения предметной переменной x_4 определяются множеством $X_4=\{x_4^j\}$, $1 \le j \le 3$, где x_4^1= разрозненный, x_4^2= политически автономный, x_4^3= разделять ткани хирургическим путем.

Значения предметной переменной x_5 определяются множеством $X_5=\{x_5^j\}$, $1 \le j \le 3$, где x_5^1= программное обеспеченье, x_5^2 = непроизводственные услуги, x_5^3 = радиопрограмма.

Значения предметной переменной x_6 определяются множеством $X_6=\{x_6^j\}$, $1 \le j \le 4$, где x_6^1= шоу, x_6^2= полиграфия, x_6^3 = дисплей, x_6^4 = демонстрационная окраска.

Значения предметной переменной x_7 определяются множеством $X_7=\{x_7^j\}$, $1 \le j \le 4$, где x_7^1 = граница раздела, x_7^2 = устройство сопряжения (между человеком и ЭВМ), x_7^3 = взаимодействие.

Значения предметной переменной x_8 определяются множеством $X_8=\{x_8^j\}$, $1 \le j \le 3$, где x_8^1= животное, объедающее побеги, x_8^2= читатель, x_8^3= браузер.

Значения предметной переменной x_9 определяются множеством $X_9=\{x_8^j\}$, $1 \le j \le 4$, где x_9^1= заказчик, x_9^2= постоялец в гостинце, x_9^3= государство-сателлит, x_9^4= компьютерный пользователь.

Введем так же предметную переменную, определяющую предложение q. Предложение (в языке) — это минимальная единица человеческой речи, которая представляет собой грамматически организованное соединение слов, обладающее смысловой и интонационной законченностью. Достаточно четко очерченное множество рассматриваемых предложений сверхфразового единства $Q=\{q^j\}$, $1 \leq i \leq 4$.

Выразим предметную переменную, определяющую предложение сверхфразового единства, через переменные, определяющие значения переводных эквивалентов:

$$(x^1{}_9 \cup x^2{}_9 \cup x^3{}_9 \cup x^4{}_9)\,(x^1{}_3 \cup x^2{}_3 \cup x^3{}_3 \cup x^4{}_3 \cup x^5{}_3)\,(x^1{}_1 \cup x^2{}_1 \cup x^3{}_1 \cup x^4{}_1 \cup x^5{}_1 \cup x^6{}_1)\,(x^1{}_2 \cup x^2{}_2 \cup x^3{}_2 \cup x^4{}_2 \cup x^5{}_2 \cup x^6{}_2)\,(x^1{}_9 \cup x^2{}_9 \cup x^3{}_9 \cup x^4{}_9)\,(x^1{}_3 \cup x^2{}_3 \cup x^3{}_3 \cup x^4{}_3 \cup x^5{}_3)\,(x^1{}_4 \cup x^2{}_4 \cup x^3{}_4)\,(x^1{}_5 \cup x^2{}_5 \cup x^3{}_5) = q^1$$

$$(x^1{}_5 \cup x^2{}_5 \cup x^3{}_5)\,(x^1{}_9 \cup x^2{}_9 \cup x^3{}_9 \cup x^4{}_9)\,(x^1{}_5 \cup x^2{}_5 \cup x^3{}_5)\,(x^1{}_3 \cup x^2{}_3 \cup x^3{}_3 \cup x^4{}_3 \cup x^5{}_3) = q^2$$

$$(x^1{}_2 \cup x^2{}_2 \cup x^3{}_2 \cup x^4{}_2 \cup x^5{}_2 \cup x^6{}_2)\,(x^1{}_9 \cup x^2{}_9 \cup x^3{}_9 \cup x^4{}_9)\,(x^1{}_6 \cup x^2{}_6 \cup x^3{}_6 \cup x^4{}_6) = q^3$$

$$(x^1{}_2 \cup x^2{}_2 \cup x^3{}_2 \cup x^4{}_2 \cup x^5{}_2 \cup x^6{}_2)\,(x^1{}_9 \cup x^2{}_9 \cup x^3{}_9 \cup x^4{}_9)\,(x^1{}_7 \cup x^2{}_7 \cup x^3{}_7)\,(x^1{}_8 \cup x^2{}_8 \cup x^3{}_8) = q^4.$$

4. Построение элементов логической сети

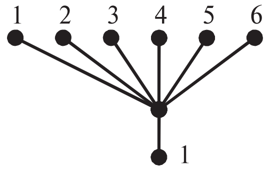
Производим бинаризацию только что записанного отношения, связывающего переменную q с переменными x_1— x_9.

Для этого отыскиваем отношение P_1, связывающее переменные x_1 и q:

$$P_1(x_1, q) = (x^1{}_1 \cup x^2{}_1 \cup x^3{}_1 \cup x^4{}_1 \cup x^5{}_1 \cup x^6{}_1)\, q^1.$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_1



Номер предложения q

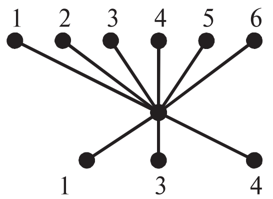
Рис. 1

Отыскиваем отношение P_2, связывающее переменные x_2 и q:

$$P_2(x_2, q) = (x^1{}_2 \cup x^2{}_2 \cup x^3{}_2 \cup x^4{}_2 \cup x^5{}_2 \cup x^6{}_2)\,(q^1 \cup q^3 \cup q^4).$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_2



Номер предложения q

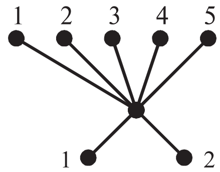
Рис. 2

Отыскиваем отношение P_3, связывающее переменные x_3 и q:

$$P_3(x_3, q) = (x^1{}_3 \cup x^2{}_3 \cup x^3{}_3 \cup x^4{}_3 \cup x^5{}_3)\,(q^1 \cup q^2).$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_3



Номер предложения q

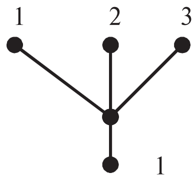
Рис. 3

Отыскиваем отношение P_4, связывающее переменные x_4 и q:

$$P_4(x_4, q) = (x^1{}_4 \cup x^2{}_4 \cup x^3{}_4)\, q^1.$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_4



Номер предложения q

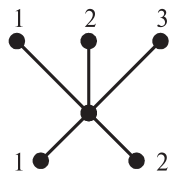
Рис. 4

Отыскиваем отношение P_5, связывающее переменные x_5 и q:

$$P_5(x_5, q) = (x^1{}_5 \cup x^2{}_5 \cup x^3{}_5)\,(q^1 \cup q^2).$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_5



Номер предложения q

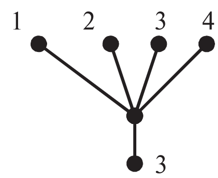
Рис. 5.

Отыскиваем отношение P_6, связывающее переменные x_6 и q:

$$P_6(x_6, q) = (x^1{}_6 \cup x^2{}_6 \cup x^3{}_6 \cup x^4{}_6)\, q^3.$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_6



Номер предложения q

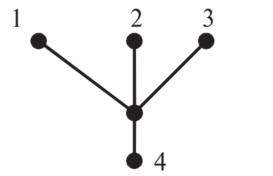
Рис. 6

Отыскиваем отношение P_7, связывающее переменные x_7 и q:

$$P_7(x_7, q) = (x^1{}_7 \cup x^2{}_7 \cup x^3{}_7)\, q^4.$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_7



Номер предложения q

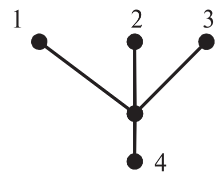
Рис. 7

Отыскиваем отношение P_8, связывающее переменные x_8 и q:

$$P_8(x_8, q) = (x^1{}_8 \cup x^2{}_8 \cup x^3{}_8)\, q^4.$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_8



Номер предложения q

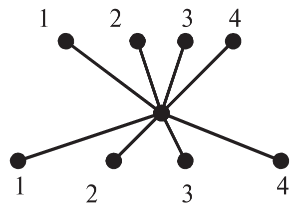
Рис. 8

Отыскиваем отношение P_9, связывающее переменные x_9 и q:

$$P_9(x_9, q) = (x^1{}_9 \cup x^2{}_9 \cup x^3{}_9 \cup x^4{}_9)\,(q^1 \cup q^2 \cup q^3 \cup q^4).$$

Данное отношение можно представить в виде двудольного графа:

Значения предметной переменной x_9



Номер предложения q

Рис. 9

5. Связь предметных переменных и тематических словарей

Можно так же выделить достаточно четко очерченное множество предметных областей. Переводные эквиваленты многозначных слов сверхфразового единства, выражаемые тематикой предметных специализированных словарей: t^1 = компьютерные сети, t^2 = экономика, t^3 = медицина, t^4 = юридический, t^5 = биологический, t^6 = политический, t^7 = с/х, t^8 = технический, t^9 = легкая промышленность, t^{10} = теология, t^{11} = гостиничное обслуживание, t^{12} = спорт, t^{13} = телевидение и радиовещание

Выражаем предметные области используемых специализированных словарей через значения предметных переменных x_i, $1 \le i \le 9$:

$$x^1{}_1\, x^1{}_2\, x_3{}^3\, x_4{}^1\, x_5{}^1\, x_6{}^3\, x_7{}^2\, x_8{}^3\, x_9{}^4 = t^1, \tag{2}$$

$$x^3{}_1\, x_5{}^2\, x_7{}^3\, x_8{}^2\, x_9{}^5 = t^2, \tag{3}$$

$$x^5{}_1\, x^4{}_2\, x_4{}^3 = t^3, \tag{4}$$

$$x^2{}_1\, x_3{}^5\, x_9{}^1 = t^4, \tag{5}$$

$$x^3{}_2\, x_6{}^4\, x_8{}^1 = t^5, \tag{6}$$

$$x_4{}^2\, x_9{}^3 = t^6, \tag{7}$$

$$x^6{}_1\, x^1{}_2 = t^7, \tag{8}$$

$$x^6{}_2\, x_6{}^2\, x_7{}^1 = t^8, \tag{9}$$

$$x^4{}_1\, x^5{}_2 = t^9, \tag{10}$$

$$x^4{}_3 = t^{10}, \tag{11}$$

$$x^1{}_3\, x^2{}_9 = t^{11}, \tag{12}$$

$$x^2{}_3 = t^{12}, \tag{13}$$

$$x^3{}_5\, x^1{}_6 = t^{13}. \tag{14}$$

Анализируя полученные равенства, отбросим те из них, в которых правая часть зависит только от одной предметной переменной (11, 13) [5]. Такой подход обусловлен принятым определением сверхфразового единства, в котором рассматривается одна микротема и вероятность отнесения переводных эквивалентов многозначных слов к различным предметным областям мала [6].

Произведем бинаризацию записанных отношений, связывающих переменную t с переменными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Для этого отыскиваем отношение P_{10}, связывающее переменные x_1 и t:

$$P_{10}(x_1, t) = t^1 x^1{}_1 \cup t^2 x^3{}_1 \cup t^3 x^5{}_1 \cup t^4 x^2{}_1 \cup t^7 x^6{}_1 \cup t^9 x^4{}_1.$$

Отношение P_{11}, связывает переменные x_2 и t:

$$P_{11}(x_2, t) = t^1 x^1{}_2 \cup t^3 x^4{}_2 \cup t^5 x^3{}_2 \cup t^8 x^6{}_2.$$

Отношение P_{12}, связывает переменные x_3 и t:

$$P_{12}(x_3, t) = t^1 x_3{}^3 \cup t^4 x_3{}^5 \cup t^{11} x^1{}_3.$$

Отношение P_{13}, связывает переменные x_4 и t:

$$P_{13}(x_4, t) = t^1 x_4{}^1 \cup t^3 x_4{}^3 \cup t^6 x_4{}^2.$$

Отношение P_{14}, связывает переменные x_5 и t:

$$P_{14}(x_5, t) = t^1 x^1{}_5 \cup t^2 x_5{}^2 \cup t^{13} x^3{}_5.$$

Отношение P_{15}, связывает переменные x_6и t:

$$P_{15}(x_6, t) = t^1 x_6{}^3 \cup t^5 x_6{}^4 \cup t^8 x_6{}^2 \cup t^{13} x^1{}_6.$$

Отношение P_{16}, связывает переменные x_7и t:

$$P_{16}(x_7, t) = t^1 x_7{}^2 \cup t^2 x_7{}^3 \cup t^8 x_7{}^1.$$

Отношение P_{17}, связывает переменные x_8 и t:

$$P_{17}(x_8, t) = t^1 x_8^3 \cup t^2 x_8^2 \cup t^5 x_8^1.$$

Отношение P_{18}, связывает переменные x_9 и t:

$$P_{18}(x_9, t) = t^1 x_9^4 \cup t^2 x_9^5 \cup t^4 x_9^1 \cup t^6 x_9^3 \cup t^{11} x_9^2.$$

Мы построили математическую модель значений переводных эквивалентов многозначных слов сверхфразового единства, характеризующуюся системой бинарных отношений P_1 — P_{18}, задаваемых двудольными графами и формулами предикатов. Образуя конъюнкцию этих предикатов, получим предикат модели P :

$$\begin{gathered} P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, q, t) = P_1(x_1, q) \cap \\ \cap P_2(x_2, q) \cap P_3(x_3, q) \cap P_4(x_4, q) \cap P_5(x_5, q) \cap \\ \cap P_6(x_6, q) \cap P_7(x_7, q) \cap P_8(x_8, q) \cap P_9(x_9, q) \cap \\ \cap P_{10}(x_1, t) \cap P_{11}(x_2, t) \cap P_{12}(x_3, t) \cap P_{13}(x_4, t) \cap \\ \cap P_{14}(x_5, t) \cap P_{15}(x_6, t) \cap P_{16}(x_7, t) \cap P_{17}(x_8, t) \cap \\ \cap P_{18}(x_9, t). \end{gathered}$$

Предикату модели соответствует отношение модели P, связывающее между собой предметные переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, q, t. Отношение модели P можно наглядно изобразить в виде логической сети.

Каждому полюсу логической сети ставится в соответствие своя предметная переменная модели. Каждый полюс обозначается своей предметной переменной. С каждым полюсом связывается область изменения атрибута этого полюса. Любой полюс логической сети в каждый момент времени несет какое-то знание о значении своего атрибута. Указывая состояние всех полюсов сети в данный момент времени, получаем состояние сети в тот же момент времени.

Каждой ветви логической сети ставится в соответствие свое бинарное отношение модели, которое называется отношением этой ветви. Каждая ветвь соединяет два полюса, отвечающие тем предметным переменным, которые связываются отношением, соответствующим данной ветви.

Выводы

Логическую сеть можно превратить в электронную схему для автоматического решения некоторого класса задач, определяемого той моделью, для которой была построена данная сеть, и установить на материнской плате персонального компьютера [8]. По мере необходимости программа, управляющая работой компьютера, может обращаться к данной карте, которая за доли микросекунды формирует ответ на запрос.

Такое распараллеливание действия при обработке полнотекстовых баз данных повышает производительность работы системы машинного перевода, с существенным улучшением качества перевода естественно-языковых текстов. Использование данной модели позволяет существенно уменьшить количество семантических ошибок при переводе не только узкоспециализированных текстов, но и при переводе текстов общей тематики, так как в текстах данного типа правила формирования сверхфразовых единств сохраняются.

Список литературы: 1. *Хайрова Н.Ф.* Машинный перевод./ Н. Ф. Хайрова, И. В. Замаруева — Харьков: Око, 1998.— 82 с. 2. *Бондаренко М. Ф.* Теория интеллекта. / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко — Харьков: Изд-во СМИТ, 2007. — 576 с. 3. *Schneiderman R. A.* Why librarians should rule the net // E-NODE.— 1996.—Vol.1, N 4.— 5, Septem. 4. *Хайрова Н Ф.* Модель разбиения множества элементов смысла многозначных слов переводимого предложения в системах автоматического перевода / Хайрова Н. Ф., Шаронова Н. В. Бионика интеллекта: научн.-техн. журнал. 2007. № 2 (67). С.37-40. 5. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Технические средства. — Х.: Вища школа, 1986.— 134с. 6. *Apresjan*, *Ju*. Systematic Lexicography. Oxford University Press, 2000, XVIII, 304 pp 7. *Бондаренко М.Ф.* Модели языка / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Бионика интеллекта – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 2004, № 1 – С. 27-37. 8. *Хайрова Н.Ф.*, *Замаруева И.В.* 8. *Хаханов В.И.* Проектирование и тестирование цифровых систем на кристаллах / В. И. Хаханов, Литвинова Е.И., Гузь О.А. — Харьков: ХНУРЭ. — 2009. — 484 с.

Поступила в редколлегию 26.04.2010

УДК 519.766.2

Використання логічної мережі для семантичного аналізу зв'язних фрагментів тексту / Н.Ф. Хайрова, Н.В. Шаронова / Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 159–163.

Проведено аналіз основних завдань семантичного аналізу в сучасних системах автоматичної обробки текстів природної мови. Запропонована модель побудови логічної мережі відносин перевідних еквівалентів багатозначних слів над фразової єдності. Для побудови мережі використовується математичний апарат кінцевих предикатів. Побудована логічна мережа, що дозволяє визначати значення багатозначного перевідного еквіваленту за попередніми багатозначними словами над фразової єдності.

Бібліогр.: 8 найм.

UDC 519.766.2

Use of the Lgic Network for the Semantic Analysis of Coherent Fragments of the Text / N.F. Khairova, N.V. Sharonova / Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 159–163.

The article suggests a model of a logical net of relations of translation equivalents of polysemantic words in superphrasal unities. Finite predicates are used to build the network. The logical network under consideration allows defining the meaning of a translation equivalent using the meanings of the previous polysemantic words in superphrasal unities.

Ref.: 8 items.

УДК 004.934

РАСПОЗНАВАНИЕ РЕЧИ: ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ, СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

М.Ф. Бондаренко[1], А.В. Работягов[2], С.В. Щепковский[3]

[1] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина,
[2] ХНУРЭ, г. Харьков, beloswet@kture.kharkov.ua Украина,
[3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, svserg@kture.kharkov.ua

В статье проведен обзор развития систем распознавания речи, рассмотрены общие принципы их построения, перечислены актуальные проблемы этого направления. Также рассмотрены актуальные области применения и перспективы развития систем распознавания речи.

МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ РЕЧИ, СОВРЕМЕННЫЕ И ПЕРСПЕКТИВНЫЕ РЕЧЕВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Введение

В настоящее время существуют многочисленные технические средства, могущие воспринимать (распознавать) произносимые речевые сообщения: компьютеры, медицинское электронное оборудование, автомобили, мобильные телефоны и др.

Что такое распознавание речи? На первый взгляд, все кажется очень просто: человек произносит слово (фразу), а техническая система адекватно реагирует на него: либо выполняет команду, содержащуюся в слове (фразе), либо набирает диктуемый текст, либо как-то иначе “распоряжается” извлеченной из фразы информацией.

Бурное развитие распознавания речи с помощью персонального компьютера (ПК) началось с 1993 г.

Две ключевых задачи распознавания речи – достижение 100 % распознавания на ограниченном наборе команд хотя бы для одного диктора и независимое от диктора распознавание непрерывного речевого потока в реальном масштабе времени произвольного языка с приемлемым качеством – до сих пор не решены, несмотря на многочисленные попытки решения этих задач в течение последних 50-ти лет.

Современные системы распознавания речи уже дают возможность пользователям диктовать слова (фразы) в обычной разговорной манере. Однако процесс непрерывного распознавания речи, дающий до 95 % качества распознавания при оптимальных условиях, все-таки дает на 100 знаков 5 ошибок. Около 200 ошибок на странице формата А4 – слишком много для профессиональной работы. Рассмотрим ставшую традиционной последовательность действий для компьютерного распознавания речевого сигнала.

Как правило, система распознавания речи состоит из двух моделей: акустической и лингвистической.

Компьютер записывает звук речи в виде цифрового сигнала и делит его на аудиофрагменты длительностью несколько миллисекунд. Акустическая модель отвечает за преобразование речевого сигнала в набор признаков, в которых отображена информация о содержании речевого сообщения. Программа выполняет сложный анализ речи, сравнивая аудиофрагменты с записанными в память речевыми образцами.

Лингвистическая модель анализирует информацию, получаемую от акустической модели, и формирует окончательный результат распознавания. На основе вероятностного расчета компьютер определяет, что именно мог произнести пользователь. В основе модели лежит понятие фонемы – наименьшей акустической единицы языка. В процессе обучения компьютер распознает наиболее важные признаки произношения пользователем фонем и записывает полученные данные в виде профиля пользователя. Для таких систем важно, чтобы в дальнейшем во время диктовки пользователь, по возможности, выдерживал мелодию речи и произношение.

1. Этапы развития систем распознавания речи

Создание устройств, способных воспринимать и “понимать” звучащую речь, имеет более короткую историю, чем построение “говорящих машин”, синтезирующих речь. Следующие даты можно назвать основными вехами в развитии компьютерного распознавания речи.

1962 г. Первое коммерческое устройство речевого вывода: модель 7772 от IBM.

1984 г. Первая система распознавания речи на базе ЭВМ. На распознавание слова уходили минуты. Система различала примерно 5000 слов.

1986 г. Опытный образец системы речевого ввода Tangora 4. Благодаря специальному микропроцессору впервые стала возможна обработка речи на рабочем месте в реальном времени. В системе уже появилась функция контроля контекста.

1990 г. Dragon System представила первую американскую версию программы речевого ввода Dragon Dictate System.

1992 г. Технология Tangora в модели клиент-сервер. Используется RISC-система IBM RS/6000. Речевой ввод с ПК под OS/2.

1993 г. Появилась первая система речевого ввода для ПК – Personal Dictation от IBM; стоимость $1000. Одновременно выходит Philips Dictation System – первая система непрерывного распознавания речи.

1995 г. IBM представила на CeBIT систему диктовки VoiceType со специализированными словарями для медиков и адвокатов.

1997 г. Появилась система клиент-сервер Speech Magic от Philips. Lernout & Hauspie представила первую англоязычную систему распознавания речи.

2001 г. Microsoft выпускает комплект офисных приложений Office XP с поддержкой речевого ввода и управления.

Первые попытки в данной области относятся к 40-м годам прошлого века, и связаны они с появлением спектральных анализаторов – электрических устройств, позволяющих анализировать спектральные характеристики речевых сигналов. В СССР в это время было создано первое техническое устройство, которое могло распознавать гласные русского языка на основе разности энергии в 14 частотных полосах [1].

Развитие области знаний, связанной с анализом и распознаванием речевого сигнала, началось с решения задач передачи речи по узкополосным каналам связи с полосой пропускания меньшей, чем у обычной телефонной линии. Решение этой задачи привело к созданию вокодеров – устройств, выполняющих сокращение частотной полосы речевых сигналов для линий дальней связи. Первым успехом в данной области считается полосный вокодер американского инженера-связиста Х. Дадли [2]. Он представлял собой параметрический вокодер, фильтровавший спектр речи с интервалом в 20-30 мс на несколько полос, в каждой из которых измерялась энергия. Вокодер сначала осуществляет спектрально-временной анализ речевого сигнала, выделяя его акустические параметры, а затем может восстановить (ресинтезировать) исходный речевой сигнал на основании выделенных параметров. В отличие от предшествующих синтезаторов, вокодер Дадли был основан не на имитации артикуляции, а на воспроизведении акустических параметров речевого сигнала.

Серьезные работы по распознаванию речи начались в основном после Второй мировой войны. Первое устройство для распознавания речи появилось в 1952 г., оно могло распознавать произнесённые человеком цифры [3]. В AT&T Bell Labs была создана система распознавания отдельных цифр с помощью простого согласования акустических характеристик с шаблонами. Она представляла собой довольно примитивную систему, которая могла распознавать цифры, переданные голосом по телефону.

Для дальнейшего развития автоматического распознавания речи (АРР), большое значение имели метод динамической спектрографии (типа "Видимая речь") и широкое использование соответствующей аппаратуры в фонетических исследованиях. К концу 50-х годов на материале самых разных языков был накоплен большой исследовательский материал, который свидетельствовал о сложной природе соответствия между привычными для лингвистов представлениями речевых отрезков в виде последовательности фонем или аллофонов и физической реальностью звучащей речи. В начале 60-х годов компания IBM разработала и продемонстрировала "Shoebox" – предшественника современных систем распознавания речи. Это новаторское устройство распознавало и реагировало на 16 произносимых слов, включая цифры от 0 до 9. Оно было показано по телевидению и в павильоне IBM на мировой ярмарке 1962 г. в Сиэтле.

Достижения в области анализа и передачи речевого сигнала впервые в нашей стране были широко изложены в монографии М. А. Сапожкова "Речевой сигнал в кибернетике и связи" в 1963 г. Позже вышла работа большого коллектива авторов "Вокодерная телефония. Методы и проблемы" под редакцией А. А. Пирогова [4]. За рубежом методы анализа речевого сигнала были опубликованы Дж. Фланаганом в своей монографии немного позже М. А. Сапожкова.

Система распознавания на основе вероятностного подхода была создана Фраем и Денесом в лондонском University College. В этой системе впервые использовались вероятности переходов между фонемами. Начиная с 1971 г. Агентство перспективных исследовательских программ (DARPA) Министерства обороны США финансировало четыре конкурирующих пятилетних проекта по разработке высокоэффективных систем распознавания речи. Победителем этой программы и единственной системой, соответствующей требованиям по распознаванию словаря из 1000 слов с точностью 90%, стала система HARPY, разработанная в университете CMU. Окончательная версия этой системы была создана на основе системы Dragon, разработанной аспирантом того же университета Дж. Бейкером [5]. В этой системе для вероятностного моделирования слов речи впервые были использованы скрытые марковские модели [6]. Скрытая марковская модель является на сегодняшний день наиболее широко применяемым и эффективным подходом к проблеме построения акустической модели.

Почти одновременно с системой Dragon в компании IBM была разработана еще одна система на основе скрытых марковских моделей. Начиная с этих двух разработок, вероятностные методы в целом и скрытые марковские модели в частности стали доминировать в исследованиях и разработках по распознаванию речи [7, 8]. Использование данного подхода, ввиду своей эффективности, стало в настоящее время почти промышленным стандартом.

2. Возможности современных технологий

Увеличение вычислительных мощностей мобильных устройств позволило и для них создать программы с функцией распознавания речи. Среди таких программ стоит отметить приложение Microsoft Voice Command, которое позволяет работать со многими приложениями при помощи голоса. Еще одной интересной программой является Speereo Voice Translator, голосовой переводчик. SVT способна распознавать фразы, произнесенные на английском языке, и “говорить” в ответ перевод на одном из выбранных языков.

Интеллектуальные речевые решения, позволяющие автоматически синтезировать и распознавать речевой сигнал, являются следующей ступенью развития интерактивных голосовых систем (IVR). Использование интерактивного телефонного приложения в настоящее время не веяние моды, а жизненная необходимость. Снижение нагрузки на операторов контакт-центров и секретарей, сокращение расходов на оплату труда и повышение производительности систем обслуживания — вот только некоторые преимущества, доказывающие целесообразность подобных решений.

Таким образом, в телефонных интерактивных приложениях все чаще стали использоваться системы автоматического распознавания и синтеза речи. При этом системы распознавания являются независимыми от дикторов, то есть распознают голос любого человека.

Следующим шагом технологий распознавания речи можно считать развитие так называемых Silent Speech Interfaces (SSI) (Интерфейсов Безмолвного Доступа). Эти системы обработки речи базируются на получении и обработке речевых сигналов на ранней стадии артикулирования.

В настоящее время, каждый человек, разговаривая по сотовому телефону, пользуется т.н. липредерами – вокодерами, работающими на основе линейного предсказания речевого сигнала, используемыми в стандарте GSM. Однако до сих пор в области вокодерной связи не решена задача максимального сжатия речевого сигнала до фонемного уровня и передачи его с наименьшей скоростью 60 бит/с, что соответствует письменной передачи речи произносимой со средней для человека скоростью 10 фонем в секунду. Решение этой задачи непосредственно связано с распознаванием непрерывной звучащей речи.

В настоящее время на рынке представлено множество коммерческих систем распознавания речи:

– Voice Type Dictation, Voice Pilot и ViaVoice от IBM;

– Dragon Dictate и Naturally Speaking от Nuance Communications;

– Voice Assist от Creative Technology;

– Listen for Windows от Verbex и многие другие.

Некоторые из них (например, ViaVoice и Naturally Speaking) способны, как заявляют разработчики, вводить слитную речь.

Компания Nuance Communications, в частности, постоянно обновляет свой программный продукт Dragon NaturallySpeaking, который позволяет надиктовывать текстовые документы, а также управлять работой компьютера с помощью голосовых команд. Нужно отметить, что данный инструмент распознавания достаточно хорошо работает только с разговорным английским.

Петербургская компания “Центр речевых технологий”, целенаправленно занимающаяся технологиями распознавания речи, еще в 2008 г. создала технологию распознавания слитной русской речи “Руссограф”, для создания которой был создан уникальный для России набор речевых баз данных, в который входят записи более чем 3000 дикторов общей длительностью около 300 часов, собранных с учетом 5 диалектных групп русского языка. Уникальность данной технологии заключается в том, что многочисленные системы распознавания речи, применяемые к другим языкам, не обеспечивают такого же качества распознавания при работе с русским языком. Сейчас эта технология развивается и адаптируется для применения в конечных программных продуктах.

3. Проблемы реализации систем распознавания речи

Рассмотрим аспекты, которые препятствуют глобальному решению проблемы качественного распознавания речи.

1. Темп речи варьируется в широких пределах, часто в несколько раз. При этом различные звуки речи растягиваются или сжимаются не пропорционально. Например, гласные изменяются значительно сильнее, чем полугласные и особенно смычные согласные. Для так называемых щелевых звуков есть свои закономерности. (Полугласные – это звуки при генерации которых необходимо участие голосовых связок, как и для гласных звуков, но сами они в обиходе считаются согласными. Например, так обычно звучат “м”, “н”, “л” и “р”. Смычные звуки образуются при резком смыкании и размыкании органов артикуляции. Например “б”, “п”, “д”, “т”. Образование щелевых звуков связано с шипением и прочими эффектами турбулентности в органах артикуляции. Можно назвать “в”, “ж”, “с”, а также “ш” и другие шипящие. В качестве примеров для простоты намеренно не приведены звуки, не имеющие буквенных обозначений.) Это свойство называется временной нестационарностью образцов речевого сигнала.

2. Произнося одно и то же слово или фразу в разное время, под влиянием различных факторов (настроения, состояния здоровья и др.), мы генерируем заметно не совпадающие спектрально-временные распределения энергии. Это справедливо даже для дважды подряд произнесенного слова. Намного

сильнее этот эффект проявляется при сравнении спектрограмм одной и той же фразы, произнесенной разными людьми. Обычно этот эффект называют спектральной нестационарностью образцов речевого сигнала (см. примеры спектрограмм).

3. Изменение темпа речи и четкости произношения является причиной коартикуляционной нестационарности, означающей изменение взаимовлияния соседних звуков от образца к образцу.

4. Проблема кластеризации слитной речи: в непрерывном речевом потоке трудно распознать речевые единицы из-за неточного определения границ.

Вот лишь некоторые причины, препятствующие полной реализации систем распознавания речи.

4. Области применения

Обозначим основные области применения систем распознавания речи:

1. *Автоматизированный пользовательский интерфейс*. На сегодняшний день для многих людей общение с компьютером все еще вызывает затруднения. Системы распознавания речи позволяют преодолевать эти трудности. Огромное преимущество систем распознавания голоса в том, что они намного быстрее любых других типов интерфейсов. Голосовая программа электронной почты позволяет включать компьютер, диктовать и послать сообщения, не прикасаясь к мыши и клавиатуре. Также люди с физическими недостатками получат более эффективный способ взаимодействия с компьютером.

Наиболее очевидное использование системы распознавания слитной речи заключается в создании систем автоматического стенографирования, которые могут заменять секретарей при диктовке голосом текстов писем, заметок в ежедневник, докладов. В таком случае происходит не только экономия за счет сокращения работы стенографиста, но и повышение степени конфиденциальности информации.

2. *Управление мобильными устройствами*. Известно, насколько неудобно и опасно использование мобильных телефонов с обычным (тактильным) способом набора номера за рулем. Во многих странах приняты законы о запрете использования водителями таких телефонов с целью сокращения количеств ДТП. Поэтому в последнее время популярностью пользуются мобильные телефоны с голосовым набором, избавляющие пользователя от необходимости набирать нужный номер вручную. Достаточно произнести имя абонента, и соединение произойдет автоматически. Аудиосистемы контроля и управления уже применяются в автомобилях некоторых производителей. Владелец автомобиля голосом подает команды управления температурным режимом, радио, навигационной системой, которые воспринимают голос и выполняют команды (DIVO и VoiceCommander).

3. *Информационные услуги*. Современные системы распознавания речи применяются, например, для заказа авиабилетов, просмотра новостей, доступа к базам данных.

Технология распознавания голоса быстро изменила рынок телефонных услуг. Системы, распознающие разговорную речь, работают в информационных телефонных центрах (IVR-системы – Interactive Voice Response). Эти системы позволяют автоматизировать диалог с клиентом, в результате чего отпадает необходимость в огромном количестве операторов, принимающих телефонные звонки, и сокращаются расходы на содержание персонала. Вдобавок улучшается качество обслуживания клиентов, так как соединение с машиной осуществляется практически сразу, избавляя клиентов от длительного ожидания освободившегося оператора на линии.

4. *Бизнес и профессиональная поддержка*. Уже многие годы голосовые диктофонные системы, предназначенные для представителей определенных профессий, например, врачей и юристов, можно найти на рынке программных продуктов. Многие представители этих профессий используют системы распознавания речи в повседневной работе. Стали популярны активируемые голосом домашние приборы и приспособления.

5. *Комбинированные человеко-машинные интерфейсы*. За последнее десятилетие области применения таких систем значительно расширились и будут продолжать расширяться. Они применяются, в частности, для контроля ограниченного доступа к объекту с помощью распознавания лица и речи человека, выполнения финансовых операций при помощи речи и сенсорных экранов банкоматов. В качестве примеров можно привести российско-белорусский проект “Модель аудиовизуального синтеза и распознавания речи для интеллектуальных устройств массового обслуживания” (2008-2009 гг), российско-турецкий проект “Методы и многомодальные интерфейсы для бесконтактной коммуникации инвалидов с информационно-справочными системами” (2009-2010 гг.), проект Российской академии наук “Разработка средств универсального многомодального доступа для системы интерактивного телевидения” (2009-2010 гг.).

5. Перспективы развития

Основными препятствиями на пути дальнейшего развития автоматизированных систем распознавания речи являются:

1) необходимость больших объемов словарей;
2) зашумленность речевого сигнала;
3) различные акценты и произношения.

Объемы словарей определяют степень сложности, требования к вычислительной мощности и надежность систем распознавания речи. Необходимо продолжать основательные исследования. Это позволит решить проблемы, связанные с морфологией, акцентами, высотой звука, темпом, громкостью, сливающимися словами, артикуляцией, лингвистической информацией и т. д. Ожидается, что основным направлением развития станет моделирование языков для использования в системах распознавания речи.

Не решена окончательно и проблема выделения речевого сигнала из шумового фона. В настоящее время пользователи систем распознавания голоса вынуждены работать в условиях минимального шумового фона.

Одна из приоритетных разработок в области распознавания речи – это человеко-машинные диалоговые системы, работа над которыми ведется во многих исследовательских лабораториях мира. Одной из таких разработок является техническая система фирмы AT&T (США), которая используется для распознавания речи в телефонной сети: клиент может запросить одну из пяти категорий услуг, используя любые слова; он говорит до тех пор, пока в его высказывании не встретится одно из пяти ключевых слов. Эта система в настоящее время обслуживает около миллиарда звонков в год.

Такие системы "умеют" работать с непрерывным речевым потоком и с неизвестными дикторами, понимать значения фрагментов речи ограниченного словаря и предпринимать ответные действия. Системы работают в реальном времени и способны выполнять пять функций:

1) узнавание речи – преобразование речи в текст, состоящий из отдельных слов;

2) понимание – грамматический разбор предложений и распознавание смыслового значения;

3) восстановление информации – получение данных из оперативных источников на основании полученного смыслового значения;

4) генерация лингвистической информации — построение предложений, представляющих полученные данные, на выбранном пользователем языке;

5) синтез речи – преобразование предложений в синтезированную компьютером речь.

Диалоговый интерфейс в таких системах позволяет человеку разговаривать с машиной, создавать и получать информацию, решать свои задачи. Системы с диалоговым интерфейсом различаются по уровню инициативности человека или компьютера. Исследования фокусировались на "смешанно инициативных" системах, в которых как человек, так и компьютер играют одинаково активную роль в достижении цели посредством диалога.

Как ожидают в Datamonitor, одном из лидирующих мировых маркетинговых агентств, объем мирового рынка систем автоматического распознавания речи вырастет с $32,7 млн в 2009 г до $99,6 млн в 2014 г. Примерно теми же темпами будет расти и рынок систем распознавания для автомобильных телематических систем: с $64,3 млн в 2009 г. до $208,2 млн в 2014 г. "Рост популярности голосового интерфейса в телефонах будет расти по мере того, как все большее число их владельцев сталкиваются с необходимостью использовать мобильник в ситуациях, когда руки и глаза заняты", – говорят специалисты.

Заключение

Ограничения применения систем распознавания речи в рамках наиболее традиционных приложений позволяют сделать вывод о необходимости поиска потенциально новых решений в области распознавания речи. В ближайшее десятилетие задача распознавания и понимания естественной речи вне зависимости от языка и диктора будет занимать центральное место в речевых технологиях.

В настоящее время в ХНУРЭ разрабатывается новый метод автоматического распознавания речевых сигналов в реальном масштабе времени, основанный на бионическом принципе анализа сигналов.

Список литературы. 1. *Мясников Л.Л.* Звуки речи и их объективное распознавание // Вестник ЛГУ. 1946. – №3. 2. *Dudley H., Riesz R., Watkins S.* "A Synthetic Speaker" // Journal of the Franklin Institute. 1939, 227. — P. 739–764. 3. *Davies, K.H., Biddulph, R. and Balashek, S.* (1952) Automatic Speech Recognition of Spoken Digits, J. Acoust. Soc. Am. 24(6). — P. 637 – 642. 4. Вокодерная телефония. Методы и проблемы. /Под ред. А.А. Пирогова. – М: Связь, 1974. 5. *Клэтт Д.Х.* Основные результаты работ по проекту ARPA //Методы автоматического распознавания речи. М. — 1983. — Т. 1. 6. *Рабинер Л.* Скрытые марковские модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи: Обзор. ТИИЭР. — 1989, т. 77, №2. — С. 86-120. 7. *Винцюк Т. К.* Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. – Киев: Наук. думка, 1987. – 262 с. 8. *Секунов Н.* Обработка звука на PC. – СПб.: БХВ-Петербург. – С. 2001-1248.

Поступила в редколлегию 29.04.2010

УДК 004.934

Розпізнавання мови: етапи розвитку, сучасні технології і перспективи їх застосування / М.Ф. Бондаренко, А.В. Работягов, С.В. Щепковський // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 164–168.

Проводиться короткий огляд розвитку систем розпізнавання мови, розглянуті загальні принципи їх побудови, а також перераховані основні етапи розвитку цього напряму і актуальні проблеми, пов'язані з вирішенням завдань розпізнавання мови.

Бібліогр.: 8 найм.

UDC 004.934

Speech recognition: stages of development, modern technologies and prospects of their application / M. Bondarenko, A. Robotyagov, S. Schepkovsky // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 164–168.

The brief review of development of the systems of speech recognition is conducted, general principles of their construction are considered, and also the basic stages of development of this direction and issues of the day, related to the decision of tasks of speech recognition are transferred.

Ref.: 8 items.

ОБ АВТОРАХ

Бондаренко Михаил Федорович	член-корреспондент НАН Украины, д-р техн. наук, профессор, ректор Харьковского национального университета радиоэлектроники
Дрюк Александр Дмитриевич	студент кафедры прикладной математики Харьковского национального университета радиоэлектроники
Кругликова Наталья Павловна	аспирант кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Лещинская Ирина Александровна	аспирант кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Пославский Сергей Александрович	канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина
Работягов Андрей Валентинович	научный сотрудник кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Русакова Наталия Евгеньевна	аспирант кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Хайрова Нина Феликсовна	канд. техн. наук, доцент кафедры информационных технологий и математики Харьковского гуманитарного университета «Народная украинская академия»
Хаханов Владимир Иванович	д-р техн. наук, профессор, декан факультета компьютерной инженерии и управления Харьковского национального университета радиоэлектроники
Шабанов-Кушнаренко Сергей Юрьевич	д-р техн. наук, профессор кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович	д-р техн. наук, профессор кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Шаронова Наталья Валерьевна	д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой интеллектуальных компьютерных систем Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»
Щепковский Сергей Вадимович	ведущий инженер кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники

Наукове видання

БІОНІКА ІНТЕЛЕКТУ

інформація, мова, інтелект

Науково-технічний журнал

№ 2 (73)

2010

Рекомендовано Вченою Радою
Харківського національного університету радіоелектроніки
(протокол № 63 від 28.05.2010)

Адреса редакції:

Україна, 61166, Харків-166, просп. Леніна, 14,
Харківський національний університет радіоелектроніки, к. 127, 285
тел. 702-14-77, факс 702-10-13,
e-mail: bionics@kture.kharkov.ua

Підписано до друку 28.05.2010. Формат 60 х 84 $^{1}/_{8}$. Друк ризографічний.
Папір офсетний. Гарнітура Newton. Умов. друк. арк. 15,6. Обл.-вид. арк. 15,0.
Тираж 100 прим. Зам. № .

Надруковано в навчально-науковому видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166, Харків-166, просп. Леніна, 14