МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ІННОВАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗМІСТУ ОСВІТИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

І.С. Агапова, М.Ф. Бондаренко, В.А. Дікарєв, В.В. Семенець

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ З РОЗВ'ЯЗКАМИ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом підготовки
«Прикладна математика»

Харків 2010

УДК 519.2 (076)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України. (Лист № 1.4/18-Г-48 від 10.01.2009 р).

Агапова І.С., Бондаренко М.Ф., Дікарєв В.А., Семенець В.В. Збірник задач з теорії ймовірностей з розв'язками: Навч. посібник / За ред. М.Ф. Бондаренка – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 356 с.

ISBN 978-966-659-163-3

Посібник містить задачі з теорії ймовірностей. Наводяться розв'язки задач з основних розділів курсу «Теорії ймовірностей і математичної статистики», який викладається студентам Харківського національного університету радіоелектроніки для спеціальностей ПМ, САУ, ІНФ. Видання може використовуватися студентами інших спеціальностей.

На початку кожного розділу наведені основні поняття і теореми теорії ймовірностей. Ця частина посібника за задумом авторів може використовуватися як довідник. Матеріал, що міститься тут, викладається у стислій, конспективній формі.

Рекомендується студентам денної форми навчання напрямків «Прикладна математика», «Системний аналіз», «Інформатика».

Іл.: 46. Бібл.: 16 назв.

Рецензенти: С.В. Яковлєв, д-р фіз.-мат. наук, професор (УЗМІТ);
С.В Смеляков, д-р техн. наук, професор (ХУПС);
Т.Є. Романова, д-р фіз.-мат. наук, професор (ІПМаш НАНУ).

ISBN 978-966-659-163-3

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ІННОВАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗМІСТУ ОСВІТИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

І.С. Агапова, М.Ф. Бондаренко, В.А. Дікарєв, В.В. Семенець

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
З РОЗВ'ЯЗКАМИ

Харків 2010

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

► і ◄	– початок і кінець розв'язання
$\approx$	– знак наближеної рівності
Ω	– простір елементарних наслідків, достовірна подія
ω	– елементарний наслідок
$A, B, C, \ldots$	– випадкові події
$\varnothing$	– неможлива подія
$\omega \in A$	– елементарний наслідок ω належить події A
$A \subset B$	– подія A входить у подію B
$A \bigcap B$, $A \cdot B$, AB	– добуток (переріз) подій A і B
$A \bigcup B$, $A + B$	– сума (об'єднання) подій A і B
$\bar{A}$	– подія, протилежна події A
$A \setminus B$	– різниця подій A і B
$P(A)$	– ймовірність події A
$n!$	– факторіал: добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно
A_n^k	– кількість розміщень (без повторень) з n елементів по k
C_n^k	– кількість сполучень (без повторень) з n елементів по k
P_n	– кількість перестановок з n елементів
$\tilde{A}_n^k$	– кількість розміщень (з повторами) з n елементів по k
$\tilde{C}_n^k$	– кількість сполучень (з повторами) з n елементів по k
$\mu(A)$	– міра множини A
$P(A \vert B)$	– умовна ймовірність події A за умови, що відбулася подія B
$P(k, n)$	– біноміальна ймовірність
$X, Y, Z, \ldots$	– випадкові величини
$F(x)$, $F_\xi(x)$	– функція розподілу випадкової величини ξ
p_i	– ймовірність події $\xi = x_i$ для дискретної випадкової величини ξ
$p(x)$, $p_\xi(x)$	– щільність розподілу (ймовірностей) неперервної випадкової величини ξ
$\varphi(x)$	– щільність стандартного нормального розподілу
$\varphi_{a,\sigma}(x)$	– щільність нормального розподілу з параметрами a і σ

$\Phi(x)$	– функція стандартного нормального розподілу
$\Phi_0(x)$	– функція Лапласа, інтеграл імовірностей
$\Gamma(x)$	– гамма-функція Ейлера
$\mathbb{R}^n$	– n-вимірний лінійний простір, $n \geq 1$
(ξ, η), (ξ_1, ξ_2)	– двовимірний випадковий вектор
(ξ, η, ζ), (ξ_1, ξ_2, ξ_3)	– тривимірний випадковий вектор
$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$	– n-вимірний випадковий вектор
$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	– функція розподілу n-вимірного випадкового вектора
p_{ij}	– ймовірність події $\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$
$p(x, y)$, $p_{\xi\eta}(x, y)$	– щільність розподілу (ймовірностей) неперервного двовимірного випадкового вектора (ξ, η)
ρ, $\rho(\xi, \eta)$	– коефіцієнт кореляції випадкових величин ξ і η
$\xi(\eta)$	– функція від випадкової величини η
$M\xi$	– математичне сподівання випадкової величини ξ
$D\xi$	– дисперсія випадкової величини ξ
a_k	– початковий момент k-го порядку
μ_k	– центральний момент k-го порядку
$R = [r_{ij}] = [\rho(\xi_i, \xi_j)]$	– кореляційна матриця випадкового вектора $\vec{\xi}$
$\operatorname{cov}(\xi, \eta)$	– коваріація (кореляційний момент) випадкових величин ξ і η
A	– асиметрія випадкової величини
E	– ексцес випадкової величини
x_α	– α-квантиль випадкової величини ξ
m_ξ	– медіана випадкової величини ξ
$F_\xi(x \mid y)$, $F_\xi(x \mid \eta = y)$	– умовна функція розподілу випадкової величини ξ за умови $\eta = y$
$p_\xi(x \mid y)$, $p_\xi(x \mid \eta = y)$	– умовна щільність розподілу випадкової величини ξ за умови $\eta = y$
$M(\xi \mid y)$, $M(\xi \mid \eta = y)$	– значення умовного математичного сподівання випадкової величини ξ за умови $\eta = y$
$D(\xi \mid y)$, $D(\xi \mid \eta = y)$	– значення умовної дисперсії випадкової величини ξ за умови $\eta = y$
$\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$	– збіжність послідовності випадкових величин до нуля з імовірністю 1 (майже напевне)

$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$	– збіжність послідовності випадкових величин до нуля за ймовірністю
с.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$	– збіжність послідовності випадкових величин до нуля в середньоквадратичному
$F_{\xi_n} \Rightarrow F_{\xi}$	– слабка збіжність послідовностей функцій розподілу
$f_{\xi}(u)$	– характеристична функція випадкової величини
$p_{kj} = P\left\{\xi(t+1) = j \middle| \xi(t) = k\right\}$	– перехідні ймовірності однорідного ланцюга Маркова
$P = \left(p_{ij}\right)$	– стохастична матриця
$P(n)$	– матриця ймовірностей переходу за n кроків
$p_i^0 = P\left\{\xi(0) = i\right\}$	– початковий розподіл імовірностей
$p_1^*, p_2^*, \ldots, \left\{p_j^*\right\}$	– стаціонарний розподіл імовірностей

ВСТУП

Даний навчальний посібник за своїм змістом і призначенням відповідає робочій програмі дисципліни “Теорія ймовірностей” для напрямків ПМ, СА, ІНФ і складений на базі сучасних підручників з цієї дисципліни. Підґрунтям видання є курс лекцій з теорії ймовірності, що читалися протягом багатьох років студентам зазначених спеціальностей Харківського національного університету радіоелектроніки, а також досвід проведення практичних занять з даної дисципліни.

Поняття та методи теорії ймовірностей потрібні не тільки математикам, а й прикладникам, оскільки під час розв’язування практичних задач велику роль відіграє правильний вибір імовірнісної моделі. Ця модель має достовірно відображати явище, що вивчається, і бути зручною для дослідження. Тому під час упорядкування посібника увага приділялася не тільки формально-математичній складовій теорії ймовірностей, але й прикладному змісту розв’язуваних задач. Цим зумовлена структура видання: на початку кожного розділу стисло подано теоретичний матеріал, після якого наведені типові приклади з розв’язками, а також задачі для самостійного розв’язання з відповідями.

Крім того, ряд наведених прикладів орієнтований на подальше вивчення ймовірнісних дисциплін: математичної статистики, теорії випадкових процесів, математичної теорії надійності.

Поданий матеріал згруповано так, щоб на основі даного посібника можна було будувати курси теорії ймовірності різного рівня складності.

В кінці посібника наведені таблиці, необхідні для розв’язування задач, та перелік рекомендованої літератури.

Математичний апарат, що використовується у виданні, ґрунтується на втузівському курсі таких дисциплін, як лінійна алгебра, математичний аналіз, диференціальне та інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, теорія рядів, теорія функцій комплексної змінної. В посібнику використовується сучасний спосіб подання теорії ймовірностей на основі аксіоматики, започаткованої А. Колмогоровим.

Розв’язання задач теорії ймовірностей є винятково важливим, оскільки при цьому виробляється вміння будувати математичні моделі реальних явищ, виробничих процесів і технологій.

1 НАЙПРОСТІШІ ЙМОВІРНІСНІ СХЕМИ

1.1 Теоретичні відомості

1.1.1 Імовірнісний простір

Нехай Ω – непуста множина, елементами якої є нерозкладні, що виключають один одного, наслідки ω випадкового експерименту. Їх називають ***елементарними подіями*** або ***елементарними наслідками***. Саму множину Ω називають ***простором елементарних подій***. Позначимо через F деякий клас підмножин з Ω, властивості якого подаються нижче. У найпростішому випадку, коли множина Ω не більш ніж зліченна, клас F складається з усіх підмножин множини Ω. У цьому випадку пару $\langle \Omega, F \rangle$ називають ***дискретним простором***. Будь-яку множину A із F називають ***подією***.

За аналогією з операціями над множинами введемо операції над подіями, використовуючи ймовірнісну термінологію.

Якщо випадковий експеримент закінчується результатом ω й $\omega \in A$, то вважають, що відбулася подія A, якщо $A \in F$. Нехай $A, B \in F$ – деякі події. Подія $A \bigcup B = A + B$ здійснюється лише тоді, коли відбувається хоча б одна з подій A або B та називається ***сумою подій***.

Подія $A \bigcap B = A \cdot B$ здійснюється лише тоді, коли відбуваються обидві події A й B і така подія називається ***добутком подій***.

Подія $\Omega \setminus A = \overline{A}$ називається ***протилежною*** події A і здійснюється лише тоді, коли не здійснюється подія A.

Подія $A \setminus B = A - B$ називається ***різницею подій*** і здійснюється лише тоді, коли здійснюється A, але не здійснюється B.

Подія $A \Delta B$ здійснюється лише тоді, коли відбувається A і не відбувається B, або коли відбувається B і не відбувається A, така подія називається ***симетричною різницею подій*** A й B.

Подію Ω називають ***достовірною подією***, а подію $\varnothing$ – ***неможливою подією***. Події A і B називають ***несумісними***, якщо $A \cdot B = \varnothing$. В іншому випадку події A і B ***сумісні*** (***перетинаються***).

Для будь-якої події A і подій Ω і $\varnothing$ мають місце співвідношення:

$$A \bigcup \Omega = \Omega, \qquad A \bigcap \Omega = A, \qquad A \bigcup \varnothing = A, \qquad A \bigcap \varnothing = \varnothing .$$

Поняття добутку та суми подій аналогічно можна ввести для будь-якої скінченної і навіть зліченної кількості подій. Наприклад, подія

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

складається з елементарних наслідків, що належать хоча б одній з подій A_n, $n \in \mathbb{N}$, а подія

$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

складається з елементарних наслідків, що належать одночасно всім подіям A_n, $n \in \mathbb{N}$. Далі, події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються ***попарно несумісними***, якщо

$$A_i A_j = \varnothing$$

для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, і ***несумісними в сукупності***, якщо

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \varnothing .$$

Вважають, що ***задано ймовірності елементарних наслідків***, якщо на Ω задана невід'ємна числова функція P, така, що має місце (***умова нормування***)

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

У цьому випадку говорять, що P задає на Ω ***розподіл імовірностей***.

Числова функція $P(A)$, визначена для кожної події $A \in F$, називається ***ймовірністю*** події A. $P(A)$ задовольняє умовам $0 < P(A) < 1$, $P(\Omega) = 1$. Якщо Ω не більш ніж зліченна, то ймовірності для всіх A з F зазвичай вводять так. Спочатку задають імовірність на множині всіх елементарних наслідків ω. Далі, для будь-якої події $A \in F$ (тут A – будь-яка підмножина з Ω) вважають

$$P(A) = \sum_{\forall \omega \in A} P(\omega).$$

Ряд, що стоїть у правій частині рівності, абсолютно збігається. З абсолютної збіжності цього ряду випливають властивості ймовірності:

1. $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$.

2. $P(A+B) = \sum\limits_{\omega \in A \bigcup B} P(\omega) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega) + \sum\limits_{\omega \in B} P(\omega) - \sum\limits_{\omega \in A \bigcap B} P(\omega) =$

$$= P(A) + P(B) - P(AB);$$

3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Зокрема, для несумісних подій A і B

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Останню властивість, що називається властивістю ***адитивності ймовірності*** (або ***правилом додавання ймовірностей***), можна узагальнити на будь-яку скінченну і навіть зліченну кількість попарно несумісних подій. Нехай $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ – попарно несумісні події, тобто $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Тоді

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Вкажемо основні властивості множини всіх подій F. Тут йдеться про дискретний простір.

Клас подій F задовольняє таким умовам:

1) $\Omega \in F$;

2) якщо $A \in F$, то $\bar{A} \in F$;

3) якщо $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in F$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Клас множин з такими властивостями називають ***σ-алгеброю*** множин. Підкреслимо, що для дискретного простору σ-алгебра F складається з усіх підмножин множини Ω.

Імовірність P на Ω визначається як функція множин із σ-алгебри F. Вона задовольняє таким ***аксіомам***:

1) $P(A) \geq 0$, для кожної $A \in F$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, якщо $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Трійка $\langle \Omega, F, P \rangle$ називається ***дискретним імовірнісним простором***.

1.1.2 Класичне визначення ймовірності

Поняття $\langle \Omega, F, P \rangle$ для випадку, коли Ω має довільну потужність, визначимо нижче. Найбільш простим є такий імовірнісний простір: $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, F – множина всіх підмножин Ω. Тоді ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \frac{n_A}{n},$$

де n_A – кількість елементарних подій ω, що містяться в $A \in F$, n – кількість усіх елементарних наслідків.

Таке визначення ймовірності називають ***класичним***, а зазначене вище правило обчислення ймовірностей – ***формулою класичної ймовірності***. Класичне визначення ймовірності має безпосереднє відношення до дослідів зі скінченною кількістю рівноможливих наслідків.

Для обчислення ймовірності у такому ймовірнісному просторі часто використовуються комбінаторні методи підрахунку кількості підмножин деякої множини Ω.

1.1.3 Деякі комбінаторні формули

Правило додавання. Нехай деякий вибір об’єкта A можна здійснити m способами, а вибір $B - n$ способами, до того ж будь-який вибір A відрізняється від будь-якого вибору B. Тоді вибір A або B можна здійснити $m+n$ способами.

Це правило можна узагальнити на випадок k виборів.

Загальне правило додавання. Нехай необхідно вибрати об'єкти $A_1, A_2, ..., A_k$. Вибір A_1 здійснюється n_1 способами, вибір A_2 – n_2 способами, …, вибір A_k можна здійснити n_k способами, до того ж будь-який вибір A_i відрізняється від будь-якого вибору A_j $(i \neq j)$. Тоді вибір A_1 або A_2 або … або A_k можна здійснити $n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Правило множення. Нехай деякий вибір об’єкта A можна здійснити m різними способами, а для кожного з цих способів деякий вибір B можна здійснити n способами. Тоді послідовний вибір A і B можна здійснити $m \times n$ способами.

Тепер сформулюємо це правило у загальному вигляді.

Загальне правило множення. Необхідно виконати послідовно k дій, до того ж першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, …, k-у дію можна виконати n_k способами. Тоді всі k дій разом можна виконати $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ способами.

Сполученням з n елементів по k називається довільна k-елементна підмножина множини з n елементів.

Кількість усіх сполучень із n по k –

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Порядок елементів у підмножині неважливий. Числа C_n^k називаються також ***біноміальними коефіцієнтами***, оскільки вони є коефіцієнтами при $a^k b^{n-k}$ у розкладанні бінома Ньютона $(a+b)^n$. Біноміальні коефіцієнти мають такі властивості.

1. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n$.

2. ***Правило симетрії***

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

3. ***Правило Паскаля***

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Перестановками множини Ω називаються різні впорядковані множини, що відрізняються лише порядком елементів.

Кількість усіх перестановок n-елементної множини –

$$P_n = n!.$$

Розміщеннями з n елементів по k називають упорядковані k-елементні підмножини множини, що складається з n елементів.

Кількість усіх розміщень із n по k –

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Різні розміщення з n по k відрізняються одне від одного або кількістю елементів, або їхнім порядком.

Справедливі такі співвідношення:

$$A_n^k = k!C_n^k, \qquad A_n^k = kA_{n-1}^{k-1} + A_{n-1}^k.$$

Розміщеннями з повторами з n елементів по k називаються різні k-елементні набори елементів множини, що складається з n елементів, до того ж, серед k елементів можуть зустрічатися однакові.

Кількість усіх розміщень із повторами з n по k –

$$\tilde{A}_n^k = n^k.$$

Перестановками з повторами n-елементної множини називаються різні перестановки з n елементів, серед яких n_1 елементів першого типу, n_2 – другого, …, n_k – k-го типу, до того ж $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Кількість усіх перестановок з повторами –

$$C_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Числа $C_n^{n_1, n_2, ..., n_k}$ називають ***поліноміальними коефіцієнтами***. Цю назву пояснює така теорема.

Поліноміальна теорема

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{\substack{n_1 \geq 0, ..., n_k \geq 0 \\ n_1+n_2+...+n_k=n}} \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_k^{n_k}.$$

Справедливе співвідношення

$$\sum_{\substack{n_1 \geq 0, ..., n_k \geq 0 \\ n_1+n_2+...+n_k=n}} C_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = k^n.$$

Сполученнями з повторами з елементів m типів по k елементів називаються набори з k елементів, крім того кожний з k елементів може належати кожному з m типів.

Кількість різних сполучень із повторами з m по k –

$$\tilde{C}_m^k = \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}.$$

Зазначимо, що $\tilde{C}_m^k = C_{k+m-1}^k = C_{k+m-1}^{m-1}$.

Кількість сполучень із повторами з m по n, у якому кожен елемент представлений хоча б один раз, є C_{n-1}^{m-1}.

Під час розв’язування різних задач часто зустрічається така комбінаторна схема. Нехай n-елементна множина Ω є сумою множин $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$, кількість елементів яких дорівнює відповідно $n_1, n_2, ..., n_k$, при цьому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Нехай A – m-елементна підмножина множини Ω, що містить m_1 елементів з Ω_1 , m_2 елементів з Ω_2, …, m_k елементів з Ω_k $(m_1 + m_2 + ... + m_k = m)$. Кількість способів, якими можна вибрати таку множину A із Ω (множини неупорядковані), дорівнює

$$C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} ... C_{n_k}^{m_k}.$$

Для обчислення $n!$ є корисною ***формула Стірлінга***

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\theta(n)},$$

де

$$\frac{1}{12n+1} < \theta(n) < \frac{1}{12n}.$$

Отже, при великих n справедливий такий вираз:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

1.1.4 Умовні ймовірності. Незалежність випадкових подій

Важливу роль у теорії ймовірностей відіграють поняття умовної ймовірності та незалежності подій.

Нехай A і B – події (тобто A і B належать F) і $P(B) > 0$. ***Умовна ймовірність події*** A ***за умови, що подія*** B ***відбулася***, визначається за формулою:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Звідси можна отримати вираз для ***добутку подій*** A і B:

$$P(A \cdot B) = P(B) P(A|B).$$

Цю формулу можна узагальнити і на добуток n подій:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Це – ***правило множення ймовірностей***.

Події A і B називаються ***незалежними***, якщо

$$P(AB) = P(A) P(B).$$

У цьому випадку $P(A|B) = P(A)$ й $P(B|A) = P(B)$.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються ***незалежними в сукупності*** (або просто ***незалежними***), якщо для будь-якого $k < n$ і будь-яких $i_1, \ldots, i_k$; $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$

$$P\left(A_{i_1}\ldots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)\ldots P\left(A_{i_k}\right).$$

Нехай події $H_1,\ldots,H_n$ попарно несумісні, тобто $H_iH_j=\varnothing$ при $i\neq j$, нехай $\bigcup\limits_{i=1}^{n}H_i\supset A$ і $P\left(H_i\right)>0$ для всіх i.

Тоді

1) $P\left(A\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(H_i\right)P\left(A\middle|H_i\right)$ (***формула повної ймовірності***);

2) якщо $P\left(A\right)>0$, тоді

$$P\left(H_k\middle|A\right)=\frac{P\left(H_k\right)P\left(A\middle|H_k\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(H_i\right)P\left(A\middle|H_i\right)}\ -$$

формули Байєса ($k=\overline{1,n}$).

Події $H_1,\ldots,H_n$ називають ***гіпотезами***. Часто припускають, що $\bigcup\limits_{i=1}^{n}H_i=\Omega$. У цьому випадку вважають, що події $H_1,\ldots,H_n$ утворюють ***повну групу подій***. Як повну групу подій часто вибирають події H і $\overline{H}$. Імовірності $P\left(H_i\right)$ (імовірності гіпотез) називають ще ***апріорними ймовірностями***, а умовні ймовірності $P\left(H_i\middle|A\right)$ називають ***апостеріорними ймовірностями*** подій H_i.

1.1.5 Геометричні ймовірності

Нехай Ω – деяка обмежена множина n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ (Ω – незліченна). Припустимо, що множині Ω можна поставити у відповідність деяку міру. Нагадаємо, що міра є узагальненням таких понять, як довжина, площа, об'єм. Пояснюватимемо Ω як множину елементарних наслідків. Розглянемо клас множин F, що складається з усіх вимірних за Лебегом підмножин множини Ω. Відомо, що це – σ-алгебра. Далі, для кожної $A\in F$ визначимо функцію Ω так:

$$P\left(A\right)=\frac{\mu\left(A\right)}{\mu\left(\Omega\right)},$$

де $\mu\left(A\right)$ – міра (за Лебегом) множини A. Легко перевірити, що ця функція задовольняє всім аксіомам імовірності. Подібне визначення ймовірності називають ***геометричним визначенням імовірності***.

Геометричне визначення ймовірності може використовуватися в тому випадку, коли ймовірність потрапляння випадкової точки $\omega = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ в будь-яку частину деякої області $A \in \Omega$ пропорційна мірі цієї області та не залежить від її форми і розташування в просторі. У цьому випадку

$$P(\omega \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Дану формулу називають ***формулою геометричної ймовірності***. Зокрема, якщо $\mu(\Omega) = 1$, то вона матиме такий вигляд:

$$P(\omega \in A) = \mu(A).$$

1.1.6 Довільний імовірнісний простір

Перейдемо до побудови імовірнісного простору $\langle \Omega, F, P \rangle$ для випадку, коли Ω нескінченна й незлічення.

Якщо множина елементарних наслідків Ω не більш ніж злічення, то побудова імовірнісного простору $\langle \Omega, F, P \rangle$ зводиться до задання ймовірностей на множині всіх елементарних наслідків ω, $\omega \in \Omega$. Якщо ж Ω незлічення, то побудова ймовірнісного простору пов'язана з деякими труднощами, а саме з тим, що в цьому випадку неможливо ввести σ-адитивну міру на всіх підмножинах множини Ω. Опишемо, як будується імовірнісний простір у цьому випадку. Нехай Ω – деяка непуста множина. Елементи її позначатимемо через ω. Доповнення, об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця підмножин Ω визначаються у такий спосіб:

$$\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\},$$

$$A \bigcup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\},$$

$$A \bigcap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\},$$

$$A \setminus B = A \bigcap \overline{B},$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

Поряд з позначеннями $A \bigcup B$, $A \bigcap B$ використовуватимемо позначення $A + B$, $A \cdot B$.

Нехай $I = \{\alpha\}$ – деяка множина індексів. Мають місце формули подвійності:

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}\,; \qquad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}\,.$$

Клас A підмножин з Ω називається ***алгеброю***, якщо:

1) $\Omega \in A$;

2) якщо $A \in A$, то $\overline{A} \in A$;

3) якщо $A, B \in A$, то $A \bigcup B \in A$.

Клас F підмножин з Ω називається ***σ-алгеброю***, якщо:

1) $\Omega \in F$;

2) якщо $A \in F$, то $\overline{A} \in F$;

3) якщо $A_1, A_2, ... \in F$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

Перетин будь-якої кількості алгебр (σ-алгебр) є алгеброю (σ-алгеброю). Кожна σ-алгебра є алгеброю; зворотне невірне.

Клас $\Re$ підмножин Ω називається розбиттям Ω, якщо:

1) елементи з $\Re$ відмінні від Ω і попарно не перетинаються;

2) об'єднання всіх множин з $\Re$ збігаються з Ω.

Нехай K – деякий клас підмножин з Ω. ***σ-алгеброю, породженою класом*** K, називається мінімальна σ-алгебра, що містить K. Отже це σ-алгебра, що є перетином усіх σ-алгебр, які містять K.

Нехай $\Omega = \mathbb{R}$ є дійсна пряма та нехай K – клас усіх інтервалів з $\mathbb{R}$, що не перетинаються. Позначимо через $\beta(K)$ (або β_R) σ-алгебру, породжену класом K. Ця σ-алгебра підмножин прямої називається ***борелівською σ-алгеброю***, а її елементи ***борілівськими множинами***. Аналогічно можна визначити борелівську σ-алгебру і борелівські множини в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Простір Ω разом з σ-алгеброю його підмножин F називається ***вимірним простором*** і позначається $\langle \Omega, F \rangle$. Елементи K називаються ***вимірними множинами***. ***Імовірнісним простором, заданим на вимірному просторі*** $\langle \Omega, F \rangle$, називається трійка $\langle \Omega, F, P \rangle$, де Ω – непуста множина, F – σ-алгебра підмножин Ω, P – дійсна функція, визначена на F, що задовольняє таким аксіомам:

1) $P(A) > 0$, для кожного $A \in F$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) якщо $A_1, A_2, ..., A_n \in F$ і $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Третю умову називають ***властивістю*** σ***-адитивності ймовірності***.

Елементи ω з Ω називаються ***елементарними подіями*** (або ***наслідками***), множина Ω називається ***простором елементарних подій***, елементи з F – ***подіями***, функція $P(A)$, визначена на множині A з F, називається ***ймовірністю події*** A.

В імовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P\rangle$ подія Ω називається ***достовірною подією***, $\varnothing$ називається ***неможливою подією***; події A й $\bar{A}=\Omega \setminus A$ називають ***протилежними***. Події A і B називаються ***несумісними***, якщо $A\cdot B=\varnothing$.

1.1.7 Властивості ймовірності

Імовірність P має такі властивості:

1) $P(\varnothing)=0$;

2) $P(\bar{A})=1-P(A)$;

3) якщо $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$;

4) $P(A)\le 1$;

5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

6) $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$;

7)
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-\sum_{k<j} P(A_kA_j)+\sum_{k<j<m} P(A_kA_jA_m)-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n);$$

8) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, якщо $A_iA_j=\varnothing$ при $i\ne j$.

Нехай $A_1, A_2, \ldots$ – послідовність подій з F. ***Верхньою і нижньою межами*** цієї послідовності називають події

$$\limsup A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \liminf A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Подія $\limsup A_n$ полягає в тому, що відбудеться нескінченно багато подій з числа подій $A_1, A_2, \ldots$; подія $\liminf A_n$ полягає в тому, що відбудуться всі події $A_1, A_2, \ldots$ за винятком, можливо, скінченної їх кількості. Очевидно, $\liminf A_n \in \limsup A_n$.

Одним з основних і найбільш важливих понять теорії ймовірностей є поняття незалежності випадкових подій.

Дві події A і B називаються ***незалежними***, якщо

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Події, які не є незалежними, називають ***залежними***.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$, $n>2$ називаються ***незалежними в сукупності*** (або ***просто незалежними***), якщо для будь-якого набору індексів $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_n \le n$ виконується рівність

$$P\left(A_{i_1}\cdot\ldots\cdot A_{i_n}\right)=P\left(A_{i_1}\right)\ldots P\left(A_{i_n}\right).$$

З незалежності в сукупності випливає попарна незалежність подій. Зворотне, взагалі, невірне.

1.1.8 Послідовність незалежних випробувань

Схемою Бернуллі (або ***послідовністю незалежних випробувань***) називають послідовність випробувань, що задовольняє умовам:

1) у кожному випробуванні можливі лише два результати – поява деякої події A (яку ми називатимемо "*успіхом*") або її не поява, тобто здійснення події $\overline{A}$ (у цьому випадку вважатимемо, що випробування закінчилося "*поразкою*");

2) випробування є незалежними, тобто результат k-го випробування не залежить від наслідків усіх попередніх випробувань;

3) імовірність успіху в усіх випробуваннях постійна і дорівнює

$$P(A)=p.$$

Імовірність поразки в кожному випробуванні позначимо через q:

$$P(\overline{A})=1-p=q.$$

Імовірність $P(k,n)$ того, що у n випробуваннях за схемою Бернуллі відбудеться саме k успіхів, визначається ***формулою Бернуллі***:

$$P(k,n)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k=\overline{0,n}.$$

Властивості формули Бернуллі:

1. Імовірність появи успіху в n випробуваннях не більше k_1 разів і не менше k_2 разів дорівнює

$$P(k_1 \le k \le k_2) = P(k_1, n) + P(k_1 + 1, n) + \ldots + P(k_2, n) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} .$$

2. Імовірність появи хоча б одного успіху у n випробуваннях дорівнює

$$P(k \ge 1) = \sum_{k=1}^{n} P(k, n) = 1 - P(0, n) = 1 - q^n .$$

3. Те значення k_0, за якого імовірність $P(k, n)$ максимальна, називають ***найвірогіднішим значенням кількості успіхів*** у n випробуваннях і обчислюють за формулою:

$$np - q \le k_0 \le np + p .$$

Теорема 1.1. ***Локальна теорема Муавра-Лапласа.*** Якщо ймовірність успіху в n випробуваннях за схемою Бернуллі постійна і дорівнює p $(0 < p < 1)$, то ймовірність $P_n(k)$ того, що в цих випробуваннях успіх відбудеться саме k разів при $n \to \infty$ задовольняє співвідношенню

$$\sqrt{npq}P(n, k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} ,$$

яке виконується рівномірно для всіх k, для яких $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ належить будь-якому скінченному інтервалу.

Для обчислення ймовірностей $P(n, k)$ використовують формулу

$$P(n, k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} .$$

Функція

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

табульована; її значення при додатних x наведені в табл. А.1 додатка. Для знаходження $\varphi(x)$ при від'ємних x слід скористатися парністю функції: $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Теорема 1.2. ***Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.*** Якщо k є кількість успіхів у n випробуваннях за схемою Бернуллі, у кожному з яких імовірність успіху дорівнює p ($0<p<1$), то рівномірно відносно a і b ($-\infty \le a \le b \le +\infty$):

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt .$$

Функцію

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

називають ***інтегралом Лапласа***. Функція $\Phi_0(x)$ табульована, її значення наведені в табл. А.2 додатка. Як видно, функція $\Phi_0(x)$ непарна: $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$.

Тоді справедливе таке наближене співвідношення:

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Теорема 1.3. ***Теорема Пуассона.*** Якщо у схемі Бернуллі $n\to\infty$, $p\to 0$, до того ж $np=\lambda$, де λ – деяка позитивна стала $(0<\lambda<\infty)$, то

$$P(n,k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(k;\lambda)$$

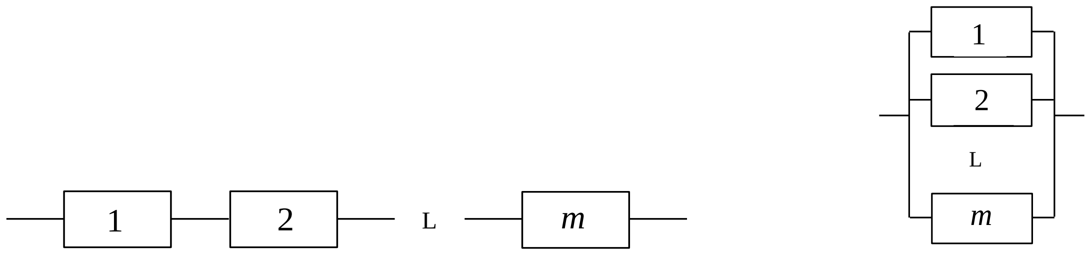
за будь-якого k, $k=0,1,2,\ldots$.

Значення функції e^{-x} наведені в табл. А.3 додатка.

1.2 Класичне визначення ймовірності. Теореми додавання та множення ймовірностей

1.2.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1. Розглянемо технічний пристрій (ТП), що складається з m елементів. У теорії надійності вважають, що елементи з'єднані послідовно, якщо вихід з ладу хоча б одного з m елементів призводить до відмови всього ТП (рис. 1.1, а); якщо ж ТП перестає функціонувати тільки тоді, коли відмовили всі m елементів, то вважають, що елементи з'єднані паралельно (рис. 1.1, б).



а) б)

Рисунок 1.1

► Позначимо через A подію, що означає відмову ТП, A_i – подія, що означає відмову i-го елемента, $i = \overline{1, m}$. Тоді для послідовного з'єднання

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_m,$$

для паралельного з'єднання

$$A = A_1 A_2 \ldots A_m .$$

Приклад 1.2. Гральний кубик підкидається двічі. Описати простір елементарних наслідків Ω і підмножини, що відповідають подіям:

а) A – обидва рази випала кількість очок, кратна трьом;

б) B – жодного разу не випали числа чотири, п'ять, шість;

в) C – обидва рази випала кількість очок, більше трьох;

г) D – обидва рази випала однакова кількість очок.

► У даному експерименті спостережуваний результат – пари чисел, що відповідають кількостям очок, що випали при першому та другому підкиданні кубика. Тоді $\Omega = \{\omega_{ij}\}$, де $\omega_{ij} = (i, j)$, $i = \overline{1, 6}$, $j = \overline{1, 6}$:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$

$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$

$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

а) Очевидно, що подія A відбувається лише тоді, коли випадає 3 або 6 на кожному з кубиків, тобто $A=\{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}$.

Аналогічно отримаємо:

б) $B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;

в) $C=\{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$;

г) $D=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$. ◄

Приклад 1.3. Серед студентів, що зібралися на лекцію з теорії ймовірностей, вибирають навмання одного. Нехай подія A – вибраний юнак, подія B – вибраний студент, який не палить, C – вибраний студент, який живе в гуртожитку.

а) Описати подію $AB\overline{C}$;

б) за якої умови $ABC=A$;

в) коли буде справедливе співвідношення $\overline{C}\subseteq B$;

г) коли буде рівність $\overline{A}=B$.

► а) Подія $AB\overline{C}$ є сполученням подій A, B і $\overline{C}$ ($\overline{C}$ – обраний студент, який не живе в гуртожитку). Тоді $AB\overline{C}$ означає, що вибраний юнак не живе в гуртожитку і не палить.

б) Очевидно, $ABC=A$, якщо $A\subseteq BC$, тобто всі юнаки живуть у гуртожитку і не палять.

в) Співвідношення $\overline{C}\subseteq B$ означає, що B тягне $\overline{C}$, тобто $\overline{C}\subseteq B$ матиме місце, коли курці живуть тільки в гуртожитку.

г) Подія $\overline{A}$ означає, що вибрана дівчина. Тоді рівність $\overline{A}=B$ виконуватиметься тоді, коли жодна дівчина не палить, а всі юнаки палять. ◄

Приклад 1.4. Нехай A, B – довільні події. Доведіть такі рівності:

а) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})=A$;

б) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=AB$.

► Користуючись властивостями операцій над подіями, маємо:

а) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})=AA\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\cup A(B\cup\overline{B})\cup\varnothing=$

$$=A\cup A\Omega=A\cup A=A;$$

б) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=A(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB=\varnothing\cup AB=AB$. ◄

Приклад 1.5. За якої умови будуть сумісними в сукупності події $A\cup B$, $\overline{A}\cup B$ і $A\cup\overline{B}$?

► Оскільки $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)=AB$, то події $A\cup B$, $\bar{A}\cup B$ і $A\cup\bar{B}$ сумісні тоді й тільки тоді, коли $AB\neq\varnothing$, тобто коли сумісні події A й B. ◄

Приклад 1.6. Доведіть, що подія $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})$ є неможливою.

► Маємо (див. приклад 1.4, а))

$$(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})=A\cdot\bar{A}=\varnothing. ◄$$

Приклад 1.7. З 30 карток з різними літерами українського алфавіту навмання вибирають 7 карток. Яка ймовірність того, що ці літери складуть слово «Харків»?

► Нехай подія *B* полягає в тому, що вибрані літери складуть слово «Харків». Одна група, що складається з 7 карток, може відрізнятися від іншої групи карток або порядком їхнього розташування, або хоча б однією з карток.

Всі ці групи утворюють розміщення по 6 елементів з даних 30-ти:

$$A_{30}^{6}=\frac{30!}{24!}.$$

Шукана ймовірність появи слова «Харків» дорівнює

$$P(B)=\frac{1}{A_{30}^{6}}=\frac{24!}{30!}=\frac{1}{25\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29\cdot30}=\frac{1}{427518000}\approx2{,}34\cdot10^{-9}. ◄$$

Приклад 1.8. Лотерея випущена на загальну суму *N* гривень. Ціна одного квитка *r* гривень. Коштовні виграші випадають на *m* квитків. Визначити ймовірність коштовного виграшу на один квиток.

► Подія *A* полягає в тому, що на один квиток випав коштовний виграш. Загальна кількість випущених квитків – $n=\frac{N}{r}$. Кількість коштовних квитків – $n_A=m$ (кількість сприятливих наслідків). Отже, за формулою класичної ймовірності маємо

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{m}{\frac{N}{r}}=\frac{mr}{N}. ◄$$

Приклад 1.9. У колоді 36 карт чотирьох мастей. Після того, як вийняли та повернули одну карту, колода перемішується і знову виймається одна карта. Визначити ймовірність того, що обидві витягнуті карти однієї масті.

► Виймаємо з колоди одну карту і фіксуємо її масть. Подія *A* полягає в тому, що друга витягнута з колоди карта тієї самої масті. У колоді є по 9 карт однакової масті. Кількість сприятливих наслідків $n_A = 9$. Оскільки в колоді 36 карт, то $n = 36$.

Отже, шукана ймовірність –

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.10. Кидають шість гральних кубиків. Знайти ймовірність таких подій:

а) на всіх кубиках випала різна кількість очок;

б) сумарна кількість очок, що випали, дорівнює 7.

► а) Подія *A* полягає в тому, що на всіх кубиках випала різна кількість очок. Загалом можливо $n = 6^6$ комбінацій випадіння гральних кубиків. Множина $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тобто на кубиках випала різна кількість очок. Кількість сприятливих наслідків $n_A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$. Отже, імовірність

$$P(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324} \approx 0{,}0154;$$

б) подія *B* полягає в тому, що сумарна кількість очок, що випали на шести кубиках, дорівнює 7. З викладеного вище, $n = 6^6$. Всі можливі комбінації, за яких у сумі буде 7:

$$\{2,1,1,1,1,1\}, \quad \{1,2,1,1,1,1\}, \quad \{1,1,2,1,1,1\},$$

$$\{1,1,1,2,1,1\}, \quad \{1,1,1,1,2,1\}, \quad \{1,1,1,1,1,2\}.$$

Отже, кількість сприятливих наслідків $n_B = 6$. Шукана ймовірність

$$P(B) = \frac{6}{6^6} = \frac{1}{6^5} \approx 0{,}00013. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.11. Гральний кубик кидають n разів. Чому дорівнює ймовірність того, що:

а) хоча б один раз випаде шістка;

б) шістка випаде саме один раз?

► а) знайдемо ймовірність того, що хоча б один раз випаде шість очок (цю подію ми позначимо через A_0). Імовірність випадіння шести очок при однократному випробуванні (подія A) дорівнює $P(A) = \frac{1}{6}$. Отже, ймовірність того, що шість очок не випаде, $P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Тоді ймовірність того, що за n випробувань жодного разу не випаде шести очок (подія A_n) дорівнює $P\left(A_n\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Отже, ймовірність того, що шість очок випаде хоча б один раз, дорівнює

$$P\left(A_0\right)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

б) Знайдемо ймовірність того, що шість очок випаде саме один раз. Імовірність того, що за $n-1$ випробування не випаде шість очок, дорівнює $P\left(B\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ (з попередньої задачі). Але в одному випадку випали шість очок. Випробування, результатом якого буде випадіння шести очок, можна вибрати n способами, тоді шукана ймовірність

$$P\left(B'\right)=n\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}. ◄$$

Приклад 1.12. Для зменшення загальної кількості ігор $2n$ команд розбиваються на дві підгрупи. Визначити ймовірність того, що дві найбільш сильні команди будуть:

а) в одній підгрупі;

б) у різних підгрупах.

► а) Знайдемо ймовірність того, що обидві сильні команди будуть в одній підгрупі. Зафіксуємо ці команди в одній з підгруп, яку ми можемо вибрати двома способами. Тоді кількість варіантів вибору команд, що залишилися, у цю підгрупу дорівнює C_{2n-2}^{n-2}. Існує C_{2n}^{n} способів поділу команд на дві підгрупи. Враховуючи, що підгрупу, до якої відбираються сильні команди, вибираємо двома способами, знайдемо шукану ймовірність:

$$P\left(A\right)=\frac{2C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n}^{n}};$$

б) повна система подій складається з двох подій:

A – сильні команди в одній підгрупі;

B – сильні команди в різних підгрупах.

Тоді ймовірність того, що команди в різних підгрупах, дорівнює:

$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{2C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n}^{n}}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.13. За круглим столом випадковим чином сідають n осіб ($n \geq 3$). Яка ймовірність того, що дві певних людини сядуть поруч?

► Нехай подія A полягає в тому, що дві певних людини сядуть поруч. Зафіксуємо за однією з осіб певне місце, а інших $(n-1)$ розсадимо довільно. Кількість виникаючих при цьому комбінацій дорівнює $(n-1)!$. Посадити другу особу ліворуч від першої ми можемо $(n-2)!$ способами. Розмірковуючи аналогічно, посадимо другу особу праворуч від першої. Кількість наслідків, коли дві певні людини сидять поруч, дорівнює $2(n-2)!$. Отже,

$$P(A)=\frac{2(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.14. Імовірність влучення в ціль кожного із стрільців дорівнює 0,4. Скільки таких стрільців мають одночасно вистрілити в ціль, щоб імовірність влучення в ціль стала більшою 0,9?

► Позначимо такі події: A_i – влучення i-го стрільця; $\overline{A}_i$ – промах i-го стрільця; A – влучення в ціль; $\overline{A}$ – в ціль не влучено. За умовою задачі маємо:

$$P(A_i)=0,4; \qquad P(\overline{A}_i)=0,6.$$

Імовірністю події $\overline{A}$, тобто того, що жоден із стрільців не влучить у ціль, є ймовірність сполучення *n* незалежних подій (промахів). За правилом множення імовірностей:

$$P(\overline{A})>0,6^n.$$

Тоді

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,6^n.$$

Необхідно, щоб $P(A)>0,9$. Звідси отримаємо:

$$1-0,6^n>0,9;$$

$$0,6^n<0,1;$$

$$n\lg 0,6 > -1;$$

$$n > -\frac{1}{\lg 0,6} \approx 4,51.$$

Отже, достатньо 5 стрільців. ◄

Приклад 1.15. З n людей, серед яких виділені особи A і B, побудована шеренга в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що A і B знаходитимуться поруч, а також імовірність того, що між A і B знаходитимуться r людей.

► Нехай $\Omega = \{\omega = \{\xi_1, ..., \xi_n\}\}$ – можливі перестановки з n людей, $\omega \in \Omega$, де ξ_i – особа, що знаходиться на i-му місці. Подія A_r полягає в тому, що між A і B знаходяться r осіб. Маємо:

$$A_r = \sum_{i=1}^{n-r-1} \{(\xi_1, ..., \xi_n) : \xi_i = A, \xi_{i+r+1} = B\} + \sum_{i=1}^{n-r-1} \{(\xi_1, ..., \xi_n) : \xi_i = B, \xi_{i+r+1} = A\},$$

$$P(A_r) = \frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

Випадку, коли A і B знаходитимуться поруч, відповідає $P(A_r)$ при $r = 0$:

$$P(A_0) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}.$$ ◄

Приклад 1.16. ***Задача С. Банаха про сірникові коробки***. Один математик завжди носить із собою дві коробки сірників. Щоразу, коли він хоче взяти сірник, вибирає навмання коробку. Знайти ймовірність того, що коли він візьме порожню коробку, в іншій виявиться саме r сірників.

► Нехай спочатку в кожній коробці було N сірників. Якщо вибрана коробка порожня, а інша містить r сірників, то це означає, що коробки виймали $2N - r$ разів, до того ж N разів брали коробку, яка виявилася порожньою. Існує 2^{2N-r} способів вийняти дві коробки $2N - r$ разів, а кількість способів вийняти N разів одну коробку дорівнює C_{2N-r}^N. Отже, шукана ймовірність –

$$\frac{C_{2N-r}^N}{2^{2N-r}}.$$ ◄

Приклад 1.17. В автобус на кінцевій зупинці сіли n людей, автобус проїжджає k зупинок $(n<k)$. Кожен з пасажирів незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на кожній (починаючи з другої) зупинці. Визначити ймовірність того, що всі пасажири вийшли на різних зупинках; всі пасажири вийдуть на одній зупинці.

► Нехай подія A – всі пасажири вийшли на різних зупинках, а подія B – всі пасажири вийшли на одній зупинці. Кількість способів n пасажирам вийти на $k-1$ зупинках дорівнює $(k-1)^n$, а кількість способів n пасажирам вийти на різних зупинках дорівнює C_{k-1}^n. Тоді

$$P(A)=\frac{C_{k-1}^n}{(k-1)^n}.$$

Всі n пасажирів можуть вийти на кожній з $k-1$ зупинках, тому

$$P(B)=\frac{k-1}{(k-1)^n}=\frac{1}{(k-1)^{n-1}}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.18. Три стрільці одночасно стріляють по одній і тій самій мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює $p_1=0,4$, для другого – $p_2=0,5$, для третього – $p_3=0,7$.

Знайти ймовірність того, що: 1) в мішень влучить тільки один стрілець; 2) в мішень влучать два стрільці; 3) три стрільці; 4) не влучить жоден стрілець; 5) в мішень буде хоча б одне влучення (не менше одного влучення).

► Розглянемо такі події: A_1 – в мішень влучив перший стрілець ($P(A_1)=p_1=0,4$); A_2 – в мішень влучив другий стрілець ($P(A_2)=p_2=0,5$); A_3 – в мішень влучив третій стрілець ($P(A_3)=p_3=0,7$).

1) Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що в мішень буде одне влучення. Подія A відбудеться, якщо в мішень влучить або тільки перший стрілець, або тільки другий, або тільки третій стрілець. Влучення в мішень тільки першого стрільця рівносильне появі події $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ (перший стрілець влучив у мішень, другий і третій – не влучили), влучення в мішень тільки другого стрільця рівносильне появі події $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ (другий стрілець влучив у мішень, перший і третій – не влучили), влучення в мішень тільки третього стрільця рівносильне появі події $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ (третій стрілець влучив у мішень, перший і другий – не влучили).

Тоді подію A можна подати у такому вигляді:

$$A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3,$$

де $\bar{A}_i$, $i = 1, 2, 3$, – події, протилежні подіям A_i, $i = 1, 2, 3$, тобто промахи при пострілах, здійснених 1-м, 2-м і 3-м стрільцями відповідно. Ймовірності протилежних подій $\bar{A}_i$, $i = 1, 2, 3$ будуть рівні: $P(\bar{A}_1) = q_1 = 1 - p_1 = 0,6$; $P(\bar{A}_2) = q_2 = 1 - p_2 = 0,5$; $P(\bar{A}_3) = q_3 = 1 - p_3 = 0,3$.

Шукана ймовірність події A дорівнюватиме:

$$P(A) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) =$$

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) =$$

$$= p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 =$$

$$= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36.$$

2) Позначимо через B подію, яка полягає в тому, що в мішень влучать два стрільці. Тоді, за аналогією з першим випадком, подію B можна подати в такому вигляді:

$$B = A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3.$$

Обчислимо ймовірність події B:

$$P(B) = P(A_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3) + P(A_1\bar{A}_2A_3) =$$

$$= p_1p_2q_3 + q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3 =$$

$$= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,41.$$

3) Нехай C – подія, яка полягає в тому, що в мішень влучать три стрільці. Тоді подію C можна подати в такому вигляді:

$$C = A_1A_2A_3.$$

Ймовірність події C дорівнюватиме:

$$P(C) = P(A_1A_2A_3) = p_1p_2p_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

4) Нехай D – подія, яка полягає в тому, що в мішень не влучить жоден стрілець. Тоді подію D можна подати в такому вигляді:

$$D = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 .$$

Отже ймовірність події D дорівнюватиме:

$$P(D) = P\left(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3\right) = q_1 q_2 q_3 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09 .$$

5) Позначимо через E подію, яка полягає в тому, що за умови трьох пострілів буде хоча б одне влучення. Це складна подія, оскільки включає в себе суму подій, які означають або одне, або два, або три влучення. Подію E можна подати у вигляді:

$$E = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 ,$$

тоді ймовірність події E дорівнюватиме:

$$P(E) = P(A_1 A_2 A_3) + P\left(A_1 A_2 \bar{A}_3\right) + P\left(A_1 \bar{A}_2 A_3\right) + P\left(\bar{A}_1 A_2 A_3\right) + P\left(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3\right) +$$

$$+ P\left(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3\right) + P\left(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3\right) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) + P(A_1) P(A_2) P\left(\bar{A}_3\right) +$$

$$P(A_1) P\left(\bar{A}_2\right) P(A_3) + P\left(\bar{A}_1\right) P(A_2) P(A_3) + P(A_1) P\left(\bar{A}_2\right) P\left(\bar{A}_3\right) +$$

$$+ P\left(\bar{A}_1\right) P(A_2) P\left(\bar{A}_3\right) + P\left(\bar{A}_1\right) P\left(\bar{A}_2\right) P(A_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 +$$

$$+ 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,91 .$$

Розв’язок правильний, але вимагає значних обчислень. Розв’язок можна спростити, якщо перейти до протилежних подій.

Позначимо $\bar{E}$ подію, яка полягає в тому, що не було жодного влучення в ціль. Тоді $\bar{E}$ можна записати у вигляді:

$$\bar{E} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 ,$$

отже, ймовірність події $\bar{E}$ дорівнює:

$$P\left(\bar{E}\right) = P\left(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3\right) = P\left(\bar{A}_1\right) P\left(\bar{A}_2\right) P\left(\bar{A}_3\right) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09 .$$

Тоді ймовірність події E обчислюється:

$$P(A)=1-P(\bar{E})=1-0{,}09=0{,}91. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.19. З колоди, що містить 52 карти, виймають навмання три карти. Вибрані карти в колоду не повертають. Обчислити ймовірність того, що серед них не буде жодного туза.

► Нехай A_i – подія, яка полягає в тому, що i-а вибрана карта – не туз ($i=1,2,3$). Тоді

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2);$$

$$P(A_1)=\frac{48}{52}; \qquad P(A_2|A_1)=\frac{47}{51}; \qquad P(A_3|A_1A_2)=\frac{46}{50};$$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{46}{50}=\frac{4324}{5525}\approx 0{,}783. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.20. В урні a білих і b чорних куль ($a>1$, $b>1$). З урни без повернення виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що:

а) кулі одного кольору;

б) кулі різних кольорів.

► а) Нехай подія A полягає в тому, що вибрані кулі одного кольору. Можливе таке: обидві кулі білі або обидві чорні. Позначимо подію A_1 – перша вибрана куля білого кольору, A_2 – друга куля білого кольору, B_1 – перша куля чорного кольору, B_2 – друга куля чорного кольору. Ймовірність того, що вибрані кулі одного кольору, знайдемо за формулою

$$P(A)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

б) Цю ймовірність можна знайти, віднімаючи від одиниці ймовірність, отриману в пункті а), але можна й іншим способом. Нехай подія E полягає в тому, що вибрані кулі різних кольорів, C_1 – перша куля біла, C_2 – друга куля чорна, D_1 – перша куля чорна, D_2 – друга куля біла. Тоді

$$P(E)=P(C_1)P(C_2|C_1)+P(D_1)P(D_2|D_1)=$$

$$=\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.21. З урни, в якій є білі й чорні кулі, з поверненням виймають дві кулі. Довести, що ймовірність того, що вибрані кулі одного кольору, не менша $\frac{1}{2}$.

► Спочатку знайдемо цю ймовірність. Позначимо події: A – кулі одного кольору, A_1 – перша куля біла, A_2 – друга куля біла, B_1 – перша куля чорна, B_2 – друга куля чорна. Нехай є a білих і b чорних куль. Тоді

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(B_2|B_1);$$

$$P(A) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2ab}.$$

Далі, використовуючи нерівності $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ й $a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2\cdot b^2} = 2ab$, отримаємо:

$$P(A) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2ab} \geq \frac{2ab}{2ab+2ab} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.22. 15 екзаменаційних білетів містять по два запитання, які не повторюються. Учень може відповісти тільки на 25 запитань. Визначити ймовірність того, що учень складе іспит, якщо для цього достатньо відповісти на два запитання з одного білета або на одне запитання з першого білета і на вказане додатково запитання з іншого білета.

► Ймовірність знайдемо за формулою

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(B_2|B_1),$$

де події A – учень складе іспит, A_1 – учень відповів на перше запитання з білета, A_2 – відповів на друге запитання з білета, B_1 – відповів на одне запитання з першого білета, B_2 – відповів на додаткове запитання. Тоді

$$P(A_1) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}; \qquad P(A_2|A_1) = \frac{24}{29}.$$

Ймовірність події B_1 знайдемо за формулою

$$P(B_1) = P(C_1)P(C_2|C_1) + P(C_3)P(C_4|C_3),$$

де C_1 – учень відповів на перше запитання, C_2 – не відповів на друге запитання, C_3 – не відповів на перше запитання, C_4 – відповів на друге запитання.

Отже,

$$P(B_1)=\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}=\frac{50}{174};$$

$$P(B_2|B_1)=\frac{24}{28}=\frac{6}{7}.$$

Тоді

$$P(A)=\frac{5}{6}\cdot\frac{24}{29}+\frac{50}{174}\cdot\frac{6}{7}=\frac{190}{203}\approx 0{,}936. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.23. Нехай є n комірок, у яких випадково розміщуються r частинок. Кожна частинка може потрапити в кожну комірку. Чому дорівнює ймовірність того, що в k-у комірку потрапило саме r_1 частинок?

► Кількість різних розміщень r частинок в n комірках дорівнює n^r. Вважатимемо, що маємо справу із класичною схемою, коли ймовірність кожного результату дорівнює $\frac{1}{n^r}$.

Нехай у k-у комірку потрапило саме r_1 частинок. Інші $r-r_1$ частинок, які не потрапили в комірку k, розподілені в $n-1$ комірках, що залишилися. Способів розмістити ці $r-r_1$ частинок у $n-1$ комірках є $(n-1)^{r-r_1}$. Із r частинок $r-r_1$ частинок, що не потрапили в комірку k, можна вибрати $C_r^{r-r_1}$ способами. Тому шукана ймовірність дорівнює

$$\frac{C_r^{r-r_1}(n-1)^{r-r_1}}{n^r}=C_r^{r-r_1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{r_1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{r-r_1}.$$

Ця ймовірність збігається з $P(r_1,r)$ у схемі Бернуллі при $p=\frac{1}{n}$ (див. р. 2). ◄

Приклад 1.24. ***Продовження.*** Чому дорівнює ймовірність того, що хоча б одна комірка виявиться порожньою?

► Позначимо через A подію, коли хоча б одна комірка виявиться порожньою, і нехай A_k означає, що k-а комірка порожня. Тоді $A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$.

У цьому випадку події A_k перетинаються, тому скористаємося формулою ймовірності суми подій:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P\left(A_i A_j\right)+\sum_{i<j<k} P\left(A_i A_j A_k\right)-\ldots+(-1)^{n-1} P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n).$$

Ми визначили A_k як подію, коли всі r частинок не потрапляють у k-у комірку, тобто r частинок розміщуються в $n-1$ комірках. Кількість таких розміщень $(n-1)^r$. Тоді

$$P(A_k)=\frac{(n-1)^r}{n^r}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^r,$$

для кожного $k\le n$. Способів вибрати k-у комірку – $C_n^1=n$.

Подія $A_k A_j$ означає, що всі r частинок розміщуються в $n-2$ комірках з номерами, не рівними k й j. Тому

$$P\left(A_k A_j\right)=\frac{(n-2)^r}{n^r}=\left(1-\frac{2}{n}\right)^r,$$

для будь-яких $k, j\le n$. Зазначимо, що номери k, j можна вибрати C_n^2 способами.

Аналогічно

$$P\left(A_k A_j A_m\right)=\frac{(n-3)^r}{n^r}=\left(1-\frac{3}{n}\right)^r,$$

для будь-яких $k, j, m\le n$ (k, j, m можна вибрати C_n^3способами). І так далі.

Отже, ймовірність події A за формулою ймовірності суми подій дорівнює

$$P(A)=C_n^l\left(1-\frac{1}{n}\right)^r-C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^r+\ldots=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\left(1-\frac{i}{n}\right)^r. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.25. ***Задача про збіги***. Є n елементів, розташованих у деякому порядку. Випадковим чином вони переставляються (всі $n!$ перестановок рівноможливі). Яка ймовірність того, що хоча б один елемент виявиться на своєму місці?

► Усього є $n!$ перестановок (тобто множина всіх елементарних наслідків $N=n!$). Нехай подія A_k полягає в тому, що k-й елемент виявиться на своєму місці. Ця подія містить $(n-1)!$ наслідків (тобто $N_A=(n-1)!$).

Тоді ймовірність події A_k дорівнює

$$P\left(A_k\right)=\frac{N_{A_k}}{N}=\frac{(n-1)!}{n!}.$$

Нехай подія A_kA_l полягає в тому, що k-й і l-й елементи потрапили на свої місця. Тоді $N_{A_kA_l}=(n-2)!$ і

$$P\left(A_kA_l\right)=\frac{N_{A_kA_l}}{N}=\frac{(n-2)!}{n!}.$$

Продовжуючи ці розмірковування, отримаємо

$$P\left(A_1...A_n\right)=\frac{1}{n!}.$$

Подія $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ полягає в тому, що хоча б один елемент потрапив на своє місце. Для знаходження ймовірності цієї події скористаємося формулою

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)-\sum_{i<j}P\left(A_iA_j\right)+\sum_{i<j<k}P\left(A_iA_jA_k\right)-...+(-1)^{n-1}P\left(A_1\cdot ...\cdot A_n\right).$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}=$$

$$=\frac{n!}{(n-1)!1!}\cdot\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n-2)!2!}\cdot\frac{(n-2)!}{n!}+\frac{n!}{(n-3)!3!}\cdot\frac{(n-3)!}{n!}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=1-\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right).$$

Вираз у дужках є перші $n+1$ членів розкладання в ряд e^{-1}. Тому якщо $n\to\infty$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\to 1-e^{-1}\approx 0,632. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.26. У журі з трьох чоловік два члени незалежно один від одного приймають правильне рішення з імовірністю p, а третій для винесення рішення підкидає монету. Рішення виноситься більшістю голосів. Журі з однієї людини виносить справедливе рішення з імовірністю p. Яке з цих журі виносить справедливе рішення з більшою ймовірністю?

► Обидві групи журі мають однакову ймовірність винесення правильного рішення. Дійсно, два члени журі голосуватимуть за правильне рішення з імовірністю $p \cdot p = p^2$, при цьому результат голосування третього члена журі неважливий. Якщо ж ці судді розходяться в думках, імовірність чого дорівнює $p(1-p)+(1-p)p = 2p(1-p)$, то для знаходження ймовірності правильного рішення це число слід помножити на $\frac{1}{2}$. Отже, повна ймовірність винесення справедливого рішення дорівнює

$$p^2 + p(1-p) = p,$$

що збігається з імовірністю винесення справедливого рішення для журі, яке складається з однієї людини. ◄

1.2.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.1. Побудувати множину елементарних наслідків Ω експерименту, що полягає у випадковому виборі однієї з 28 кісток доміно. Описати підмножини, що відповідають зазначеним подіям:

а) A – на обраній кістці очки збігаються;
б) B – сума очок на обраній кістці дорівнює 6;
в) C – добуток кількості очок на кістці непарний;
г) $B \setminus A$; д) AB; е) AC; ж) $AB \setminus C$; з) $(A \cup B)C$.

Відповідь: $\Omega = \left\{ (i, j),\ i = \overline{0,\ 6},\ \ j = \overline{0,\ 6} \right\}$;

а) $A = \left\{ ((0,0),1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),\ (6,6) \right\}$;

б) $B = \left\{ (0,6),(1,5),(2,4),(3,3) \right\}$;

в) $C = \left\{ (1,1),(1,3),(1,5),(3,3),(3,5),(5,5) \right\}$;

г) $B \setminus A = \left\{ (0,6),(1,5),(2,4) \right\}$;

д) $AB = \left\{ (3,3) \right\}$; е) $AC = \left\{ (1,1),(3,3),(5,5) \right\}$; ж) $AB \setminus C = \varnothing$;

з) $(A \cup B)C = \left\{ (1,1),(1,5),(3,3),(5,5) \right\}$.

Задача 1.2. Зроблено три постріли з гармати в ціль. Нехай A_k – влучення при k-му пострілі, $k = 1,2,3$. З'ясувати склад множини Ω, виразивши кожен елементарний результат ω_i через події A_k. За допомогою операцій над подіями записати через A_k такі події :

а) A – саме одне влучення;

б) B – хоча б одне влучення;

в) C – хоча б один промах;

г) D – не менше двох влучень;

д) E – влучення не раніше, ніж при третьому пострілі;

Відповідь:

$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_8\} = \{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3,\ A_1\bar{A}_2\bar{A}_3,\ \bar{A}_1A_2\bar{A}_3,\ \bar{A}_1\bar{A}_2A_3, A_1A_2\bar{A}_3,$
$A_1\bar{A}_2A_3,\ \bar{A}_1A_2A_3,\ A_1A_2A_3\}$;

а) $A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$;

б) $B = \overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3} = A_1 + A_2 + A_3$;

в) $C = \overline{A_1A_2A_3} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$;

г) $D = A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$;

д) $E = \omega\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

Задача 1.3. Схема електричного ланцюга наведена на рис. 1.2. Через ділянку схеми, що вийшла з ладу, струм не проходить. Нехай подія A_i – вихід з ладу елемента i, $i = \overline{1,6}$. Виразити події A й $\bar{A}$ через події A_i, якщо A – вихід з ладу всієї схеми.

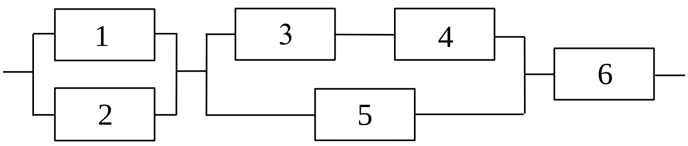


Рисунок 1.2

Відповідь: $A = A_1A_2 + A_5(A_3 + A_4) + A_6$, $\bar{A} = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)(\bar{A}_5 + \bar{A}_3\bar{A}_4)\bar{A}_6$.

Задача 1.4. Доведіть, що події а) $(A \cup B)(A \cup \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})$ і б) $(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B)$ є достовірними.

Задача 1.5. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія A_i ($i = \overline{1,n}$) полягає в тому, що i-а виготовлена ним деталь має дефект. Записати такі події:

а) жодна з деталей не має дефектів;

б) хоча б одна деталь має дефект;

в) тільки одна деталь має дефект;

г) не більше двох деталей мають дефекти;

д) принаймні два вироби не мають дефектів;

е) саме два вироби дефектні.

Задача 1.6. Для дослідження попиту була опитана 1000 покупців. Виявилося, що 811 покупцям подобається шоколад, 752 – цукерки, 418 – льодяники, 570 – шоколад і цукерки, 356 – шоколад і льодяники, 348 – цукерки та льодяники, 297 – всі три види солодощів. Показати, що в цій інформації є помилки.

Задача 1.7. Дитина грає з 10 літерами розрізної абетки: А, А, А, Е, И, Д, М, М, Т, Т. Яка ймовірність того, що при випадковому розташуванні літер у ряд вона отримає слово «математика»?

Відповідь: $\dfrac{1}{151200}$.

Задача 1.8. У ліфт 8-поверхового будинку на першому поверсі увійшли 5 чоловік. Припустимо, що кожен з них з рівною ймовірністю може вийти на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що всі п'ятеро вийдуть на різних поверхах.

Відповідь: $\dfrac{A_7^5}{7^5}$.

Задача 1.9. Куб, всі грані якого пофарбовані, розділений на тисячу кубиків однакового розміру. Отримані кубики ретельно перемішані. Визначити ймовірність того, що навмання витягнутий кубик матиме дві пофарбовані грані.

Відповідь: 0,096.

Задача 1.10. Колода гральних карт містить 52 карти, що розділяються на 4 різні масті по 13 карт у кожній. Колода ретельно перемішана, отже, вибір будь-якої карти однаково ймовірний. Виймаються 6 карт. Знайти ймовірність того, що серед цих карт: а) буде король пік; б) будуть представники всіх мастей; в) яку найменшу кількість карт необхідно взяти з колоди, щоб імовірність того, що серед них зустрінуться хоча б дві карти однакового найменування, була більше 0,5?

Відповідь: а) $\dfrac{C_{51}^5}{C_{52}^6}$; б) $\dfrac{C_4^1\left(C_{13}^1\right)^3 C_{13}^3 + C_4^2\left(C_{13}^1 \cdot C_{13}^2\right)^2}{C_{52}^6}$; в) для знаходження n слід розв’язати рівняння: $1-\dfrac{\left(C_4^1\right)^n C_{13}^n}{C_{52}^6} > \dfrac{1}{2}$.

Задача 1.11. З послідовності чисел 1, 2, ..., n навмання вибираються 2 числа. Яка ймовірність, що одне з них менше k, а інше більше k, де $1<k<n$ – довільне ціле число?

Відповідь: $\dfrac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.

Задача 1.12. У прикомірку є n пар черевиків. З них навмання вибирають $2r$ черевика ($2r<n$). Яка ймовірність того, що серед обраних черевиків: а) відсутні парні; б) є саме одна комплектна пара?

Відповідь: а) $\dfrac{2^{2r}\cdot C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$; б) $\dfrac{n\cdot 2^{2r-2}\cdot C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$.

Задача 1.13. З повної колоди карт (52 карти) виймалися навмання три карти. Знайти ймовірність того, що ці карти будуть: трійка, сімка, туз.

Відповідь: $\dfrac{64}{C_{52}^3}$.

Задача 1.14. У бібліотеці є книги з 16 галузей знань. Надійшли чергові чотири замовлення на літературу. Вважаючи, що будь-який склад замовленої літератури рівноможливий, знайти ймовірність $P(A)$ того, що всі замовлені книги належать різним розділам науки.

Відповідь: 0,473.

Задача 1.15. Із цифр 1, 2, 3 й 4 випадковим чином складається семизначне число. Знайти ймовірність $P(A)$ того, що в цьому числі цифра 1 зустрінеться двічі, цифра 2 – тричі, а цифри 3 й 4 – по одній кожна.

Відповідь: $\dfrac{C_7^{2,\,3,\,1,\,1}}{\tilde{A}_4^7}$.

Задача 1.16. Підкидають три гральні кубики. Що ймовірніше: отримати в сумі очок, що випали, 11 або 12?

Відповідь: 11 очок.

Задача 1.17. Визначити ймовірність того, що обране навмання ціле число N при а) піднесенні до квадрата; б) піднесенні до четвертого степеня; в) множенні на довільне ціле число дасть число, що закінчується одиницею.

Відповідь: а) 0,2; б) 0,4; в) 0,4.

Задача 1.18. На десятьох однакових картках написані числа від 0 до 9. Визначити ймовірність того, що навмання утворене за допомогою даних карток а) двозначне число ділиться на 18; б) тризначне число ділиться на 36.

Відповідь: а) $1/18$; б) $11/360$.

1.3 Геометричні ймовірності

1.3.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.27. ***Задача Бюффона.*** На площину, розграфлену паралельними прямими, відстань між якими становить $2a$, навмання підкидається голка довжиною $2r$, ($r > a$). Яка ймовірність того, що голка перетне одну з прямих?

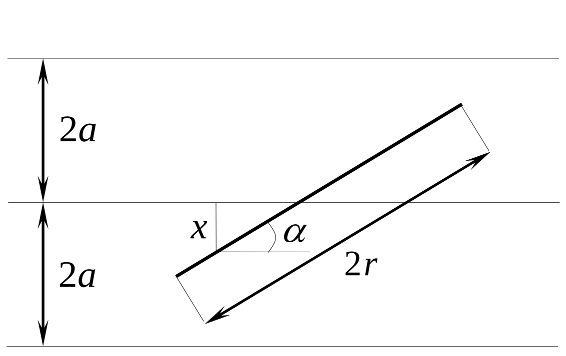


Рисунок 1.3

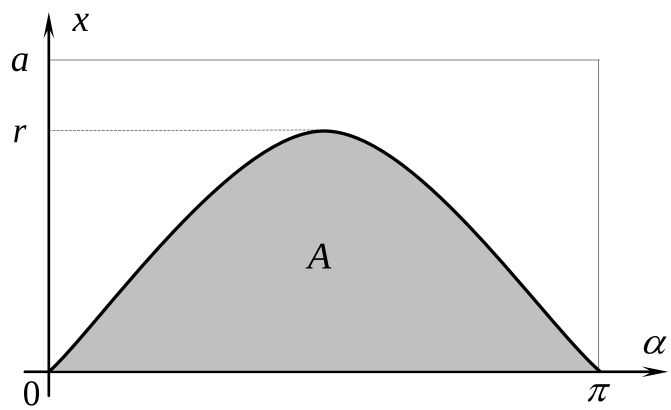


Рисунок 1.4

► Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що голка перетнула одну з прямих. Нехай x – відстань від середини голки до найближчої прямої, а α – кут між голкою й цією прямою (рис. 1.3). Величини x і α повністю визначають положення голки. Отже, прямокутник

$$\Omega = \left\{ \left(x, \alpha \right) : 0 \le x \le a, 0 \le \alpha \le \pi \right\}$$

становить простір елементарних наслідків.

Розглянемо трикутник, утворений голкою, прямою і перпендикуляром, опущеним із середини голки на пряму. Голка торкатиметься прямої, якщо $x = r\sin\alpha$. Якщо $x < r\sin\alpha$, то голка перетне пряму, а якщо $x > r\sin\alpha$, то голка не перетне пряму. Отже, прямокутник зі сторонами α і π являє повний простір подій, а область A, що задовольняє умові $x < r\sin\alpha$ – простір сприятливих наслідків (рис. 1.4). Оскільки площа області A дорівнює

$$S_A = \int_0^{\pi} r\sin\alpha d\alpha = -r\cos\alpha\Big|_0^{\pi} = 2r,$$

а площа Ω – $S_\Omega = a\pi$, то за формулою геометричної імовірності шукана ймовірність дорівнює

$$P\left(A\right) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2r}{a\pi}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.28. ***Задача Бертрана***. У колі радіуса r навмання проводиться хорда. Знайти ймовірність того, що довжина хорди перевищить сторону правильного вписаного трикутника.

► Як відомо, сторона правильного вписаного трикутника дорівнює $\sqrt{3}r$. За умовою хорда визначається двома точками на колі. Нехай перша точка потрапила в A. Впишемо в окружність правильний трикутник ABC (рис. 1.5). З рисунка видно, що довжина хорди буде більшою, ніж сторона правильного вписаного трикутника, якщо її другий кінець потрапить на дугу BC. Довжина цієї дуги, очевидно, $l_{BC} = \frac{2\pi}{3}$, а довжина всього кола $l = 2\pi r$. Тоді за формулою геометричної ймовірності шукана ймовірність дорівнює

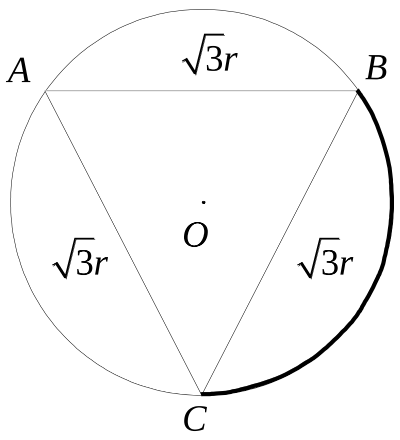


Рисунок 1.5

$$\frac{l_{BC}}{l} = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.29. ***Продовження.*** Розв'язати задачу 1.28, якщо середина хорди рівномірно розподілена на діаметрі, перпендикулярному її напрямку.

► Виберемо хорду й проведемо діаметр через її середину. Нехай ABC – правильний вписаний трикутник (рис. 1.6). З рисунка видно, що довжина хорди перевищує сторону правильного вписаного трикутника, якщо відстань від її центра до центра окружності буде менше DO. Розглянемо трикутник BOD. Він прямокутний, $OB = r$, $\alpha = 60^\circ$. Відтак, $DO = r\cos 60^\circ = \frac{r}{2}$. Отже, довжина хорди буде більшою ніж $\sqrt{3}r$, якщо її центр лежить на відрізку DD' довжиною r. Тоді шукана ймовірність дорівнює відношенню довжини відрізка DD' до діаметра, тобто дорівнює

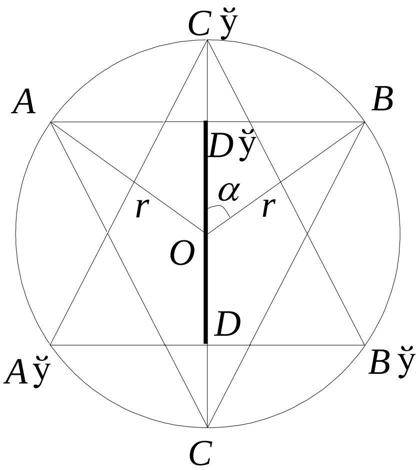


Рисунок 1.6

$$\frac{r}{2r} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.30. ***Продовження.*** Розв'язати задачу 1.28, якщо середина хорди рівномірно розподілена в колі.

► З попередньої задачі відомо, що довжина хорди перевищить $\sqrt{3}r$, якщо її середина знаходитиметься на відстані, меншій ніж $\frac{r}{2}$ від центра кола. Оскільки середина хорди рівномірно розподілена в колі, то це означає, що середина хорди має лежати в колі S_1 радіуса $\frac{r}{2}$ (рис. 1.7). Тоді за формулою геометричної ймовірності шукана ймовірність дорівнює

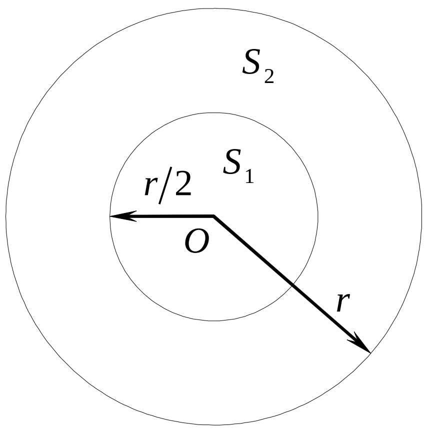


Рисунок 1.7

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.31. ***Задача про зустріч.*** Дві людини домовилися про зустріч між 10 й 11 годинами ранку, до того ж домовилися чекати один одного не більше 10 хвилин. Вважати, що момент приходу на зустріч вибирається кожним навмання у межах зазначеної години. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

► Нехай подія A – зустріч відбудеться, x – час приходу на зустріч однієї людини, y – іншої. Оскільки зустріч має відбутися в межах домовленої години $0 \le x \le 60$ та $0 \le y \le 60$, то область можливих значень x і y є квадратом зі стороною 60 (рис. 1.8). Для того щоб вони зустрілися, необхідно, щоб $|x - y| < 10$.

Звідси отримуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} -10 < x - y; \\ x - y < 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x + 10; \\ y > x - 10. \end{cases}$$

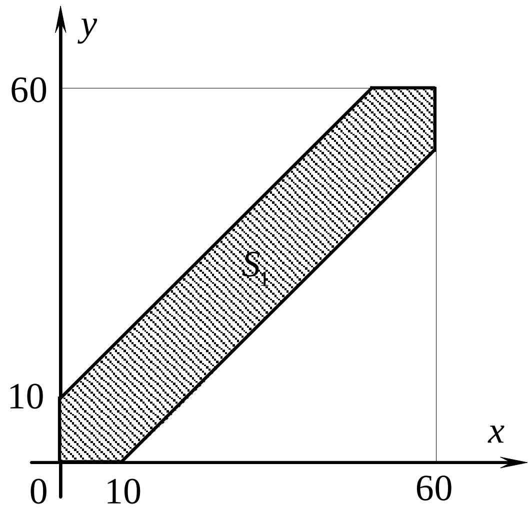


Рисунок 1.8

Геометричний розв'язок системи – область S_1 заштрихована на рис. 1.8.

Шуканою ймовірністю є відношення площі S_1 до площі квадрата:

$$P(A) = \frac{11}{36} \approx 0{,}306. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.32. На відрізок довжини L навмання ставляться дві точки. Яка ймовірність, що з трьох утворених частин відрізка можна побудувати трикутник?

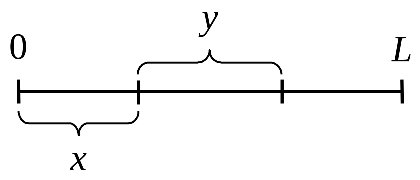


Рисунок 1.9

► Наслідки схеми випробувань зручно відобразити точками (x, y) у двовимірному евклідовому просторі, вважаючи координату x довжиною однієї сторони трикутника, а координату y – довжиною іншої (довжина третьої визначається автоматично як доповнення до довжини відрізка L – див. рис. 1.9). При цьому область Ω точок – наслідків всієї схеми випробувань – визначається з умов:

$$\begin{cases} 0 \le x \le L, \\ 0 \le y \le L, \\ 0 \le L-(x+y) \le L, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le L, \\ 0 \le y \le L, \\ 0 \le x+y \le L, \end{cases}$$

а область A точок – наслідків події, що розглядається, – окреслюється вимогами (сума будь-яких двох сторін трикутника має бути не меншою, ніж третя сторона):

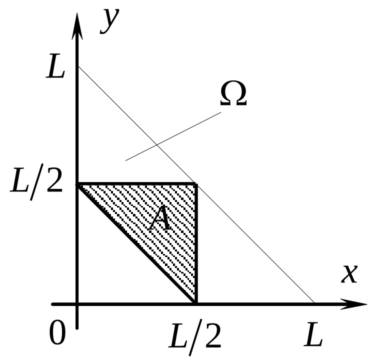


Рисунок 1.10

$$\begin{cases} x+y \ge L-(x+y), \\ x+\left[L-(x+y)\right] \ge y, \\ y+\left[L-(x+y)\right] \ge x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \ge \dfrac{L}{2}, \\ y \le \dfrac{L}{2}, \\ x \le \dfrac{L}{2}. \end{cases}$$

Області Ω й A мають вигляд трикутників, зображених на рис. 1.10. Тоді шукана ймовірність обчислюється як відношення площ S цих трикутників і дорівнює:

$$\frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}L^2} = \frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.33. На відрізку одиничної довжини навмання вибираються дві точки. Яка ймовірність того, що довжина мінімального з відрізків, на які поділяється початковий відрізок, менша від x?

► Нехай на координатній площині на осі a відкладається відстань від точки A до точки O, початку відрізка, а на іншій осі b – відстань від точки B до точки O.

Якщо відстань між точками A і B менша від x, то виконується $|a-b|<x$.

Якщо відстань від A до O менша від x, то виконується $a<x$.

Якщо відстань від B до O менша від x, то виконується $b<x$.

Якщо відстань від B до L (кінця відрізка) менша від x, то виконується $1-b<x$.

Якщо відстань від A до L менша від x, то виконується $1-a<x$.

Отже, довжина мінімального з відрізків менша від x, якщо виконується одна з таких умов: (враховуючи, що $0<a<1$ й $0<b<1$):

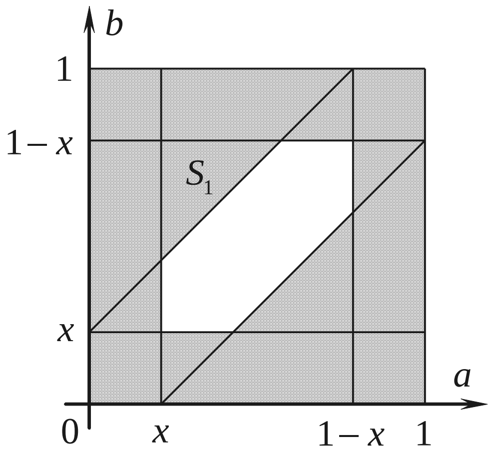


Рисунок 1.11

$$\left[\begin{array}{l} |a-b|<x, \\ a<x, \\ b<x, \\ 1-b<x, \\ 1-a<x. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Тоді шукана ймовірність $P(A)$ того, що довжина мінімального відрізка менша від x, дорівнює відношенню площі області, описаною системою (1.1) до площі квадрата зі стороною, рівною одиниці (рис. 1.11). Неважко переконатися, що площа заштрихованої області дорівнює

$$S_1 = x + x + 2(1-2x) + x^2 = x^2 - 2x + 2.$$

Тоді $P(A) = \dfrac{S_1}{1} = x^2 - 2x + 2$. ◄

Приклад 1.34. Гравець підкидає монету на стіл, розділений на квадрати зі стороною один дюйм. Яка ймовірність влучення монети з радіусом $r = \dfrac{3}{8}$ дюйма у внутрішню область квадрата?

► Ймовірність влучення центра монети в будь-яку область квадрата пропорційна площі цієї області. Вона дорівнює площі області, розділеної на площу квадрата. Оскільки радіус монети $\dfrac{3}{8}$ дюйма, то для виграшу центр не має знаходитися ближче, ніж $\dfrac{3}{8}$ дюйма від сторін квадрата. Цьому обмеженню відповідає квадрат зі сторонами $\frac{1}{4}$ дюйма, у внутрішній області якого має лежати центр монети.

Отже, ймовірність влучення монети у внутрішню область квадрата дорівнює

$$P(A)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}=0,0625. ◄$$

Приклад 1.35. Знайти ймовірність того, що корені квадратного рівняння $x^2+px+q=0$ дійсні, якщо p й q – навмання вибрані числа з відрізка $[-B, B]$.

► Оскільки p й q – навмання вибрані числа з відрізка $[-B, B]$, то простором елементарних наслідків є квадрат $\Omega=[-B, B]\times[-B, B]$. Для того щоб корені рівняння $x^2+px+q=0$ були дійсними, необхідно, щоб дискримінант $D=p^2-4q$ був невід'ємним. Цій умові відповідає область I (рис. 1.12).

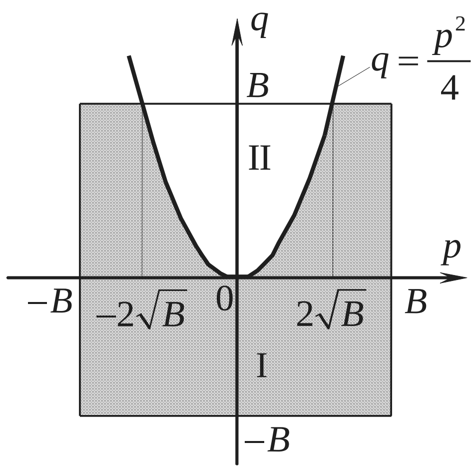


Рисунок 1.12

Очевидно, площа S_{I} дорівнює $4B^2-S_{\mathrm{II}}$. Знайдемо S_{II}:

$$S_{\mathrm{II}}=\iint\limits_{(\mathrm{II})} dpdq=\int\limits_{-2\sqrt{B}}^{2\sqrt{B}}\int\limits_{\frac{p^2}{4}}^{B} dpdq=\frac{8B\sqrt{B}}{3}.$$

Тоді ймовірність того, що корені рівняння дійсні, за формулою геометричної ймовірності дорівнює

$$\frac{S_{\mathrm{I}}}{S}=1-\frac{2}{3\sqrt{B}}. ◄$$

Приклад 1.36. Знайти ймовірність того, що добуток xy двох навмання вибраних позитивних чисел x і y, кожне з яких не більше двох, не перевищить одиниці, а частка $\frac{y}{x}$ буде не більше двох.

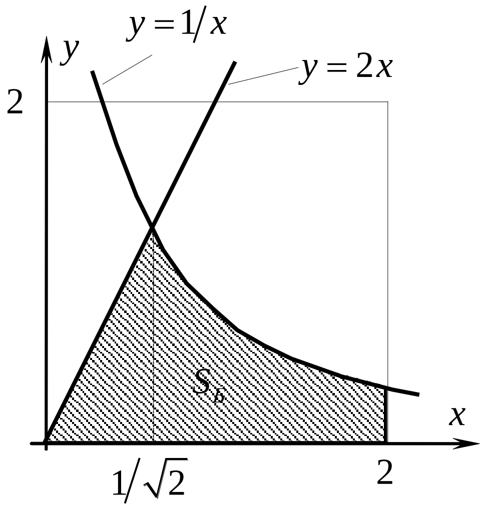


Рисунок 1.13

► Нехай x і y – вибрані навмання позитивні числа. За умовою $0<x\le 2,\ 0<y\le 2$, що на площині відповідає квадрату площею $S=4$. Область, що задовольняє зазначеній події, визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} xy\le 1; \\ \dfrac{y}{x}\le 2; \end{cases}$$

до того ж $0<x\le 2,\ 0<y\le 2$ (рис. 1.13), і має площу

$$S_Б=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}2xdx+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2}\frac{dx}{x}=x^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\ln x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2}=\frac{1}{2}\left(1+3\ln 2\right).$$

Тоді шукана ймовірність

$$p=\frac{S_Б}{S}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+3\ln 2\right)}{4}=\frac{1}{8}\left(1+3\ln 2\right).\ ◄$$

Приклад 1.37. На площину з нанесеною сіткою квадратів зі стороною a навмання підкидають монету з радіусом $r<\dfrac{a}{2}$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної сторони квадрата.

► Точки квадрата становлять всі можливі положення центра монети (простір елементарних наслідків). Монета не перетне жодної сторони квадрата, якщо центр монети лежатиме на відстані, не меншій ніж r від сторони квадрата, тобто належатиме квадрату зі стороною $a-2r$. Тоді шукана ймовірність

$$p=\frac{\left(a-2r\right)^2}{a^2}.\ ◄$$

Приклад 1.38. Диск, що швидко обертається, розділений на парну кількість рівних секторів, через один пофарбованих у білий і чорний кольори. По диску зроблений постріл. Знайти ймовірність влучення кулі в білий сектор.

► Шукана ймовірність p дорівнює відношенню площі всіх білих секторів до площі самого диска. Оскільки секторів на диску парна кількість і всі вони дорівнюють між собою, то загальна площа всіх білих секторів дорівнює половині площі диска, тобто дорівнює $0{,}5\pi R^2$. Тоді

$$p = \frac{0{,}5\pi R^2}{\pi R^2} = 0{,}5. \blacktriangleleft$$

1.3.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.19. Площина розкреслена паралельними прямими, відстань між якими $2l$. На площину навмання кинули монету з радіусом $r < l$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної прямої.

Відповідь: $1 - \dfrac{r}{l}$.

Задача 1.20. На площині накреслені дві концентричні окружності, радіуси яких 5 і 10 см відповідно. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у велике коло, потрапить також у кільце, утворене побудованими окружностями.

Відповідь: 0,75.

Задача 1.21. На відрізку OA довжини L числової осі Ox навмання поставлені дві точки B і C. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC буде меншою, ніж відстань від точки O до найближчої до неї точки.

Відповідь: 0,5.

Задача 1.22. На відрізок AB довжини L навмання поставлена точка O. Знайти ймовірність того, що менший з відрізків AO або OB матиме довжину, більшу, ніж $1/3$ довжини відрізка. Передбачається, що ймовірність потрапляння точки на відрізок пропорційна довжині відрізка й не залежить від його розташування на числовій осі.

Відповідь: 1/3.

Задача 1.23. Усередину кола радіуса R навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що точка потрапить у внутрішню область вписаного в коло: а) квадрата; б) правильного трикутника.

Відповідь: а) $\dfrac{2}{\pi}$; б) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Задача 1.24. На відрізку OA довжини L числової осі Ox навмання поставлені дві точки B і C, до того ж точка C знаходиться правіше точки B. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC буде меншою, ніж $L/2$.

Відповідь: 0,75.

Задача 1.25. У сигналізатор надходять сигнали від двох пристроїв, до того ж, надходження кожного із сигналів є рівноможливим у будь-який момент проміжку часу тривалістю T. Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менша t $(t < T)$. Знайти ймовірність того, що сигналізатор спрацювє за час T, якщо кожен пристрій подасть один сигнал.

Відповідь: $1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$.

Задача 1.26. Яка ймовірність того, що сума двох навмання взятих позитивних чисел, кожне з яких не більше двох, не перевищить 1, а частка y/x буде не більшою 1.

Відповідь: 1/16.

1.4 Формула повної ймовірності. Формули Байєса

1.4.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.39. ***Задача про поглинання частинки.*** Частинка «блукає» цілочисельними точками числової прямої. У нульовий момент часу частинка знаходиться в точці $x=1$. У момент часу $t=1$ частинка зміщується в точку $x=2$ з імовірністю p або в точку $x=0$ з імовірністю q, $(p+q)=1$.

Якщо частинка потрапить в точку $x=0$, то вона зникає (поглинається).

Якщо частинка потрапить в точку $x=2$, то в момент часу $t=2$ вона знаходитиметься з імовірністю p в точці $x=3$ або з імовірністю q в точці $x=1$.

Якщо частинка потрапить в точки $x=3,4,\ldots$, то її еволюція буде такою самою, наче вона знаходилася в точці $x=2$.

Знайти ймовірність поглинання частинки.

► Нехай H – подія, яка полягає в тому, що частинка переміститься з точки $x=1$ в точку $x=2$, а $\bar{H}$ – подія, яка полягає в тому, що частинка зміщується в нуль.

Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що частинка поглинається.

Нехай $P(A)=x$. За формулою повної ймовірності маємо:

$$x=P(H)P(A|H)+P(\bar{H})P(A|\bar{H}).$$

Але

$$P(H)=p,\qquad P(\bar{H})=q,\qquad P(A|\bar{H})=1,\qquad P(A|H)=x^2.$$

Таким чином,

$$x=x^2\cdot p+1\cdot q.$$

Звідси маємо:

$$x_1=1,\qquad x_2=\frac{q}{p}.$$

При $p<\frac{1}{2}$ корінь $\frac{q}{p}$ не підходить. Отже, в цьому випадку $P(A)=1$. Якщо ж $p\geq\frac{1}{2}$, то $P(A)=\frac{q}{p}$. Зазначимо, що дане міркування має неточність.

Ця задача допускає іншу інтерпретацію (див. задачу про банкрутство гравця з п. 1.7). ◄

Приклад 1.40. Урна містить одну кулю, про яку відомо, що вона або біла, або чорна з однаковими ймовірностями. В урну кладуть білу кулю і потім навмання виймають одну кулю. Вона виявилася білою. Яка ймовірність того, що куля, яка залишилася, є білою?

► Нехай подія A – спочатку в урні була біла куля, B – спочатку в урні була чорна куля. Крім того,

$$P(A) = P(B) = 1/2.$$

Подія C – витягнули білу кулю. За формулою повної ймовірності

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) = 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Шукану ймовірність знайдемо за допомогою формули Байєса:

$$P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$ ◄

Приклад 1.41. Імовірність надходження k викликів на телефонну станцію за проміжок часу t дорівнює $P_t(k)$. Вважаючи кількість викликів за будь-які два сусідніх проміжки часу незалежними подіями, визначити ймовірність $P_{2t}(s)$ надходження s викликів за проміжок часу тривалості $2t$.

► Нехай подія A – надходження s викликів за проміжок часу $2t$, а гіпотези H_k ($k = 0,1,...,S$) полягають у тому, що за проміжок часу t (перший проміжок) надійшло k викликів. Тоді

$$P(H_k) = P_t(k).$$

Імовірність надходження інших $s-k$ викликів за другий проміжок часу t дорівнює:

$$P(A|H_k) = P_t(s-k).$$

Тоді за формулою повної ймовірності шукана ймовірність дорівнює:

$$P(A) = P_{2t}(s) = \sum_{k=0}^{s} P_t(k)\cdot P_t(s-k).$$ ◄

Приклад 1.42. У групі студентів, що складає іспит, – 5 відмінників, 10 середніх і 15 слабких студентів. Відмінник завжди отримує «відмінно», середній – «добре» і «відмінно» з рівними можливостями, слабкий студент – «добре», «задовільно» і «незадовільно» з рівними можливостями. Яка ймовірність того, що навмання обраний студент отримає оцінку: а) «відмінно»; б) «добре».

► а) Позначимо подію A – студент отримав «відмінно»; події: H_1 – обраний студент – відмінник, H_2 – середній, H_3 – слабкий студент. Події H_k ($k=1, 2, 3$) становлять повну групу подій. Їхні ймовірності дорівнюють:

$$P(H_1)=\frac{5}{30}, \qquad P(H_2)=\frac{10}{30}, \qquad P(H_3)=\frac{15}{30}.$$

З умови відомо, що ймовірність отримати оцінку «відмінно» для відмінника становить $P(A|H_1)=1$, для середнього студента – $P(A|H_2)=\frac{1}{2}$, слабкого студента – $P(A|H_3)=0$.

За формулою повної ймовірності:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(H_k)P(A|H_k)=\frac{5}{30}\cdot 1+\frac{10}{30}\cdot\frac{1}{2}+\frac{15}{30}\cdot 0=\frac{1}{3}.$$

б) Позначимо подію B – студент отримав «добре». Користуючись аналогічними міркуваннями, маємо

$$P(B|H_1)=0, \qquad P(B|H_2)=\frac{1}{2}, \qquad P(B|H_3)=\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(H_k)P(B|H_k)=\frac{5}{30}\cdot 0+\frac{10}{30}\cdot\frac{1}{2}+\frac{15}{30}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.43. Троє мисливців одночасно вистрілили в кабана, який був вбитий однією кулею. Визначити ймовірність того, що кабан вбитий першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно 0,2, 0,4 й 0,6.

► Позначимо подію A – кабан вбитий однією кулею; події H_k ($k=1, 2, 3$) полягають у тому, що влучив тільки k-й мисливець.

Позначимо ймовірності влучення кожного мисливця $p_1=0,2$; $p_2=0,4$; $p_3=0,6$ відповідно. Подія H_1 полягає в тому, що перший стрілець влучив, а другий і третій не влучили (одночасно й незалежно один від одного). Отже, за теоремою множення ймовірностей

$$P(H_1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) = 0{,}048 .$$

Аналогічно знаходимо

$$P(H_2) = p_2(1-p_1)(1-p_3) = 0{,}128,$$

$$P(H_3) = p_3(1-p_2)(1-p_1) = 0{,}288.$$

Імовірності влучення k-го мисливця за умови, що кабан був вбитий однією кулею, шукатимемо за формулою Байєса:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^{3} P(H_k)P(A|H_k)}.$$

У задачі ймовірність того, що кабана вбито однією кулею за умови, що влучив k-й стрілець $P(A|H_k) = 1,\ k = 1, 2, 3.$

Отримуємо:

$$P(H_1|A) \approx 0{,}103; \qquad P(H_2|A) \approx 0{,}276; \qquad P(H_3|A) \approx 0{,}621. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.44. В урні n куль. Колір кожної з них з рівною ймовірністю може бути білим або чорним. Виймаються послідовно k куль, до того ж щоразу після виймання куля повертається в урну. Яка ймовірність того, що в урні є тільки білі кулі, якщо чорні не виймалися?

► Позначимо подію A – вийняли k білих куль; події H_i – в урні є i білих куль ($i = 0, \ldots, n$). Оскільки подій H_i усього $n+1$ і вони між собою рівноймовірні, то

$$P(H_i) = \frac{1}{n+1}, \qquad i = \overline{0,n}.$$

Якщо в урні є i білих куль, то кількість способів вибрати k білих куль дорівнює i^k, а ймовірність цього вибору дорівнює:

$$P(A|H_i) = \frac{i^k}{n^k},$$

де n^k – кількість способів вибору будь-яких k куль, $i = \overline{0,n}$.

За формулою Байєса знайдемо ймовірність $P\left(H_n|A\right)$ того, що всі n куль в урні білі, якщо послідовно виймалися k білих куль (з поверненням):

$$P\left(H_n|A\right)=\frac{P\left(H_n\right)P\left(A|H_n\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(H_i\right)P\left(A|H_i\right)}=\frac{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^k}{n^k}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{i^k}{n^k}}=\frac{n^k}{\sum\limits_{i=1}^{n}i^k}=\frac{n^k}{1+2^k+\ldots+n^k}. ◄$$

Приклад 1.45. Імовірності того, що під час роботи ПЕОМ збій виник у процесорі, в оперативній пам'яті, в інших пристроях, співвідносяться як $3:2:5$. Імовірності виявити збій у процесорі, в оперативній пам'яті та в інших пристроях дорівнюють 0,8; 0,9; 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що збій, який виник у машині, буде виявлений.

► Позначимо подію A – збій, що виник у машині, буде виявлений. Введемо гіпотези: H_1 – збій виник у процесорі; H_2 – збій виник в оперативній пам'яті; H_3 – збій виник в інших пристроях. За умовою

$$P\left(H_1\right)=0{,}3; \qquad P\left(H_2\right)=0{,}2; \qquad P\left(H_2\right)=0{,}5.$$

Умовні ймовірності того, що збій буде виявлений у процесорі, в оперативній пам'яті, в інших пристроях дорівнюють відповідно

$$P\left(A|H_1\right)=0{,}8; \qquad P\left(A|H_2\right)=0{,}9; \qquad P\left(A|H_3\right)=0{,}9.$$

Шукана ймовірність того, що збій, який виник у машині, буде виявлений за формулою повної ймовірності, дорівнює

$$P\left(A\right)=\sum_{k=1}^{3}P\left(H_k\right)P\left(A|H_k\right)=0{,}3\cdot0{,}8+0{,}2\cdot0{,}9+0{,}5\cdot0{,}9=0{,}87. ◄$$

Приклад 1.46. До лікарні потрапляють у середньому 50% хворих, що мають захворювання A, 30% – захворювання B, 20% – захворювання C. Імовірність повного виліковування для хвороби A дорівнює 0,7; для хвороби B – 0,8; для хвороби C – 0,9. Знайти ймовірність того, що хворий, який потрапив до
лікарні і виписався через деякий час здоровим, мав захворювання A.

► Позначимо подію D – хворий виписався з лікарні здоровим, події A, B і C – хворий мав захворювання A, B і C відповідно. За умовою

$$P\left(A\right)=\frac{1}{2}; \qquad P\left(B\right)=\frac{3}{10}; \qquad P\left(C\right)=\frac{1}{5}.$$

$$P\left(D|A\right)=0,7; \qquad P\left(D|B\right)=0,8; \qquad P\left(D|C\right)=0,9.$$

За формулою повної ймовірності ймовірність видужання хворого дорівнює

$$P(D)=P(A)P\left(D|A\right)+P(B)P\left(D|B\right)+P(C)P\left(D|C\right)=\frac{1}{2}\cdot 0,7+\frac{3}{10}\cdot 0,8+\frac{1}{5}\cdot 0,9=0,77.$$

Тоді за формулою Байєса знайдемо шукану ймовірність

$$P\left(A|D\right)=\frac{P(A)P\left(D|A\right)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0,7}{0,77}=\frac{5}{11}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.47. Стрільцю запропонували 5 гвинтівок, три з яких з оптичним прицілом. Імовірність влучення в мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює $0,95$; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює $0,7$. Знайти ймовірність влучення стрільцем у мішень з гвинтівки, вибраної навмання.

► Позначимо через A подію, що означає влучення в мішень. В мішень можна влучити з гвинтівки з оптичним прицілом (подія H_1) або з гвинтівки без оптичного прицілу (подія H_2). Імовірність того, що стрілець візьме гвинтівку з оптичним прицілом $P(H_1)=\frac{3}{5}$. Імовірність того, що стрілець візьме гвинтівку без оптичного прицілу $P(H_2)=\frac{2}{5}$. Умовна ймовірність того, що в мішень буде влучення з гвинтівки з оптичним прицілом $P\left(A|H_1\right)=0,95$. Умовна ймовірність того, що в мішень буде влучення з гвинтівки без оптичного прицілу $P\left(A|H_2\right)=0,7$. Шукана ймовірність того, що буде влучення в мішень з навмання вибраної гвинтівки, за формулою повної ймовірності дорівнює:

$$P(A)=P(H_1)P\left(A|H_1\right)+P(H_2)P\left(A|H_2\right)=\frac{3}{5}\cdot 0,95+\frac{2}{5}\cdot 0,7=0,85. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.48. ***Закон слідування Лапласа.*** Є урна з N білими та чорними кулями (кількість ξ білих куль невідома). Проводиться серія випробувань, у кожному з яких з урни навмання виймається з подальшим поверненням одна куля. Припустимо, що проведено n випробувань і у кожному з них з'явилася біла куля. Яка ймовірність того, що в $(n+1)$-у випробуванні також з'явиться біла куля?

► Нехай в урні з рівними можливостями може бути будь-яка кількість ξ білих куль від 0 до N, тобто $P(\xi=j)=\frac{1}{N+1}$, $j=0,1,...,N$.

Позначимо через η кількість появ білої кулі у n випробуваннях. Тоді за формулою повної ймовірності ймовірність появи білої кулі у всіх n випробуваннях дорівнює

$$p_n = P(\eta = n) = \sum_{j=0}^{N} P(\xi = j) P(\eta = n | \xi = j) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{j}{N} \right)^n .$$

Шукана умовна ймовірність вибрати білу кулю в $(n+1)$-у випробуванні за умови, що в попередніх n випробуваннях виймалася біла куля,

$$P(\eta = n+1 | \eta = n) = \frac{P(\eta = n+1, \eta = n)}{P(\eta = n)} .$$

Оскільки $\{\eta = n+1\} \supset \{\eta = n\}$, то $\{\eta = n+1, \eta = n\} = \{\eta = n+1\}$ і шукана ймовірність дорівнює

$$\frac{P(\eta = n+1)}{P(\eta = n)} = \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\dfrac{1}{N+1} \sum\limits_{j=0}^{N} \left(\dfrac{j}{N} \right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N+1} \sum\limits_{j=0}^{N} \left(\dfrac{j}{N} \right)^{n}} \sim \frac{\int\limits_0^1 x^{n+1} dx}{\int\limits_0^1 x^n dx} = \frac{n+1}{n+2} .$$

Це так званий ***закон слідування Лапласа***. Зміст цього закону можна пояснити за допомогою такого прикладу. Нехай є коаксіальний кабель і ставиться завдання перевірки його якості. Якщо перші n метрів виявилися якісними (без пробоїв), то ймовірність того, що $(n+1)$-й метр буде якісним, дорівнює $\dfrac{n+1}{n+2}$. ◄

1.4.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.27. Для вирішення питання: йти в кіно або на лекцію, студент підкидає монету. Якщо студент піде на лекцію, він засвоїть тему лекції з імовірністю 0,9, а якщо в кіно – з імовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що студент засвоїть тему лекції?

Відповідь: 0,85.

Задача 1.28. При рентгенівському обстеженні ймовірність виявити туберкульоз у хворого дорівнює $1-\beta$. Ймовірність вважати хворою здорову людину дорівнює α. Нехай частка хворих туберкульозом відносно всього населення дорівнює γ. Знайти умовну ймовірність того, що людина здорова, якщо вона була визнана хворою в ході обстеження.

Відповідь: $\dfrac{(1-\gamma)\alpha}{(1-\gamma)\alpha+\gamma(1-\beta)}$.

Задача 1.29. Для пошуків зниклої дівчинки виділені 10 чоловік, кожен з яких може проводити пошуки в одному з двох районів, де дівчинка може перебувати з імовірностями $0,8$ й $0,2$. Як потрібно розділити пошукові бригади в районах, щоб імовірність знайти дівчинку була максимальною, якщо кожен з рятувальників може знайти дівчинку з імовірністю $p=0,2$, а пошуки проводяться кожним рятувальником незалежно від інших? Знайти ймовірність знаходження дівчинки за умови найкращої тактики пошуків.

Відповідь: $m=8$; $p=0,74$.

Задача 1.30. ***Задача про мандрівника.*** Уявіть собі мандрівника, що йде з пункту O в пункт A і на перетині доріг вибирає навмання один з можливих шляхів (вибір будь-якого шляху є рівноможливим). Схема доріг зображена на рис. 1.14. Яка ймовірність того, що мандрівник потрапить у пункт A?

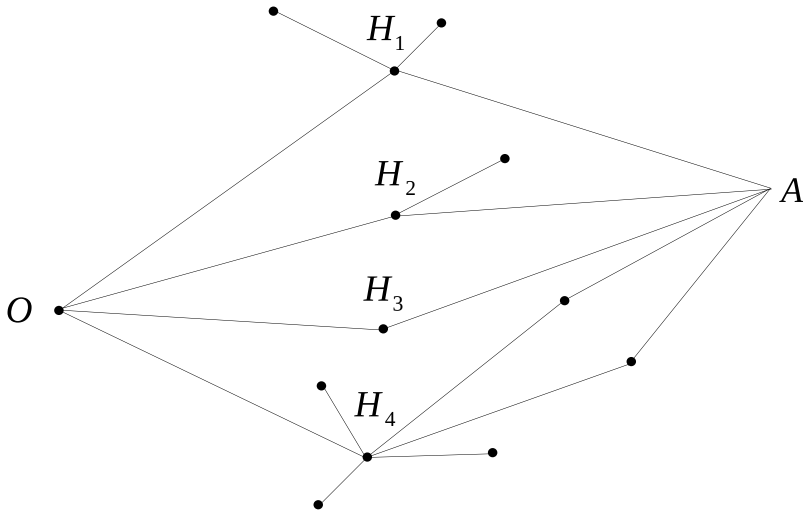


Рисунок 1.14

Відповідь: $61/120$.

Задача 1.31. Є три ящики з кулями. Перший містить 3 білих і 5 чорних куль, другий – 5 білих і 4 чорних, третій – 2 білих і 3 чорних кулі. Знайти ймовірність того, що вибрана куля буде білою, якщо ящик, з якого її вийняли, обраний навмання.

Відповідь: 0,4435.

Задача 1.32. Серед N екзаменаційних білетів є n $(n < N)$ «щасливих». Студенти підходять за білетами один за одним. Визначити, для якого із студентів є більшою ймовірність вибрати «щасливий» білет: для того, хто підійшов першим, або для того, хто підійшов другим.

Відповідь: імовірності рівні.

Задача 1.33. Каналом зв'язку, на який здійснюється вплив перешкод, передають одну з двох команд керування у вигляді кодових комбінацій 11111 або 00000, крім того, апріорні ймовірності передачі цих команд дорівнюють 0,7 і 0,3 відповідно. За рахунок перешкод імовірність правильного прийому кожного із символів 1 і 0 зменшується до 0,6. Припускаємо, що символи кодових комбінацій змінюються незалежно один від одного. На виході зареєстрована комбінація 10110. Визначити, яка з команд передана з більшою ймовірністю.

Відповідь: з більшою ймовірністю $(\approx 0,78)$ була передана команда 11111.

Задача 1.34. В одній урні знаходяться N_1 білих і M_1 чорних куль, у другій – N_2 білих і M_2 чорних. З першої урни в другу перекладено k куль $(k < N_1)$, потім із другої урни вийняли одну кулю. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання з другої урни куля є білою.

Відповідь: $\sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{M_1}^{k-i}}{C_{N_1+M_1}^{k}} \cdot \dfrac{N_2 + i}{N_2 + M_2 + k}$.

Задача 1.35. Під час переливання крові слід враховувати групи крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна переливати кров будь-якої групи; людині з другою і третьою групою крові можна переливати кров тієї самої групи або першої; людині з першою групою крові можна переливати тільки кров першої групи. Серед населення $33,7\%$ мають першу групу, $33,5\%$ – другу групу, $20,9\%$ – третю групу й $7,95\%$ – четверту групу крові. Знайти ймовірність того, що випадковому хворому можна перелити кров випадкового донора.

Відповідь: 0,574.

Задача 1.36. Три стрільці роблять постріл у мішень. Імовірності влучення в мішень при одному пострілі для кожного зі стрільців дорівнюють p_1, p_2 і p_3 відповідно. Яка ймовірність того, що другий стрілець не влучив, якщо в мішень було два влучення?

Відповідь: $\dfrac{p_1(1-p_2)\,p_3}{(1-p_1)\,p_2 p_3 + p_1(1-p_2)\,p_3 + p_1 p_2 (1-p_3)}$.

Задача 1.37. На вхід радіоприймального пристрою з імовірністю 0,9 надходить поєднання корисного сигналу з перешкодою, а з імовірністю 0,1 тільки перешкода. Якщо надходить корисний сигнал з перешкодою, то приймач з імовірністю 0,8 реєструє наявність сигналу, якщо надходить тільки перешкода, то реєструється наявність сигналу з імовірністю 0,3. Відомо, що приймач показав наявність сигналу. Яка ймовірність того, що сигнал дійсно прийшов?

Відповідь: 0,96.

1.5 Незалежність випадкових подій

1.5.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.49. Довести, що якщо події A і B незалежні, то незалежні $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

► З незалежності подій A і B випливає, що

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Доведемо, що $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$. Дійсно,

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(AB)) = 1 - P(A) - P(B) +$$

$$+P(A)P(B) = (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A)) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B}).$$ ◄

Приклад 1.50. Довести, що якщо $P(A|\bar{B}) = P(A|B)$, то події A і B незалежні.

► Знайдемо $P(A)$ за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}).$$

Враховуючи умову $P(A|\bar{B}) = P(A|B)$ і те, що $P(B) + P(\bar{B}) = 1$, отримаємо

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = P(A|B)(P(B) + P(\bar{B})) = P(A|B).$$

Звідси $P(A)P(B) = P(A|B)P(B)$. Застосувавши формулу $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, маємо

$$P(A)P(B)=P(A|B)P(B)=\frac{P(AB)P(B)}{P(B)}=P(AB).$$

Отже, $P(AB)=P(A)P(B)$. Що необхідно було довести. ◄

Приклад 1.51. Нехай подія A така, що не залежить від самої себе. Показати, що $P(A)=0$ або $P(A)=1$.

► Якщо подія A не залежить від самої себе, то $P(AA)=P(A)P(A)$. Враховуючи, що $P(AA)=P(A)$, маємо

$$P(A)=P(A)P(A);$$

$$P(A)-P(A)P(A)=0;$$

$$P(A)(1-P(A))=0;$$

$$P(A)=0 \qquad \text{або} \qquad P(A)=1.$$

Дійсно, якщо подія A не залежить від самої себе, то тоді $P(A)=0$ або $P(A)=1$. ◄

Приклад 1.52. Нехай подія A така, що $P(A)=0$ або $P(A)=1$. Показати, що A і будь-яка подія B незалежні.

► Незалежність подій *A* і *B* означає, що

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

З іншого боку, $P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)$. Отже, рівність

$$P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

також означає незалежність подій A і B.

Розглянемо перший випадок, коли $P(A)=0$. Тоді зазначена рівність виконується, а, отже, події A і B незалежні.

У випадку, коли $P(A)=1$,

$$P(A)P(B)=P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=P(B|A)P(A),$$

оскільки $P(\bar{A})=0$. Тобто, зазначена умова також виконується.

Отже, подія A і будь-яка подія B незалежні, якщо $P(A)=1$ або $P(A)=0$. ◄

Приклад 1.53. Нехай A і B – незалежні події та $P(A \cup B)=1$. Показати, що або A, або B мають імовірність, рівну 1.

► Розглянемо ймовірність $P\left(\overline{A \cup B}\right)$. За правилом де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$

.

Отже**,**

$$P\left(\overline{A \cup B}\right)=1-P(A \cup B)=0=P\left(\bar{A}\bar{B}\right)=P(\bar{A})P(\bar{B})=(1-P(A))(1-P(B));$$

$$(1-P(A))(1-P(B))=0.$$

Отже, або $P(A)=1$, або $P(B)=1$. Що необхідно було довести. ◄

Приклад 1.54. Кидають три гральні кубики. Подія A полягає в тому, що однакова кількість очок випала на першому та другому кубиках, подія B – однакова кількість очок на другому і третьому кубиках, подія C – на першому і третьому кубиках. Чи будуть події – A, B і C:

а) попарно незалежні;

б) незалежні в сукупності?

► а) Попарна незалежність подій A і B означає, що

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Знайдемо ймовірності всіх подій за формулою класичної ймовірності:

$$P(A)=\frac{n_A}{n}.$$

Кількість усіх наслідків при киданні трьох кубиків $n=6\cdot 6\cdot 6$, кількість сприятливих наслідків за умови, що виконується подія A, $n_A=6\cdot 6$. Отже,

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{1}{6}.$$

За аналогією $n_B=6\cdot 6$, $n_C=6\cdot 6$. Отже,

$$P(B)=\frac{n_B}{n}=\frac{1}{6}, \qquad P(C)=\frac{n_C}{n}=\frac{1}{6}.$$

Кількість сприятливих наслідків за умови, що виконується подія AB, $n_{AB}=6$. Тоді

$$P(AB)=\frac{n_{AB}}{n}=\frac{1}{36}.$$

За аналогією

$$P(AC)=\frac{1}{36}, \qquad P(CB)=\frac{1}{36}.$$

Таким чином,

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{36}, \qquad P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{36},$$

$$P(CB)=P(C)P(B)=\frac{1}{36}.$$

Отже, події A, B і C попарно незалежні.

б) Події A, B і C незалежні в сукупності, якщо

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

Кількість сприятливих наслідків для події ABC $n_{ABC}=6$. Тоді ймовірність

$$P(ABC)=\frac{n_{ABC}}{n}=\frac{1}{36}.$$

Звідси випливає, що

$$P(ABC)=\frac{1}{36} \quad \text{і} \quad P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{6\cdot 6\cdot 6}.$$

Отже, події A, B і C не є незалежними в сукупності. ◄

Приклад 1.55. Нехай події A, B і C незалежні в сукупності, крім того, кожна з них має ймовірність, відмінну від 0 і 1. Чи можуть події AB, AC і BC бути:

а) незалежними в сукупності;

б) попарно незалежними?

► а) Нехай події AB, AC і BC є незалежними в сукупності. Тоді вірна рівність:

$$P(AC \cap BC \cap AB) = P(AC)P(BC)P(AB).$$

За умовою події A, B і C є незалежними в сукупності, тому

$$P(AC)P(BC)P(AB) = P(A)P(C)P(B)P(C)P(A)P(B) = P(A)^2 P(B)^2 P(C)^2.$$

З іншого боку,

$$P(AC \cap BC \cap AB) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

Порівнюючи останні рівності, приходимо до висновку, що

$$P(A)^2 P(B)^2 P(C)^2 = P(A)P(B)P(C),$$

тобто

$$P(A)^2 = P(A), \qquad P(B)^2 = P(B), \qquad P(C)^2 = P(C).$$

Це неможливо, оскільки за умовою ці ймовірності відмінні від нуля та одиниці. Тому події AB, AC і BC є залежними в сукупності.

б) Нехай події AB, AC і BC є попарно незалежними. Тоді вірні рівності:

$$P(AC \cap BC) = P(AC)P(BC),$$

$$P(BC \cap AB) = P(BC)P(AB),$$

$$P(AC \cap AB) = P(AC)P(AB).$$

За умовою події A, B і C є незалежними в сукупності, тому

$$P(AC)P(BC) = P(A)P(C)P(B)P(C) = P(A)P(B)P(C)^2,$$

$$P(BC)P(AB) = P(B)P(C)P(A)P(B) = P(A)P(B)^2 P(C),$$

$$P(AC)P(AB) = P(A)P(C)P(A)P(B) = P(A)^2 P(B)P(C).$$

Але, оскільки

$$P(AC\cap BC)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C);$$

$$P(BC\cap AB)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C);$$

$$P(AC\cap AB)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

отримаємо, що

$$P(A)^2=P(A),\qquad P(B)^2=P(B),\qquad P(C)^2=P(C).$$

Це неможливо, оскільки, за умовою ці ймовірності відмінні від нуля та одиниці. Тому події AB, AC і BC є попарно залежними. ◄

Приклад 1.56. Два стрільці незалежно один від одного стріляють в одну мішень. Імовірність влучення одного з них дорівнює $P(A_1)=0,9$, а іншого – $P(A_2)=0,8$. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у мішень.

► Нехай подія A полягає в тому, що хоча б один стрілець влучить у мішень. Оскільки події A_1 і A_2 незалежні, то, використовуючи формулу

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2),$$

отримаємо:

$$P(A)=0,9+0,8-0,9\cdot 0,8=0,98. \text{ ◄}$$

Приклад 1.57. Нехай події A, B і C попарно незалежні , крім того кожна з них має ймовірність, відмінну від 0 та 1. Чи можуть події AB, AC і BC бути незалежними в сукупності?

► Незалежність у сукупності означає, що, по-перше,

$$P(ABC)=P(AB\cdot BC)=P(AB)P(BC)=P(A)P(B)^2P(C),$$

і по-друге,

$$P(ABC)=P(AB\cap BC\cap AC)=P(AB)P(BC)P(AC)=P(A)^2P(B)^2P(C)^2.$$

Звідки отримаємо, що

$$P(A)P(B)^2P(C)=P(A)^2P(B)^2P(C)^2.$$

Але це неможливо, оскільки ймовірності подій A, B і C за умовою відмінні від 0 і 1. Таким чином, події AB, AC і BC не можуть бути незалежними в сукупності. ◄

Приклад 1.58. ***Приклад Бернштейна.*** На площину кидається тетраедр, три грані якого пофарбовані, відповідно, в синій, червоний і зелений кольори, а на четверту нанесені всі три кольори. Подія $Ч$ означає, що випала грань, на якій є червоний колір, C – синій і $З$ – зелений. Довести, що події $Ч$, C і $З$ попарно незалежні, але залежні в сукупності.

► Позначимо $n_Ч = 2$ – кількість граней, на яких є червоний колір, $n_C = 2$ – кількість граней, на яких є синій колір, $n_З = 2$ – кількість граней, на яких є зелений колір.

Розглянемо ймовірності подій $Ч$, C і $З$:

$$P(Ч) = P(C) = P(З) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, $n_{ЧЗ} = 1$ – кількість граней, на яких є червоний і зелений кольори, $n_{ЧC} = 1$ – кількість граней, на яких є червоний і синій кольори, $n_{CЗ} = 1$ – кількість граней, на яких є синій і зелений кольори. Тоді

$$P(C)P(З) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(CЗ),$$

$$P(Ч)P(З) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(ЧЗ),$$

$$P(Ч)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(ЧC).$$

Це свідчить про те, що події $Ч$, C і $З$ є попарно незалежними.

Розглянемо тепер імовірність $P(ЧCЗ)$. Оскільки $n_{KCЗ} = 1$ (кількість граней, які містять червоний, синій і зелений кольори), то

$$P(ЧCЗ) = \frac{n_{ЧCЗ}}{n} = \frac{1}{4}.$$

Якщо події $Ч$, C і $З$ незалежні в сукупності, то

$$P(ЧCЗ) = P(Ч)P(C)P(З).$$

Але $P(Ч)P(С)P(З)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, а $P(ЧСЗ)=\frac{1}{4}$. Отже, $P(ЧСЗ)\neq P(Ч)P(С)P(З)$, а це означає, що події $Ч$, $С$ і $З$ є залежними в сукупності. ◄

1.5.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.38. Кожна літера слова «ВЕРОЯТНОСТЬ» написана на окремій картці. Картки ретельно перемішуються і послідовно виймаються шість з них. Яка ймовірність отримати слово «ЯРОСТЬ»?

Відповідь: $\frac{1}{83160}$.

Задача 1.39. З урни, що містить M білих і $N-M$ чорних куль, виймають без повернення три кулі. Знайти ймовірність того, що кулі витягнуть у такій послідовності: біла, чорна, біла.

Відповідь: $\frac{M}{N}\cdot\frac{N-M}{N-1}\cdot\frac{M-1}{N-2}$.

Задача 1.40. У цеху працюють сім чоловіків і три жінки. За табельними номерами навмання відібрані три людини. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи виявляться чоловіками.

Відповідь: $\frac{7}{24}$.

Задача 1.41. Студент знає 20 з 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на запропоновані йому на іспиті три запитання.

Відповідь: $\frac{57}{115}$.

Задача 1.42. Серед квитків грошово-речової лотереї половина виграшних. Скільки лотерейних квитків потрібно купити, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,999, виграти хоча б по одному квитку?

Відповідь: $n\geq 10$.

Задача 1.43. Імовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить у мішень, дорівнює 0,4. Скільки пострілів має зробити стрілець, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,9, він влучив у мішень хоча б один раз?

Відповідь: $n\geq 5$.

Задача 1.44. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 спочатку навмання вибирається одна, а потім з чотирьох, що залишилися, – інша. Знайти ймовірність того, що буде вибрана непарна цифра: а) вперше; б) вдруге; в) обидва рази.

Відповідь: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{10}$.

Задача 1.45. Доведіть, що з незалежності подій A і B випливає незалежність подій A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B.

Задача 1.46. Для руйнування моста достатньо влучення однієї авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйнований, якщо на нього скинуті чотири бомби, імовірність влучення яких відповідно 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

Відповідь: 0,9496.

Задача 1.47. Імовірність хоча б одного влучення в мішень за чотири постріли дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення в мішень за один постріл.

Відповідь: 0,8.

Задача 1.48. При одному циклі огляду радіолокаційної станції, що стежить за космічним об'єктом, об'єкт розпізнається з імовірністю p. Розпізнавання об'єкта в кожному циклі відбувається незалежно від інших. Знайдіть імовірність того, що за n циклів об'єкт буде розпізнаний.

Відповідь: $1-(1-p)^n$.

1.6 Послідовність незалежних випробувань

1.6.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.59. Нехай з генеральної сукупності, яка складається з двох елементів $\{0,1\}$, проводять вибірку з поверненням об'єму r. Нехай p – число з інтервалу $[0,1]$. На множині Ω всіх вибірок (їх кількість дорівнює 2^r) визначимо невід'ємну функцію P у такий спосіб: якщо у вибірці міститься саме k одиниць, то

$$P(\omega)=p^k(1-p)^{r-k}.$$

Довести, що $P(\Omega)=1$, і знайти ймовірність $P(k,r)$ того, що у взятій навмання вибірці міститься саме k одиниць.

► Зрозуміло, що k одиниць на r місцях можна розташувати $C_r^k=\frac{r!}{k!(r-k)!}$ способами. Отже, вибірок, що містять саме k одиниць буде стільки ж, а ймовірність того, що у вибірці міститься саме k одиниць (позначимо цю подію A_k) дорівнює:

$$P(A_k) = P(k,r) = C_r^k p^k (1-p)^{r-k}.$$

Ці випробування проведені за схемою Бернуллі з імовірністю $P(\omega)$, визначеною як $p^k(1-p)^{r-k}$, де k – кількість успіхів у r випробуваннях.

Випробування у схемі Бернуллі незалежні. Оскільки $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, тоді

$$P(\Omega) = \sum_{r=1}^{n} C_r^k p^k (1-p)^{r-k} = \left(p + (1-p)\right)^r = 1.$$

Під час виведення останньої рівності використовується формула бінома Ньютона. Твердження доведене. ◄

Приклад 1.60. Оцінити ймовірність $Q(k,r) = \sum\limits_{j=0}^{k} P(j,k)$ того, що кількість успіхів у схемі Бернуллі не перевищує k.

► Запишемо формулу так:

$$Q(k,r) = P(k,r) + P(k-1,r) + P(k-2,r) + \ldots + P(0,r) =$$

$$= P(k,r)\left(1 + \frac{1}{R(k,r)} + \frac{1}{R(k,r)R(k-1,r)} + \ldots + \frac{1}{R(k,r)\cdot\ldots\cdot R(0,r)}\right),$$

де $R(k,r) = \dfrac{P(k,r)}{P(k-1,r)}$. При $k < p(r+1)$:

$$Q(k,r) \le P(k,r)\frac{R(k,r)}{R(k,r)-1} = P(k,r)\frac{(r+1-k)p}{(r+1)p-k}.$$

Ця оцінка буде досить точною, якщо числа k і r великі, а відношення $\dfrac{k}{pr}$ не дуже близьке до одиниці. Дійсно, у цьому випадку сума

$$1 + \frac{1}{R(k,r)} + \frac{1}{R(k,r)R(k-1,r)} + \ldots$$

мало відрізнятиметься від суми геометричної прогресії

$$\sum_{j=0}^{\infty} R^{-j}(k,r) = \frac{1}{1-R^{-1}(k,r)} = \frac{R(k,r)}{R(k,r)-1}$$

і буде справедливою наближена рівність

$$Q(k,r) = P(k,r)\frac{(r+1-k)p}{(r+1)p-k}. ◄$$

Приклад 1.61. Відрізок довжиною $a_1 + a_2$ розділений на дві частини a_1 і a_2 відповідно, n точок послідовно кидаються навмання на відрізок. Знайти ймовірність того, що саме m із n точок потраплять на частину відрізка довжиною a_1.

► Подія A полягає в тому, що саме m із n точок потраплять на частину відрізка довжиною a_1. Простором елементарних наслідків є відрізок $a_1 + a_2$.

Нехай подія A_1 – точка потрапила на частину відрізка довжиною a_1, а подія A_2 – на частину відрізка довжиною a_2. Тоді

$$P(A_1) = \frac{a_1}{(a_1 + a_2)}, \qquad P(A_2) = \frac{a_2}{(a_1 + a_2)}.$$

За формулою Бернуллі отримаємо

$$P(A) = C_n^m \left(P(A_1)\right)^m \left(P(A_2)\right)^{n-m}. ◄$$

Приклад 1.62. Проведені 20 незалежних випробувань, кожне з яких полягає в одночасному підкиданні трьох монет. Знайти ймовірність того, що:

а) в одному випробуванні з'являться три решітки;

б) хоча б в одному випробуванні з'являться три решітки.

► Ймовірність появи трьох решіток в окремому випробуванні

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

а) Ймовірність появи трьох решіток у серії з 20 випробувань дорівнює

$$P(1, 20) = C_{20}^1 p^1 (1-p)^{19} \approx 0{,}198.$$

б) Ймовірність того, що в окремому випробуванні не з'являться три решітки, дорівнює

$$q = 1 - p = \frac{7}{8}.$$

Отже, ймовірність того, що в жодному з 20 випробувань не випаде три решітки одночасно, дорівнює $P(0, 20) = \left(\frac{7}{8}\right)^{20}$.

Звідси ймовірність того, що хоча б в одному випробуванні з'являться три решітки, дорівнює

$$P(k \geq 1) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{20} \approx 0{,}931. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.63. При передачі радіограми ймовірність викривлення одного знака $p = \frac{1}{10}$. Яка ймовірність того, що радіограма з 20 знаків:

а) не буде викривлена;
б) містить саме три викривлення;
в) містить не більше трьох викривлень.

► а) Імовірність того, що радіограма не буде викривлена, дорівнює

$$P(0, 20) = (1 - p)^{20} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \approx 0{,}1216.$$

б) Імовірність того, що радіограма містить саме три викривлення, дорівнює

$$P(3, 20) = C_{20}^{3} p^{3} (1 - p)^{17} \approx 0{,}19.$$

в) Імовірність того, що радіограма містить не більше трьох викривлень, дорівнює

$$P(0 \leq k \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} C_{20}^{k} p^{k} (1 - p)^{20-k} = C_{20}^{0} p^{0} (1 - p)^{20} + C_{20}^{1} p^{1} (1 - p)^{19} +$$

$$+ C_{20}^{2} p^{2} (1 - p)^{18} + C_{20}^{3} p^{3} (1 - p)^{17} \approx 0{,}867. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.64. Знайти ймовірність того, що у $2n$ випробуваннях за схемою Бернуллі з імовірністю успіху p з'явиться $m + n$ успіхів і всі випробування з парними номерами завершаться успіхом.

► Знайдемо ймовірність того, що у n випробуваннях (парних) буде n успіхів. Ця ймовірність дорівнює p^n. Тепер знайдемо ймовірність того, що в непарних n випробуваннях, що залишилися, буде m успіхів. Вона дорівнює

$$P(m,n)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Звідси ймовірність того, що в $2n$ випробуваннях з'явиться $m=n$ успіхів і всі випробування з парними номерами закінчаться успіхом, дорівнює добутку

$$p^n \cdot C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^m p^{m+n} q^{n-m}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.65. Каналом зв'язку передається повідомлення з нулів й одиниць. Через перешкоди ймовірність правильної передачі одного знака дорівнює 0,55. Для підвищення ймовірності правильної передачі кожен знак повідомлення повторюють n разів. Вважають, що послідовності з n прийнятих знаків відповідає знак, що складає в ній більшість. Знайти ймовірність правильної передачі одного знака при n-кратному повторенні, якщо $n=5$.

► Імовірність правильної передачі знака дорівнює сумі ймовірностей $P_3+P_4+P_5$, де P_i – імовірність того, що з п'яти повторів i $(i=3,4,5)$ разів буде прийнятий правильний сигнал. Тоді

$$P_5=p^5; \quad P_4=C_5^1 p^4(1-p); \quad P_3=C_5^2 p^3(1-p)^2; \quad p=0{,}55.$$

Звідси

$$P=0{,}55^5+C_5^1(0{,}55)^4\cdot 0{,}45+C_5^2(0{,}55)^3\cdot(0{,}45)^2\approx 0{,}593. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.66. Каналом зв'язку передається 1000 знаків. Кожен знак може бути викривлений незалежно від інших з імовірністю $p=0{,}005$.

Знайти ймовірність того, що викривленими будуть не більше трьох знаків.

► Нехай P_i – імовірність того, що викривлені i знаків. Тоді

$$P_i=C_{1000}^i p^i (1-p)^{1000-i}.$$

Імовірність того, що викривленими є не більше трьох знаків, дорівнює

$$P=\sum_{i=0}^{3} P_i=\sum_{i=0}^{3} C_{1000}^i p^i (1-p)^{1000-i}\approx 0{,}2643.$$

Розв'яжемо цю задачу, використовуючи теорему Пуассона, вважаючи, що шукана ймовірність P дорівнює сумі ймовірностей P_k $(k=1,2,3)$, де P_k –

імовірність того, що викривленими є саме k знаків. Відомо, що $p=0{,}005$, $n=1000$. Тоді $\lambda=np=5$ і

$$P=\sum_{k=0}^{3}P_i=\sum_{k=0}^{3}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\approx 0{,}265. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.67. У таблиці випадкових чисел цифри згруповані попарно. Знайти наближене значення ймовірності того, що серед 100 пар пара 09 зустрінеться не менше двох разів.

► Імовірність p того, що окремо вибрана пара випадкових чисел буде 09, дорівнює $0{,}1^2=0{,}01$. Імовірність того, що в таблиці випадкових чисел, у якій числа згруповані по два (всього 100 пар), пара 09 зустрінеться n разів ($n\le 100$) дорівнює

$$P(n,100)=C_{100}^{n}p^n(1-p)^{100-n}.$$

Позначимо $q=1-p$. Тоді ймовірність того, що серед 100 пар чисел пара 09 зустрінеться не менше двох разів, дорівнює

$$P(2\le n\le 100)=\sum_{n=2}^{100}C_{100}^{n}p^nq^{100-n}=1-C_{100}^{0}p^0q^{100}-C_{100}^{1}p^1q^{99}=0{,}264. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.68. У ящику є 6 карток, позначених номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Зроблено 8 випробувань, які полягають в тому, що картку виймають, фіксують номер і повертають назад. Знайти ймовірність того, що картку з номером 3 виймуть 5 разів.

► Необхідну ймовірність шукатимемо за формулою $P(m,n)=C_n^m p^m q^{n-m}$, де $n=8, m=5$. Імовірність появи картки з номером 3 в окремому випробуванні дорівнює $\frac{1}{6}$, ймовірність появи будь-якої іншої картки дорівнює $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Тоді

$$P(5,8)=C_8^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^3\approx 0{,}0042. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.69. При проході одного порога байдарка не отримує ушкоджень з імовірністю p_1, повністю ламається з імовірністю p_2, отримує серйозні ушкодження з імовірністю p_3 ($p_1+p_2+p_3=1$). Два серйозних ушкодження приводять до повної поломки. Знайти ймовірність того, що при проході n порогів байдарка не буде повністю зламана.

► Імовірність того, що після проходу n порогів байдарка не буде повністю зламана, дорівнює сумі ймовірностей того, що байдарка або взагалі не отримає ушкоджень

$$P_0 = p_1^n,$$

або отримає одне серйозне ушкодження

$$P_1 = C_n^1 p_3 p_1^{n-1} = np_3 p_1^{n-1}.$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P = p_1^n + np_3 p_1^{n-1}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.70. На одній сторінці 2400 знаків. Під час набору тексту ймовірність викривлення одного знака дорівнює $\frac{1}{800}$. Знайти наближене значення ймовірності того, що на сторінці не менше двох помилок.

► Імовірність того, що на сторінці не менше двох помилок, дорівнює $1 - P_0 - P_1$, де P_0 і P_1 – ймовірності того, що на сторінці не буде жодної помилки або буде одна помилка відповідно. Знайдемо ймовірності P_0 й P_1, використовуючи формулу Бернуллі:

$$P_0 = \left(1 - \frac{1}{800}\right)^{2400} \approx 0,0497,$$

$$P_1 = C_{2400}^1 \frac{1}{800}\left(1 - \frac{1}{800}\right)^{2399} \approx 0,1493.$$

Тоді $P = 1 - P_0 - P_1 \approx 0,8$.

Розв'яжемо цю задачу, використовуючи теорему Пуассона. Оскільки $p = \frac{1}{800}$, $n = 2400$, то $\lambda = np = 3$ і

$$P = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{3^0}{0!}e^{-3} + \frac{3^1}{1!}e^{-3} \approx 0,801. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.71. Монета підкидається 10 разів. Знайти ймовірності того, що
а) герб випаде саме тричі;
б) герб випаде більше семи разів;
в) герб випаде хоча б один раз.

► Очевидно, що випробування проводяться за схемою Бернуллі, де

$p = q = \frac{1}{2}$.

а) За формулою Бернуллі, при $n = 10$, $k = 3$ отримаємо

$$P(3,10) = C_{10}^{3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^{10-3}} = \frac{120}{2^{10}} \approx 0{,}1172.$$

б) Цю ймовірність можна знайти за формулою:

$$P(k > 7) = P(8,10) + P(9,10) + P(10,10) = C_{10}^{8} \frac{1}{2^{10}} + C_{10}^{9} \frac{1}{2^{10}} + C_{10}^{10} \frac{1}{2^{10}} =$$

$$= \frac{1}{2^{10}} \left(C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10} \right) = \frac{45 + 10 + 1}{2^{10}} \approx 0{,}0547.$$

в) Імовірність даної події дорівнює

$$P(k \geq 1) = 1 - \frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}999. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.72. Два рівносильних шахісти грають у шахи. Що ймовірніше: виграти дві партії з чотирьох або три партії з шести (нічийний результат неможливий)?

► Оскільки грають два рівносильних шахісти, то ймовірність виграшу $p = \frac{1}{2}$, а ймовірність програшу $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. За формулою Бернуллі, ймовірність виграти дві партії з чотирьох

$$P(2,4) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{6}{2^4} = \frac{6}{16},$$

а ймовірність виграти три партії з шести

$$P(3,6) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}.$$

Отже, $P(2,4) > P(3,6)$, тобто ймовірніше виграти дві партії з чотирьох, ніж три партії з шести. ◄

Приклад 1.73. В середньому 20% пакетів акцій на біржі продаються за початково заявленою ціною. За деякий проміжок часу внаслідок торгів було продано дев’ять пакетів. Знайти такі ймовірності:

а) за початково заявленою ціною не продадуть п’ять пакетів;

б) за початково заявленою ціною продадуть менше двох пакетів;

в) за початково заявленою ціною продадуть не більше двох пакетів;

г) за початково заявленою ціною продадуть хоча б два пакети.

Знайти найімовірнішу кількість пакетів, проданих за початково заявленою ціною.

► а) Імовірність того, що пакет акцій продадуть за початково заявленою ціною $p=0,2$. Тоді ймовірність того, що за початково заявленою ціною не продадуть п'ять пакетів, є ймовірність того, що за початково заявленою ціною продадуть $9-5=4$ пакети. Ця ймовірність за формулою Бернуллі дорівнює

$$P(4,9)=C_9^4\cdot 0,2^4\cdot 0,8^5\approx 0,06606.$$

б) Імовірність того, що продадуть менше двох пакетів

$$P(k<2)=P(0,9)+P(1,9)=C_9^0\cdot 0,2^0\cdot 0,8^9+C_9^1\cdot 0,2^1\cdot 0,8^8\approx 0,43621.$$

в) Імовірність того, що продадуть не більше двох пакетів

$$P(k\le 2)=P(0,9)+P(1,9)+P(2,9)=P(k<2)+C_9^2\cdot 0,2^2\cdot 0,8^7\approx 0,73820.$$

г) Імовірність того, що продадуть хоча б два пакети, зручно обчислити, перейшовши до протилежної події:

$$P(k\ge 2)=1-P(k<2)\approx 0,56379.$$

Найімовірнішу кількість пакетів, проданих за початково заявленою ціною, знайдемо з нерівності:

$$9\cdot 0,2-0,8\le k_0\le 9\cdot 0,2+0,2,$$

$$1\le k_0\le 2,$$

тобто найімовірніших значень два $k_0=1$ і $k_0'=2$, при цьому

$$P_{\text{найб}}=P(1,9)=P(2,9)\approx 0,30199.$$ ◄

Приклад 1.74. Скільки разів необхідно підкинути гральний кубик, щоб найімовірнішим числом появ шістки було 10?

► У цьому випадку $p=\dfrac{1}{6},\ q=\dfrac{5}{6}$. Тоді

$$\frac{n}{6}-\frac{5}{6}\le 10\le \frac{n}{6}+\frac{1}{6},$$

звідки $n-5\le 60\le n+1,\ 59\le n\le 65$, тобто кубик необхідно підкинути не менше 59 разів і достатньо підкинути не більше 65 разів. ◄

Приклад 1.75. Імовірність появи браку на деякому підприємстві дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 навмання взятих виробів виявиться 40 бракованих?

► Отже, потрібно обчислити $P(40,10000)$ при $p=0,005$ ($q=1-p=0,995$). Скористаємося теоремою Муавра-Лапласа. Тоді

$$P(40,10000)\approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислимо

$$x=\frac{40-10000\cdot 0,005}{\sqrt{10000\cdot 0,005\cdot 0,995}}\approx -1,42,\quad \sqrt{npq}=\sqrt{10000\cdot 0,005\cdot 0,995}=\sqrt{49,75}\approx 7,05.$$

Тоді

$$P(40,10000)\approx \frac{\varphi(-1,42)}{7,05}\approx \frac{0,14556}{7,05}\approx 0,02065. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.76. Знайти ймовірність того, що при 1000 підкиданнях правильного кубика випаде від 160 до 200 шісток.

► Імовірність випадіння шістки (імовірність успіху) $p=\frac{1}{6}$, а ймовірність поразки $q=1-p=\frac{5}{6}$; загалом проведено $n=1000$ випробувань. Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа. Для цього обчислимо

$$x_1=\frac{160-1000\cdot {}^1\!/\!_6}{\sqrt{1000\cdot {}^1\!/\!_6\cdot {}^5\!/\!_6}}\approx -0,57;\qquad x_2=\frac{200-1000\cdot {}^1\!/\!_6}{\sqrt{1000\cdot {}^1\!/\!_6\cdot {}^5\!/\!_6}}\approx 2,83.$$

Тоді

$$P(160 \le k \le 200) \approx \Phi_0(2{,}83) - \Phi_0(-0{,}57) = \Phi_0(2{,}83) + \Phi_0(0{,}57) \approx$$

$$\approx 0{,}49767 + 0{,}21566 = 0{,}71333. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.77. Деякий військовий підрозділ проводить обстріл літака з піхотної зброї. Кулею літак може бути підбитий лише при влученні в певні вразливі місця – мотор, льотчик, бензобаки тощо. Імовірність влучення в ці вразливі місця окремим пострілом дорівнює 0,001. Знайти ймовірність влучення в ціль двома і більше пострілами, якщо зроблено 5000 пострілів.

► Для обчислення шуканої ймовірності $P(k \ge 2)$ скористаємося формулою Пуассона. В даній задачі $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$. Тоді

$$P(k \ge 2) = \sum_{k=2}^{5000} P(k, 5000) = 1 - P(0, 5000) - P(1, 5000) \approx$$

$$= 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0{,}9596. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.78. Імовірність народження хлопчика дорівнює приблизно $0{,}515$. Яка ймовірність того, що серед 10000 немовлят:

а) кількість хлопчиків становить 5200;

б) кількість хлопчиків не більше кількості дівчаток?

► Ми маємо справу зі схемою Бернуллі при $n = 10000$ з імовірністю успіху $p = 0{,}515$. Оскільки $np = 5150$, то скористаємося теоремами Муавра-Лапласа.

а) Застосовуючи локальну теорему Муавра-Лапласа, для ймовірності того, що серед 10000 немовлят хлопчиків буде саме $k = 5200$, отримаємо

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}5150 \cdot 0{,}4850} \approx 49{,}98, \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5200 - 5150}{49{,}98} \approx 1{,}00,$$

$$P(5200, 10000) \approx \frac{\varphi(1{,}00)}{49{,}98} \approx \frac{0{,}24197}{49{,}98} \approx 0{,}00484.$$

б) Нехай k – кількість хлопчиків серед 10000 немовлят. Слід обчислити ймовірність

$$P(k \le 10000 - k) = P(k \le 5000).$$

Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа при $x_1 = -\infty$, $x_2 = \dfrac{5000 - 5150}{49{,}98} \approx -3{,}001$:

$$P(k \le 5000) = \Phi_0(-3{,}001) - \Phi_0(-\infty) = -\Phi_0(3{,}001) + 0{,}5 \approx$$

$$\approx 0{,}5 - 0{,}49865 = 0{,}00135 .\ ◄$$

1.6.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.49. Що ймовірніше виграти в рівносильного супротивника:
а) три партії з чотирьох чи п'ять із восьми;
б) не менше трьох партій з чотирьох чи не менше п'яти партій з восьми?
Відповідь: а) три партії з чотирьох; б) не менше п'яти партій з восьми.

Задача 1.50. Відрізок AB розділений точкою C у співвідношенні $2:1$. На цей відрізок навмання кинули чотири точки. Знайти ймовірність того, що в кожний з відрізків AC і CB потрапило по дві точки.

Відповідь: $\frac{8}{27}$.

Задача 1.51. Імовірність того, що пасажир спізниться на потяг, дорівнює $0{,}01$. Знайти найбільш імовірну кількість людей, що спізнилися, якщо на потяг продали 800 квитків.
Відповідь: 8.

Задача 1.52. Імовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює $0{,}7$. Знайти кількість випробувань n, при якій найімовірніша кількість появ цієї події дорівнює 20.
Відповідь: $28 \le n \le 29$.

Задача 1.53. Чому дорівнює ймовірність p появи події в кожному з 39 незалежних випробувань, якщо найімовірніша кількість появ цієї події дорівнює 25?
Відповідь: $0{,}625 \le p \le 0{,}65$.

Задача 1.54. В урні є 3 білих і 4 чорних кулі. З урни навмання виймаються 3 кулі. Яка ймовірність, що дві з них будуть чорними, а одна – білою?
Відповідь: 0,51.

Задача 1.55. Нехай імовірність влучення в ціль при бомбометанні з літака є 0,35. І нехай незалежно кидаються 10 бомб. Яка ймовірність, що в ціль влучать саме 3 (найімовірніша кількість) бомби?
Відповідь: 0,26.

Задача 1.56. Велика партія виробів містить 1% браку. Яким має бути об'єм n випадкової і незалежної контрольної вибірки, щоб імовірність виявити в ній хоча б один бракований виріб була як мінімум 0,95?

Відповідь: більше 299.

Задача 1.57. Вироби деякого виробництва містять 10% браку. Яка ймовірність, що серед трьох навмання взятих виробів один виявиться бракованим?

Відповідь: 0,243.

Задача 1.58. Солдат отримує залік зі стрільби за умови, що протягом відведеного часу він влучить не менше, ніж у три мішені з п'яти. У кожну мішень незалежно від інших солдат може влучити з імовірністю $2/3$. Яка ймовірність, що він складе залік?

Відповідь: 0,79.

Задача 1.59. Монета підкидається 6 разів. Яка ймовірність, що випаде більше гербів, ніж решок?

Відповідь: $11/32$.

1.7 Ігрові задачі теорії ймовірностей

Приклад 1.79. ***Задача про зіпсований телефон.*** У грі бере участь ланцюжок із чотирьох осіб *а*, *б*, *в*, *г*. Перша (*а*) отримує інформацію, яку у вигляді повідомлення «так» або «ні» передає другій (*б*), друга – третій (*в*), третя – четвертій (*г*), а остання повідомляє результат так, як і всі інші. Відомо, що кожна з них передає правильно інформацію тільки в одному з трьох випадків. Яка ймовірність, що перша особа передала правильне повідомлення, якщо четверта повідомила правильну інформацію?

► Введемо такі події: A – перша особа передала правильну інформацію, B – четверта повідомила правильну інформацію. Шукану ймовірність знайдемо за формулою

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\right)P\left(B|A\right)}{P\left(B\right)}.$$

Нехай p_k – імовірність того, що (з урахуванням подвійних перекручень) k -а особа передала правильне повідомлення. Тоді

$$p_1 = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \frac{5}{9}, \qquad p_3 = \frac{13}{27}, \qquad p_4 = \frac{41}{81}.$$

Отже, $P(A) = p_1$, $P(B|A) = p_3$, $P(B) = p_4$. Тоді

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{13}{27}}{\frac{41}{81}} = \frac{13}{41}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.80. Двоє грають до перемоги, крім того, для цього першому необхідно виграти m партій, а другому – n партій. Імовірність виграшу кожної партії першим дорівнює p, а другим – $q = 1 - p$. Визначити ймовірність виграшу всієї гри першим гравцем.

► Перший гравець виграє в таких n випадках:

1) з m партій він не програє жодної;

2) з m партій програє одну, але $(m+1)$-у партію виграє;

3) з $m+1$ партій програє дві, але $(m+2)$-у партію виграє і так далі;

n) з $m+n-2$ партій програє $n-1$, а потім $(m+n-1)$-у партію виграє.

Імовірність першого випадку дорівнює p^m; другого – $C_m^1 q p^m$; третього – $C_{m+1}^2 q^2 p^m$; і так далі; n-го – $C_{m+n-2}^{n-1} q^{n-1} p^m$. Тоді шукана ймовірність дорівнює

$$p^m + C_m^1 q p^m + C_{m+1}^2 q^2 p^m + \ldots + C_{m+n-2}^{n-1} q^{n-1} p^m. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.81. ***Задача про банкрутство гравця: чесна гра.*** Гравець грає в орлянку проти банку з необмеженим капіталом. Гравець загадує герб або решку, після чого підкидається монета. Якщо гравець вгадав, то він отримує один долар, якщо ні, то він програє його. Нехай початковий капітал гравця становить – x доларів і гравець має на меті довести свій капітал до a доларів. Гра закінчується, якщо у гравця виявиться a доларів або якщо він збанкрутує. Знайти ймовірність банкрутства гравця. Під чесною грою розуміють: монета правильна і випадіння кожної з її сторін є рівноможливим.

► Позначимо ймовірність того, що гравець збанкрутує (при початковому капіталі x доларів), через $q(x)$. Гра закінчується, якщо гравець збанкрутів (у нього 0 доларів) або коли в нього виявиться a доларів. Імовірності банкрутства за цих крайніх умов дорівнюють відповідно:

$$q(0) = 1; \qquad q(a) = 0.$$

Нехай подія A полягає в тому, що гравець має x доларів і він збанкрутує.

Гіпотеза H_1 полягає в тому, що гравець на першому кроці програв; гіпотеза H_2 полягає в тому, що гравець на першому кроці виграв. Тоді

$$P\left(A|H_1\right)=q\left(x-1\right);$$

$$P\left(A|H_2\right)=q\left(x+1\right),$$

де $P\left(A|H_i\right)$ $i=1,2$ – імовірність події A за умови H_i.

Оскільки гіпотези H_1 і H_2 є рівноймовірними й утворюють повну групу подій, то

$$P\left(H_1\right)=P\left(H_2\right)=\frac{1}{2}.$$

За формулою повної ймовірності запишемо:

$$q\left(x\right)=\frac{1}{2}q\left(x-1\right)+\frac{1}{2}q\left(x+1\right).$$

Звідки

$$q\left(x+1\right)=2q\left(x\right)-q\left(x-1\right)$$

Позначимо $q\left(1\right)=y$. Тоді

$$q\left(2\right)=2y-1,$$

$$q\left(3\right)=2\left(2y-1\right)-y=3y-2,$$

$$q\left(4\right)=4y-3.$$

Перевіримо, що

$$q\left(x\right)=xy-x+1=x\left(y-1\right)+1.$$

Доведемо цю рівність методом математичної індукції.

1) При $x=1$ вона має місце.

2) Припустимо, що вона виконується для $x=m$:

$$q\left(m\right)=m\left(y-1\right)+1.$$

Тоді вона має виконуватися при $x = m+1$. Дійсно,

$$q(m+1) = 2q(m) - q(m-1) = 2m(y-1) + 2 - (m-1)(y-1) + 1 =$$

$$= (y-1)(2m - m + 1) + 1 = (m+1)(y-1) + 1.$$

Тобто

$$q(m+1) = (m+1)(y-1) + 1,$$

що і необхідно було довести.

Отже, $q(x) = x(y-1) + 1$. Запишемо доведену рівність при $x = a$ обчислимо y:

$$q(a) = a(y-1) + 1; \qquad a(y-1) = -1; \qquad 1 - y = \frac{1}{a}; \qquad y = 1 - \frac{1}{a}.$$

Отже, підставивши у формулу значення y, отримаємо ймовірність банкрутства гравця:

$$q(x) = x\left(1 - \frac{1}{a} - 1\right) + 1 = 1 - \frac{x}{a}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.82. ***Продовження.*** У попередній задачі знайти ймовірність виграшу.

► Позначимо ймовірність того, що гравець виграє (при початковому капіталі x доларів) через $p(x)$. Гра закінчується, якщо гравець збанкрутів (у нього 0 доларів) або коли в нього виявиться a доларів. Імовірності виграшу за цих крайніх умов дорівнюють відповідно:

$$p(0) = 0, \qquad p(a) = 1.$$

Нехай подія A полягає в тому, що у гравця x доларів і він виграв. Гіпотеза H_1 полягає в тому, що гравець на першому кроці програв. Гіпотеза H_2 полягає в тому, що гравець на першому кроці виграв.

Тоді

$$P(A|H_1) = p(x-1),$$

$$P\left(A\middle|H_2\right)=p\left(x+1\right),$$

де $P\left(A\middle|H_i\right)$ ($i=1,2$) – імовірність події A за умови H_i.

Оскільки гіпотези H_1 і H_2 рівноймовірні, то

$$P\left(H_1\right)=P\left(H_2\right)=\frac{1}{2}.$$

За формулою повної ймовірності запишемо:

$$p\left(x\right)=\frac{1}{2}p\left(x-1\right)+\frac{1}{2}p\left(x+1\right).$$

Звідки

$$p\left(x+1\right)=2p\left(x\right)-p\left(x-1\right).$$

Позначимо $p\left(1\right)=y$, тоді

$$p\left(2\right)=2y,\qquad p\left(3\right)=3y.$$

Перевіримо, що

$$p\left(x\right)=xy.$$

Ця перевірка може бути виконана методом математичної індукції (див. приклад 1.81).

Запишемо цю рівність при $x=a$ й обчислимо y:

$$p\left(a\right)=ay,\qquad ay=1,\qquad y=\frac{1}{a}.$$

Отже, підставивши у формулу значення y, отримаємо ймовірність виграшу гравця:

$$p\left(x\right)=\frac{x}{a}.$$

Як видно з даного і попереднього прикладів, $p\left(x\right)+q\left(x\right)=1$. ◄

Приклад 1.83. ***Продовження*.** Знайти середній час тривалості гри.

► Нехай $j(x)$ – час гри з початковим капіталом у x доларів (час гри вважатимемо скінченним). Запишемо формулу математичного сподівання, тобто середнього часу гри:

$$Mj(x) = \sum_k x_k p_k \ ,$$

де $x_k = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $p_k = P\{j(x) = k\}$ Тоді

$$Mj(x) = \sum_k kP\{j(x) = k\}.$$

Нехай подія A полягає в тому, що $j(x) = k$, тобто гра тривала саме k кроків. Гіпотеза H_1 полягає в тому, що гравець на першому кроці виграв. Гіпотеза H_2 полягає в тому, що гравець на першому кроці програв. Тоді

$$P(A|H_1) = P\{j(x+1) = k-1\},$$

$$P(A|H_2) = P\{j(x-1) = k-1\},$$

де $P(A|H_i)$ $i = 1,2$ – імовірність події A за умови H_i.
Оскільки гіпотези H_1 і H_2 рівноймовірні, то

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P\{j(x) = k\} = \frac{1}{2}P\{j(x+1) = k-1\} + \frac{1}{2}P\{j(x-1) = k-1\}.$$

Отже,

$$Mj(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{1}{2}k\left(P\{j(x-1) = k-1\} + P\{j(x+1) = k-1\}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{x}(k-1)\left(P\{j(x-1) = k-1\} + P\{j(x+1) = k-1\}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{x}\left(P\left\{j(x-1)=k-1\right\}+P\left\{j(x+1)=k-1\right\}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{x}(k-1)P\left\{j(x-1)=k-1\right\}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{x}(k-1)P\left\{j(x+1)=k-1\right\}+1.$$

Отже, отримали, що

$$Mj(x)=\frac{1}{2}Mj(x-1)+\frac{1}{2}Mj(x+1)+1.$$

Позначимо $Mj(x)=D(x)$, тоді

$$D(x)=\frac{1}{2}D(x-1)+\frac{1}{2}D(x+1)+1.$$

Звідки

$$D(x-1)=2D(x)-D(x+1)-2.$$

Розглянемо $D(x)$ за умови, що гра закінчилася:

$$D(0)=0, \qquad D(a)=0.$$

Нехай $D(1)=y$, тоді

$$D(2)=2y-2; \qquad D(3)=3y-6.$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$D(x)=xy-x(x-1).$$

Запишемо цю рівність при $x=a$ й обчислимо y:

$$D(a)=ay-a(a-1)=0; \qquad y-a+1=0; \qquad y=a-1.$$

Підставимо значення y у формулу й отримаємо математичне сподівання часу гри:

$$D(x)=(a-1)x-x(x-1)=x(a-x). \blacktriangleleft$$

Приклад 1.84. ***Продовження.*** Припустимо, що гравець із початковим капіталом у x доларів не зупиняється на жодному виграші. Позначимо через $j(x)$ кількість кроків до банкрутства. Довести, що $P\{j(x)<\infty\}=1$ і $Mj(x)=\infty$, тобто гравець з імовірністю 1 збанкрутує, але математичне сподівання часу гри (середній час гри) дорівнює нескінченності. Гра передбачається чесною.

► Позначимо через $f(z)$ імовірність того, що гравець збанкрутує, а через $j(z)$ – час гри. Тоді

$$f(z)=P\{j(z)<\infty\}.$$

Оскільки при початковому капіталі в 0 доларів гравець збанкрутує з імовірністю 1, то $f(0)=1$.

Нехай подія A полягає в тому, що гравець на початку гри має a доларів і він збанкрутує. Гіпотеза H_1 полягає в тому, що гравець на першому кроці виграв. Гіпотеза H_2 полягає в тому, що гравець на першому кроці програв.

Тоді

$$P(A|H_1)=f(z+1),$$

$$P(A|H_2)=f(z-1),$$

де $P(A|H_i)$ ($i=1,2$) – імовірність події A за умови H_i.

Оскільки гіпотези H_1 і H_2 рівноймовірні, то

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}.$$

За формулою повної ймовірності запишемо:

$$f(z)=\frac{1}{2}f(z-1)+\frac{1}{2}f(z+1).$$

Позначимо через $\Delta(z)$збільшення ймовірності банкрутства:

$$\Delta(z)=f(z+1)-f(z).$$

Розпишемо функцію $f(z)$ в ряд:

$$f(z) = f(0) + \left(f(1) - f(0)\right) + \ldots + \left(f(z) - f(z-1)\right) = f(0) + \sum_{k=0}^{x} \Delta(k).$$

Розглянемо $\Delta(z+1) - \Delta(z)$. При $z \geq 0$

$$\Delta(z+1) - \Delta(z) = f(z+2) - f(z+1) - f(z+1) + f(z) =$$

$$= f(z+2) - 2f(z+1) + f(z) = f(z+2) - f(z+2) - f(z) + f(z) = 0.$$

Отже, $\Delta(z) = \Delta(0) = \Delta = \text{const}$.

Оскільки $0 \leq f(z) \leq 1$, то для кожного z виконується нерівність

$$0 \leq f(0) + \Delta(z) \leq 1 \qquad \text{або} \qquad -1 \leq \Delta(z) \leq 0,$$

що можливо, коли $\Delta \equiv 0$.

Тому $f(z) = f(0) = 1$. Таким чином,

$$f(z) = P\left\{ j(z) < \infty \right\} = 1,$$

тобто за умови чесної гри проти банку з необмеженим капіталом незалежно від величини початкового капіталу гравець збанкрутує з імовірністю 1.

Покажемо, що $Mj(x) = \infty$. Запишемо формулу математичного сподівання:

$$Mj(x) = \sum_{k} x_k p_k ,$$

де $x_k = k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), $p_k = P\left\{ j(x) = k \right\}$. Тоді

$$Mj(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kP\left\{ j(x) = k \right\}.$$

Припустимо протилежне, тобто що $Mj(x) < \infty$. Нехай подія A полягає в тому, що $j(z) = k$, тобто гра тривала саме k кроків. Гіпотеза H_1 полягає в тому, що гравець на першому кроці виграв. Гіпотеза H_2 полягає в тому, що гравець на першому кроці програв. Тоді

$$P\left(A\middle|H_1\right)=P\left\{j\left(x+1\right)=k-1\right\},$$
$$P\left(A\middle|H_2\right)=P\left\{j\left(x-1\right)=k-1\right\}.$$

де $P\left(A\middle|H_i\right)$ ($i=1,2$) – імовірність події A за умови H_i.
Оскільки гіпотези H_1 і H_2 рівноймовірні, то

$$P\left(H_1\right)=P\left(H_2\right)=\frac{1}{2}.$$

За формулою повної ймовірності запишемо:

$$P\left\{j\left(z\right)=k\right\}=\frac{1}{2}P\left\{j\left(z+1\right)=k-1\right\}+\frac{1}{2}P\left\{j\left(z-1\right)=k-1\right\}$$

Отже,

$$Mj\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}k\left(P\left\{j\left(x-1\right)=k-1\right\}+P\left\{j\left(x+1\right)=k-1\right\}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(k-1\right)\left(P\left\{j\left(x-1\right)=k-1\right\}+P\left\{j\left(x+1\right)=k-1\right\}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(P\left\{j\left(x-1\right)=k-1\right\}+P\left\{j\left(x+1\right)=k-1\right\}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(k-1\right)P\left\{j\left(x-1\right)=k-1\right\}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(k-1\right)P\left\{j\left(x-1\right)=k-1\right\}+1.$$

Отримали, що

$$Mj\left(x\right)=\frac{1}{2}Mj\left(x-1\right)+\frac{1}{2}Mj\left(x+1\right)+1.$$

Позначимо $Mj\left(z\right)=V\left(z\right)$. Тоді

$$V\left(z\right)=\frac{1}{2}V\left(z-1\right)+\frac{1}{2}V\left(z+1\right)+1.$$

Звідки

$$V\left(z+1\right)=2V\left(z\right)-V\left(z-1\right)-2.$$

За умови, що в початковий момент у гравця 0 доларів, $V(0)=0$. З формули видно, якщо при $z\geq 1$ $V(z)<\infty$, то $V(z+1)<\infty$. Позначимо $\Delta(z)=V(z+1)-V(z)$, тоді різницю $\Delta(z+1)-\Delta(z)$ при $z\geq 1$ можна записати у вигляді:

$$\Delta(z+1)-\Delta(z)=V(z+2)-2V(z+1)+V(z)=$$

$$V(z+2)-2\left(\frac{1}{2}V(z)+\frac{1}{2}V(z+2)+1\right)+V(z)=-2.$$

Або

$$\Delta(z+1)=\Delta(z)-2.$$

З цієї рівності знаходимо

$$V(z)=V(0)+\sum_{k=0}^{z-1}\Delta(k)=V(0)+\sum_{k=0}^{z-1}\left(\Delta(0)-2k\right)=$$

$$=V(0)+\sum_{k=0}^{z-1}\Delta(0)-2\sum_{k=0}^{z-1}k=V(0)+z\Delta(0)-z(z-1)=$$

$$=V(0)+zV(1)-z(z-1)=zV(1)-z(z-1).$$

Звідси випливає, що $Mj(z)<0$ для досить великих z, але $j(z)$ – позитивна випадкова величина і тому $Mj(z)>0$. Отримане протиріччя показує, що припущення про скінченність математичного сподівання $j(z)$ є невірним. ◄

Приклад 1.85. ***Задача про банкрутство гравця: нечесна гра.*** Нехай у задачі про банкрутство гравця ймовірність виграшу на кожному кроці дорівнює p, а ймовірність програшу – q, де $p+q=1$, $p>0$, $q>0$, $p\neq q$. Знайти ймовірність банкрутства гравця.

► Розглянемо такі події: A – гравець збанкрутів, H_1 – виграв на першому кроці, H_2 – програв на першому кроці.

Нехай $P(A)=f(x)$ – імовірність банкрутства гравця з початковим капіталом у x доларів. На підставі формули повної ймовірності

$$f(x)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)=pf(x+1)+qf(x-1).$$

Якщо гравець має 0 або a доларів, то ймовірність банкрутства дорівнюватиме відповідно

$$f(0)=1, \qquad f(a)=0.$$

Оскільки $p+q=1,$ то

$$f(x)(p+q)=pf(x+1)+qf(x-1).$$

Далі маємо

$$p\big(f(x+1)-f(x)\big)=q\big(f(x)-f(x-1)\big),$$

$$f(x+1)-f(x)=\frac{q}{p}\big(f(x)-f(x-1)\big), \qquad x=0,1,\ldots,a.$$

Нехай $f(1)=y$, тоді

$$f(x)=f(0)+f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\ldots+f(x)-f(x-1)=$$

$$=f(0)+\sum_{i=1}^{x}\big(f(i)-f(i-1)\big)=1+\sum_{i=1}^{x}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\big(f(1)-f(0)\big)\right],$$

оскільки

$$f(x+1)-f(x)=\left(\frac{q}{p}\right)^{x-1}\big(f(1)-f(0)\big), \qquad x=1,2,\ldots,a.$$

Тоді

$$f(x)=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{1-\frac{q}{p}}(y-1)+1.$$

З рівності $f(a)=0$, знайдемо y:

$$f(a)=0=1+\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\frac{q}{p}}(y-1);$$

$$y=1-\frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

Таким чином, імовірність банкрутства дорівнює:

$$f(x)=1-\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\frac{q}{p}}\cdot\frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}. \blacktriangleleft$$

Приклад 1.86. ***Продовження.*** У попередній задачі знайти ймовірність виграшу.

► Нехай дана ймовірність виграшу на кожному кроці p, а ймовірність програшу – q; $p>0$, $q>0$, $p>q$, початковий капітал гравця x доларів; гра закінчується, коли гравець має або a, або 0 доларів. Знайдемо ймовірність виграшу $G(x)$. Очевидно, що $G(0)=0$, $G(a)=1$. Розглянемо такі події: A – гравець виграє, H_1 – гравець виграє на першому кроці, H_2 – гравець програє на першому кроці. Тоді ймовірність виграшу

$$G(x)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2).$$

Використаємо рівність $p+q=1$:

$$G(x)(p+q)=G(x+1)p+G(x-1)q,$$

$$p\big(G(x+1)-G(x)\big)=q\big(G(x)-G(x-1)\big).$$

Звідки

$$G(x+1)-G(x)=\frac{q}{p}\big(G(x)-G(x-1)\big).$$

Очевидно, що

$$G(x) = G(0) + G(1) - G(0) + \ldots + G(x) - G(x-1) =$$

$$= G(0) + \sum_{i=1}^{x}\bigl(G(i) - G(i-1)\bigr) = \sum_{i=1}^{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\bigl(G(1) - G(0)\bigr).$$

Покладемо $G(1) = y$ і знайдемо суму геометричної прогресії. Тоді

$$G(x) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \cdot y .$$

Знайдемо y, підставляючи $x = a$:

$$y = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}} .$$

Тоді ймовірність виграшу:

$$G(x) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}} . \blacktriangleleft$$

Приклад 1.87. ***Задача про подвоєння ставки.*** Нехай ставка у грі з початковим капіталом у x доларів дорівнює h доларів. Покажемо, що при $p < q$ (тобто при $p < \frac{1}{2}$) при заміні h на $2h$ (тобто при подвоєнні ставки) імовірність банкрутства зменшується.

► Знайдемо ймовірність банкрутства $F(x)$. Очевидно, що $F(0) = 1$, $F(a) = 0$. Розглянемо події A – гравець програв, H_1 – гравець на першому кроці виграв, H_2 – на першому кроці програв. Тоді

$$F(x)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2);$$

$$F(x)=F(x+h)p+F(x-h)q;$$

$$F(x)(p+q)=F(x+h)p+F(x-h)q;$$

$$F(x)=F(x+h)-\frac{q}{p}\big(F(x)-F(x-h)\big).$$

Нехай $F(h)=y$. Тоді

$$F(x)=F(0)+F(h)-F(0)+...+F(x)-F(x)-F(x-h)=$$

$$=F(0)+\sum_{i=1}^{\frac{x}{h}}\big(F(ih)-F((i-1)h)\big)=1+\sum_{i=1}^{\frac{x}{h}}\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}(y-1)=1+\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{x}{h}}}{1-\frac{q}{p}}\cdot(y-1);$$

$$F(x)=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{x}{h}}-\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{a}{h}}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{a}{h}}}.$$

Відношення ймовірності банкрутства при ставці h до ймовірності банкрутства при ставці $2h$:

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{x}{2h}}+\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{a}{2h}}}{1+\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{a}{h}}}>1,$$

оскільки $p<\frac{1}{2}$ й $\frac{q}{p}>1$. Тобто при збільшенні ставки ймовірність банкрутства зменшується. ◄

Приклад 1.88. ***Задача про найкращий вибір.*** На розбірливу наречену претендує n наречених, і вона хоче зробити найкращий вибір. Умови відбору такі. Наречена нічого не знає про своїх наречених. Їй відома лише їхня кількість. Ставши випадково в чергу, наречені один за одним відрекомендовуються нареченій. Зустрічаючи чергового нареченого, наречена пам'ятає все про його попередників. Рекомендований і знехтуваний наречений більше не повертається для участі в «конкурсі». Стратегія, якою керується наречена, полягає в наступному. Вона призначає число m, що залежить від n, відкидає перших m наречених, а потім зупиняє свій вибір на першому претенденті з тих, що залишилися, який виявиться кращим, ніж m перших знехтуваних. Яка ймовірність того, що наречена зробить правильний вибір?

Зазначимо, що реалізація даної стратегії може привести до того, що вибір зроблений не буде: може виявитися, що кращий наречений виявиться серед m знехтуваних.

► За умовою, наречені з'являються перед нареченою випадковим чином. Поява кожного з них має однакову ймовірність. Якщо вибір відбувся на k-у кроці, це означає, що всі точки, отримані від $(m+1)$-го до $(k-1)$-го кроку, були розташовані лівіше крайньої правої зі «знехтуваних» m точок, а k-а точка розташована правіше їх усіх. Відкинуті m точок можна розташувати довільно кожним з $m!$ способів. Для $(m+1)$-ї точки існує вже не $(m+1)$ проміжків серед перших m, а лише m проміжків, оскільки вона не може розміщуватися правіше крайньої правої; для $(m+2)$-ї точки існує $(m+1)$ проміжків, куди вона може потрапити і так далі; для $(k-1)$-ї точки існує $(k-2)$ проміжків. Для k-ї точки є лише одна можливість – потрапити правіше $(m+k-1)$ розглянутих точок. Далі, для точок $(k+1)$, $(k+2)$, $\dots, n$ є вже $(k+1), (k+2), \dots, n$ проміжків. Отже, загалом існує

$$1 \cdot 2 \dots m \cdot m(m+1) \dots (k-2) \cdot 1 \cdot (k+1)(k+1)(k+2) \dots n$$

таких розташувань n точок на прямій, для яких подія H_k відбудеться. Отже, ймовірність

$$P(H_k) = \frac{1 \cdot 2 \dots m \cdot m \dots (k-2)(k+1) \dots n}{n!} = \frac{m}{(k-1)k}.$$

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що обрано найкращого нареченого. Тоді AH_k – подія, яка полягає в тому, що найкращий вибір зроблений на k-му кроці. Існує $1 \cdot 2 \dots m \cdot m \dots (k-2)k \dots (n-1)$ розташувань точок на прямій таких, що для кожної з них найкращий вибір проводиться на k-му кроці (якщо k-та точка є абсолютно максимальною, то для будь-якої точки $(k+i)$ є лише $(k+i-1)$

проміжок, куди вона може потрапити, оскільки вона не може потрапити правіше найбільшої). Отже,

$$P(AH_k) = \frac{1 \cdot 2 \ldots m \cdot m \ldots (k-2) k \ldots (n-1)}{n!} = \frac{m}{(k-1)n},$$

$$P(A|H_k) = \frac{P(AH_k)}{P(H_k)} = \frac{k}{n}, \qquad k = m+1, \ldots, n.$$

Використовуючи формулу повної ймовірності, знайдемо $P_m(A)$:

$$P_m(A) = \sum_{k=m+1}^{n} P(A|H_k) P(H_k) = \frac{m}{n} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k-1} = \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Імовірність $P_m(A)$ залежить від *m*. Найкраще $m = m(n)$ визначається з умови

$$P_{m(n)}(A) = \max_{0 \le m \le n} P_m(A).$$

Можна довести, що якщо n велике, то

$$m(n) \approx \frac{n}{e},\ P_{m(n)}(A) \approx \frac{1}{n}. \blacktriangleleft$$

2 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ.
ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Визначення випадкової величини. Функція розподілу

Нехай $\langle \Omega, F \rangle$ – деякий вимірний простір. Дійсна функція $g = g(\omega)$, визначена на $\langle \Omega, F \rangle$, називається ***вимірною*** відносно σ-алгебри F, якщо прообраз будь-якої борелівської множини належить F:

$$g^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : g(\omega) \in B\} \in F ,$$

тобто якщо прообраз $g^{-1}(B)$ є вимірною множиною в Ω.

Якщо $\langle \Omega, F \rangle$ є вимірний простір $\left\langle \mathbb{R}^n, \beta_{\mathbb{R}^n} \right\rangle$, де $\Omega = \mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідовий простір, а $\beta_{\mathbb{R}^n}$ – борелівська σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$, то будь-яка функція $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, вимірна відносно $\beta_{\mathbb{R}^n}$, називається ***борелівською***.

Розглянемо імовірнісний простір $\langle \Omega, F, P \rangle$. ***Випадковою величиною***, заданою на імовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$, називається будь-яка вимірна відносно σ-алгебри F функція $\xi = \xi(\omega)$, що задає відображення множини Ω в числову пряму $\mathbb{R}$. Таким чином, для будь-якої борелівської множини $B \in \beta_{\mathbb{R}}$ прообраз цієї множини є елемент із σ-алгебри F, тобто

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F .$$

У цьому випадку говорять, що F ***здійснює вимірне відображення*** $\langle \Omega, F \rangle$ в $\langle \mathbb{R}, \beta_{\mathbb{R}} \rangle$.

Нехай $\xi(\omega)$ – випадкова величина на $\langle \Omega, F, P \rangle$, а $f(x)$ – борелівська функція на $\mathbb{R}$. Тоді $f(\xi(\omega))$ – випадкова величина.

Оскільки для будь-якої борелівської множини $B \in \beta_{\mathbb{R}}$

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} \in F ,$$

то на вимірному просторі $\langle \mathbb{R}, \beta_{\mathbb{R}} \rangle$ можна ввести імовірнісну міру P_ξ, визначивши для кожної борелівської множини $B \in \beta_{\mathbb{R}}$.

$$P_\xi(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\}.$$

Таким чином, за допомогою випадкової величини ξ можна побудувати імовірнісний простір $\langle \mathbb{R}, \beta_{\mathbb{R}}, P_\xi \rangle$. Сукупність імовірностей $\{P_\xi(B)\}$ називають ***розподілом випадкової величини*** ξ.

Випадкові величини, для яких $P(\xi = \pm\infty) = 0$, називають ***власними***. Крім власних, існують також ***невласні*** випадкові величини; для них $P(\xi = \pm\infty) > 0$. В цьому задачнику вони не розглядаються.

Імовірнісний простір $\langle \Omega, F, P \rangle$ називається ***вибірковим*** для випадкової величини $\xi(\omega)$, якщо $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ й $\xi(\omega) \equiv \omega$.

Функцією розподілу $F_\xi(x)$ ***випадкової величини*** $\xi(\omega)$ називається функція дійсної змінної, обумовлена рівністю

$$F_\xi(x) = P(\xi(\omega) < x).$$

В подальшому, якщо це не викликає непорозумінь, замість $F_\xi(x)$ писатимемо просто $F(x)$.

Використовуючи властивості ймовірності, можна показати, що

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1);$$

$$P(\xi \le x) = F_\xi(x + 0);$$

$$P(\xi \ge x) = 1 - F_\xi(x);$$

$$P(\xi = x) = F_\xi(x + 0) - F_\xi(x).$$

Функція розподілу $F(x)$ має такі властивості:

1) $F(x)$ неспадна функція, тобто якщо $x_1 \le x_2$, то $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$;

2) $F(x)$ неперервна зліва при будь-якому x, тобто $\lim\limits_{x \uparrow x_0} F_\xi(x) = F(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Часто функцію розподілу визначають інакше, вважаючи

$$F_\xi(x) = P(\xi(\omega) \le x).$$

При такому визначенні зміниться лише друга властивість; тепер $F(x)$ буде неперервна справа.

Теорема 2.1. Нехай функція $F(x)$ має такі властивості:

1) $F(x)$ неспадна на $(-\infty,+\infty)$ функція;

2) $F(x)$ неперервна зліва;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

Тоді існує імовірнісний простір $\langle \Omega, F, P \rangle$ і випадкова величина $\xi(\omega)$ на ньому така, що її функція розподілу $F_\xi(x)$ дорівнює $F(x)$.

З цієї теореми, зокрема, випливає, що функція розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ однозначно визначає розподіл імовірності P_ξ цієї випадкової величини.

Всі розподіли ймовірностей можна розбити на три типи – дискретні, неперервні та сингулярні.

Розподіл випадкової величини ξ, називається ***дискретним***, якщо ξ з імовірністю 1 приймає скінченну або зліченну кількість значень $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ так, що

$$p_k = P(\xi = x_k) > 0, \qquad \sum_k p_k = 1.$$

Набір чисел $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ називається ***законом*** або ***рядом розподілу*** випадкової величини ξ.

На практиці закон розподілу дискретної випадкової величини зазвичай задають або формулою, що виражає ймовірності p_k, або у вигляді таблиці:

ξ	x_1	x_2	...	x_k	...
P_ξ	p_1	p_2	...	p_k	...

Для наочності часто використовують графічне зображення ряду розподілу: в декартовій системі координат зображують точки з координатами (x_i, p_i), а потім послідовно з'єднують їх ламаною. Отримана фігура називається ***багатокутником розподілу***.

Нехай A – деяка подія. ***Індикатором*** події A називається випадкова величина

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Очевидно, $P(I_A = 1) = P(A)$, а $P(I_A = 0) = 1 - P(A)$.

Індикатори випадкових подій мають такі властивості:

$$I_{\varnothing} = 0; \quad I_{\Omega} = 1; \quad I_{\overline{A}} = 1 - I_A; \quad I_{AB} = I_A I_B; \quad I_{A\triangle B} = \left(I_A - I_B\right)^2;$$

для попарно несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_n$

$$I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}.$$

Позначимо подію $A_k = \left\{\omega : \xi(\omega) = x_k\right\}$. Тоді, очевидно, $A_k A_l = \varnothing$ при $k \neq l$, $A_1 + A_2 + ... + A_l + ... = \Omega$ і випадкову величину можна подати у вигляді

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_k x_k I_{A_k}(\omega),$$

де $I_{A_k}(\omega)$ – індикатор події A_k.

Функція розподілу $F_\xi(x)$ дискретної випадкової величини ξ є східчастою і визначається рівністю

$$F_\xi(x) = \sum_{x_j < x} P\left(\xi = x_j\right).$$

Використовуючи ***одиничну функцію***

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, \ x \geq 0; \\ 0, \ x < 0; \end{cases}$$

формулу для функції розподілу можна переписати у вигляді

$$F_\xi(x) = \sum_k P(\xi = x_k)\eta(x - x_k).$$

Найбільш важливими дискретними розподілами є решітчасті розподіли. Випадкова величина ξ має ***решітчастий розподіл*** **із *кроком решітки*** h, якщо випадкова величина ξ дискретна й всі її можливі значення мають вигляд $a + kh$, $k = 0, \pm 1, ...$, тобто

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = a + kh) = 1.$$

Серед решітчастих розподілів при $a=0$, $h=1$ виділяється клас ***цілочисельних розподілів***. Для них

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi=k)=1.$$

2.1.2 Дискретні розподіли

Розглянемо деякі ***дискретні закони розподілу***, що часто зустрічаються.

1. ***Вироджений розподіл***:

$$P(\xi=a)=1, \qquad a=const.$$

Для виродженого розподілу функція розподілу дорівнює

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

2. ***Біноміальний розподіл*** (або ***розподіл Бернуллі***) з параметрами p й n ($0\le p\le 1$). Нехай проведена серія з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі з імовірністю успіху p $(0<p<1)$. Нехай ξ – кількість успіхів у n випробуваннях за схемою Бернуллі. Тоді ξ – дискретна випадкова величина, що набуває $(n+1)$ значення $0, 1, 2, ..., n$. За формулою Бернуллі знаходимо її закон розподілу:

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k=\overline{0,n}.$$

3. ***Геометричний розподіл*** з параметром p ($0\le p\le 1$). Нехай проводиться серія незалежних випробувань із двома наслідками: «успіх» з імовірністю p і «поразка» з імовірністю $q=1-p$. Випробування проводяться до першої появи успіху. Тоді число ξ проведених випробувань є дискретна випадкова величина, що має геометричний розподіл із законом розподілу

$$P(\xi=k)=p(1-p)^k, \qquad k=\overline{0,n}.$$

4. ***Пуассонівський розподіл*** (або ***розподіл Пуассона***) з параметром $a > 0$:

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Розподіл Пуассона є граничним для біноміального розподілу при $p \to 0$ і $n \to \infty$ за умови $np = a$, $a = const$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

5. ***Гіпергеометричний розподіл*** з параметрами n, M, N. Нехай є урна, що містить N куль, серед них M білих і $N - M$ чорних. Проводять вибірку (без повернення) об'ємом n. Позначимо через ξ кількість білих куль, які з'являться у вибірці. Тоді ξ буде дискретною випадковою величиною, яка набуває значення $0, 1, 2, ..., \min(M, n)$ з імовірностями

$$P(\xi = k) = P_{M,\,N}(k, n) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \min(M, n).$$

Розподіл Бернуллі є граничним для гіпергеометричного розподілу (приклад 2.12), тобто при фіксованому n, $N \to \infty$ і $M \to \infty$ за умови $\dfrac{N}{M} \to p$ справедливо

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Послідовність подій, що настають одна за одною у випадкові моменти часу, називається ***потоком подій***. Виділимо підклас потоку подій – найпростіший потік. ***Найпростішим потоком*** називається потік подій, що задовольняє таким умовам:

1) імовірність $p_n(t)$ того, що за проміжок часу t відбудуться саме n подій, залежить тільки від величини t, а не від того, де цей проміжок розташовується на часовій осі (***однорідність потоку***);

2) ймовірність того, що за проміжок часу t відбудеться певна кількість подій, не залежить від того, яка кількість подій відбулася до початку цього проміжку (***відсутність післядії***);

3) імовірність того, що за нескінченно малий проміжок часу dt відбудеться дві або більше подій, є величина нескінченно мала більш високого порядку, ніж

dt (***ординарність потоку***):

$$p_n(dt)=o(dt), \qquad n=2,3,\dots,$$

де $\frac{o(dt)}{dt}\xrightarrow[dt\to 0]{}0$;

4) імовірність того, що за нескінченно малий проміжок часу dt відбудеться одна подія, дорівнює:

$$p_1(dt)=\lambda dt+o(dt),$$

де $\lambda=const$ ($\lambda>0$) – середня кількість подій потоку за одиницю часу або ***інтенсивність потоку***.

Із властивостей найпростішого потоку випливає, що

$$p_0(dt)=1-\lambda dt+o(dt).$$

Знайдемо ймовірність $p_n(t+dt)$ того, що за проміжок часу тривалості $t+dt$ відбудуться n подій. За формулою повної ймовірності маємо:

$$p_n(t+dt)=p_n(t)\,p_0(dt)+p_{n-1}(t)\,p_1(dt)+\ldots+p_0(t)\,p_n(dt).$$

Підставимо в цю формулу отримані вище вирази для $p_0(dt)$, $p_1(dt)$ і $p_n(dt)$ ($n>2$), розділимо на dt і перейдемо до границі при $dt\to 0$. Отримаємо

$$p'_n(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t).$$

Спочатку знайдемо $p_0(t)$:

$$p_0(t+dt)=p_0(t)\,p_0(dt)=p_0(t)\big(1-\lambda dt+o(dt)\big).$$

Розділивши на dt і спрямувавши dt до нуля, отримаємо диференціальне рівняння

$$p'_0(t)=-\lambda p_0(t),$$

загальний розв’язок якого має вигляд

$$p_0(t)=Ce^{-\lambda t}, \qquad C=const.$$

Константу C визначимо з умови $p_0(0)=1$. Очевидно, $C=1$. Тоді

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Застосовуючи метод індукції, знайдемо ймовірність $p_n(t)$:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Зафіксуємо проміжок часу t і розглянемо випадкову величину ξ_t – кількість подій найпростішого потоку, які відбуваються за проміжок часу t. Тоді $\lambda t = a$ – середня кількість подій потоку за час t. Розподіл імовірностей випадкової величини ξ_t визначається формулою

$$P(\xi_t = n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}.$$

Це розподіл Пуассона.

2.1.3 Неперервні розподіли

Нехай ξ – випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Якщо існує невід’ємна борелівська функція $p(x)$ така, що для будь-якої борелівської множини $B \in \beta_{\mathbb{R}}$:

$$P(\xi \in B) = \int_B p(x)dx$$

(інтеграл у загальному випадку розуміється як інтеграл Лебега), то розподіл ξ називається ***абсолютно неперервним***, а $p(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей*** (або просто щільністю) випадкової величини ξ. У цьому випадку

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(y)dy.$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що

$$\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$$

Для будь-яких x_1 і x_2

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx .$$

Якщо в точці x щільність $p_\xi(x)$ неперервна, то

$$P(x \le \xi < x + dx) = p_\xi(x)dx + o(dx).$$

Наведеною вище рівністю функція $p_\xi(x)$ визначається з точністю до множини лебегової міри 0. Для $p_\xi(x)$ майже всюди (за мірою Лебега) має місце рівність

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}.$$

Графік щільності розподілу $p(x)$ називають ***кривою розподілу***.

Розподіл абсолютно неперервної випадкової величини повністю визначається щільністю розподілу. Функція розподілу абсолютно неперервної випадкової величини неперервна.

Для дискретного випадку можна ввести поняття щільності, якщо вважати

$$p(x) = \sum_k P(\xi = x_k)\delta(x - x_k),$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, визначена умовами

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \ne 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(y - x)dx = \varphi(y).$$

Тут $\varphi(x)$ – будь-яка неперервна в точці $x = y$ функція.

Розглянемо ***абсолютно неперервні розподіли*** (***неперервні розподіли***) ймовірностей, що зустрічаються частіше.

1. ***Рівномірний розподіл*** на відрізку $[a,b]$:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графіки щільності та функції розподілу для рівномірного закону зображені на рис. 2.1 і 2.2.

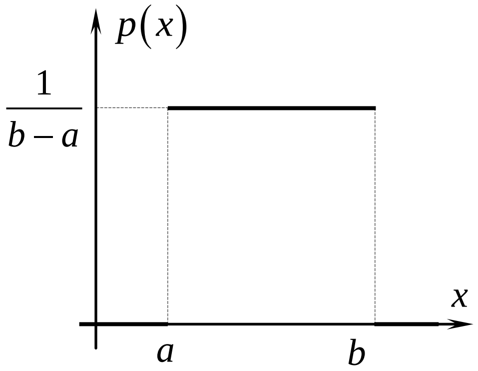


Рисунок 2.1

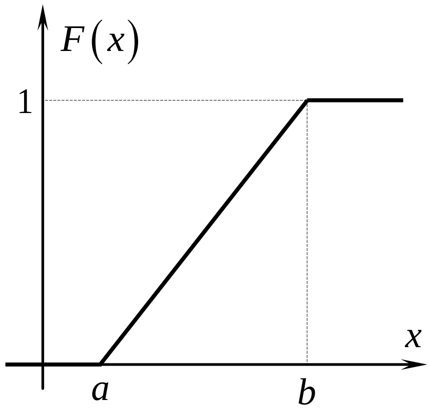


Рисунок 2.2

Імовірність потрапляння випадкової величини ξ, розподіленої рівномірно на відрізку $[a,b]$, в інтервал $[x_1, x_2)$ визначається за формулою:

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$

2. ***Показниковий розподіл*** з параметром $\lambda > 0$:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Графіки щільності та функції розподілу для показникового закону зображені на рис. 2.3 і 2.4.

Імовірність потрапляння випадкової величини ξ, що має показниковий розподіл, в інтервал $[x_1, x_2)$ визначається за формулою:

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}.$$

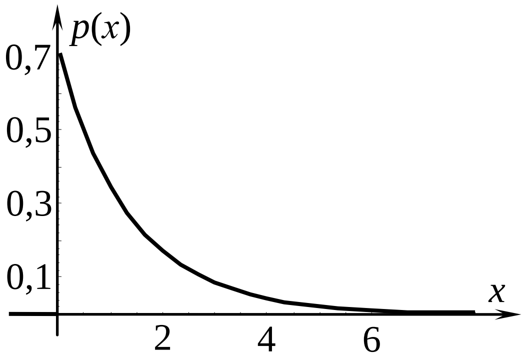


Рисунок 2.3

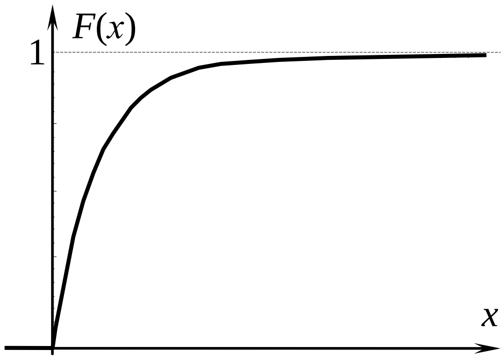


Рисунок 2.4

Показниковий закон має властивість ***відсутності післядії***, що виражається рівністю

$$P\left(t<\tau<s \middle| \tau>t\right)=P\left(\tau<s-t\right),\ t<s\ .$$

3. ***Гамма-розподіл*** (або ***розподіл Пірсона***) з параметрами α і λ ($\alpha>0$, $\lambda>0$):

$$p_{\xi}\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma\left(\alpha\right)}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

де $\Gamma\left(\alpha\right)=\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ – гамма-функція Ейлера.

Нагадаємо основні властивості гамма-функції:

1) $\Gamma\left(\alpha+1\right)=\alpha\Gamma\left(\alpha\right);\ \Gamma\left(1\right)=1;$

2) для будь-якого натурального n

$$\Gamma\left(n+1\right)=n\Gamma\left(n\right)=n!;$$

3) для будь-якого натурального n

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{2^n}\sqrt{\pi}\ ;$$

зокрема, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Криві розподілу при $\alpha>1$ наведені на рис. 2.5, а при $\alpha<1$ – на рис. 2.6 (

$\lambda = 1$).

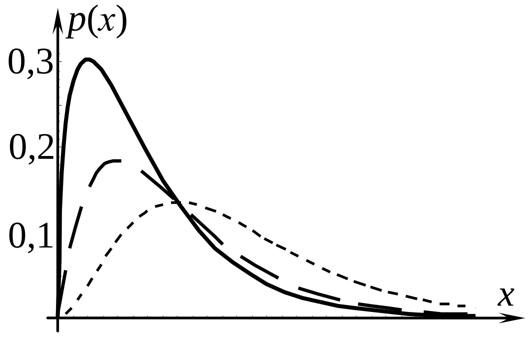


Рисунок 2.5

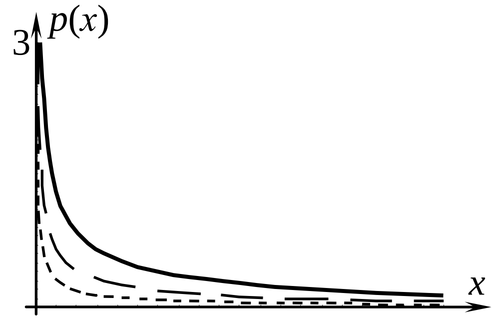


Рисунок 2.6

Гамма-розподіл має властивість стійкості за параметром α. Це означає наступне. Нехай ξ_1 і ξ_2 – незалежні випадкові величини, які мають гамма-розподіл з параметрами $(\alpha_1; \lambda)$ і $(\alpha_2; \lambda)$ відповідно. Тоді випадкова величина $\xi = \xi_1 + \xi_2$ також має гамма-розподіл з параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2; \lambda)$. При $\alpha = 1$ отримаємо показниковий розподіл.

4. ***Розподіл Коші*** з параметрами c і ($a > 0$):

$$p_\xi(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + a^2}, \qquad F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - c}{a}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Графіки щільності ймовірностей і функції розподілу Коші з параметрами $(0,1)$ (***найпростіший розподіл Коші***) наведені на рис. 2.7 і 2.8.

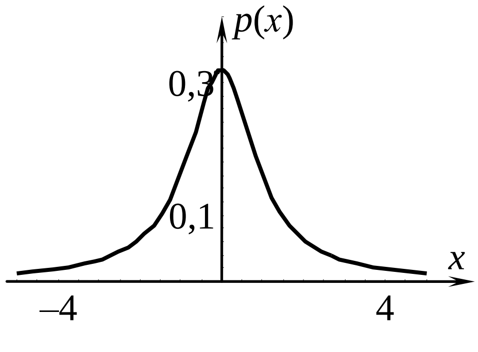


Рисунок 2.7

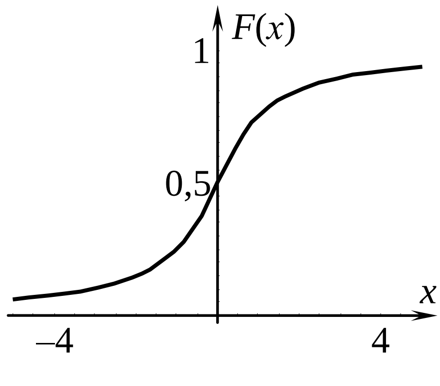


Рисунок 2.8

Якщо випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні та мають розподіл Коші з параметрами (c_1, a_1) і (c_2, a_2) відповідно, то випадкова величина $\xi_1 + \xi_2$ має розподіл Коші з параметрами $(c_1 + c_2, a_1 + a_2)$.

5. Розподілом, що найчастіше зустрічається в теорії ймовірностей та її застосуваннях, є ***нормальний розподіл***. Він є граничним для багатьох інших розподілів за деяких умов, які часто зустрічаються на практиці.

Нормальний розподіл з параметрами $(0,1)$ називають ***найпростішим*** (або ***стандартним***) ***нормальним розподілом***. Щільність найпростішого нормального розподілу виражається формулою

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Крива розподілу ймовірностей (рис. 2.9) симетрична відносно осі ординат; при $x = 0$ крива має максимум, що дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ і дві точки перегину при $x = \pm 1$. При $x \to \pm\infty$ крива дуже швидко асимптотично наближується до осі абсцис.

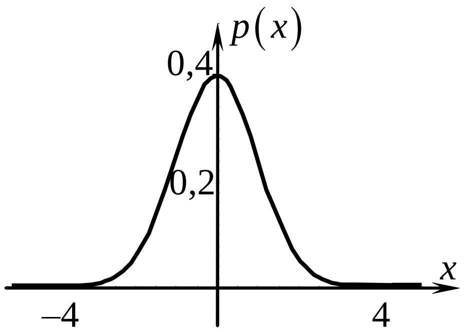


Рисунок 2.9

За допомогою функції Лапласа $\Phi_0(x)$ обчислюють імовірність потрапляння випадкової величини ξ з найпростішим нормальним розподілом у довільний інтервал (x_1, x_2):

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1).$$

Графік функції $\Phi_0(x)$ (рис. 2.10) через непарність симетричний відносно початку координат; при $x \to \infty$ крива асимптотично наближується до прямої $y = 0,5$, крім того, вже $\Phi_0(3) = 0,49865$, $\Phi_0(4) = 0,499968$.

Зв'язок між функцією $\Phi_0(x)$ і функцією стандартного нормального розподілу $\Phi(x)$ встановлює така формула:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

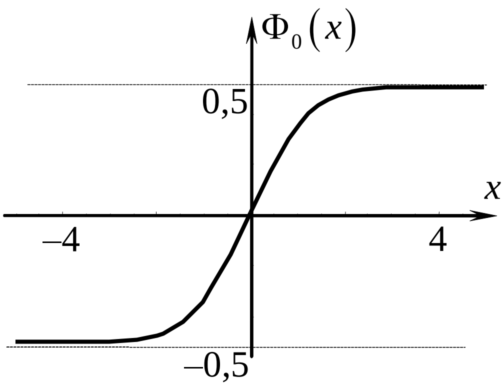


Рисунок 2.10

Нормальним розподілом з параметрами $(a;\sigma)$ (вважають, що ξ розподілена $N(a;\sigma)$) називається розподіл імовірностей зі щільністю $\varphi_{a;\sigma}(x)$, що дорівнює

$$\varphi_{\alpha;\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Параметр a – центр нормального розподілу – характеризує зміщення кривої розподілу вздовж осі Ox. Параметр σ ($\sigma>0$), що називається ***стандартним відхиленням***, характеризує розсіювання випадкової величини ξ: зі зменшенням σ крива розподілу розтягується вверх уздовж вертикалі $x=a$. Криві розподілу $N(a;\sigma)$, що відповідають різним значенням σ, наведені на рис. 2.11.

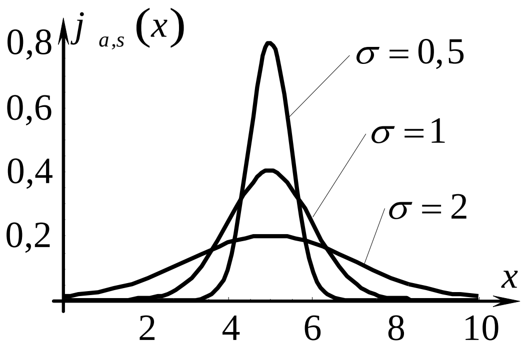


Рисунок 2.11

Будь-яка випадкова величина ξ, розподілена $N(a;\sigma)$, може бути подана у вигляді лінійної комбінації $\xi=a+\sigma\xi_0$, де ξ_0 – випадкова величина з найпростішим нормальним розподілом. Зворотне перетворення $\frac{\xi-a}{\sigma}=\xi_0$, що зводиться до перенесення початку координат у точку $(a;0)$ і вибору як одиниці масштабу стандартного відхилення σ, називається ***нормуванням*** випадкової величини ξ. Встановлений зв'язок між загальним і найпростішим нормальними розподілами дозволяє за допомогою функції Лапласа $\Phi(x)$ робити розрахунок імовірностей у загальному нормальному розподілі. З очевидної рівносильності нерівностей

$$x_1<\xi<x_2 \quad \text{і} \quad \frac{x_1-a}{\sigma}<\xi_0<\frac{x_2-a}{\sigma}$$

випливає рівність відповідних імовірностей:

$$P(x_1<\xi<x_2)=P\left(\frac{x_1-a}{\sigma}<\xi_0<\frac{x_2-a}{\sigma}\right)=\Phi_0(t_2)-\Phi_0(t_1),$$

де $t_1=\frac{x_1-a}{\sigma}$; $t_2=\frac{x_2-a}{\sigma}$.

Зокрема, імовірність того, що випадкова величина ξ відхилиться від свого центра a на величину, меншу ніж $t\sigma$, дорівнює

$$P(|\xi-a|<t\sigma)=P(a-t\sigma<\xi<a+t\sigma)=2\Phi_0(t).$$

Якщо покласти тут $t=3$, то отримуємо так зване ***правило трьох сигм***:

$$P\left(|\xi-a|<3\sigma\right)=2\Phi_0(3)=0{,}9973.$$

Властивості стійкості нормального розподілу:

1) нехай ξ – випадкова величина, розподілена нормально $N(a;\sigma)$, тоді випадкова величина $\eta=\alpha+\beta\xi$ також розподілена нормально з параметрами $(\alpha+\beta a;|\beta|\sigma)$;

2) нехай ξ_1 і ξ_2 – незалежні випадкові величини, розподілені нормально з параметрами відповідно $(a_1;\sigma_1)$ і $(a_2;\sigma_2)$; тоді випадкова величина $\xi=\xi_1+\xi_2$ також розподілена нормально $N(a;\sigma)$, крім того, $a=a_1+a_2$ і $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ (така властивість зберігається й для довільної послідовності незалежних випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, розподілених нормально).

6. ***Розподіл хі-квадрат*** з n ступенями свободи (розподіл χ_n^2) є окремим випадком гамма-розподілу і має щільність

$$p_{\chi_n^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Випадковою величиною χ_n^2 (хі-квадрат з n ступенями свободи) називається сума квадратів n незалежних випадкових величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$, кожна з яких має найпростіший нормальний розподіл.

Із властивості стійкості гамма-розподілу випливає, що розподіл χ_n^2 – це гамма-розподіл з параметрами $\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

При великих n розподіл χ_n^2 можна досить точно апроксимувати нормальним розподілом з параметрами $\left(n;\sqrt{2n}\right)$.

7. ***Розподіл Стьюдента*** з n ступенями свободи – розподіл випадкової величини τ_n:

$$\tau_n=\frac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2/n}},$$

де ξ розподілена нормально $N(0;1)$, χ_n^2 – випадкова величина, що має розподіл хі-квадрат з n ступенями свободи.

Щільність розподілу Стьюдента має вигляд:

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad -\infty < x < \infty .$$

При $n \to \infty$ розподіл Стьюдента наближається до найпростішого нормального:

$$\lim_{n\to\infty} p_{\tau_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi_{0;1}(x).$$

Точка x називається ***точкою зростання*** функції $F(x)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ $\quad F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$.

Неперервна функція розподілу називається ***сингулярною***, якщо множина її точок зростання утворить множину нульової міри за Лебегом.

Теорема 2.2. Будь-яку функцію розподілу $F(x)$ можна однозначно подати у вигляді

$$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x),$$

де $a_i \ge 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$; $F_1(x)$ – дискретна функція розподілу, $F_2(x)$ – абсолютно неперервна функція розподілу, $F_3(x)$ – сингулярна функція розподілу.

2.1.4 Багатовимірні випадкові величини

Нехай випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ визначені на тому самому імовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$. За допомогою цих випадкових величин кожному ω з Ω можна поставити у відповідність вектор.

Відображення множини Ω в $\mathbb{R}^n$, що задається випадковими величинами

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, називається n***-вимірною випадковою величиною*** або ***випадковим вектором***. Вважають, що випадковий вектор $\vec{\xi}$ здійснює вимірне відображення простору $\langle \Omega, F \rangle$ в $\left\langle \mathbb{R}^n, \beta_{\mathbb{R}^n} \right\rangle$, де $\beta_{\mathbb{R}^n}$ – борелівська σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$. Вважаючи для будь-якої борелівської множини B

$$P\left(B_{\xi_1, \ldots, \xi_n}\right) = P\left(B_{\xi}\right) = P\left(\omega : \vec{\xi} = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right) \in B\right),$$

можна за допомогою випадкового вектора $\vec{\xi}$ визначити ймовірність P_{ξ} на вимірному просторі $\left\langle \mathbb{R}^n, \beta_{\mathbb{R}^n} \right\rangle$. Функція $P_{\xi}(B)$ називається ***розподілом вектора*** $\vec{\xi}$ або ***сумісним розподілом випадкових величин*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Імовірнісний простір $\langle \Omega, F, P \rangle$ називається ***вибірковим*** для випадкового вектора $\vec{\xi}$, якщо $\Omega \in \mathbb{R}^n$ і $\xi(\omega) = \xi\left(\omega = \left(\omega_1, \ldots, \omega_n\right) \in \mathbb{R}^n\right)$.

Визначена для будь-яких дійсних $x_1, \ldots, x_n$ функція

$$F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = P\left(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\right)$$

називається ***функцією розподілу випадкового вектора*** $\vec{\xi}$ або ***сумісною функцією розподілу величин*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Властивості цієї функції аналогічні властивостям одновимірної функції розподілу:

1) $F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ монотонно неспадна за кожним аргументом;
2) $F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ неперервна за кожним аргументом;
3) $\lim\limits_{x_n \to -\infty} F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0$;
4) $\lim\limits_{x_n \to +\infty} F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = F_{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right)$.

Випадковий вектор $\vec{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right)$ належить до ***дискретного типу***, якщо він приймає не більш ніж зліченну кількість значень $x^1, x^2, ..., x^k, ...$, де $x^k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$.

Розподіл імовірностей дискретного вектора можна задати за допомогою набору чисел

$$p_k = P\left(\vec{\xi} = \vec{x}^k\right) = P\left(\xi_1 = x_1^k, \xi_2 = x_2^k, ..., \xi_n = x_n^k\right).$$

Випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ належить до ***абсолютно неперервного типу***, якщо існує невід'ємна борелівська функція $p(\vec{x}) = p(x_1, x_2, ..., x_n)$, така, що для будь-якої борелівської множини $B \in \beta_{\mathbb{R}^n}$

$$P_{\vec{\xi}}(B) = P(\vec{\xi} \in B) = \int_B p(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Функція $p(\vec{x})$ називається ***щільністю розподілу випадкового вектора*** $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ або ***щільністю сумісного розподілу випадкових величин*** $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Очевидно, що

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(\vec{x}) d\vec{x} = 1.$$

У цьому випадку

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots, t_n) \, dt_1 \dots dt_n,$$

і майже всюди

$$\frac{\partial^n F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = p(x_1, \dots, x_n) = p(\vec{x}).$$

Якщо вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ має щільність $p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$, то будь-який його підвектор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)$, де $s < n$, також має щільність, крім того,

$$p_{\xi_1, \dots, \xi_s}(x_1, \dots, x_s) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-s} p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) dx_{s+1} \dots dx_n.$$

Нехай випадковий вектор (ξ, η) належить до дискретного типу, тобто компоненти ξ і η – дискретні випадкові величини. Припустимо, що компонента ξ може приймати значення $x_1, x_2, ..., x_i, ...$, а компонента η – значення $y_1, y_2, ..., y_j, ...$. Тоді розподіл вектора (ξ, η) однозначно визначається набором імовірностей

$$p_{ij} = P\left(\xi = x_i, \eta = y_j\right) \geq 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots,$$

крім того, $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

Імовірності p_{ij} зручно розташовувати у вигляді таблиці

ξ	η				
	y_1	y_2	...	y_j	...
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...
...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...
...	...	...	...	...	...

Функція розподілу в цьому випадку визначається як

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \sum_{\substack{x_i < x \\ y_j < y}} p_{ij}.$$

Із двовимірного закону розподілу можна отримати одновимірні закони розподілу для ξ (сумуючи рядки таблиці):

$$P(\xi = x_i) = p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

і для η (сумуючи стовпчики таблиці):

$$P\left(\eta = y_j\right) = p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

Закони розподілу $\{p_i\}$ й $\{p_j\}$ називають ***маргінальними законами*** вихідного двовимірного розподілу.

Нехай тепер вектор (ξ, η) належить до абсолютно неперервного типу. Це означає, що він має щільність імовірності $p_{\xi\eta}(x, y)$, що задовольняє умовам:

1) умова невід'ємності:

$$p_{\xi\eta}(x,y)\ge 0 \text{ при всіх } (x,y)\in \mathbb{R}^2;$$

2) умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy = 1;$$

3) для будь-якої вимірної області G на площині

$$P\big((\xi,\eta)\in G\big) = \iint_G p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy.$$

Графік функції $z = p_{\xi\eta}(x,y)$ називається ***поверхнею розподілу***.

Функцію сумісного розподілу можна знайти за формулою

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_{\xi\eta}(u,v)\,dudv,$$

звідки

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Маргінальні щільності (щільності розподілу компонент):

$$p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy, \qquad p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx.$$

Імовірність потрапляння вектора (ξ,η) у прямокутник $[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)$ можна знайти за формулою

$$P(a_1\le\xi<b_1,\, a_2\le\eta<b_2) = F_{\xi\eta}(b_1,b_2) - F_{\xi\eta}(b_1,a_2) - F_{\xi\eta}(a_1,b_2) + F_{\xi\eta}(a_1,a_2).$$

Нехай $\langle\Omega, F, P\rangle$ – деякий імовірнісний простір, $\beta_1, \beta_2, \dots$ – деякі класи подій, що містяться в σ-алгебрі F. Класи подій $\beta_1, \beta_2, \dots$ називаються ***незалежними***, якщо будь-які події $B_1, B_2, \dots$ такі, що $B_k\in\beta_k$ ($k = 1, 2, \dots$), є незалежними.

Відповідно до цього визначення оцінюватимемо незалежність алгебр, σ-алгебр, розбиття і так далі.

Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ називаються ***незалежними***, якщо для будь-яких борелівських множин $B_1, \dots, B_n$

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \dots P(\xi_n \in B_n).$$

Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ є незалежними в тому і тільки в тому випадку, коли є незалежними породжені ними σ-алгебри.

Випадкові величини, що не є незалежними, називають ***залежними***.

Дискретні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні тоді й тільки тоді, коли за будь-яких цілих $k_1, \dots, k_n$

$$P(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n) = P(\xi_1 = k_1) \dots P(\xi_n = k_n).$$

Тут для визначеності йдеться про цілочисельні дискретні випадкові величини.

Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні тоді й тільки тоді, коли функцію розподілу $F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ можна подати у вигляді

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n).$$

Якщо розподіл випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ є абсолютно неперервним, то необхідною й достатньою умовою незалежності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ є рівність

$$p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \dots p_{\xi_n}(x_n).$$

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини, визначені на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$. Ці випадкові величини визначають відповідний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. ***$\sigma$-алгеброю*** $\sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, ***породженою випадковим вектором*** $\vec{\xi}$, називається σ-алгебра, породжена класом подій виду

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B\},$$

де B проходить всі борелівські множини з $\beta_{\mathbb{R}^n}$.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – послідовність незалежних випадкових величин. Виділимо підпослідовність $\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_m$, де $1 \le k \le m < \infty$.

σ-алгеброю $\sigma(\xi_k, \dots, \xi_m) = F_{k,m}$ (якщо $m = \infty$, писатимемо $\sigma(\xi_k, \xi_{k+1}, ...)$

або $F_{k,+\infty}$), породженою випадковими величинами $\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_m$, є σ-алгебра, породжена подіями $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$, де $A_i \in \sigma(\xi_i)$. Зазначимо, що для кожного $k \geq 1$ σ-алгебра $\sigma(\xi_k, \ldots, \xi_m)$ не залежить від σ-алгебри.

Особливу роль у теорії ймовірностей та її застосуваннях відіграє багатовимірний нормальний розподіл. Розглянемо спочатку ***двовимірний нормальний розподіл випадкового вектора*** $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$.

Нехай координати ξ_1 і ξ_2 випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ є випадковими величинами, розподіленими за нормальним законом, тобто мають щільності розподілу

$$p_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

і

$$p_{\xi_2}(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\},$$

де параметри a_i і σ_i $(i = 1, 2)$ цих розподілів називають математичними сподіваннями та середніми квадратичними відхиленнями випадкових величин ξ_1 і ξ_2.

Якщо ξ_1 і ξ_2 є незалежними випадковими величинами, то в цьому випадку щільність двовимірного нормального розподілу має вигляд

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

У загальному випадку вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ має (***невироджений***) ***двовимірний нормальний розподіл***, якщо його щільність розподілу визначається формулою:

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\left(\sqrt{2\pi}\right)^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

де a_i та σ_i $(i = 1, 2)$ – математичні сподівання і середньоквадратичні відхилення випадкових величин ξ_1 і ξ_2, ρ – коефіцієнт кореляції випадкових величин ξ_1 і ξ_2.

Як і у двовимірному випадку, ***багатовимірний нормальний розподіл*** (***багатовимірний нормальний закон***) визначається вектором середніх значень

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$$

і ***кореляційною матрицею***

$$\Delta = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді щільність розподілу системи нормальних випадкових величин $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ або n-вимірного нормального випадкового вектора визначається формулою:

$$p_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Delta|}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} k_{ij}^{(-1)}(x_i - a_i)(x_j - a_j)},$$

де $k_{ij}^{(-1)}$ – елементи оберненої матриці, та дорівнюють

$$k_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta} A_{ij} = \frac{1}{\Delta} A_{ji},$$

A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента з номером ij матриці Δ.

Якщо матриця Δ збігається з одиничною матрицею I, а вектор математичних сподівань має вигляд $\vec{a} = (0, \dots, 0)$, то

$$p_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \dots x_n^2\right)}.$$

Таку щільність називають щільністю ***стандартного багатовимірного нормального розподілу***.

2.2 Дискретні випадкові величини

2.2.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. Побудувати функцію розподілу для випадкової величини, значення якої – оцінки, отримані на іспиті:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1

► Знайдемо функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0{,}3, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}7, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}9, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Вигляд $F(x)$ для дискретної випадкової величини розривний, східчастий. Графік функції розподілу зображений на рис. 2.12.

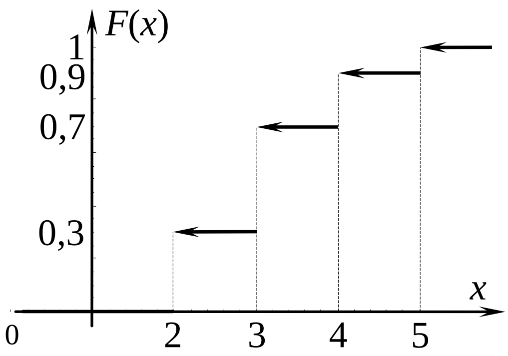


Рисунок 2.12

Приклад 2.2. Гральний кубик підкидають один раз. Якщо випаде непарна кількість очок, то гравець виграє 5 грн.; якщо ж випадає парна, але менше шести, то гравець програє 7 грн., а якщо випаде шістка, то гравець програє 1 грн. Знайти розподіл випадкової величини ξ – величини виграшу гравця.

► Випадкова величина ξ є дискретною з можливими значеннями $x_1 = -7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$ і ймовірностями

$$p_1 = P(\xi = -7) = \frac{1}{3}; \qquad p_2 = P(\xi = -1) = \frac{1}{6}; \qquad p_3 = P(\xi = 5) = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, ряд розподілу має такий вигляд

x_i	-7	-1	5
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Графічне зображення ряду розподілу наведене на рис. 2.13.

Знайдемо тепер функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ. За визначенням маємо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -7; \\ p_1 = \frac{1}{3}, & -7 < x \le -1; \\ p_1 + p_2 = \frac{1}{2}, & -1 < x \le 5; \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, & x > 5. \end{cases}$$

Графік функції розподілу наведений на рис. 2.14. ◄

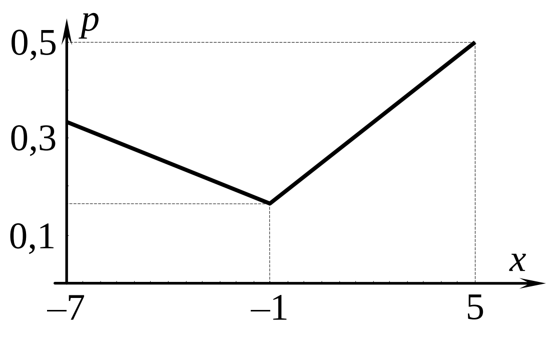


Рисунок 2.13

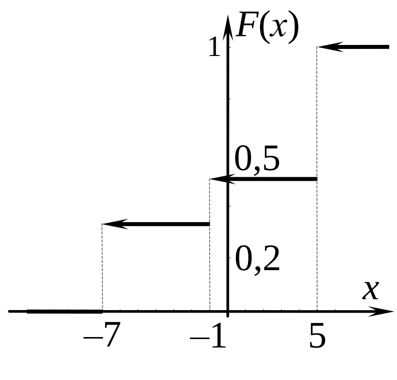


Рисунок 2.14

Приклад 2.3. Імовірність того, що будь-який абонент зателефонує на комутатор протягом години, дорівнює 0,02. Телефонна станція обслуговує 200 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години зателефонують 3 абоненти?

► Очевидно, що випадкова кількість дзвінків задовольняє закону Пуассона

$$P(\xi = k) = P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

де $a = n \cdot p = 200 \cdot 0,02 = 4$. Тоді ймовірність того, що протягом години зателефонують 3 абоненти, дорівнює

$$P(\xi=3)=P_3=\frac{a^3}{3!}e^{-a}=\frac{4^3}{3!}e^{-4}\approx 0{,}195. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.4. Протягом години на телефонну станцію надходить у середньому 30 викликів. Яка ймовірність того, що за 60 секунд, протягом яких телефоністка відлучилася, не буде жодного виклику?

► Очевидно, що $p_k(t)$ – імовірність того, що за t хвилин відбудеться k викликів, задовольняє закону Пуассона

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},$$

де λ – середня кількість викликів за одну хвилину $\lambda=\frac{30}{60}=0{,}5$.

Отже, ймовірність того, що за 60 секунд не відбудеться жодного виклику:

$$p_0(t)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{\lambda t}=\frac{0{,}5^0}{0!}e^{-0{,}5}\approx 0{,}607. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.5. Знайти ймовірність того, що серед 300 виробів виявиться більше 3 бракованих, якщо в середньому браковані вироби складають 2%.

► Вважаючи випадкову кількість ξ бракованих виробів такою, що задовольняє закону Пуассона

$$P(\xi=k)=P_k=\frac{a^k}{k!}e^{-a},$$

де $a=n\cdot p=300\cdot 0{,}02=6$, знайдемо ймовірність того, що серед 300 виробів виявиться більше трьох бракованих

$$P(\xi>3)=\sum_{k=4}^{300}P_k=1-P_0-P_1-P_2-P_3=1-e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}\right)\approx 0{,}8488. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.6. Довести: якщо $n\to\infty$ і $p>0$ приo $np=a$, де a – деяка стала ($0<a<\infty$), то

$$P(k,n)=C_n^k p^k q^{n-k} \ \to\ P_k=\frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

при будь-якому k, $k = 0, 1, 2, \dots$.

► Вважаючи $np = a$, маємо:

$$P(k, n) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}.$$

Звідки при $n \to \infty$ отримуємо, що

$$C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

Отже, при великих n і малих p біноміальний розподіл можна досить точно наблизити до розподілу Пуассона з параметром $a = np$. ◄

Приклад 2.7. Імовірність того, що зразок не витримає випробування, дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що з 2500 зразків більш ніж один не витримає випробування. Порівняти результати розрахунків, отриманих з використанням розподілу Пуассона і з використанням біноміального розподілу.

► Вважаючи випадкову кількість зразків, які не витримали випробування, таким, що задовольняє закону Пуассона:

$$P(\xi = k) = P_k = \frac{a^k}{k!}e^{-a},$$

де $a = np = 2500 \cdot 0{,}002 = 5$, маємо

$$P(\xi > 1) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1 - P_0 - P_1 = 1 - e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!}\right) \approx 0{,}9596.$$

Нехай тепер кількість зразків, які не витримали випробування, є таким, що задовольняє закону біноміального розподілу:

$$P(\xi = k) = C_{2500}^k p^k (1-p)^{2500-k},$$

де $p = 0{,}002$, маємо

$$P(\xi > 1) = 1 - C_{2500}^{0} p^{0} (1-p)^{2500} - C_{2500}^{1} p^{1} (1-p)^{2499} \approx 0{,}9597. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.8. Комп'ютер складається з 2000 елементів. Імовірність відмови одного елемента протягом одного року роботи дорівнює 0,0005 і не залежить від стану інших елементів. Яка ймовірність відмови двох і не менше двох елементів за рік?

► Вважаючи випадкову кількість ζ елементів, які відмовили, таким, що задовольняє закону Пуассона:

$$P(\zeta = k) = P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

де $a = np = 2000 \cdot 0{,}0005 = 1$, отримаємо ймовірність відмови саме двох елементів

$$P(\zeta = 2) = P_2 = \frac{a^2}{2e} \approx 0{,}184;$$

імовірність відмови не менше двох елементів:

$$P(\zeta \geq 2) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1 - P_0 - P_1 = 1 - e^{-1}(1+1) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.9. Монету підкидають до першого випадіння герба. Нехай $\xi(\omega)$ – кількість підкидань. Знайти: а) розподіл випадкової величини ξ; б) $P(\xi > 1)$; в) $P(\xi \leq n)$.

► а) Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з імовірністю успіху (поява герба) $p = \frac{1}{2}$ і поразки (поява решки) $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Отже,

$$P(\xi = k) = \frac{1}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

б) Маємо:

$$P(\xi > 1) = \sum_{k=2}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

в) Аналогічно,

$$P(\xi \le n) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.10. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ – кількість таких підкидань трьох гральних кубиків, у кожному з яких на двох кубиках з’явиться по 6 очок, якщо загальна кількість підкидань дорівнює 15.

► Спочатку знайдемо ймовірність p того, що при підкиданні трьох кубиків на двох з’явиться по шість очок. Ми маємо справу зі схемою Бернуллі з імовірністю успіху $\frac{1}{6}$ і поразки $\frac{5}{6}$. Тоді за формулою Бернуллі

$$p = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72} \approx 0,0694.$$

Очевидно, що випадкова величина ξ матиме біноміальний розподіл з параметром $\frac{5}{72}$. Отже,

$$P(\xi = k) = C_{15}^k \left(\frac{5}{72}\right)^k \left(\frac{67}{72}\right)^{15-k}, \ k = 0, 1, \ldots, 15. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.11. В урні n куль, з них n_1 чорних і $n - n_1$ білих. Проводиться вибірка без повернення об’ємом k. Яка ймовірність того, що у вибірці буде саме k_1 чорних куль?

► Оскільки k_1 чорних куль вибираються із сукупності n_1 усіх чорних куль, то кількість різних способів для такого вибору дорівнює кількості сполучень $C_{n_1}^{k_1}$. Аналогічно, кількість різних способів вибрати $k - k_1$ білих куль із сукупності об’ємом $n - n_1$ дорівнює $C_{n-n_1}^{k-k_1}$ і кількість різних комбінацій, за яких вибирається k_1 чорних і $k-k_1$ білих куль, дорівнює добутку $C_{n_1}^{k_1}\cdot C_{n-n_1}^{k-k_1}$. Вважаючи всі можливі вибори k куль рівноймовірними (їх загальна кількість дорівнює C_n^k), отримаємо, що ймовірність

$$P_{n_1,n}\left(k_1,k\right)=\frac{C_{n_1}^{k_1}\cdot C_{n-n_1}^{k-k_1}}{C_n^k},\qquad\qquad k_1=0,1,\ldots,k. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.12. Нехай n і n_1 прямують до нескінченності так, що $\frac{n_1}{n}\to p$, де p – число з відрізка $[0,1]$. Довести, що для гіпергеометричного розподілу справедливе співвідношення $P_{n_1,n}\left(r_1,r\right)\to P\left(r_1,r\right)$.

► Вважатимемо $r_2=r-r_1$, $n_2=n-n_1$. Розділивши чисельник і знаменник на n^r, отримаємо:

$$P_{n_1,\,n}\left(r_1,r\right)=\frac{r!(n-r)!}{n!}\cdot\frac{n_1!}{r_1!(n_1-r_1)!}\cdot\frac{n_2!}{r_2!(n_2-r_2)!}=$$

$$\frac{r!}{r_1!r_2!}\cdot\frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots(n_1-(r_1-1))}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}n_2(n_2-1)\cdots(n_2-(r_2-1))=$$

$$\frac{r!}{r_1!r_2!}\cdot\frac{\frac{n_1}{n}\left(\frac{n_1}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{n_1}{n}-\frac{r_1-1}{n}\right)}{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^{r_2}}\cdot n_2(n_2-1)\ldots(n_2-(r_2-1))=$$

$$\frac{r!}{r_1!r_2!}\cdot\frac{\frac{n_1}{n}\left(\frac{n_1}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{n_1}{n}-\frac{r_1-1}{n}\right)}{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}\cdot\frac{n_2}{n}\left(\frac{n_2}{n}-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(\frac{n_2}{n}-\frac{r_2-1}{n}\right).$$

При $n\to\infty$ і $\frac{n_1}{n}\to p$ отримаємо $P_{n_1,\,n}\left(r_1,r\right)\to C_r^{r_1}p^{r_1}\left(1-p\right)^{r_2}=P\left(r_1,r\right)$. ◄

Приклад 2.13. Нехай ξ_1 і ξ_2 незалежні випадкові величини, які мають геометричний розподіл $P\left(\xi_i=k\right)=p_iq_i^k$ $(i=1,2,\ k=0,1,2,\ldots)$. Показати, що випадкова величина $\xi=\min\left(\xi_1,\xi_2\right)$ має геометричний розподіл. Знайти параметр цього розподілу.

► Маємо:

$$P(\xi \geq k) = P(\xi_1 \geq k, \xi_2 \geq k) = P(\xi_1 \geq k) \cdot P(\xi_2 \geq k) = q_1^k \cdot q_2^k = q^k,$$

де $q = q_1 q_2$. Тоді

$$P(\xi = k) = P(\xi \geq k) - P(\xi \geq k+1) = q^k - q^{k+1} = pq^k,$$

де $p = 1 - q$. ◄

Приклад 2.14. Нехай система, що фіксує процес ціноутворення, має 3 паралельних входи. Імовірність виходу з ладу кожного з них дорівнює 0,1. Потрібно, використовуючи δ-функцію, знайти щільність імовірності випадкової кількості входів, які вийшли з ладу, якщо вихід з ладу одного входу не залежить від того, чи працюють або вийшли з ладу інші.

► Позначимо через ζ випадкову кількість входів, які вийшли з ладу. Випадкова величина ζ, належить до дискретного типу. Оскільки випадкова величина ζ приймає свої значення з імовірностями

$$P(\zeta = k) = C_3^k p^k (1-p)^{3-k}, \qquad p = 0{,}1,$$

то ряд розподілу випадкової величини ζ має такий вигляд:

k	0	1	2	3
$P(\zeta = k)$	0,729	0,243	0,027	0,001

Використовуючи формулу для щільності дискретної випадкової величини, отримаємо

$$p_\zeta(x) = 0{,}729 \cdot \delta(x) + 0{,}243 \cdot \delta(x-1) + 0{,}027 \cdot \delta(x-2) + 0{,}001 \cdot \delta(x-3). ◄$$

Приклад 2.15. Скласти ряд розподілу кількість влучень м’ячем у кошик за три кидки, якщо ймовірність влучення за один кидок дорівнює $p = 0{,}3$. Побудувати багатокутник і функцію розподілу.

► Випадкова величина ξ – кількість влучень м’ячем у кошик за три кидки. Вона може приймати значення 0, 1, 2, 3. Відповідні ймовірності обчислюються за формулою:

$$P_n(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Цією формулою можна користуватися, якщо незалежні випробування проводяться n разів, імовірність події в кожному випробуванні стала і дорівнює p, а $q = 1 - p$. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – кількість сполучень із n по k. Тут $n = 3$, $p = 0{,}3$, $q = 0{,}7$. Тоді

$$P_3(\xi = 0) = q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343;$$

$$P_3(\xi = 1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}441;$$

$$P_3(\xi = 2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189;$$

$$P_3(\xi = 3) = p^3 = 0{,}3^3 = 0{,}027.$$

Ряд розподілу випадкової величини ξ матиме такий вигляд:

ξ	0	1	2	3
$P_3(\xi = i)$	0,343	0,441	0,189	0,027

Багатокутник розподілу та функція розподілу зображені на рис. 2.15 і 2.16.

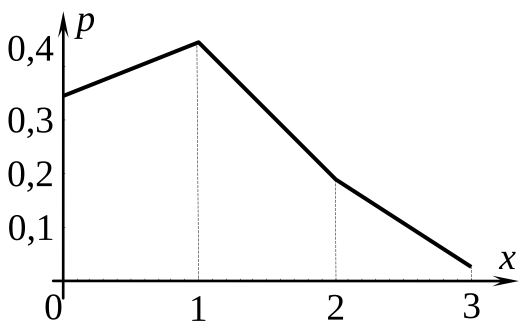


Рисунок 2.15

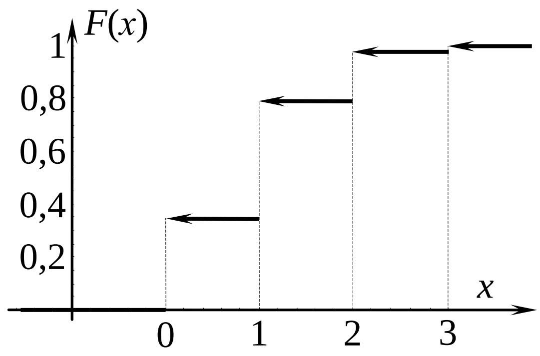


Рисунок 2.16

Приклад 2.16. Дискретна випадкова величина ξ приймає значення k з імовірністю

$$p_k = P(\xi = k) = Ck^2, \quad k = \overline{1,5}.$$

Знайти: а) сталу C; б) імовірність того, що $|\xi - 2| \le 1$.

► а) Сталу C знайдемо з умови нормування: $\sum_{k=1}^{5} p_k = 1$. Маємо $\sum_{k=1}^{5} p_k = C(1+4+9+16+25) = 55C$, звідки $C = \frac{1}{55}$.

б) Очевидно, нерівність $|\xi - 2| \le 1$ еквівалентна тому, що $1 \le \xi \le 3$. Тоді

$$P(|\xi - 2| \le 1) = \mathsf{P}(1 \le \xi \le 3) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) =$$

$$= \frac{1}{55} + \frac{4}{55} + \frac{9}{55} = \frac{14}{55}. \blacktriangleleft$$

2.2.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.1. У страховому товаристві застраховані 10000 осіб. Імовірність того, що станеться страховий випадок, для кожної особи дорівнює $0,006$. Страховий внесок становить 12 у.о., а страхова виплата – 1000 у.о. Знайти ймовірність того, що:

а) страхове товариство матиме збиток;

б) страхове товариство матиме прибуток не менше 40000 у.о.

Відповідь: а) ≈ 0; б) $\approx 0,99534$.

Задача 2.2. Імовірність того, що зразок не витримає випробування, дорівнює $0,002$. Знайти ймовірність того, що з 2500 зразків більш ніж один не витримає випробування.

Відповідь: 0,9596.

Задача 2.3. Знайти ймовірність того, що серед 300 виробів більше трьох бракованих, якщо в середньому брак становить 2%.

Відповідь: 0,849.

Задача 2.4. Імовірність збити літак одиночним пострілом з гвинтівки досить мала і становить приблизно 0,004. Яка (наближено за Пуассоном) імовірність збити літак при одночасній незалежній стрільбі з 250-ти гвинтівок?

Відповідь: 0,632.

Задача 2.5. З однієї ЕОМ на іншу необхідно переслати файл об'ємом 10000 символів. Імовірність помилки при передачі символу становить 0,001. Визначити а) імовірність безпомилкової передачі файла; б) імовірність того, що в переданому файлі буде саме 10 помилок. Яка має бути ймовірність помилки при передачі одного символу, щоб імовірність передачі всього файла без помилок склала 0,99?

Відповідь: а) $4{,}54\cdot10^{-5}$; б) 0,125; $1{,}005\cdot10^{-6}$.

Задача 2.6. Радіоапаратура складається з 1000 елементів. Імовірність відмови одного елемента протягом одного року роботи дорівнює 0,001 і не залежить від стану інших елементів. Яка ймовірність відмови а) двох; б) не менше двох електроелементів на рік?

Відповідь: а) 0,184; б) 0,264.

Задача 2.7. Імовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що у 100 випробуваннях подія відбудеться п'ять разів.

Відповідь: 0,036.

Задача 2.8. Книга в 1000 сторінок має 100 помилок. Яка ймовірність того, що на випадково вибраній сторінці не менше 2 помилок, якщо кількість помилок розподілена за законом Пуассона?

Відповідь: 0,00468.

Задача 2.9. Імовірність того, що стрілець влучить у мішень при одному пострілі, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність не менше двох влучень у ціль при 5000 пострілах.

Відповідь: 0,09.

Задача 2.10. Агрегат містить 2000 деталей. Імовірність виходу деталі з ладу за час роботи агрегату дорівнює 0,001. Вважаючи, що кількість деталей, які вийшли з ладу, задовольняє закону Пуассона, знайти ймовірність виходу з ладу більше однієї деталі.

Відповідь: 0,594.

Задача 2.11. Випадкова величина ξ має такий розподіл:

ξ	-2	-1	0	1	2
P_ξ	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Знайти: а) функцію розподілу; б) імовірність того, що $|\xi|\le 1$.

Відповідь: а) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ 0{,}1, & -2<x\le -1; \\ 0{,}3, & -1<x\le 0; \\ 0{,}5, & 0<x\le 1; \\ 0{,}9, & 1<x\le 2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$ б) 0,8.

Задача 2.12. Снайпер, що має n патронів, стріляє в мішень. Імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює p. Знайти ряд розподілу та функцію розподілу кількість ξ витрачених патронів.

Відповідь: $P(\xi = k) = pq^k$, $k = 0, 1, ..., n$ $(q = 1 - p)$.

Задача 2.13. У партії з 10 виробів два бракованих. Навмання вибирають три вироби. Знайти закон розподілу кількості бракованих виробів у вибірці. Побудувати функцію розподілу.

Відповідь: $P(\xi = i) = \dfrac{C_2^i C_8^{3-i}}{C_{10}^3}$, $i = 0, 1, 2$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{7}{15}, & 0 < x \le 1; \\ \dfrac{14}{15}, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

Задача 2.14. Розподіл випадкової величини ξ має вигляд:

$$P(\xi = k) = \frac{C}{k(k+1)}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Знайти: а) сталу C; б) $P(\xi \le 3)$; в) $P(n_1 \le \xi \le n_2)$.

Відповідь: а) 1 ; б) $\dfrac{3}{4}$; в) $\dfrac{n_2 - n_1 + 1}{n_1(n_2 + 1)}$, $n_1 \le n_2$.

Задача 2.15. Розподіл дискретної випадкової величини заданий формулою $P(\xi = k) = \dfrac{C}{2^k}$, $k = 0, 1, 2, ...$

Знайти: а) сталу C; б) $P(\xi \le 3)$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{15}{16}$.

Задача 2.16. Імовірність прийому радіохвиль кораблем при кожній передачі дорівнює 0,85. Знайдіть ряд розподілу та функцію розподілу кількості ξ сигналів, що надійшли, якщо надіслали п’ять радіосигналів.

Відповідь: $C_5^k (0{,}85)^k (0{,}15)^{5-k}$.

Задача 2.17. Протягом хвилини на АТС надходить випадкова кількість ξ

викликів, розподілена за законом Пуассона з параметром $a=5$. Знайти ймовірність того, що протягом хвилини надійдуть: а) два виклики; б) не більше двох викликів; в) не менше двох викликів.

Відповідь: а) $\approx 0,086$; б) $\approx 0,127$; в) $\approx 0,041$.

2.3 Неперервні розподіли

2.3.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 2.17. Функція розподілу річних доходів осіб, оподатковуваних податком, має вигляд:

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^a, & x \ge x_0 \ (a > 0), \\ F(x) = 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Визначити розмір річного доходу, що може збільшитися з імовірністю 0,5 для випадково вибраного платника податків.

► Нехай розмір шуканого річного доходу дорівнює *y*. Відповідно до умови

$$P(y > x) = 0,5.$$

Тоді $1 - \left(\dfrac{x_0}{y}\right)^a = 0,5$. Звідки $y = 2^{\frac{1}{a}} x_0$. ◄

Приклад 2.18. Нехай проекція ξ радіус-вектора випадкової точки кола радіуса a на фіксований діаметр D має функцію розподілу (закон арксинуса):

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a < x < a, \\ 1, & x \ge a. \end{cases}$$

Знайти: а) щільність імовірності випадкової величини ξ; б) імовірність того, що ξ набуває значень з проміжку $\left(-\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}\right) \in D$.

► а) Щільність імовірності $p_\xi(x)$ випадкової величини ξ дорівнює:

1) $\forall x \in (-a; a)$:

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}};$$

2) $\forall x \notin (-a; a)$:

$$p_\xi(x) = 0.$$

б) імовірність того, що ξ потрапить у проміжок $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, є

$$P\left(-\frac{a}{2} < \xi < \frac{a}{2}\right) = F_\xi\left(\frac{a}{2}\right) - F_\xi\left(-\frac{a}{2}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}.$$ ◄

Приклад 2.19. Щільність імовірності випадкової величини ξ дорівнює

$$p_\xi(x) = ax^2 \cdot e^{-kx}, \quad k > 0, \quad x \in [0; +\infty).$$

Знайти:
а) коефіцієнт a;
б) функцію розподілу випадкової величини ξ;
в) імовірність того, що величина ξ потрапить в інтервал $\left(0; \frac{1}{k}\right)$.

► а) Коефіцієнт a знаходимо з рівності

$$\int_0^\infty ax^2 e^{-kx} dx = 1$$

Звідси маємо:

$$a = \frac{1}{\int_0^\infty x^2 e^{-kx} dx}.$$

Послідовно інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_0^\infty x^2 e^{-kx}dx = -\frac{x^2}{k}e^{-kx}\Big|_0^\infty + \frac{2}{k}\int_0^\infty xe^{-kx}dx =$$

$$= -\frac{x^2}{k}e^{-kx}\Big|_0^\infty + \frac{2}{k}\left(-\frac{x}{k}e^{-kx}\Big|_0^\infty + \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-kx}dx\right) = \frac{2}{k^3}.$$

Отже, $a = \dfrac{k^3}{2}$.

б) Функцію розподілу визначаємо за формулою:

$$F_\xi(x) = \int_0^x p_\xi(x)dx = \int_0^x \frac{k^3}{2}x^2 e^{-kx}dx = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2}e^{-kx}.$$

в) Для ймовірності того, що випадкова величина ξ потрапить у заданий проміжок $\left(0;\dfrac{1}{k}\right)$, маємо:

$$P\left(0 < \xi < \frac{1}{k}\right) = F_\xi\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0,0803.\ ◄$$

Приклад 2.20. Система, яка стежить за процесом ціноутворення, містить систематичні та випадкові помилки. Систематична помилка дорівнює 0,5 цента у бік зниження. Випадкові помилки мають нормальний закон із середнім квадратичним відхиленням σ, що дорівнює 1 центу. Знайти:

а) імовірність фіксації ціни за абсолютною величиною 1,5 цента;

б) імовірність того, що зафіксована ціна не перевищить справжньої.

► а) Позначимо через ξ сумарну помилку фіксації. Її систематична складова $a = -0,5$ цента. Тоді щільність імовірності сумарної помилки має вигляд:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+0,5)^2}{2}}.$$

Далі маємо

$$P(|\xi| < 1,5) = P(-1,5 < \xi < 1,5) = \Phi_0\left(\frac{1,5+0,5}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{-1,5+0,5}{1}\right) = \Phi_0(2) - \Phi_0(-1).$$

Інтеграл імовірності є функцією непарною. Тому $\Phi(-1)=-\Phi(1)$. Звідси

$$P(|\xi|<1{,}5)=\Phi_0(2)+\Phi_0(1).$$

З таблиць інтеграла ймовірностей (див. табл. А.2 додатка) знаходимо $\Phi_0(2)\approx 0{,}4772$, $\Phi_0(1)\approx 0{,}3413$. Отже,

$$P(|\xi|<1{,}5)\approx 0{,}8185.$$

б) Імовірність того, що зафіксована ціна не перевищить справжньої

$$P(-\infty<\xi<0)=\Phi_0(0{,}5)+\Phi_0(\infty).$$

З табл. А.2 знаходимо $\Phi_0(0{,}5)\approx 0{,}1915$, $\Phi_0(\infty)\approx 0{,}5$. Отже,

$$P(-\infty<\xi<0)\approx 0{,}6915. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.21. ***Модель радіоактивного розпаду.*** Відомо, що радій Ra із часом перетворюється в радон Rn. У момент розпаду атом Ra випромінює альфа-частинку. Цей процес має випадковий характер. Припустимо, що кожен атом радію за час t перетворюється в атом радону з деякою ймовірністю $F(t)$, що залежить від t. Довести, що

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},$$

де λ – параметр, що характеризує швидкість розпаду.

► Розглянемо $G(t)=1-F(t)$ – ймовірність того, що частинка не розпадеться. Нехай τ – момент розпаду. Тоді

$$G(t)=P(\tau>t)=P(\tau>s+t|\tau>s),$$

$$G(s+t)=P(\tau>s+t)=P(\tau>s+t|\tau>s)\cdot P(\tau>s)=G(t)\cdot G(s).$$

Припустимо, що функція $G(t)$ диференційована. Нехай $G'(0)=-\lambda$. Диференціюючи обидві частини рівності за змінною s і вважаючи, що $s=0$, отримаємо:

$$G'(s+t)=G'(s)\cdot G(t),$$

$$G'(t)=G'(0)\cdot G(t),$$

$$G'(t)=-\lambda G(t).$$

Розв’язок цього диференціального рівняння з початковою умовою $G(0)=1$ має вигляд:

$$G(t)=e^{-\lambda t}.$$

Отже імовірність розпаду

$$F(t)=1-G(t)=1-e^{-\lambda t}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.22. ***Продовження.*** Нехай є n атомів радію. Довести, що час очікування τ першої альфа-частинки має показниковий розподіл з параметром $\mu=\lambda n$:

$$P(\tau>t)=e^{-\mu t}.$$

► Скористаємося попередньою задачею. Маємо:

$$P(\tau>1)=G(t)=P(\tau>s+t|\tau>s),$$

$$G(s+t)=P(\tau>s+t)=P(\tau>s+t|\tau>s)\cdot P(\tau>s)=G(t)\cdot G(s).$$

Нехай функція $G(t)$ диференційована, крім того $G'(0)=-\mu$. Тоді, диференціюючи обидві частини рівності

$$G(s+t)=G(t)\cdot G(s)$$

по s і вважаючи, що $s=0$, отримаємо:

$$G'(s+t)=G'(s)\cdot G(t),$$

$$G'(t)=G'(0)\cdot G(t),$$

$$G'(t)=-\mu G(t).$$

Звідки знаходимо

$$G(t)=P(\tau>t)=e^{-\mu t}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.23. Неперервна випадкова величина має функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ ax^2, & 0\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, $p(x)$, $P(-0,25<\xi<0,5)$. Побудувати графіки $F(x)$ і $p(x)$.

► За умовою задачі функція $F(x)$ неперервна. При $x=0$ розриву немає.

$$\lim_{x\to 1-0}F(x)=a;\ \lim_{x\to 1+0}F(x)=1.$$

Щоб при $x=1$ не було розриву, вибираємо $a=1$. Тоді

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2, & 0\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}\qquad p(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Графіки функції і щільності розподілу зображені на рис. 2.17, 2.18.

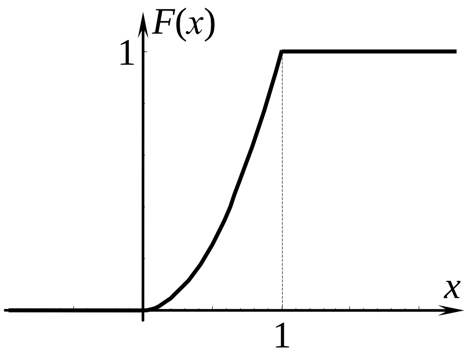


Рисунок 2.17

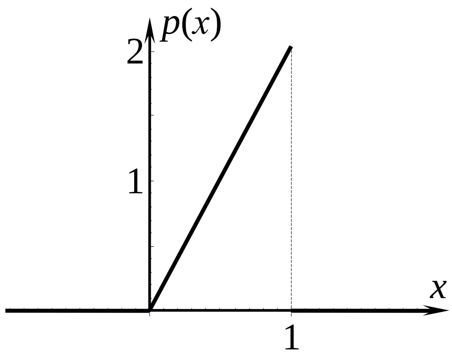


Рисунок 2.18

Знайдемо ймовірність того, що задана випадкова величина потрапить в інтервал $(-0,25;0,5)$:

$$P(-0,25<\xi<0,5)=F(0,5)-F(-0,25)=0,5^2-0=0,25$$

або

$$P(-0,25<\xi<0,5)=\int_{-0,25}^{0,5}p(x)dx=\int_{0}^{0,5}2xdx=0,25.$$ ◄

Приклад 2.24. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1{,}5$. Знайти ймовірність того, що ξ набуде значення з інтервалу $(1;\ 3)$.

► За умовою

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1{,}5e^{-1{,}5x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тоді

$$P(1 < \xi < 3) = \int_1^3 1{,}5e^{-1{,}5x}dx = -e^{-1{,}5x}\Big|_1^3 = e^{-1{,}5} - e^{-4{,}5} \approx 0{,}2120. ◄$$

Приклад 2.25. Ціна поділки амперметра дорівнює 0,1 А. Показання округляється до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка більша 0,025 А.

► Розглядатимемо помилку округлення як випадкову величину ξ, що розподілена рівномірно в інтервалі, в якому знаходяться можливі значення ξ; поза цим інтервалом $p(x) = 0$. У нашій задачі довжина інтервалу, в якому знаходяться можливі значення ξ, дорівнює 0,1, тому $p(x) = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$. Очевидно, що помилка відліку перевищить 0,025 А, якщо вона знаходитиметься в інтервалі $(0{,}025;\ 0{,}075)$. Імовірність цього

$$P(0{,}025 < \xi < 0{,}075) = \int_{0{,}025}^{0{,}075} 10dx = 0{,}5. ◄$$

Приклад 2.26. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Яка з двох подій $\{|\xi| \le 0{,}6\}$ чи $\{|\xi| > 0{,}6\}$ має більшу ймовірність?

► Зазначимо, що $P(|\xi| \le 0{,}6) = 1 - P(|\xi| > 0{,}6)$. Для $P(|\xi| \le 0{,}6)$ маємо:

$$P(|\xi| \le 0{,}6) = 2\Phi_0(0{,}6) \approx 2 \cdot 0{,}22575 = 0{,}4515.$$

Тоді

$$P(|\xi| > 0,6) \approx 1 - 0,4515 = 0,5485,$$

тобто

$$P(|\xi| > 0,6) > P(|\xi| \le 0,6). \blacktriangleleft$$

Приклад 2.27. Визначити середнє квадратичне відхилення приладу, якщо систематичних помилок він не має, а випадкові помилки розподілені нормально та з імовірністю 0,8064 не виходять за межі ± 20 мм.

► За умовою $P(|\xi| \le 20) = 0,8064$. Оскільки випадкові помилки розподілені нормально й $a = 0$ (систематичних помилок прилад не має), то $P(|\xi| \le 20) = 2\Phi_0\left(\frac{20}{\sigma}\right)$. Тоді невідоме середнє квадратичне відхилення задовольнятиме рівнянню $\Phi_0\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0,4032$, звідки $\frac{20}{\sigma} \approx 1,30$, $\sigma \approx 15,4$ мм. ◄

Приклад 2.28. Якої ширини має бути поле допуску, щоб з імовірністю, не більшою 0,0027 отримати деталь із контрольованим розміром поза полем допуску, якщо випадкові відхилення ξ розміру від ширини поля допуску розподілені нормально з параметрами $a = 0$, $\sigma = 3$ мк?

► Нехай l – відстань від середини поля допуску до межі цього поля. За умовою $P(|\xi| \le l) \ge 1 - 0,0027 = 0,9973$. Оскільки

$$P(|\xi| \le l) = 2\Phi_0\left(\frac{l}{3}\right),$$

то для визначення величини l маємо нерівність $2\Phi_0\left(\frac{l}{3}\right) \ge 0,9973$, звідки $\frac{l}{3} \ge 3$, $l \ge 9$. Тоді ширина поля допуску дорівнює $2l$, тобто має бути не меншою 18 мк. ◄

Приклад 2.29. Випадкова величина ξ розподілена нормально з $a = 0$. Визначити середнє квадратичне відхилення σ, при якому ймовірність $P(c < \xi < b)$ була б найбільшою ($0 < c < b$).

► Оскільки $a = 0$, то

$$P(c < \xi < b) = \Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{c}{\sigma}\right).$$

Для знаходження екстремуму розв'яжемо рівняння $\frac{dP(c<\xi<b)}{d\sigma}=0$. Маємо

$$\frac{dP(c<\xi<b)}{d\sigma}=-\frac{b}{\sigma^2}\varphi\left(\frac{b}{\sigma}\right)+\frac{c}{\sigma^2}\varphi\left(\frac{c}{\sigma}\right)=0,$$

де

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Після нескладних перетворень отримуємо $ce^{-\frac{c^2}{2\sigma^2}}=be^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}$ звідки

$$\sigma=\sqrt{\frac{b^2-c^2}{2\ln\frac{b}{c}}}.$$

Неважко перевірити, що за будь-яких $0<c<b<+\infty$

$$P(c<\xi<b)=\Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{c}{\sigma}\right)\to 0$$

при $\sigma\to 0$ і при $\sigma\to+\infty$. Тоді ймовірність $P(c<\xi<b)$ максимальна при

$$\sigma=\sqrt{\frac{b^2-c^2}{2\ln\frac{b}{c}}}. \blacktriangleleft$$

2.3.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.18. Чи будуть такі функції функціями розподілу:

а) $F(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\mathrm{arctg}x$;

б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x}{1+x}, & x>0;\end{cases}$

в) $F(x)=e^{-e^{-x}}$;   г) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\dfrac{1-e^{-x}}{x}, & x>0?\end{cases}$

Відповідь: а) ні; б) так; в) так; г) так.

Задача 2.19. Чи можна підібрати сталу C так, щоб функція $\dfrac{C}{x^3}$ була щільністю розподілу ймовірностей на:

а) промені $[1,\ +\infty)$; б) промені $[0,\ +\infty)$; в) відрізку $[-2,\ -1]$?

Відповідь: а) так ($C=2$); б) ні; в) так ($C=-\dfrac{8}{3}$).

Задача 2.20. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ξ дорівнює

$$p(x)=\frac{A}{1+x^2}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Знайти: а) коефіцієнт A; б) функцію розподілу $F(x)$; в) $P(x_1<\xi<x_2)$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{\pi}$; б) $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x$; в) $\dfrac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1)$.

Задача 2.21. Випадкова величина ξ має щільність

$$p(x)=\frac{A}{e^{-x}+e^{x}}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Знайти: а) коефіцієнт A; б) функцію розподілу $F(x)$; в) імовірність того, що в двох незалежних випробуваннях ξ отримає значення менші, ніж одиниця.

Відповідь: а) $\dfrac{2}{\pi}$; б) $F(x)=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}e^{x}$; в) $p=\left[F(1)\right]^2\approx 0,6015$.

Задача 2.22. Яким має бути A, щоб $p(x)=Ae^{-x^2}$ була щільністю ймовірності при $x\in(-\infty,+\infty)$?

Відповідь: $\sqrt{\pi}$.

Задача 2.23. Функція розподілу часу безвідмовної роботи деякого пристрою має такий вигляд

$$F(t)=1-e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t\geq 0.$$

Знайти: а) імовірність безвідмовної роботи пристрою протягом часу τ; б) щільність імовірності $p(t)$.

Відповідь: а) $\frac{1}{e}$; б) $p(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $t\geq 0$.

Задача 2.24. Випадкова величина ξ набуває значень з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ зі щільністю $p_\xi(x)=\frac{2}{\pi}\cos x^2$. Знайти ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях ξ отримає значення з інтервалу $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ саме k разів.

Відповідь: $C_n^k\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^k\left(\frac{3\pi-2}{4\pi}\right)^{n-k}$.

Задача 2.25. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Показання приладу округляють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка: а) менша 0,04; б) більша 0,05.

Відповідь: а) 0,4; б) 0,5.

Задача 2.26. Час ξ безвідмовної роботи пристрою розподілений за показниковим законом з параметром $\lambda=0{,}02$ год.$^{-1}$. Знайти ймовірність того, що за час $t=100$ год. пристрій: а) вийде з ладу; б) працюватиме без відмов.

Відповідь: а) $1-e^{-2}\approx 0{,}8647$; б) $e^{-2}\approx 0{,}1353$.

Задача 2.27. Випадкова величина ξ розподілена нормально з параметрами a і σ. Знайти ймовірність того, що величина ξ потрапить в інтервал $(a-3\sigma,\ a)$.

Відповідь: 0,49865.

Задача 2.28. Випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з $a=0$. Знайти середнє квадратичне відхилення σ, якщо ймовірність того, що випадкова величина ξ потрапить в інтервал $(-0{,}2;\ 0{,}2)$, дорівнює $0{,}77$.

Відповідь: 0,17.

Задача 2.29. Випадкова величина ξ розподілена нормально з $a=0$. Знайти таке σ, при якому ймовірність $P(2<\xi<7)$ була б максимальною.

Відповідь: 4,24.

2.4 Багатовимірні розподіли

2.4.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 2.30. Дано кореляційну матрицю системи чотирьох випадкових величин $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$

$$\Delta=\begin{pmatrix}15 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 16 & 6 & -2\\ 1 & 6 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Визначити щільність імовірності $p(x_1,x_2,x_3,x_4)$, якщо $M\xi_1=10$, $M\xi_2=0$, $M\xi_3=-10$, $M\xi_4=1$.

► Обчислимо алгебраїчні доповнення визначника $\Delta=\det\left\|k_{i,j}\right\|$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}16 & 6 & -2\\ 6 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}=28; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 6 & -2\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-13;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 16 & -2\\ 1 & 6 & 1\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=16; \qquad A_{14}=-\begin{vmatrix}3 & 16 & 6\\ 1 & 6 & 4\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=-14;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}15 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=162; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}15 & 3 & 0\\ 1 & 6 & 1\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=-291;$$

$$A_{24}=\begin{vmatrix}15 & 3 & 1\\ 1 & 6 & 4\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=205; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}15 & 3 & 0\\ 3 & 16 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=633;$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -405; \qquad A_{44} = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 404.$$

Визначник кореляційної матриці дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15A_{11} + 3A_{12} + A_{13} = 397.$$

При $i \neq j$ в показнику степеня є рівні доданки:

$$k_{i,j}^{(-1)}\left(x_i - M\xi_i\right)\left(x_j - M\xi_j\right) = k_{i,j}^{(-1)}\left(x_j - M\xi_j\right)\left(x_i - M\xi_i\right).$$

Тоді щільність імовірності дорівнює:

$$p\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \frac{1}{4\pi^2\sqrt{397}} \exp\left\{-\frac{1}{794}\left[28\left(x_1 - 10\right)^2 - 26\left(x_1 - 10\right)x_2 + \right.\right.$$

$$+32\left(x_1 - 10\right)\left(x_3 + 10\right) - 28\left(x_1 - 10\right)\left(x_4 - 1\right) + 162x_2^2 - 582x_2\left(x_3 + 10\right) +$$

$$\left.\left. +410x_2\left(x_4 - 1\right) + 633\left(x_3 + 10\right)^2 - 810\left(x_3 + 10\right)\left(x_4 - 1\right) + 404\left(x_4 - 1\right)^2\right]\right\}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.31. Випадкова точка $\left(\xi, \eta, \zeta\right)$ у просторі задана трьома прямокутними координатами, що складають систему нормальних випадкових величин зі щільністю ймовірностей:

$$p\left(x, y, z\right) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{8}\left[2x^2 + 4y^2 - 2y\left(z+5\right) + \left(z+5\right)^2\right]}.$$

Необхідно:

а) знайти кореляційну матрицю випадкових координат;

б) знайти геометричне місце точок, у яких щільність імовірності дорівнює 0,01.

► а) Очевидно,

$$p(x,y,z)=p_1(x)\,p_2(y,z),$$

де

$$p_1(x)=c_1e^{-\frac{x^2}{4}},$$

$$p_2(y,z)=c_2e^{-\frac{1}{2}\left[y^2-\frac{2y(z+5)}{4}+\frac{(z+5)^2}{4}\right]}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_\zeta\sqrt{1-\rho(\zeta,\eta)^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho(\zeta,\eta)^2\right)}\left[\frac{y^2}{\sigma_\eta^2}-2\rho(\zeta,\eta)\frac{y(z-M\zeta)}{\sigma_\eta\sigma_\zeta}+\frac{(z-M\zeta)^2}{\sigma_\zeta^2}\right]}.$$

Очевидно, $k_{xy}=k_{xz}=0$. Звідси випливає, що

$$D\xi=\sigma_\xi^2=2;\qquad D\eta=\sigma_\eta^2=\frac{1}{1-\rho(\zeta,\eta)^2};\qquad D\zeta=\sigma_\zeta^2=\frac{4}{1-\rho(\zeta,\eta)^2};$$

$$\frac{\rho(\zeta,\eta)}{\sigma_\eta\sigma_\zeta(1-\rho(\zeta,\eta)^2)}=\frac{1}{4};\qquad \rho(\zeta,\eta)=\frac{k_{yz}}{\sigma_\eta\sigma_\zeta}=0{,}5;\qquad k_{yz}=\frac{4}{3};$$

$$\Delta=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{4}{3}&\frac{4}{3}\\0&\frac{4}{3}&\frac{16}{3}\end{pmatrix}.$$

б) Шукане геометричне місце точок з постійною щільністю ймовірностей є поверхнею еліпсоїда:

$$2x^2+4y^2-2y(z+5)+(z+5)^2=-8\ln\frac{16\pi^{\frac{3}{2}}}{100\sqrt{3}}.\ ◄$$

Приклад 2.32. Дана щільність імовірності випадкового вектора (ξ,ζ):

$$p_{\xi,\zeta}(x,y)=\frac{1}{2}\sin(x+y),$$

де $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$. Знайти функцію розподілу цього вектора.

► Знайдемо функцію розподілу:

$$F_{\xi,\zeta}(x,y)=P(\xi<x,\zeta<y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\int\limits_0^y\sin(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\left[\sin x+\sin y-\sin(x+y)\right].\ ◄$$

Приклад 2.33. Відповідно до схеми Бернуллі з імовірністю успіху p та ймовірністю поразки $q=1-p$ проводяться два випробування. Виписати розподіл двовимірного випадкового вектора (ξ,η), де ξ, η – кількість успіхів в i -му випробуванні.

► Кожна з випадкових величин ξ і η може набувати двох значень: 0 або 1. Кількість успіхів в обох випробуваннях дорівнює нулю тоді, коли відбудуться дві поразки, а це за умови незалежності випробувань відбувається з імовірністю qq. Тому

$$P(\xi=0,\eta=0)=q^2.$$

Далі, $\xi=1$ і $\eta=0$, якщо в першому випробуванні мав місце успіх, а в другому – поразка. Отже,

$$P(\xi=1,\eta=0)=pq.$$

Аналогічно заповнюємо другий стовпчик:

$$P(\xi=0,\eta=1)=pq.$$

$$P(\xi=1,\eta=1)=p^2.$$

Таблиця розподілу вектора (ξ,η) має такий вигляд:

ξ	η		$P(\xi=x_i)$
	0	1	
0	q^2	pq	q
1	pq	p^2	p

$P(\eta = y_j)$	q	p

Побудуємо тепер сумісну функцію розподілу випадкових величин ξ і η:

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y).$$

Оскільки при $x \le 0$ чи $y \le 0$ немає жодного елементарного результату ω, для якого $\xi(\omega) < x$ або $\eta(\omega) < y$, то для таких x і y подія $(\xi < x, \eta < y)$ є неможливою. Отже

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = 0$$

при $x \le 0$ або $y \le 0$.

Далі, якщо $0 < x \le 1$ й $0 < y \le 1$, то подія $(\xi < x, \eta < y)$ еквівалентна події $(\xi = 0, \eta = 0)$, яка, як видно з таблиці, відбувається з імовірністю q^2 і

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = q^2.$$

Якщо ж $0 < x \le 1$, а $y > 1$, то подія $(\xi < x, \eta < y)$ збігається з об'єднанням несумісних подій

$$(\xi = 0, \eta = 0) \quad \text{і} \quad (\xi = 0, \eta = 1).$$

Тоді $F_{\xi,\eta}(x, y) = q^2 + pq = q$. Аналогічно

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = p^2 + pq = p$$

при $x > 1$ й $0 < y \le 1$.

Нарешті, якщо $x > 1$ й $y > 1$, то подія $(\xi < x, \eta < y)$ є достовірною, отже, $F_{\xi,\eta}(x, y) = 1$.

Остаточно маємо:

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ або } y \le 0; \\ q^2, & 0 < x \le, 0 < y \le 1; \\ q, & 0 < x \le 1, y > 1; \\ p, & x > 1, 0 < y \le 1; \\ 1, & x > 1, y > 1. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Приклад 2.34. Деякий технічний пристрій складається з двох різних за надійністю елементів, крім того час безвідмовної роботи першого елемента можна задати випадковою величиною ξ, а другого – η. Тоді надійність усього пристрою можна описати двовимірним випадковим вектором (ξ, η), що має невід'ємні координати ξ і η.

Нехай відомо, що для будь-яких $x \geq 0$ і $y \geq 0$ імовірність події $(\xi \geq x, \eta \geq y)$ визначається формулою

$$P(\xi \geq x, \eta \geq y) = \exp\left\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max(x, y)\right\},$$

де $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, і $\lambda_{12} \geq 0$. Знайти сумісну функцію розподілу $F_{\xi,\eta}(x, y)$ й одновимірні функції розподілу $F_\xi(x)$ й $F_\eta(y)$.

► Через невід'ємність ξ й η подія $(\xi \geq x)$ збігається з подією $(\xi \geq x, \eta \geq 0)$, а подія $(\eta \geq y)$ – з подією $(\xi \geq 0, \eta \geq y)$. Підставляючи 0 замість x та y у вираз для $P(\xi \geq x, \eta \geq y)$, отримуємо:

$$P(\xi \geq x) = P(\xi \geq x, \eta \geq 0) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}, \qquad x \geq 0;$$

$$P(\eta \geq y) = P(\xi \geq 0, \eta \geq y) = e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})y}, \qquad y \geq 0.$$

Звідси знаходимо одновимірні функції розподілу $F_\xi(x)$ й $F_\eta(y)$:

$$F_\xi(x) = 1 - P(\xi \geq x) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}, \qquad x \geq 0;$$

$$F_\eta(y) = 1 - P(\eta \geq y) = 1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})y}, \qquad y \geq 0.$$

Оскільки подія $(\xi < x, \eta < y)$ збігається з подією $\Omega \setminus ((\xi \geq x) \cup (\eta \geq y))$, то сумісна функція розподілу $F_{\xi,\eta}(x, y)$ має такий вигляд:

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = 1 - P((\xi \geq x) \cup (\eta \geq y)) = 1 - P(\xi \geq x) - P(\eta \geq y) + P(\xi \geq x, \eta \geq y) =$$

$$1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x} - e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})y} + e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max(x, y)}.$$

Очевидно, що значення сумісної функції розподілу $F_{\xi,\eta}(x, y)$ при $x < 0$ або $y < 0$ задається рівністю

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = 0.$$

Отримана функція розподілу задає ***двовимірний експоненціальний розподіл***. Цей розподіл моделює найпростіший випадок залежних відмов, за якого можуть одночасно відмовити обидва елементи. Крім того в теорії надійності λ_1 називають інтенсивністю відмови тільки першого елемента, λ_2 – тільки другого елемента і λ_{12} – одночасно і першого, і другого елементів. ◄

Приклад 2.35. Визначити, в якому випадку компоненти ξ й η з прикладу 2.35 будуть незалежними.

► Зазначимо, що при $x < 0$ або $y < 0$

$$F_{\xi}(x) F_{\eta}(y) = 0 = F_{\xi,\eta}(x, y).$$

Якщо $x, y > 0$, то

$$F_{\xi}(x) F_{\eta}(y) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x} - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})y} + e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}(x+y)}.$$

Неважко побачити, що добуток $F_{\xi}(x) F_{\eta}(y)$ збігається при всіх x, y з сумісною функцією розподілу

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x} - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})y} + e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}\max(x, y)}, & x \geq 0 \text{ і } y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \text{ або } y < 0, \end{cases}$$

тільки в тому випадку, коли $\lambda_{12} = 0$. Таким чином, умова $\lambda_{12} = 0$ є необхідною і достатньою, щоб часи безвідмовної роботи елементів були незалежними. ◄

Приклад 2.36. Двовимірна випадкова величина (ξ, η) має сумісну функцію розподілу

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y}, & x > 0 \text{ і } y > 0; \\ 0, & x \leq 0 \text{ або } y \leq 0, \end{cases}$$

Знайти:

а) імовірності подій $(-2 \leq \xi < 2, 1 \leq \eta < 3)$, $(\xi \geq 0, \eta \geq 1)$ і $(\xi < 1, \eta \geq 2)$;

б) одновимірні функції розподілу випадкових величин ξ та η.

► а) Відповідно до властивостей функції розподілу маємо:

$$P(-2 \leq \xi < 2, 1 \leq \eta < 3) = F(2, 3) - F(2, 1) - F(-2, 3) + F(-2, 1) =$$

$$1-e^{-4}-e^{-6}+e^{-10}-\left(1-e^{-4}-e^{-2}+e^{-6}\right)-0+0=e^{-2}-2e^{-6}+e^{-10}.$$

Подія $(\xi \geq 0, \eta \geq 1)$ – потрапляння двовимірної випадкової величини (ξ, η) у квадрант $(x \geq 0,\, y \geq 1)$. Тому

$$P(\xi \geq 0, \eta \geq 1) = F(+\infty, +\infty) - F(+\infty, 1) - F(0, +\infty) + F(0,1) =$$

$$=1-\left(1-e^{-2}\right)-0+0=e^{-2}.$$

Аналогічно

$$P(\xi < 1, \eta \geq 2) = F(1, +\infty) - F(1, 2) - F(-\infty, +\infty) + F(-\infty, 2) =$$
$$1-e^{-1}-\left(1-e^{-1}-e^{-4}+e^{-5}\right)-0+0=e^{-4}-e^{-5}.$$

б) Відповідно до властивостей функції розподілу одновимірні розподіли випадкових величин ξ і η задаються формулами

$$F_\xi(x) = F_{\xi,\eta}(x, +\infty) = \begin{cases} 1-e^{-x^2}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = F_{\xi,\eta}(+\infty, y) = \begin{cases} 1-e^{-2y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \blacktriangleleft$$

2.4.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.30. Роблять два постріли в мішень з імовірністю влучення в мішень при одному пострілі, рівною p. Нехай ξ – кількість пострілів до першого влучення (включно), η – кількість промахів.

а) Знайти спільний закон розподілу $P_{\xi,\eta}$ та маргінальні закони P_ξ і P_η.

б) Обчислити ймовірність $P(\xi = \eta)$.

в) Визначити, залежні чи ні випадкові величини ξ й η.

Відповідь: а)

ξ	η			$P(\xi = x_i)$
	0	1	2	
1	p^2	pq	0	p

2	0	pq	q^2	q
$P(\eta = y_j)$	p^2	$2pq$	q^2	

б) $P(\xi = \eta) = q$; в) залежні.

Задача 2.31. Кидають два симетричні гральні кубики. Випадкові величини: $\xi = 1$, якщо сума очок, що випали, парна і $\xi = 0$ в іншому випадку; $\eta = 1$, якщо добуток числа очок, що випали, парний і $\eta = 0$ в іншому випадку.

а) Описати закон розподілу випадкового вектора (ξ, η).

б) Побудувати функцію розподілу $F_{\xi,\eta}(x, y)$.

Відповідь: а)

ξ	η		$P(\xi = x_i)$
	0	1	
0	0	0,5	0,5
1	0,25	0,25	0,5
$P(\eta = y_j)$	0,25	0,75	

б)

x	y		
	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0	0,5
$x > 1$	0	0,25	1

Задача 2.32. Розподіл дискретного випадкового вектора (ξ, η) має такий вигляд:

ξ	η			
	10	20	30	40
0,5	0,05	0,12	0,08	0,04
2,5	0,09	0,30	0,11	0,21

Знайти: а) одновимірні закони розподілу випадкових величин ξ й η;

б) значення $F(x, y)$ в точках $(3{,}2;\ 15)$ і $(2;\ 31)$;

в) імовірність події $(0 \le \xi \le 2,\ 10 \le \eta \le 25)$.

г) Перевірити, чи є величини ξ й η незалежними.

Відповідь: а)

ξ	0,5	2,5
P_ξ	0,29	0,71

η	10	20	30	40
P_η	0,14	0,42	0,19	0,25

б) $F(3{,}2;\ 15)=0{,}14$; $F(2;\ 31)=0{,}25$; в) 0,17; г) не є.

Задача 2.33. Визначити ймовірність потрапляння випадкової точки (ξ,η) в зображену на рис. 2.19 область D, якщо відома функція розподілу $F(x,y)$.

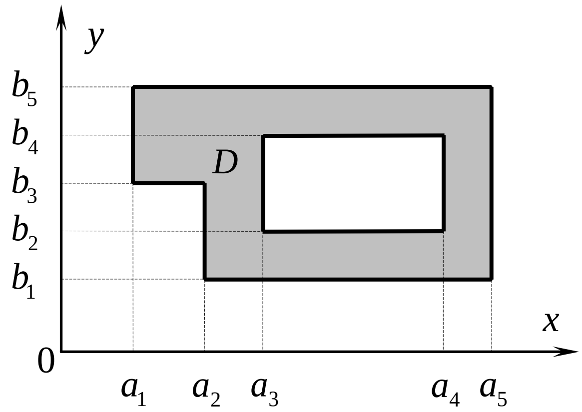


Рисунок 2.19

Відповідь:

$$P((\xi,\eta)\in D)=F(a_1,b_3)-F(a_1,b_5)+F(a_2,b_1)-F(a_2,b_3)+F(a_3,b_4)-$$
$$-F(a_3,b_2)+F(a_4,b_2)-F(a_4,b_4)+F(a_5,b_5)-F(a_5,b_1).$$

Задача 2.34. Щільність випадкового вектора (ξ,η) визначається формулою

$$p(x,y)=\frac{A}{\pi^2\left(16+x^2\right)\left(25+y^2\right)}.$$

Знайти: а) сталу A; б) функцію розподілу $F(x,y)$.

Відповідь: а) 20; б) $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$.

Задача 2.35. Випадкова точка (ξ,η) розподілена рівномірно всередині прямокутника $[0,a]\times[0,b]$, $a>b$. Визначити ймовірність того, що точка (ξ,η) потрапить у коло радіуса R із центром у початку координат.

Відповідь: $p = \begin{cases} \dfrac{\pi R^2}{4ab}, & 0 \le R \le b; \\ \dfrac{R^2}{4ab}\left(\pi - 2\beta + \sin 2\beta\right), & b \le R \le a; \\ \dfrac{R^2}{4ab}\left(\pi - 2\alpha - 2\beta + \sin 2\alpha + \sin 2\beta\right), & a \le R \le \sqrt{a^2+b^2}; \\ 1, & R \ge \sqrt{a^2+b^2}; \end{cases}$

де $\alpha = \arccos\dfrac{a}{R}$, $\beta = \arccos\dfrac{b}{R}$.

Задача 2.36. Сумісний розподіл ξ й η є рівномірним у колі $x^2 + y^2 \le 1$. Знайти $P\left(|\xi| \le \dfrac{3}{4},\ |\eta| \le \dfrac{3}{4}\right)$.

Відповідь: $1 - \dfrac{1}{\pi}\left(4\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{3} - \dfrac{\sqrt{63}}{4}\right)$.

Задача 2.37. Сумісна щільність розподілу ξ й η має такий вигляд:

$$p(x,y) = \frac{C}{\left(x^2 + y^2 + \pi\right)^2}.$$

Знайти: а) коефіцієнт C; б) одновимірні щільності $p_\xi(x)$ й $p_\eta(y)$.

Відповідь: а) $C = 1$; б) $p_\xi(x) = \dfrac{\pi}{2\left(x^2+\pi\right)\sqrt{x^2+\pi}}$; $p_\eta(y) = \dfrac{\pi}{2\left(y^2+\pi\right)\sqrt{y^2+\pi}}$.

Задача 2.38. Чи будуть дискретні випадкові величини ξ й η незалежними, якщо їх сумісний розподіл має такий вигляд:

ξ	η			
	–3	–1	1	3
–1	0,06	0,02	0,04	0,08
0	0,15	0,05	0,10	0,20
1	0,09	0,03	0,06	0,12

Відповідь: будуть.

Задача 2.39. Двовимірна випадкова величина (ξ,η) має сумісну функцію розподілу:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \text{ або } y\le 0; \\ \sin x\sin y, & 0<x\le\frac{\pi}{2} \text{ і } 0<y\le\frac{\pi}{2}; \\ \sin x, & 0<x\le\frac{\pi}{2} \text{ і } y>\frac{\pi}{2}; \\ \sin y, & x>\frac{\pi}{2} \text{ і } 0<y\le\frac{\pi}{2}; \\ 1, & x>\frac{\pi}{2} \text{ і } y>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти: а) імовірності подій

$$A=\left\{-1\le\xi<\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{6}\le\eta<\frac{\pi}{3}\right\},\quad B=\left\{\xi\ge\frac{\pi}{4},\ \eta\ge\frac{\pi}{4}\right\},\qquad C=\left\{\xi<\frac{\pi}{3},\ \eta>\frac{\pi}{6}\right\};$$

б) одновимірні функції розподілу випадкових величин ξ й η.

Відповідь: а) $P(A)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $P(B)=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$, $P(C)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

б) $F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le\frac{\pi}{2}; \\ 1, & x>\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $F_\eta(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0; \\ \sin y, & 0<y\le\frac{\pi}{2}; \\ 1, & y>\frac{\pi}{2}; \end{cases}$

Задача 2.40. Щільність розподілу ймовірностей вектора (ξ,η) має такий вигляд:

$$p(x,y)=\begin{cases} 3^{-x-y}\ln 3, & x>0 \text{ і } y>0; \\ 0, & x\le 0 \text{ або } y\le 0. \end{cases}$$

Знайти: а) сумісну функцію розподілу; б) щільності розподілу компонентів; в) ймовірність потрапляння в трикутник з вершинами $A(2;\ 1)$, $B(2;\ 2)$, $C(5;\ 1)$.

Відповідь: а) $F(x,y)=\begin{cases} \left(1-3^{-x}\right)\left(1-3^{-y}\right), & x>0 \text{ і } y>0; \\ 0, & x\le 0 \text{ або } y\le 0; \end{cases}$

б) $p_\xi(x)=\begin{cases}3^{-x}\ln 3, & x\ge 0;\\ 0, & x<0;\end{cases}$ $\quad p_\eta(y)=\begin{cases}3^{-y}\ln 3, & y\ge 0;\\ 0, & y<0;\end{cases}$

в) $\dfrac{14}{27^2}$.

3 ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1 Теоретичні відомості

Нехай ξ – деяка випадкова величина. ***Функцією*** $f(\xi)$ ***випадкової величини*** ξ називають випадкову величину η, що набуває значення $y = f(x)$, якщо випадкова величина ξ отримує значення x.

Тут $f(x)$ – деяка однозначна функція, визначена на множині всіх можливих значень випадкової величини ξ.

Розгляд властивостей функцій випадкових величин почнемо з дискретного типу.

Нехай ξ – дискретна випадкова величина, що набуває значення x_i з імовірністю $P(\xi = x_i)$. Визначимо $y_i = f(x_i)$ – можливі значення функції $\eta = f(\xi)$.

У випадку, коли всі значення $f(x_i)$ різні (це означає, що випадкова величина η приймає значення y_i лише тоді, коли випадкова величина ξ приймає значення x_i), то

$$P(\eta = y_i) = P(\xi = x_i).$$

У випадку, коли деякі значення $f(x_i)$ збігаються, то

$$P(\eta = y_i) = \sum_k P(\xi = x_k).$$

Тут сума береться за всіма k, для яких $f(x_i) = y_i$.

Нехай тепер ξ – абсолютно неперервна випадкова величина і функція $f(x)$ в інтервалі можливих значень випадкової величини ξ неперервна разом зі своєю першою похідною.

З’ясуємо залежність між щільностями $p_\xi(x)$ і $p_\eta(y)$ ($\eta = f(\xi)$).

Припустимо, що функція $y = f(x)$ монотонна і строго зростає в інтервалі можливих значень випадкової величини ξ. У цьому випадку кожному інтервалу (x_1, x_2) взаємно однозначно відповідає інтервал (y_1, y_2). Тому ймовірність потрапляння випадкової величини ξ в інтервал $(x, x + \Delta x)$ та ймовірність потрапляння випадкової величини $\eta = f(\xi)$ в інтервал $(y, y + \Delta y)$ дорівнюють (рис. 3.1), тобто

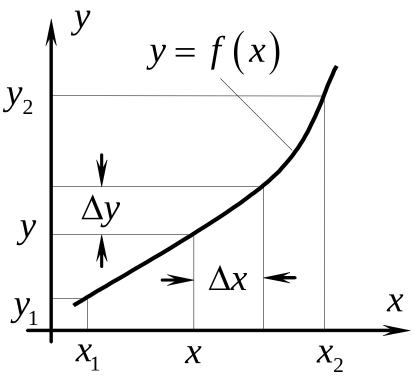


Рисунок 3.1

$$P\left(x<\xi<x+\Delta x\right)=P\left(y<\eta<y+\Delta y\right).$$

Оскільки ξ – абсолютно неперервна випадкова величина, то

$$P(x<\xi<x+\Delta x)=p_\xi(x)dx+o(dx).$$

Зі зроблених вище припущень щодо функції $y=f\left(x\right)$ випливає існування оберненої функції $x=g\left(y\right)$, також неперервно диференційовної, крім того $dx=g'\left(y\right)dy$. Тому

$$P\left(y<\eta<y+\Delta y\right)=p_\xi\left(x\right)dx+o\left(dx\right)=p_\xi\left(g\left(y\right)\right)g'\left(y\right)dy+o\left(dy\right).$$

З останньої рівності випливає, що випадкова величина $\eta=f\left(x\right)$ також абсолютно неперервна і має щільність

$$p_\eta\left(y\right)=p_\xi\left(g\left(y\right)\right)g'\left(y\right)=p_\xi\left(x\right)\frac{dx}{dy}.$$

Якщо ж $f\left(x\right)$ монотонно спадає (у цьому випадку позитивному збільшенню dx відповідає негативне збільшення dy) у формулі для $p_\eta\left(y\right)$ слід замінити dy на $\left|dy\right|$. Таким чином, для будь-якої монотонної функції $y=f\left(x\right)$:

$$p_\eta\left(y\right)=p_\xi\left(x\right)\left|\frac{dx}{dy}\right|=p_\xi\left(g\left(y\right)\right)\cdot\left|g'\left(y\right)\right|.$$

Якщо відмовитися від вимоги монотонності функції $y=f\left(x\right)$, то знаходження залежності між щільностями $p_\xi\left(x\right)$ і $p_\eta\left(y\right)$ пов'язане з деякими труднощами. У цьому випадку необхідно виділити однозначні гілки оберненої функції і застосувати доведену вище формулу та властивість адитивності ймовірності. Визначимо цю залежність для квадратичної функції $\eta=\xi^2$.

Вважатимемо, що інтервал можливих значень випадкової величини ξ симетричний відносно початку координат. Обернена функція має дві однозначні гілки (рис. 3.2):

$$x=g_1\left(y\right)=\sqrt{y} \quad \text{і} \quad x=g_2\left(y\right)=-\sqrt{y}.$$

Тому

$$P\left(y<\eta<y+\Delta y\right)=P\left(\sqrt{y}<\xi<\sqrt{y+\Delta y}\right)+P\left(-\sqrt{y+\Delta y}<\xi<-\sqrt{y}\right).$$

Застосуємо до кожної з гілок отриману вище формулу для монотонної функції. При $y>0$ маємо

$$p_\eta\left(y\right)=p_\xi\left(\sqrt{y}\right)\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|+p_\xi\left(-\sqrt{y}\right)\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=\left(p_\xi\left(\sqrt{y}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{y}\right)\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

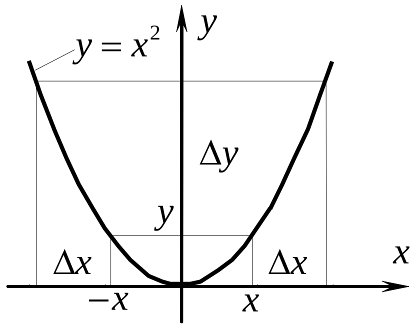


Рисунок 3.2

Для $y<0$ слід вважати $p_\eta\left(y\right)=0$.

Нехай ξ_1 й ξ_2 – незалежні випадкові величини, а φ_1 й φ_2 – деякі борелівські функції. Тоді випадкові величини $\eta_1=\varphi_1\left(\xi_1\right)$ і $\eta_2=\varphi_2\left(\xi_2\right)$ також незалежні.

Нехай ξ та η – абсолютно неперервні випадкові величини. Розглянемо двовимірний випадковий вектор $\left(\xi,\eta\right)$. Його можна тлумачити, наприклад, як функцію координати випадкової точки на площині. Нехай $p_{\xi,\eta}\left(x,y\right)$ – щільність розподілу випадкового вектора $\left(\xi,\eta\right)$. Виразимо щільність $p_\eta\left(y\right)$ випадкової величини η через щільність сумісного розподілу $p_{\xi,\eta}\left(x,y\right)$. Потрапляння випадкової величини η в інтервал $\left(y,\,y+\Delta y\right)$ еквівалентне потраплянню точки $\left(\xi,\eta\right)$ в горизонтальну смугу (рис. 3.3):

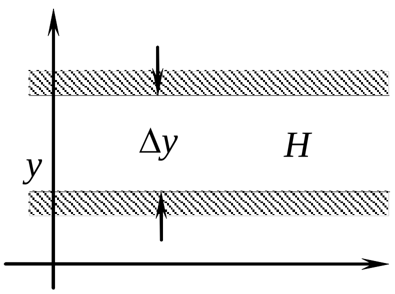


Рисунок 3.3

$$H=\left\{\xi-\text{будь-яке};\ y<\eta<y+\Delta y\right\}.$$

Таким чином,

$$P\left(y<\eta<y+\Delta y\right)=P\left(\left(\xi,\eta\right)\in H\right).$$

Маємо

$$P\left(\left(\xi,\eta\right)\in H\right)=\iint\limits_H p_{\xi,\eta}\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{y}^{y+\Delta y}p_{\xi,\eta}\left(x,y\right)dy.$$

Отже, для будь-яких y і Δy $(\Delta y > 0)$:

$$P\left(y < \eta < y + \Delta y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{y}^{y+\Delta y} p_{\xi,\eta}\left(x, y\right) dy = \int\limits_{y}^{y+\Delta y} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}\left(x, y\right) dx \,.$$

З визначення абсолютно неперервної випадкової величини випливає, що η має щільність, яка дорівнює

$$p_{\eta}\left(y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}\left(x, y\right) dx \,.$$

Для щільності випадкової величини ξ можна отримати такий вираз:

$$p_{\xi}\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}\left(x, y\right) dy \,.$$

Для дискретної випадкової величини справедливі аналогічні формули:

$$P\left(\xi = x_i\right) = \sum_{j} P\Big(\left(\xi, \eta\right) = \left(x_i, y_j\right)\Big), \qquad P\left(\xi = y_j\right) = \sum_{i} P\Big(\left(\xi, \eta\right) = \left(x_i, y_j\right)\Big).$$

Припустимо, що в деякій області A евклідового простору $\mathbb{R}^n$ визначена система з n неперервно диференційовних функцій $y_i = g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, що мають однозначний розв’язок відносно $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$: $x_i = g_i^{-1}\left(y_1, \ldots, y_n\right)$, при цьому в області A якобіан

$$J = \frac{\partial\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial\left(y_1, \ldots, y_n\right)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0 \,.$$

Далі, нехай B – образ A у просторі значень $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$. Розглянемо абсолютно неперервний випадковий вектор $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ зі щільністю $p_{\xi}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$. Тоді випадкові величини $\eta_i = g_i\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)$ будуть також абсолютно не перервними, до того ж щільність їх спільного розподілу $p_\eta(y_1,\ldots,y_n)$ дорівнює

$$p_\eta(y_1,\ldots,y_n) = p_\xi(x_1,\ldots,x_n)|J|.$$

Крім того,

$$P\left(\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in A\right) = \int_A p_\xi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \int_B p_\eta(x_1,\ldots,x_n)|J|dy_1\ldots dy_n =$$

$$\int_B p_\xi(y_1,\ldots,y_n)dy_1\ldots dy_n = P\left(\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \in B\right).$$

Розглянемо окремий випадок цієї загальної формули. Розглядатимемо абсолютно неперервну випадкову величину (ξ,η). Нехай $u = f(x,y)$ неперервно диференційовна в області D можливих значень випадкової величини (ξ,η). Вважатимемо, що лінії рівня функції $f(x,y)$ покривають область D, не перетинаючись між собою. Розглянемо випадкову величину $\zeta = f(\xi,\eta)$. Імовірність того, що випадкова величина ζ потрапить в інтервал $(u, u+\Delta u)$, дорівнює ймовірності потрапляння випадкової точки (ξ,η) у смугу H, обмежену лініями рівня $f(x,y) = u$ і $f(x,y) = u+\Delta u$ (рис. 3.4). Тобто

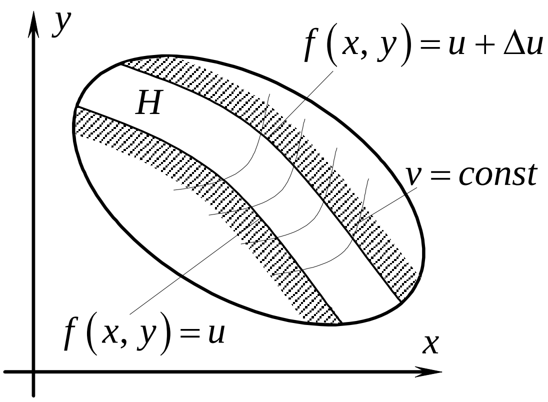


Рисунок 3.4

$$P(u < \zeta < u+\Delta u) = P\left((\xi,\eta) \in H\right) = \iint_H p_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy.$$

Перейдемо до криволінійних координат (u,v). За координатні лінії оберемо лінії рівня функції $f(x,y)$, а за координатні лінії v візьмемо будь-яке сімейство гладких кривих, що перетинають всі лінії рівня та не перетинаються між собою.

Знайдемо x і y з рівнянь

$$u = f(x,y), \qquad v = v(x,y).$$

Отримаємо:

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v).$$

Після заміни змінних у подвійному інтегралі маємо:

$$P(u<\zeta<u+\Delta u)=\iint\limits_{H} p_{\xi,\eta}(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=$$

$$=\int\limits_{u}^{u+\Delta u} du \int\limits_{v_1(u)}^{v_1(u)} p_{\xi,\eta}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

Тут

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

є якобіан перетворення координат, $v_1(u)$ і $v_2(u)$ – нижня і верхня межі зміни координати v на лінії рівня u.

З вищевикладеного випливає, що випадкова величина $\zeta=f(\xi,\eta)$ абсолютно неперервна та має таку щільність розподілу:

$$p_{\zeta}(u)=\int\limits_{v_1(u)}^{v_1(u)} p_{\xi,\eta}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dv,$$

де інтеграл береться уздовж лінії рівня u.

3.2 Приклади розв’язання задач

Приклад 3.1. Функція розподілу випадкової величини ξ є $F_{\xi}(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta=\alpha\xi+\beta$.

► За визначенням

$$F_{\xi}(x)=P(\xi<x),$$

$$F_{\eta}(y)=P(\eta<y)=P(\alpha\xi+\beta<y)=P(\alpha\xi<y-\beta)=$$

$$= \begin{cases} P\left(\xi < \dfrac{y-\beta}{\alpha}\right) = F_\xi\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right), & \alpha > 0, \\ P\left(\xi > \dfrac{y-\beta}{\alpha}\right) = 1 - F_\xi\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right), & \alpha < 0, \end{cases} \qquad \alpha \neq 0. ◄$$

Приклад 3.2. Дано щільність імовірності $p_\xi(x)$ випадкової величини ξ ($0 \le x < +\infty$). Знайти щільність імовірності випадкової величини $\eta = \ln \xi$.

► Маємо $\eta = \ln \xi$, тоді $y = \ln x$. Звідси знайдемо, що $x = e^y$. Щільність імовірності величини η знайдемо за формулою:

$$p_y(y) = p_\xi(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

У нашому випадку $\left|\dfrac{dx}{dy}\right| = e^y$. Тоді

$$p_\eta(y) = p_\xi(x) \cdot e^y = p_\xi\left(e^y\right) \cdot e^y. ◄$$

Приклад 3.3. Знайти щільність імовірності випадкової величини $\eta = \alpha\xi^2$ ($\alpha > 0$), якщо ξ – нормальна випадкова величина з параметрами $(0, \sigma)$.

► За умовою щільність імовірності випадкової величини ξ виражається формулою

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Маємо $\eta = \alpha\xi^2$. Тоді $y = \alpha x^2$, звідси $x = \pm\sqrt{\dfrac{y}{\alpha}}$.

Щільність імовірності випадкової величини η знайдемо за формулою:

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| + p_\xi\left(-\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = 2p_\xi\left(\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|,$$

оскільки $p_\xi(x)$ – парна. Далі, $\left|\dfrac{dx}{dy}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha y}}$. Тоді

$$p_\eta(y) = 2p_\xi\left(\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha y}} = p_\xi\left(\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha y}} = \begin{cases}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\alpha y}}e^{-\frac{y}{2\alpha\sigma^2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases} \blacktriangleleft$$

Приклад 3.4. Знайти щільність імовірності випадкової величини $\eta = |\xi|$, якщо ξ – нормальна випадкова величина з параметрами $(0,\sigma)$.

► Маємо

$$\eta = |\xi| = \begin{cases}\xi, & \xi \ge 0;\\ -\xi, & \xi < 0;\end{cases}$$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Величина $y = |x|$. Звідси

$$\begin{cases}x_1 = y,\\ x_2 = -y.\end{cases}$$

Шукану функцію знайдемо за формулою:

$$p_\eta(y) = p_\xi(y)\cdot\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + p_\xi(-y)\cdot\left|\frac{dx_2}{dy}\right| = 2p_\xi(y)\cdot\left|\frac{dx_1}{dy}\right| = 2p_\xi(y).$$

оскільки $\left|\frac{dx_1}{dy}\right| = \left|\frac{dx_2}{dy}\right| = 1$. Тоді

$$p_\eta(y) = \begin{cases}\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y \ge 0;\\ 0, & y<0.\end{cases} \blacktriangleleft$$

Приклад 3.5. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена в інтервалі $[a,b]$, а $F_\xi(x)$ – її функція розподілу. Знайти щільність імовірності випадкової величини η, якщо $\eta = F_\xi(x)$.

► За умовою ξ має рівномірний розподіл, тоді

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 1, & x > b. \end{cases}.$$

За визначенням, при $y \in (0,1)$

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P\big(F_\xi(x) < y\big) = P(\xi < x) = F_\xi(x) = y\ .$$

Коли $y \le 0$, то

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P\big(F_\xi(x) < 0\big) = 0\,,$$

оскільки $0 \le F_\xi(x) \le 1$.

При $y \ge 1$

$$F_\xi(y) = P(\eta < y) = P\big(F_\xi(x) < 1\big) = 1\,.$$

Тоді

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y, & y \in (0,1), \\ 1, & y \ge 1. \end{cases}$$

Оскільки $p_\eta(x) = F'_\eta(y)$, то

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0,1); \\ 1, & y \in (0,1). \end{cases}$$ ◄

Приклад 3.6. Випадкова величина ξ задана формулою

$$\xi = \begin{cases} \sqrt{\eta}, & \eta \ge 0, \\ \sqrt{-\eta}, & \eta < 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини ξ, якщо η – нормально розподілена випадкова величина з параметрами $(0,1)$.

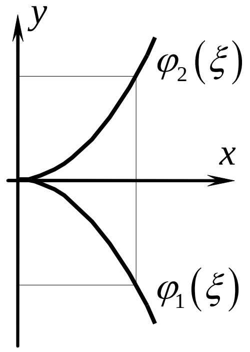


Рисунок 3.5

► Обернена функція двозначна, оскільки одному значенню ξ відповідають два значення η (рис. 3.5):

$$\eta_1 = -\xi^2 \equiv \psi_1(\xi),$$

$$\eta_2 = \xi^2 \equiv \psi_2(\xi).$$

Оскільки $\dfrac{dy_1}{dx} = -2x$, $\dfrac{dy_2}{dx} = 2x$, $p_\eta(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$, то за загальною формулою маємо:

$$p_\xi(x) = p_\eta\left(-x^2\right)\left|\frac{dy_1}{dx}\right| + p_\eta\left(x^2\right)\left|\frac{dy_2}{dx}\right| = \begin{cases} \dfrac{4x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^4}{2}}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$ ◄

Приклад 3.7. Через точку $A(0;l)$ навмання проведена пряма. Нехай пряма перетнула вісь Ox під кутом φ. Знайти щільність імовірності випадкової величини $\eta = l\cos\varphi$ (рис.3.6).

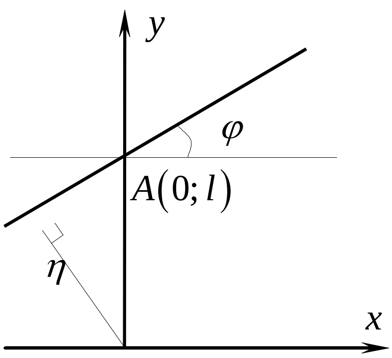


Рисунок 3.6

► Кут φ є випадковою величиною, рівномірно розподіленою в інтервалі $(0;\pi)$. Оскільки при цьому обернена функція $\psi(y) = \arccos\dfrac{y}{l}$ є однозначною (зі збільшенням кута φ від 0 до π функція монотонно спадає), то для визначення щільності ймовірності випадкової величини η застосовується формула

$$p_\eta(y) = p_\varphi\left[\psi(y)\right]\left|\psi'(y)\right|.$$

У цьому випадку

$$\left|\psi'(y)\right| = \frac{l}{l\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{l}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{l^2 - y^2}};$$

$$p_\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & 0\le x\le\pi;\\ 0, & x\notin[0,\pi].\end{cases}$$

Отже,

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{l^2-y^2}}, & |y|\le l;\\ 0, & |y|>l.\end{cases}\ ◄$$

Приклад 3.8. Система випадкових величин (ξ,η) розподілена нормально із щільністю ймовірностей

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2\sigma^2}}.$$

Знайти щільність імовірності системи $(R,\varPhi)$, якщо $\xi=R\cos\varPhi$, $\eta=R\sin\varPhi$

.

► Застосуємо формулу

$$p(r,\varphi)=p\left[x(r,\varphi),y(r,\varphi)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|,$$

де

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=r.$$

Тоді

$$p(r,\varphi)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}{2\sigma^2}}=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.\ ◄$$

Приклад 3.9. Знайти щільність довжини радіус-вектора, якщо координати його кінця A мають нормальний круговий закон розподілу

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi a^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2}}$$

► Перейдемо до полярних координат (r, φ). Імовірність влучення радіус-вектора в інтервал $(r, r+dr)$ дорівнює $p_r(r)dr$ і може бути знайдена як імовірність влучення випадкової точки A в нескінченно вузьке кільце, показане на рис. 3.7.

Отже,

$$p_r(r)dr = \iint\limits_{r^2 \le x^2+y^2 \le (r+dr)^2} p(x, y)dxdy .$$

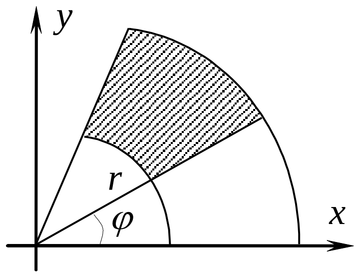


Рисунок 3.7

Переходячи до змінних інтегрування r і φ, враховуючи вираз для $p(x, y)$, отримаємо

$$p_r(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} d\varphi = \frac{r}{a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} . \blacktriangleleft$$

Приклад 3.10. Нехай випадкові величини ξ і η мають щільність сумісного розподілу $p(x, y)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

► Функція $z = x + y$ має лінії рівня, паралельні прямій $y = -x$. Задамо координати z і v формулами $z = x + y$ і $v = x$. Оскільки $x = v$, $y = z - v$, то якобіан перетворення

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(z, v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

На кожній лінії рівня $x + y = z$ координата v змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Тому щільність розподілу випадкової величини ζ має такий вигляд:

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(v, z-v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x)dx .$$

Якщо випадкові величини ξ і η незалежні, то

$$p(x, z-x) = p(x)p(z-x) .$$

тоді

$$p_{\zeta}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)\,p_{\eta}(z-x)\,dx. \blacktriangleleft$$

Приклад 3.11. Задано сумісну щільність розподілу випадкових величин ξ і η, $\xi>0$, $\eta>0$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta=\xi\eta$.

► Лініями рівня функції $z=xy$ є сімейство гілок гіпербол $xy=const$, що лежать у першій чверті. За нові координати виберемо $z=xy$, $v=x$. Отже, $v=x$, $y=\dfrac{z}{v}$. Якобіан такого перетворення

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,v)}=\begin{vmatrix}0 & \dfrac{1}{v}\\ 1 & -\dfrac{z}{v^2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{v}.$$

Тому шукана щільність

$$p_{\zeta}(z)=\int_{0}^{\infty} p\left(v,\frac{z}{v}\right)\frac{1}{v}dv=\int_{0}^{\infty} p\left(x,\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x} \qquad \text{при } z>0.$$

При $z<0$ $p_{\zeta}(z)=0$. ◄

Приклад 3.12. Сумісну щільність $p(x,y)$ випадкових величин ξ і η задано. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

► Лініями рівня функції $r=\sqrt{x^2+y^2}$ є сімейство окружностей з центром в початку координат. За нові координати виберемо полярні координати r і φ. Враховуючи, що якобіан цього перетворення дорівнює r і на кожній лінії рівня φ змінюється від 0 до 2π, отримуємо

$$p_{\rho}(r)=\int_{0}^{2\pi} g(r)\,r\,d\varphi=2\pi r g(r), \qquad r>0.$$

Відзначимо випадок, коли точка (ξ,η) розподілена рівномірно в колі радіуса R. Тут

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \le R; \\ 0, & x^2 + y^2 > R. \end{cases}$$

Отже, $p_\rho(r) = \dfrac{2r}{R^2}$ при $r < R$ і $p_\rho(r) = 0$ якщо $r > R$. ◄

Приклад 3.13. Дискретна випадкова величина ξ задана рядом розподілу

ξ	4	7	10
P_ξ	0,2	0,1	0,7

Знайти закон розподілу випадкової величини $\eta = 3\xi - 1$.

► Знайдемо можливі значення величини $\eta = 3\xi - 1$:

$$y_1 = 3 \cdot 4 - 1 = 11, \qquad y_2 = 3 \cdot 7 - 1 = 20, \qquad y_3 = 3 \cdot 10 - 1 = 29.$$

Знайдемо ймовірності можливих значень величини η. Оскільки функція $y = 3x - 1$ монотонна, то $P(\eta = y_k) = P(\xi = x_k)$. Тоді шуканий закон розподілу має такий вигляд:

η	11	20	29
P_η	0,2	0,1	0,7

◄

Приклад 3.14. Дискретна випадкова величина ξ задана рядом розподілу

ξ	-1	-2	1	2
P_ξ	0,3	0,1	0,2	0,4

Знайти закон розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

► Можливі значення випадкової величини η:

$$y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1; \qquad y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4;$$

$$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1; \qquad y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4.$$

В інтервалі значень випадкової величини ξ функція $y = x^2$ немонотонна, отже, різним значенням x_k відповідають однакові значення y_i. Для знаходження ймовірностей $P(\eta = y_i)$ скористаємося теоремою додавання. Маємо

$$P(\eta = 1) = P(\xi = -1) + P(\xi = 1) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5;$$

$$P(\eta = 2) = P(\xi = -2) + P(\xi = 2) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5.$$

Таким чином, ряд розподілу величини η має такий вигляд:

η	1	4
P_η	0,5	0,5

◄

Приклад 3.15. Випадкова величина ξ_1 набуває значень 1 і 0, а випадкова величина ξ_2 – значень -1, 0 і 1. Імовірності $P(\xi_1 = i, \xi_2 = j)$ мають такі значення:

ξ_1	ξ_2		
	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$

Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \xi_1 \xi_2$.

► Знайдемо ряд розподілу величини η. Якщо хоча б один зі співмножників ξ_1 або ξ_2 дорівнює 0, то $\eta = 0$. Тоді

$$\{\eta = 0\} = \{\xi_1 = 0,\ \xi_2 = -1\} \cup \{\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0\} \cup \{\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1\} \cup \{\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0\}.$$

За теоремою додавання ймовірностей маємо:

$$P(\eta = 0) = P(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = -1) + P(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1) +$$

$$+ P(\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

Якщо $\{\xi_1=1,\ \xi_2=-1\}$ і $\{\xi_1=1,\ \xi_2=1\}$, то $\eta=-1$ і $\eta=1$ відповідно, крім того,

$$P(\eta=-1)=P(\xi_1=1,\ \xi_2=-1)=\frac{1}{16}, \qquad P(\eta=1)=P(\xi_1=1,\ \xi_2=1)=\frac{5}{16}.$$

Отже, η – дискретна випадкова величина з рядом розподілу

η	-1	0	1
P_η	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$

◄

3.3 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. Кубики виготовляються з деякою похибкою. Вважаючи, що лінійні розміри кубиків мають нормальний розподіл імовірностей з параметрами a та σ, знайти розподіл імовірностей їх об'ємів.

Відповідь: $p_\eta(y)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\sqrt[3]{y}-a\right)^2}{2\sigma^2}}$.

Задача 3.2. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta=\cos\xi$, якщо ξ має рівномірний розподіл:

а) в інтервалі $(0,\ \pi)$;

б) в інтервалі $(0,\ 2\pi)$.

Відповідь: а) $p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(-1,\ 1);\\ 0, & y\notin(-1,\ 1).\end{cases}$

б) $p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(-1,\ 1);\\ 0, & y\notin(-1,\ 1).\end{cases}$

Задача 3.3. Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом з параметром λ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta=(\xi-2)^2$.

Відповідь: $F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ e^{-\lambda\left(2-\sqrt{y}\right)}-e^{-\lambda\left(2+\sqrt{y}\right)}, & 0<y\le 4;\\ 1-e^{-\lambda\left(2+\sqrt{y}\right)}, & y>4.\end{cases}$

Задача 3.4. Розподіл випадкового вектора (ξ_1,ξ_2) має такий вигляд:

ξ_2	ξ_1		
	-1	0	1
0	0,15	0,25	0,10
1	0,20	0,05	0,25

Знайти закон розподілу вектора (η_1,η_2), де $\eta_1=\xi_2+\xi_1^2-2\xi_1^2\xi_2$, $\eta_2=\xi_2-\frac{1}{2}\xi_1+\frac{1}{2}\xi_1^2-\xi_1^2\xi_2$.

Відповідь:

η_2	η_1	
	0	1
0	0,50	0,10
1	0,20	0,20

Задача 3.5. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p. Знайти розподіл випадкової величини $\eta=\frac{\xi}{2}\left(1-(-1)^\xi\right)$.

Відповідь: $P(\eta=0)=\frac{1}{1+q}$, $P(\eta=2k)=0$, $P(\eta=2k+1)=pq^{2k+1}$.

Задача 3.6. Щільність розподілу ймовірностей $p_\xi(x)$ випадкової величини ξ визначена на промені $(0,\ +\infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини η, якщо: а) $\eta=e^{-\xi}$; б) $\eta=\ln\xi$; в) $\eta=\xi^3$; г) $\eta=\frac{1}{\xi^2}$; д) $\eta=\sqrt{\xi}$.

Відповідь: а) $p_\eta(y)=\frac{1}{y}p_\xi\left(\ln\frac{1}{y}\right)$, $0<y<1$;

б) $p_\eta(y)=e^y p_\xi\left(e^y\right)$; $-\infty<y<+\infty$;

в) $p_\eta(y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}p_\xi\left(\sqrt[3]{y}\right)$, $0<y<+\infty$;

г) $p_\eta(y)=\dfrac{1}{2y\sqrt{y}}\,p_\xi\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right),\ 0<y<+\infty$;

д) $p_\eta(y)=2yp_\xi\left(y^2\right),\ 0<y<+\infty$.

Задача 3.7. Задана щільність розподілу ймовірностей $p_\xi(x)$ випадкової величини ξ, $x\in\mathbb{R}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини η, якщо: а) $\eta=e^{-\xi^2}$; б) $\eta=|\xi|$; в) $\eta=\cos\xi$; г) $\eta=\operatorname{arctg}\xi$; д) $\eta=\dfrac{1}{1+\xi^2}$.

Відповідь: а) $p_\eta(y)=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln\dfrac{1}{y}}}\left[p_\xi\left(\sqrt{\ln\dfrac{1}{y}}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{\ln\dfrac{1}{y}}\right)\right],\ 0<y<1$;

б) $p_\eta(y)=p_\xi(y)+p_\xi(-y),\ 0<y<+\infty$;

в) $p_\eta(y)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left[p_\xi(2\pi k+\arccos y)+p_\xi(2\pi k-\arccos y)\right],\ -1<y<1$;

г) $p_\eta(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}\,p_\xi(\operatorname{tg}y),\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$;

д) $p_\eta(y)=\dfrac{1}{2y^2\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}}\left[p_\xi\left(\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}\right)\right],\ 0<y<1$.

Задача 3.8. Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом з параметром λ. Знайти щільності розподілу випадкових величин: а) $\eta_1=\sqrt{\xi}$; б) $\eta_2=\xi^2$; в) $\eta_3=\dfrac{1}{\lambda}\ln\xi$.

Відповідь: а) $p_{\eta_1}(y)=2\lambda ye^{-\lambda y^2},\ y>0$;

б) $p_{\eta_2}(y)=\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}\dfrac{1}{2\sqrt{y}},\ y>0$;

в) $p_{\eta_3}(y)=\lambda^2 e^{-\lambda\left(e^{\lambda y}-y\right)},\ y\in\mathbb{R}$.

Задача 3.9. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на відрізку $[0,1]$. Знайти щільність розподілу величини η, якщо а) $\eta=2\xi+1$; б) $\eta=-\ln(1-\xi)$;

Відповідь: а) $p_\eta(y)=\dfrac{1}{2},\ y\in[1,3]$; б) $p_\eta(y)=e^{-y},\ y>0$.

Задача 3.10. Випадкова величина ξ має розподіл Коші зі щільністю

$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини η, якщо: а) $\eta = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}$; б) $\eta = \frac{1}{1+\xi^2}$; в) $\eta = \frac{1}{\xi}$.

Відповідь: а) $p_\eta(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}\sqrt{1-y}}$, $0 < y < 1$; б) $p_\eta(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}\sqrt{1-y}}$, $0 < y < 1$; в) $p_\eta(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}$.

Задача 3.11. Випадкова величина ξ має закон розподілу Персона:

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1{,}5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)}\left(1-x^2\right)^k, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\eta = \arcsin\xi$.

Відповідь: $p_\eta(y) = \frac{\Gamma(k+1{,}5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)}\cos^{2k+1} y$ при $|y| \le \frac{\pi}{2}$.

Задача 3.12. Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини, що мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ, якщо: а) $\zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}$; б) $\zeta = \frac{\xi+\eta}{\xi}$.

Відповідь: а) $F_\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0; \\ z, & 0 < z \le 1; \\ 1, & z > 1; \end{cases}$ б) $F_\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z \le 1; \\ 1 - \frac{1}{z}, & z > 1. \end{cases}$

Задача 3.13. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$.

Відповідь: $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1-x}, & 0<x\le\dfrac{1}{2};\\ \dfrac{3x-1}{2x}, & \dfrac{1}{2}<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

Задача 3.14. Двовимірна випадкова величина (ξ_1,ξ_2) розподілена рівномірно в прямокутнику $\{0\le x\le 3;\ 0\le y\le 2\}$. Знайти функцію розподілу випадкової величини η, якщо: а) $\eta=\xi_1+\xi_2$; б) $\eta=\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$.

Відповідь: а) $F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{y^2}{12}, & 0<y\le 2;\\ \dfrac{y-1}{3}, & 2<y\le 3;\\ \dfrac{12-(5-y)^2}{12}, & 3<y\le 5;\\ 1, & y>5.\end{cases}$ б) $F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{y}{3}, & 0<y\le\dfrac{3}{2};\\ 1-\dfrac{3}{4y}, & y>\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

Задача 3.15. Визначити щільність імовірностей випадкової величини $\zeta=\xi\eta$, якщо:

а) ξ і η – незалежні випадкові величини зі щільностями

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty;\qquad p_\eta(y)=\begin{cases}ye^{-\frac{y^2}{2}}, & y\ge 0;\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

б) ξ і η – незалежні випадкові величини зі щільностями

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1;\end{cases}\qquad p_\eta(y)=\begin{cases}ye^{-\frac{y^2}{2}}, & y\ge 0;\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

Відповідь: а) $p_\zeta(z)=\dfrac{1}{2}e^{-|z|}$; б) $p_\zeta(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$.

Задача 3.16. Знайти щільність розподілу довжини радіус-вектора, якщо координати його кінця мають круговий нормальний закон зі щільністю

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Відповідь: $p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r > 0.$

Задача 3.17. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні; їх щільності розподілу визначаються такими формулами:

$$p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in [0,\ 1], \\ 0 \text{ при } x \notin [0,\ 1], \end{cases} \qquad p_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ при } x \in [0,\ 2], \\ 0 \text{ при } x \notin [0,\ 2]. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу та щільність розподілу величини $\eta = \xi_1 \xi_2$.

Відповідь: $p_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [0,2]; \\ -\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2} & \text{при } x \in [0,2]. \end{cases}$

4 ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

4.1 Теоретичні відомості

4.1.1 Математичне сподівання та дисперсія випадкових величин

Нехай $\langle \Omega, F, P \rangle$ – дискретний імовірнісний простір і $\xi = \xi(\omega)$ – дискретна випадкова величина, задана на ньому.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$ називається число

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega)$$

у припущенні, що ряд у правій частині рівності абсолютно збігається. Якщо ряд розбігається, то говорять, що математичного сподівання не існує. Тут $P(\omega)$ – імовірності елементарних наслідків.

Математичне сподівання $M\xi$ називають ще ***середнім значенням випадкової величини*** ξ або просто ***середнім*** ξ.

Розглянемо основні ***властивості*** математичного сподівання. Припустимо, що всі математичні сподівання, розглянуті далі, існують ($M\xi < \infty$). Тоді:

1. $M\xi \le M\eta,$ якщо $\xi \le \eta$.
2. $Mc = c$, де c – константа.
3. $M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$, $\forall a, b \in R$.
4. $|M\xi| \le M|\xi|$.
5. Якщо ξ_1 і ξ_2 – незалежні випадкові величини, то

$$M\xi_1\xi_2 = M\xi_1 M\xi_2;$$

аналогічно, якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні в сукупності, то

$$M(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \cdot \ldots \cdot M\xi_n.$$

6. Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M|\xi_n|$, то

$$M\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n.$$

У термінах математичного сподівання можна записати ймовірність події A за допомогою рівності:

$$P(A) = M\left(I_A(\omega)\right),$$

де $I_A(\omega)$ – індикатор події A.

Статистичне тлумачення математичного сподівання

Нехай зроблено n випробувань, у яких випадкова величина ξ набула n_1 разів значення x_1, n_2 разів значення x_2, ..., n_k разів значення x_k, і $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Знайдемо середнє арифметичне $\overline{x}$ усіх отриманих значень випадкової величини ξ:

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n},$$

або

$$\overline{x} = \frac{n_1}{n} x_1 + \frac{n_2}{n} x_2 + ... + \frac{n_k}{n} x_k.$$

Відношення $\frac{n_i}{n}$ є частотою події $\{\xi = x_i\}$. За умови великої кількості випробувань n, як випливає з властивості статистичної стійкості частот, частоти $\frac{n_i}{n}$ групуватимуться біля відповідних імовірностей $P(\xi = x_i)$. Тоді

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \approx \sum_{i=1}^{k} x_i P(\xi = x_i) = M\xi.$$

Отже, математичне сподівання приблизно дорівнює середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини.

Механічне тлумачення математичного сподівання

Нехай у точках x_1, x_2, ..., x_k прямої розташовані маси p_1, p_2, ..., p_k, нормовані умовою $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. З механіки відомо, що центр ваги зазначеної системи матеріальних точок розташовується в точці з абсцисою

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i}.$$

Вважаючи, що $M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$ і $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, отримаємо

$$x_c = M\xi.$$

Таким чином, математичне сподівання дорівнює абсцисі центра ваги системи матеріальних точок, абсциси яких є можливими значеннями випадкової величини, а маси – імовірності цих значень.

Математичним сподіванням (середнім значенням) $M\xi$ ***неперервної випадкової величини*** ξ називається інтеграл:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x)\, dx.$$

До того ж передбачається, що інтеграл у правій частині рівності абсолютно збігається, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, p_{\xi}(x)\, dx < +\infty.$$

Із властивостей інтеграла безпосередньо випливає, що математичне сподівання має властивість лінійності: для будь-яких $a,\ b \in \mathbb{R}$ і будь-яких випадкових величин ξ і η

$$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta.$$

Дисперсією $D\xi$ випадкової величини ξ називається число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

у припущенні, що математичне сподівання в правій частині рівності існує.

Дисперсія є мірою розсіювання значень випадкової величини навколо середнього значення (математичного сподівання). Для дискретних і неперервних випадкових величин формула для дисперсії запишеться, відповідно, у такому вигляді:

$$D\xi = \sum_k \left(x_k - M\xi\right)^2 p_k$$

і

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M\xi\right)^2 p_\xi\left(x\right)dx\,.$$

На практиці зручно застосовувати таку формулу:

$$D\xi = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2.$$

З механічної точки зору дисперсію можна тлумачити як центральний (щодо центра мас $x_c = M\xi$) момент інерції одиничної маси, зосередженої в точках x_k (дискретний випадок), або розподіленої з лінійною щільністю $p_\xi\left(x\right)$.

Дисперсія має такі властивості:

1. $Dc = 0$, де c – константа.
2. $D\xi = D\left(\xi - c\right)$, $\forall c \in \mathbb{R}$.
3. Якщо a і b сталі, то $D\left(a + b\xi\right) = b^2 D\xi$.
4. Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – система незалежних випадкових величин, то

$$D\left(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\right) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k\,.$$

Зокрема, якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні та мають однакову дисперсію $D\xi_k = \sigma^2$ ($k = \overline{1,n}$), то дисперсія їх середнього арифметичного дорівнює

$$D\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right) = \frac{D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

Величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ називається ***середнім квадратичним відхиленням*** випадкової величини ξ.

4.1.2 Початкові та центральні моменти

Початковим моментом α_k ***порядку*** k називається математичне сподівання випадкової величини ξ^k:

$$\alpha_k = M\xi^k.$$

Центральним моментом μ_k ***порядку*** k називається математичне сподівання випадкової величини $(\xi - M\xi)^k$:

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k.$$

Якщо ξ – дискретна випадкова величина, то

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k p_i, \qquad \mu_k = \sum_i (x_i - M\xi)^k p_i;$$

для неперервної величини ξ:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x)dx, \qquad \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k p_\xi(x)dx.$$

Центральні моменти випадкової величини ξ є початковими моментами випадкової величини $\overset{\circ}{\xi} = \xi - M\xi$, яка називається ***центрованою*** випадковою величиною ($M\overset{\circ}{\xi} = 0$).

Математичне сподівання $M\xi$ є початковим моментом першого порядку α_1, а дисперсія $D\xi$ – центральним моментом другого порядку μ_2; центральний момент μ_1 завжди дорівнює нулю.

Між початковими та центральними моментами існують залежності, які часто використовуються на практиці. Неважко перевірити, що:

$$\mu_0 = 1; \qquad \mu_1 = 0; \qquad \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3;$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4;$$

навпаки,

$$\alpha_0 = 1; \qquad \alpha_1 = M\xi;$$

$$\alpha_2 = \mu_2 + \alpha_1^2;$$

$$\alpha_3 = \mu_3 + 3\mu_2\alpha_1 + \alpha_1^3;$$

$$\alpha_4 = \mu_4 + 4\mu_3\alpha_1 + 6\mu_2\alpha_1^2 + \alpha_1^4.$$

Випадкову величину ξ називають ***симетрично розподіленою*** відносно математичного сподівання, якщо для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$P(\xi < M\xi - x) = P(\xi > M\xi + x).$$

Зокрема, неперервна випадкова величина ξ є симетричною тоді і тільки тоді, коли графік її щільності розподілу симетричний відносно прямої $x = M\xi$.

Якщо розподіл випадкової величини ξ симетричний відносно математичного сподівання, то всі центральні моменти непарних порядків, якщо вони існують, дорівнюють нулю. Якщо ж центральні моменти непарного порядку відмінні від нуля, то розподіл не може бути симетричним. Для характеристики симетрії використовують центральний момент третього порядку μ_3.

Для характеристики величини асиметрії розглядають так званий ***коефіцієнт асиметрії*** A, що дорівнює

$$A = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{M(\xi - M\xi)^3}{\sigma_\xi^3}.$$

Знак A вказує на право- або лівосторонню асиметрію (рис. 4.1).

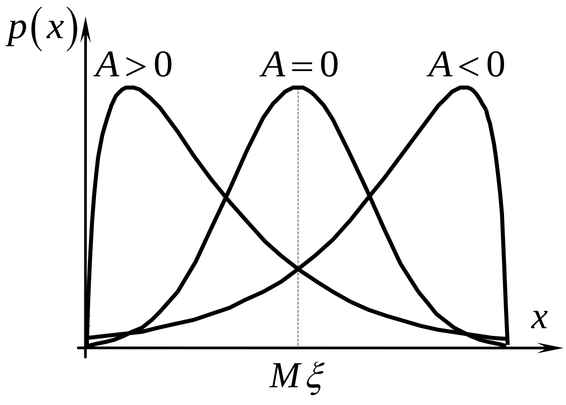


Рисунок 4.1

Ексцесом E випадкової величини ξ називають відношення четвертого центрального моменту μ_4 до квадрата дисперсії за мінусом числа 3:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Для нормального розподілу $\mu_4 = 3\sigma^4$ і, отже, $E = 0$. При $E > 0$ розподіл має *позитивний ексцес* – графік щільності розподілу в околі математичного сподівання має більш високу і гостру вершину, ніж нормальний розподіл. При $E < 0$ розподіл має *негативний ексцес* – графік щільності розподілу в околі математичного сподівання більш низький і плаский, ніж нормальний розподіл.

Коефіцієнти асиметрії та ексцесу – величини безрозмірні.

Моменти вищих порядків у найпростіших застосуваннях теорії ймовірностей не використовуються.

4.1.3 Нерівності, пов'язані з моментами

Відзначимо деякі важливі нерівності, в яких присутні моменти випадкових величин. Деякі з цих нерівностей дають можливість оцінювати ймовірності подій, пов'язаних з випадковими величинами.

Нерівність Чебишева: якщо ξ – випадкова величина з $M|\xi| < \infty$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(|\xi| \ge \varepsilon\right) \le \frac{M|\xi|}{\varepsilon};$$

якщо ξ – довільна випадкова величина з $M\xi^2 < \infty$, то

$$P\left(|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Колмогорова: якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини, для яких $M\xi_i < \infty$, $D\xi_i < \infty$ $(i = \overline{1, n})$, то за будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\sup_{1 \le k \le n}\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i - M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_k\right)\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Коші-Буняковського-Шварца: якщо випадкові величини ξ і η такі, що $M\xi^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$, то

$$M\left|\xi_\eta\right| \le \sqrt{M\xi^2}\sqrt{M\eta^2}.$$

Нерівність Ляпунова: якщо $M|\xi|^r < \infty$, то при $0 < s < r$

$$\left(M|\xi|^s\right)^{1/s} \le \left(M|\xi|^r\right)^{1/r}.$$

Нерівність Гельдера: якщо $p > 1,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, а випадкові величини ξ й η такі, що $M|\eta|^q < \infty$, $M|\xi|^p < \infty$, то

$$M|\xi \cdot \eta| \le \left(M|\xi|^p\right)^{1/p} \cdot \left(M|\eta|^q\right)^{1/q}.$$

Нерівність Мінковського: якщо $M|\xi|^r < \infty$, $M|\eta|^r < \infty$, $r \ge 1$, то $M|\xi + \eta|^2 < \infty$ і

$$\left(M|\xi + \eta|^r\right)^{1/r} \le \left(M|\xi|^r\right)^{1/r} \cdot \left(M|\eta|^r\right)^{1/r}.$$

4.1.4 Числові характеристики функцій від випадкових величин

Нехай ξ – випадкова величина, задана на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$, і $\varphi(x)$ – борелівська функція. Тоді, як відомо, $\eta = \varphi(\xi)$ також буде випадковою величиною, визначеною на тому самому імовірнісному просторі. Тоді математичне сподівання випадкової величини $\eta = \varphi(\xi)$ дорівнює

$$M\eta = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, p_\xi(x)\, dx.$$

Якщо випадкова величина ξ належить дискретному типу та приймає значення x_k, $k = 1, 2, ..., n$ $(n \le \infty)$ з імовірностями $p_k = P(\xi = x_k)$, то

$$M\varphi(\xi) = \sum_k \varphi(x_k)\, p_k.$$

Якщо ж випадкова величина ξ абсолютно неперервна, і $p_\xi(x)$ – її щільність імовірності, то

$$M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, p_\xi(x)\, dx.$$

Легко побачити, що при лінійному перетворенні випадкової величини ξ, такого ж лінійного перетворення зазнає й математичне сподівання, тобто

$$M(a\xi + b) = aM\xi + b.$$

Лінійне перетворення $\xi_0 = \xi - M\xi$, що зводиться до зсуву кривої розподілу вздовж осі абсцис на величину $a = M\xi$, називається ***центруванням***; завжди $M\xi_0 = 0$.

Використовуючи зазначені формули для знаходження математичного сподівання функції від випадкової величини ξ, легко отримати аналогічні формули для знаходження дисперсії, початкових і центральних моментів функції від випадкової величини ξ:

$$D\varphi(\xi) = M\left(\varphi(\xi) - M\varphi(\xi)\right)^2,$$

$$\alpha_k\varphi(\xi) = M\left(\varphi(\xi)\right)^k,$$

$$\mu_k\varphi(\xi) = M\left(\varphi(\xi) - M\varphi(\xi)\right)^k.$$

Математичне сподівання функції двовимірного випадкового вектора задається такими формулами:

– для дискретного розподілу

$$M\varphi(\xi, \eta) = \sum_{ij}\varphi(x_i, y_j)P\left((\xi, \eta) = (x_i, y_j)\right);$$

– для абсолютно неперервного розподілу

$$M\varphi(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)\, p_{\xi,\eta}(x, y)dxdy.$$

Розглянемо тепер n-вимірний випадок. Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ – n-вимірний випадковий вектор.

Вектор $\vec{a} = (M\xi_1, M\xi_2, ..., M\xi_n)$ називається ***вектором математичних сподівань*** (середніх значень) випадкового вектора $\vec{\xi}$.

Нехай m-вимірний випадковий вектор $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m)$ лінійно пов'язаний з вектором $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$:

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\xi_i + c_j, \quad j = 1, 2, ..., m$$

або в матричному вигляді

$$\vec{\eta} = \vec{\xi} B + \vec{c},$$

де $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$, $\vec{c} = \left(c_1, c_2, ..., c_m\right)$. Тоді

$$\vec{a}_{\vec{\eta}} = \vec{a}_{\vec{\xi}} B + \vec{c}.$$

4.1.5 Коефіцієнт кореляції та інші числові характеристики

Нехай $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ – випадкові величини з сумісною функцією розподілу $F_{\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n}\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$.

Введемо поняття початкових і центральних моментів і для випадкового вектора $\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$.

Змішаним початковим моментом випадкових величин $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ ***порядку*** $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$ ($k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, …, $k_n \geq 0$) називається величина

$$\alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_n} = M\,\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\ldots\xi_n^{k_n} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ разів}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}\,dF_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Змішаним центральним моментом випадкових величин $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ ***порядку*** $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$ ($k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, …, $k_n \geq 0$) називається величина

$$\mu_{k_1, k_2, \ldots, k_n} = M\left(\xi_1 - M\,\xi_1\right)^{k_1}\left(\xi_2 - M\,\xi_2\right)^{k_2}\ldots\left(\xi_n - M\,\xi_n\right)^{k_n} =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ разів}} \left(x_1 - M\,\xi_1\right)^{k_1}\left(x_2 - M\,\xi_2\right)^{k_2}\ldots\left(x_n - M\,\xi_n\right)^{k_n} dF_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Розглянемо двовимірну випадкову величину $\left(\xi, \eta\right)$ з функцією розподілу $F_{\xi, \eta}\left(x, y\right)$.

Початковим моментом порядку $k+l$ ***двовимірного випадкового вектора*** (ξ, η) називається величина $\alpha_{k+l} = M\xi^k \eta^l$. Початкові моменти першого порядку $\alpha_{1,0} = M\xi = a$ та $\alpha_{0,1} = M\eta = b$ визначають точку (a, b) – центр двовимірної випадкової величини (ξ, η).

Центральним моментом порядку $k+l$ називається величина

$$\mu_{k+l} = M\left(\xi - M\xi\right)^k \left(\eta - M\eta\right)^l .$$

Центральні моменти другого порядку $\mu_{2,0} = M\left(\xi - a\right)^2 = D\xi = \sigma_\xi^2$ і $\mu_{0,2} = M\left(\eta - b\right)^2 = D\eta = \sigma_\eta^2$ є дисперсіями координат ξ й η.

Коваріацією або ***кореляційним моментом*** випадкових величин ξ й η називається величина

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M\left(\xi - M\xi\right)\left(\eta - M\eta\right) = M\xi\eta - M\xi M\eta .$$

Зазначимо, що кореляційний момент – це змішаний центральний момент $\mu_{1,1}$.

Формули, які визначають коваріацію:

– для дискретних випадкових величин ξ й η

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_{i,\, j}\left(x_i - M\xi\right)\left(y_j - M\eta\right) p_{ij} ;$$

– для неперервних випадкових величин ξ й η

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - M\xi\right)\left(y - M\eta\right) p_{\xi,\eta}(x, y)\,dxdy .$$

Якщо випадкові величини ξ й η незалежні, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta ;$$

якщо ж випадкові величини ξ й η залежні, то ця рівність не виконується. У випадку довільної залежності між випадковими величинами ξ й η

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta).$$

Ця формула допускає узагальнення на довільну кількість доданків:

$$D\left(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n\right)=D\xi_1+D\xi_2+\ldots+D\xi_n+2\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}\left(\xi_i,\xi_j\right).$$

Можна довести такі властивості коваріації:

1. $\operatorname{cov}(\xi,\xi)=D\xi$.

2. Для незалежних випадкових величин ξ й η

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0.$$

3. Якщо $\eta_1=a_1\xi_1+b_1,\ \eta_2=a_2\xi_2+b_2$, то

$$\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2)=a_1a_2\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2).$$

4. $-\sqrt{D\xi\,D\eta}\le\operatorname{cov}(\xi,\eta)\le\sqrt{D\xi\,D\eta}$.

5. Рівність $\left|\operatorname{cov}(\xi,\eta)\right|=\sqrt{D\xi\,D\eta}$ має місце тоді й тільки тоді, коли випадкові величини ξ й η пов'язані лінійною залежністю, тобто існують такі числа a та b , що з імовірністю 1 є вірною рівність $\eta=a\xi+b$, крім того, при $a>0$ $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\sqrt{D\xi\,D\eta}$, а при $a<0$ $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=-\sqrt{D\xi\,D\eta}$.

6. $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M\xi\eta-M\xi\,M\eta$.

Якщо $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$, то випадкові величини ξ й η називаються ***некорельованими***; якщо ж $\operatorname{cov}(\xi,\eta)\ne0$, то випадкові величини ξ й η називаються ***корельованими***. Кореляційний момент незалежних випадкових величин ξ й η дорівнює нулю, тобто незалежні випадкові величини є некорельованими. Зворотне твердження, взагалі, невірне.

Виявляється, некорельовані випадкові величини, розподілені нормально, є незалежними, тобто для нормального розподілу поняття некорельованості та незалежності рівносильні.

Розглянемо тепер n-вимірний випадковий вектор $\vec{\xi}=\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\right)$.

Матрицею коваріацій (***коваріаційною матрицею***) випадкового n-вимірного вектора $\vec{\xi}$ називають матрицю розмірності $n\times n$:

$$K=\left[k_{ij}\right]=\left[\operatorname{cov}\left(\xi_i,\xi_j\right)\right],$$

яка складається з коваріацій випадкових величин ξ_i та ξ_j.

Матриця коваріацій K має такі властивості:

1. K є симетричною матрицею.

2. K є невід'ємно визначеною, тобто для будь-якого вектора $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{b}K\vec{b}^T \geq 0$$

(звідси випливає, що всі головні мінори матриці K невід'ємні, зокрема, $\det K \geq 0$).

3. Нехай m-вимірний випадковий вектор $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ отриманий з n -вимірного випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ за допомогою перетворення

$$\vec{\eta} = \vec{\xi}B + \vec{c},$$

де B – матриця розмірності $n \times m$, $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$. Тоді матриця коваріацій $K_{\vec{\eta}}$ випадкового вектора $\vec{\eta}$ пов'язана з матрицею коваріацій $K_{\vec{\xi}}$ випадкового вектора $\vec{\xi}$ співвідношенням

$$K_{\vec{\eta}} = B^T K_{\vec{\xi}} B.$$

Коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ й η, що мають скінченні дисперсії $D\xi > 0$ й $D\eta > 0$, називається величина

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}.$$

Коефіцієнт кореляції має такі властивості:

1. $\rho(\xi, \xi) = 1$.

2. Якщо випадкові величини ξ й η незалежні, то $\rho(\xi, \eta) = 0$.

3. $-1 \leq \rho(\xi, \eta) \leq 1$.

4. Якщо $|\rho(\xi, \eta)| = 1$, то з імовірністю 1 виконується співвідношення

$$\eta = \rho(\xi, \eta)\sqrt{\frac{D\eta}{D\xi}}(\xi - M\xi) + M\eta,$$

тобто η є лінійною функцією ξ. Тому $\rho(\xi, \eta)$ можна розглядати як міру лінійної залежності величин ξ й η.

5. Якщо $\eta_1 = a_1\xi_1 + b_1,\ \eta_2 = a_2\xi_2 + b_2$, де $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$, то

$$\rho(\eta_1, \eta_2) = \pm\rho(\xi_1, \xi_2),$$

крім того, знак «+» беруть, якщо a_1 й a_2 мають однакові знаки, і знак «–», якщо a_1 і a_2 різних знаків.

Якщо $\rho(\xi, \eta) > 0$, то випадкові величини ξ й η називаються позитивно корельованими, а якщо $\rho(\xi, \eta) < 0$, то ξ й η – негативно корельровані.

Легко побачити, що

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{M(\xi - a)(\eta - b)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = M\frac{\xi - a}{\sigma_\xi} \cdot \frac{\eta - b}{\sigma_\eta} = M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} \cdot \frac{\eta - M\eta}{\sigma_n}\right).$$

Отже, коефіцієнт кореляції не залежить ні від вибору початку відліку, ні від масштабу виміру випадкових величин.

Для залежних випадкових величин коефіцієнт кореляції є мірою лінійної залежності між ними.

Тому подамо випадкову величину η у вигляді деякої лінійної функції від випадкової величини ξ і залишку ζ:

$$\eta = l(\xi) + \zeta = (k\xi + c) + \zeta .$$

Величину $\zeta = \eta - l(\xi)$ розглядатимемо як помилку наближення випадкової величини η лінійною функцією $l(\xi)$. Називатимемо лінійною функцією найкращого середньоквадратичного наближення таку функцію $l(\xi)$, для якої середньоквадратична помилка наближення σ_ζ отримує найменше значення.

Виявляється, що ця функція має вигляд

$$l(\xi) = \rho(\xi, \eta)\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - a) + b,$$

до того ж $M\zeta = 0$, а $\sigma_\zeta = \sigma_\eta\sqrt{1 - \rho(\xi, \eta)^2}$.

Графік функції $l(\xi)$ називається ***прямою середньоквадратичної регресії випадкової величини*** η ***на*** ξ.

З виразу для σ_ζ випливає, що $|\rho(\xi, \eta)| \le 1$. Величина середнього квадратичного відхилення величини η від прямої середньоквадратичної регресії η на ξ буде настільки меншою, наскільки ближче $\rho(\xi, \eta)$ до 1. Кінцеві випадки $\rho(\xi, \eta) = \pm 1$ дають $n = l(\xi)$.

Рівняння лінійної функції $l_1(\eta)$ найкращого середньоквадратичного наближення до величини ξ, очевидно, матиме такий вигляд:

$$l_1(\eta) = \rho(\xi,\eta)\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(\eta - b) + a\,.$$

Прямі $l(\xi)$ і $l_1(\eta)$ перетинаються в точці (a,b) – центрі сумісного розподілу випадкових величин ξ й η (рис. 4.2). Тангенси кутів нахилу цих прямих, відповідно, дорівнюють

$$tg\alpha = \rho(\xi,\eta)\cdot\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \qquad \text{і} \qquad tg\beta = \frac{1}{\rho(\xi,\eta)}\cdot\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\,.$$

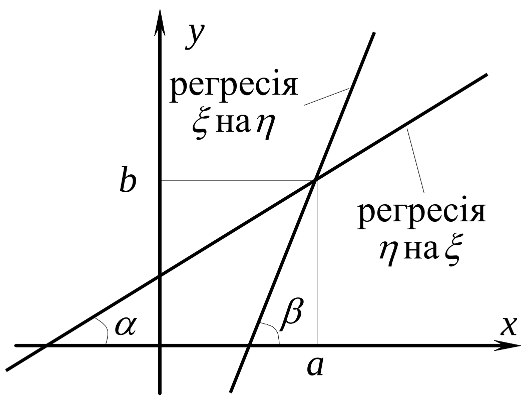


Рисунок 4.2

При $\left|\rho(\xi,\eta)\right| < 1$ пряма середньоквадратичної регресії η на ξ матиме менший нахил до осі абсцис, ніж пряма середньоквадратичної регресії ξ на η (оскільки $tg\alpha < tg\beta$). При наближенні $\left|\rho(\xi,\eta)\right|$ до 1 кут між цими прямими зменшуватиметься, а при $\rho(\xi,\eta) = \pm 1$ прямі збігатимуться.

Якщо $\rho(\xi,\eta) = 0$, то рівняння прямих середньоквадратичної регресії матимуть вигляд $\xi = a$ й $\eta = b$, тобто вони будуть паралельні відповідним координатним осям.

Кореляційною (***нормованою коваріаційною***) ***матрицею*** випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ називають матрицю розмірності $n \times n$:

$$R = \left[r_{ij}\right] = \left[\rho\left(\xi_i, \xi_j\right)\right],$$

яка складається з коефіцієнтів кореляцій випадкових величин ξ_i і ξ_j.

Кореляційна матриця R порядку n має такий вигляд:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що значення $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ дискретної випадкової величини ξ розташовані в порядку зростання.

Модою дискретної випадкової величини називають таке значення x_i, при якому для ймовірностей виконуються нерівності

$$p_{i-1} < p_i \qquad \text{і} \qquad p_{i+1} < p_i .$$

Модою неперервної випадкової величини ξ називають точку максимуму (локального) щільності розподілу $p_\xi(x)$.

Розрізняють ***унімодальні*** (ті, що мають одну моду), ***бімодальні*** (ті, що мають дві моди) і ***полімодальні*** (ті, що мають кілька мод) ***розподіли***.

Найвірогіднішим значенням випадкової величини називають моду, за якої досягається глобальний максимум імовірності (дискретної випадкової величини) або щільності розподілу (неперервної випадкової величини).

Якщо розподіл унімодальний, то мода і буде найвірогіднішим значенням.

Медіаною випадкової величини ξ називається число m_ξ таке, що

$$P\left(\xi < m_\xi\right) = F_\xi\left(m_\xi\right) \le \frac{1}{2} \qquad \text{і} \qquad P\left(\xi > m_\xi\right) = 1 - F_\xi\left(m_\xi + 0\right) \le \frac{1}{2}.$$

Для випадкової величини ξ з абсолютно неперервним розподілом зі щільністю $p_\xi(x)$ медіана m_ξ визначається як значення m_ξ, для якого

$$\int_{-\infty}^{m_\xi} p_\xi(x)dx = \int_{m_\xi}^{+\infty} p_\xi(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Медіана визначається неоднозначно. Зазвичай медіаною називають найменше з m_ξ, що задовольняють двом зазначеним нерівностям.

Квантиллю рівня α, або α***-квантиллю*** ($0 < \alpha < 1$) розподілу випадкової величини ξ називають число x_α, що задовольняє нерівностям

$$P\left(\xi < x_\alpha\right) \le \alpha \qquad \text{і} \qquad P\left(\xi > x_\alpha\right) \le 1 - \alpha .$$

Квантиль будь-якого порядку завжди існує, але визначається взагалі неоднозначно. Якщо $F_\xi(x)$ – неперервна строго монотонна функція, то існує єдина квантиль будь-якого порядку. Квантиль $x_{\frac{1}{2}}$ збігається з медіаною. Для неперервної випадкової величини ξ α-квантиль x_α є розв’язком рівняння

$$F\left(x_a\right)=\alpha$$

або, якщо відомо щільність розподілу, розв'язком рівняння

$$\int_{-\infty}^{x_\alpha} p_\xi\left(x\right)dx=\alpha\ .$$

4.1.6 Простір $\mathcal{L}^2$

У застосуваннях теорії ймовірностей часто доводиться мати справу з комплексними випадковими величинами.

Випадкова величина ξ називається ***комплексною***, якщо її можна подати у такому вигляді: $\xi=\xi_1+i\xi_2$, $M\xi=M\xi_1+iM\xi_2$, де ξ_1 й ξ_2 – дійсні випадкові величини.

Вважають, що випадкова величина ξ, визначена на імовірнісному просторі $\left\langle \Omega, F, P\right\rangle$, належить до класу $\mathcal{L}^2$, якщо вона має скінченне математичне сподівання $M\left|\xi\right|^2<\infty$. Клас $\mathcal{L}^2$ є нескінченновимірним лінійним простором. У $\mathcal{L}^2$ скалярний добуток випадкових величин ξ_1 і ξ_2 подається за допомогою такої рівності:

$$\left(\xi_1, \xi_2\right)=M\xi_1\overline{\xi_2}\ .$$

Тут риска зверху означає комплексну спряженість. Справедлива така нерівність (***нерівність Коші-Буняковського***):

$$\left|\left(\xi_1, \xi_2\right)\right|=\left(\xi_1\xi_2\right)^{1/2}\left(\xi_1, \xi_2\right)$$

або

$$\left|M\left(\xi_1, \overline{\xi}\right)\right|\le\left(M\left|\xi_1\right|^2\right)^{1/2}\left(M\left|\xi_2\right|^2\right)^{1/2}.$$

Для величин з $\mathcal{L}^2$ визначеним є середньоквадратичне значення (норма) випадкової величини:

$$\left\|\xi\right\|=\left(M\left|\xi\right|^2\right)^{1/2}$$

і середньоквадратична відстань (метрика):

$$\rho(\xi,\eta)=\|\xi-\eta\|=\left(M\,|\xi-\eta|^2\right)^{1/2}.$$

Вважають, що послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ збігається в $\mathscr{L}^2$ у сенсі середньоквадратичного до випадкової величини ξ, якщо

$$\|\xi_n-\xi\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Розглядатимемо $\mathscr{L}^2$ як евклідовий простір зі скалярним добутком, визначеним вище. З функціонального аналізу відомо, що з будь-якої точки ξ евклідового простору на будь-який лінійний підпростір H можна опустити перпендикуляр. Це дасть проекцію $\hat{\xi}$ величини ξ на H, що задовольняє умові ортогональності $\xi-\hat{\xi}$ і H, тобто для будь-якої величини $\eta\in H$:

$$\left(\xi-\hat{\xi},\eta\right)=0, \quad \forall\eta\in H.$$

Проекція $\hat{\xi}\in H$ має таку властивість:

$$\left\|\xi_n-\hat{\xi}\right\|=\min_{\eta\in H}\|\xi-\eta\|.$$

Нехай випадкові величини $\eta_1,\ldots,\eta_m$ утворюють деякий базис у H, тоді $\eta=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\eta_k$. Якщо розглянути всі лінійні оцінки випадкової величини ξ за величинами $\eta_1,\ldots,\eta_m$: $\eta=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\eta_k$ (кожна така оцінка дасть середньоквадратичну помилку $\|\xi-\eta\|$), то виявиться, що проекція $\hat{\xi}$ на H є найкращою лінійною оцінкою для ξ за величинами $\eta_1,\ldots,\eta_m$.

4.2 Приклади розв’язання задач

Приклад 4.1. Знайти математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини ξ, якщо її ряд розподілу має такий вигляд:

ξ	0	1	2	3

P_ξ	0,1	0,3	0,4	0,2

► Знайдемо $M\xi$:

$$M\xi = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 = 0,3 + 0,8 + 0,6 = 1,7 .$$

Перш ніж знаходити дисперсію $D\xi$, знайдемо початковий момент другого порядку:

$$\alpha_2 = M\xi^2 = 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,2 = 0,3 + 1,6 + 1,8 = 3,7 .$$

Тоді дисперсія дорівнює

$$D\xi = 3,7 - \left(1,7\right)^2 = 0,81 . \blacktriangleleft$$

Приклад 4.2. Знайти математичні сподівання таких розподілів: а) біноміального; б) нормального; в) пуассонівського; г) рівномірного; д) показникового.

► а) Нехай подія A_i означає, що i-е випробування за схемою Бернуллі закінчилося успішно, $P\left(A_i\right) = p$ для кожного i. Нехай $\xi_i = I_{A_i}$ – індикатор події A_i, тобто випадкова величина ξ_i отримує значення 1 з імовірністю p та значення 0 з імовірністю $q = 1 - p$. Тоді випадкову величину ξ (кількість успіхів у n випробуваннях за схемою Бернуллі) можна подати у вигляді суми випадкових величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$. Оскільки $M\xi_1 = \ldots = M\xi_n = p$, то, використовуючи адитивність математичного сподівання, отримаємо:

$$M\xi = M\xi_1 + ... + M\xi_n = np .$$

Або

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} kP\left(\xi = k\right) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{\left(n-k\right)!\left(k-1\right)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{\left(n-1\right)-\left(k-1\right)} = np\left(p+q\right)^{n-1} = np .$$

б) Математичне сподівання випадкової величини ξ, що має нормальний розподіл з параметрами a та σ^2:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_{a;\sigma}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx .$$

Виконуючи заміну $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$, отримуємо

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a+t\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = a\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt .$$

Перший інтеграл дорівнює 1 за умови нормування для щільності найпростішого нормального розподілу, а другий дорівнює нулю, оскільки підінтегральна функція непарна й інтервал інтегрування симетричний відносно нуля. Тоді

$$M\xi = a .$$

Таким чином, параметр a нормального розподілу дорівнює його математичному сподіванню.

в) Математичне сподівання випадкової величини ξ, розподіленої за законом Пуассона з параметром μ, дорівнює μ. Дійсно,

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu} = \mu e^{-\mu}\left(1+\mu+\frac{\mu^2}{2!}+\ldots+\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}+\ldots\right) =$$

$$= \mu e^{-\mu} e^{\mu} = \mu .$$

г) Математичне сподівання випадкової величини ξ з рівномірним розподілом на відрізку $[0,1]$

$$M\xi = \int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Якщо випадкова величина рівномірно розподілена на відрізку $[a;b]$, то

$$M\xi = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\cdot dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} .$$

д) Математичне сподівання випадкової величини ξ з показниковим розподілом дорівнює

$$M\xi = \int_0^\infty x\lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx, \qquad \lambda > 0.$$

Інтегруючи частинами, отримуємо:

$$\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Тоді

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.3. Знайти математичне сподівання геометричного розподілу.
► Розглянемо випадкову величину ξ з геометричним розподілом

$$P(\xi = k) = pq^k,$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$. Тоді

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq\left(1 + 2q + 3q^2 + \dots\right).$$

В останньому виразі праворуч у дужках є похідна від ряду $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, який є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії. Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Тоді

$$M\xi = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.4. Щільність імовірності випадкових амплітуд бокової хитавиці компаса має такий вигляд (***закон Релея***):

$$p(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad x\geq 0.$$

Визначити: а) математичне сподівання $M\xi$; б) дисперсію $D\xi$; в) центральні моменти третього й четвертого порядків.

► Обчислення моментів зводиться до обчислення таких інтегралів:

$$I_n=\int_0^\infty t^n e^{-t^2}dt \qquad (n>0 \text{ ціле}),$$

які при n парному дорівнюють

$$I_{2k}=\frac{1}{2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

де $(2k-1)!!=(2k-1)(2k-3)(2k-5)\ldots 3\cdot 1$; і при n непарному –

$$I_{2k+1}=\frac{1}{2}\Gamma(k+1)=\frac{k!}{2}.$$

а) Математичне сподівання випадкової амплітуди бокової хитавиці ξ дорівнює

$$M\xi=\int_0^\infty xp(x)dx=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}=t\right|=$$

$$=2\sqrt{2}\sigma\int_0^\infty t^2e^{-t^2}dt=2\sqrt{2}\sigma\cdot I_2=2\sqrt{2}\sigma\frac{\sqrt{\pi}}{4}=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

б) Для закону Релея дисперсія дорівнює:

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=4\sigma^2 I_3-\frac{\pi}{2}\sigma^2=\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right).$$

в) $\mu_3=M(\xi-M\xi)^3=\alpha_3-3M\xi\cdot\alpha_2+2(M\xi)^3$, де

$$\alpha_2 = M\xi^2 = 2\sigma^2,$$

$$\alpha_3 = M\xi^3 = 4\sqrt{2}\sigma^3 I_4 = 3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Отже,

$$\mu_3 = \sigma^3(\pi - 3)\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\mu_4 = M(\xi - M\xi)^4 = \alpha_4 - 4M\xi \cdot \alpha_3 + 6\alpha_2 (M\xi)^2 - 3(M\xi)^4,$$

де $\alpha_4 = M\xi^4 = 8\sigma^4 I_5 = 8\sigma^4$. Отже,

$$\mu_4 = \sigma^4\left(8 - \frac{3}{4}\pi^2\right). \blacktriangleleft$$

Приклад 4.5. Знайти серединне відхилення випадкової величини, щільність імовірності якої має вигляд (***розподіл Лапласа***):

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Серединне відхилення E визначається з умови

$$P(|\xi - M\xi| < E) = \frac{1}{2}.$$

► Оскільки щільність імовірності симетрична відносно нуля, то $M\xi = 0$. Серединне відхилення E, за його визначенням, обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{2} = P(|\xi - M\xi| < E) = \int_{-E}^{E} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{0}^{E} e^{-x}dx = 1 - e^{-E}.$$

Звідси $E = \ln 2 = 0,6931$. ◄

Приклад 4.6. Щільність імовірності випадкової величини ξ має такий вигляд:

$$p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad -a<x<a.$$

Визначити $M\xi$ й $D\xi$.

► За визначенням $M\xi$ й $D\xi$ маємо:

$$M\xi=\int_{-a}^{a}\frac{xdx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{\pi}\left(-\sqrt{a^2-x^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=0,$$

$$D\xi=\int_{-a}^{a}(x-M\xi)^2\,p(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{a^2}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.7. Знайти дисперсію випадкової величини, що має розподіл: а) Пуассона; б) рівномірний на відрізку $[a,b]$; в) біноміальний; г) нормальний; д) показниковий.

► а) Для розподілу Пуассона $M\xi=\mu$, де μ – параметр розподілу. Знайдемо $M\xi^2$:

$$M\xi^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\mu\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu}=\mu\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu}=$$

$$=\mu\left(\sum_{j=0}^{\infty}j\frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu}+e^{-\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mu^j}{j!}\right)=\mu(M\xi+1)=\mu^2+\mu,$$

оскільки $M\xi=\mu$ (див. приклад 4.2, в). Тоді

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\mu^2+\mu-\mu^2=\mu.$$

б) Для рівномірного на відрізку $[a,\ b]$ розподілу маємо:

$$D\xi=\int_{a}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{3(b-a)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_{a}^{b}=$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left(\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right)=\frac{(b-a)^3-(a-b)^3}{24(b-a)}=\frac{(b-a)^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

в) Випадкову величину ξ можна подати у вигляді суми n незалежних бернуллієвих випадкових величин ξ_i. Тоді $D\xi=\sum_{i=1}^{n} D\xi_i$. Всі ξ_i однаково розподілені та їх дисперсії дорівнюють. Знайдемо $D\xi_i$. Оскільки $\xi_i=0$ з імовірністю $q=1-p$ і $\xi_i=1$ з імовірністю p, то

$$M\xi_i=p, \qquad D\xi_i=0^2\cdot q+1^2\cdot p-p^2=p-p^2=pq.$$

Тоді

$$D\xi=\sum_{i=1}^{n} pq=npq.$$

г) Обчислимо дисперсію нормального розподілу. Маємо

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\varphi_{a;\sigma}(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Зробивши заміну $t=\dfrac{x-a}{\sigma}$, отримаємо

$$D\xi=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Інтегруючи далі частинами ($u=t$, $dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt$), знаходимо

$$D\xi=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[\left.te^{-\frac{t^2}{2}}\right|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt=\sigma^2.$$

Таким чином, другий параметр нормального розподілу є дисперсією.

д) Для обчислення дисперсії показникникового закону знайдемо $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} M\xi = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Тоді

$$D\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Зазначимо, що для показникового розподілу

$$M\xi = \sqrt{D\xi} = \sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.8. Скільки в середньому необхідно підкидати кубик до випадіння шістки?

► Позначимо через p імовірність появи шістки. Тоді ймовірність першого успіху при k-му випробуванні дорівнює

$$pq^{k-1} \qquad (q = 1 - p).$$

Сума ймовірностей дорівнює:

$$p + pq + pq^2 + ... = p\left(1 + q + q^2 + ...\right) = \frac{p}{(1-q)} = \frac{p}{p} = 1.$$

Середня кількість випробувань m до першого успіху за визначенням

$$m = p + 2pq + 3pq^2 + \dots.$$

Обчислимо цю суму. Помножимо m на q:

$$qm = pq + 2pq^2 + 3pq^3 + \dots$$

Віднімаючи з першого ряду другий, знаходимо

$$m - qm = p + pq + pq^2 + ... = p\left(1 + q + q^2 + ...\right).$$

Тоді $m(1-q)=1$, оскільки $q<1$. Отже, $mp=1$, $m=\frac{1}{p}$. Оскільки $p=\frac{1}{6}$, то $m=6$. ◄

Приклад 4.9. Нехай випадкова точка розподілена рівномірно усередині кулі з радіусом *R*. Знайти середню відстань від цієї точки до центра кулі.

► Потрібно знайти $M\rho$, де $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ (ми розглядаємо випадок тривимірної кулі). У цьому випадку

$$p(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}, & x^2+y^2+z^2\le R^2;\\ 0, & x^2+y^2+z^2>R^2.\end{cases}$$

Отже,

$$M\rho=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,p(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

Враховуючи вираз для $p(x,y,z)$ та перейшовши до сферичних координат, отримаємо:

$$M\rho=\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^R rr^2dr=\frac{4\pi\frac{R^4}{4}}{4\pi\frac{R^3}{3}}=\frac{3}{4}R.$$

Зауваження: використовуючи формулу для об'єму n-вимірної кулі, матимемо

$$M\rho=\frac{n}{n+1}R.$$

З останньої формули видно, що зі збільшенням розмірності середня відстань від точки, рівномірно розподіленої усередині кулі, до її центра зростає та наближається до його радіуса. ◄

Приклад 4.10. Знайти асиметрію і ексцес розподілу Пуассона.

► У прикладах 4.2 та 4.7 було знайдено, що для розподілу Пуассона з параметром μ $\alpha_1 = M\xi = \mu$, $\alpha_2 = \mu^2 + \mu$, $\mu_2 = \sigma^2 = \mu$. Спочатку знайдемо момент α_3. Неважко перевірити, що

$$M\xi(\xi-1)(\xi-2) = \alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1,$$

звідки

$$\alpha_3 = M\xi(\xi-1)(\xi-2) + 3\alpha_2 - 2\alpha_1.$$

Знаходимо $M\xi(\xi-1)(\xi-2)$:

$$M\xi(\xi-1)(\xi-2) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = \mu^3 e^{-\mu}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\mu^{k-3}}{(k-3)!} =$$

$$= \mu^3 e^{-\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mu^j}{j!} = \mu^3 e^{-\mu}e^{\mu} = \mu^3.$$

Тоді

$$\alpha_3 = \mu^3 + 3\left(\mu^2 + \mu\right) - 2\mu = \mu^3 + 3\mu^2 + \mu.$$

Тому

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = \mu.$$

Отже, асиметрія розподілу Пуассона дорівнює

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{\mu}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Для обчислення ексцесу необхідно обчислити центральний момент μ_4. Його знаходимо аналогічно. Очевидно,

$$\alpha_4 = M\xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3) + 6\mu^3 + 7\mu^2 + \mu,$$

$$M\xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3) = \mu^4.$$

Тоді

$$\alpha_4 = \mu^4 + 6\mu^3 + 7\mu^2 + \mu .$$

Використовуючи зв'язок між центральними і початковими моментами, знаходимо

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = 3\mu^2 + \mu .$$

Отже, ексцес розподілу Пуассона дорівнює

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\mu^2 + \mu}{\mu^2} - 3 = \frac{1}{\mu} . \blacktriangleleft$$

Приклад 4.11. Знайти центральні моменти нормального розподілу.

► Враховуючи симетрію розподілу, всі центральні моменти непарних порядків дорівнюють нулю. Знайдемо центральні моменти порядку $2k$, де $k \in N$. Нехай випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл з $M\xi = 0$ і $D\xi = 1$. Тоді випадкова величина $\eta = \sigma\xi + a$, де $\sigma > 0$, має нормальний розподіл з $M\eta = a$ й $D\eta = \sigma^2$. За визначенням центрального моменту порядку $2k$ маємо

$$\mu_{2k} = M\left(\eta - M\eta\right)^{2k} = M\left(\eta - a\right)^{2k} = \sigma^{2k} M\xi^{2k} = \frac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{2k} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \dfrac{x^2}{2} = t \\ xdx = dt \end{matrix} \right| = \sigma^{2k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{k-\frac{1}{2}} \cdot \int_0^\infty t^{k-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \sigma^{2k} \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \sigma^{2k} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \left(2k - 1\right).$$

Зокрема, $\mu_2 = \sigma^2$, $\mu_4 = 3\sigma^4$, $\mu_6 = 15\sigma^6$. ◄

Приклад 4.12. Знайти початковий і центральний момент третього порядку для гамма-розподілу.

► Розглянемо величину

$$M\xi^3 = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+2} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\lambda^3} .$$

Знайдемо центральний момент

$$\mu_3 = M\left(\xi - M\xi\right)^3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 =$$

$$=\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\lambda^3}-\frac{3(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}+2\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3=2\frac{\alpha}{\lambda^3}.\ ◄$$

Приклад 4.13. Знайти моду біноміального розподілу

► Нехай випадкова величина ξ має біноміальний розподіл, для якого

$$P(k,n)=P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k=\overline{0,r},$$

де n – кількість проведених випробувань, k – кількість успіхів у цих випробуваннях.

Розглянемо відношення

$$R(k,n)=\frac{P(k,n)}{P(k-1,n)}=\frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}=\frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{1-p}=\frac{p}{1-p}\cdot\left(\frac{n+1}{k}-1\right).$$

Очевидно, що зі зростанням k це відношення монотонно спадає, крім того $R(k,n)=\frac{p}{1-p}\left(\frac{n+1}{k}-1\right)>1$ при $\frac{n+1}{k}>\frac{1-p}{p}+1$, тобто $\frac{k}{n+1}<p$. А при $\frac{k}{n+1}>p$ відношення $R(k,n)<1$. Отже, імовірності $P(k,n)$ спочатку зростають із зростанням k, а потім при $k>p(n+1)$ спадають.

Отже, мода біноміального розподілу Mo задовольняє подвійній нерівності

$$p(n+1)-1\le Mo\le p(n+1).$$

Звідси випливає, що якщо $p(n+1)$ – дробове, то мода єдина і

$$M_\xi=\left[p(n+1)\right];$$

якщо ж $p(n+1)$ – ціле, то існують дві моди:

$$Mo^{(1)}=p(n+1)-1 \qquad \text{і} \qquad Mo^{(2)}=p(n+1).\ ◄$$

Приклад 4.14. Випадкова величина ексцентриситету деталі характеризується функцією розподілу Релея:

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \ge 0.$$

Знайти: а) квантиль порядку α; б) асиметрію й ексцес розподілу; г) моду.

► а) Для α-квантилі маємо рівняння ($0 < \alpha < 1$)

$$F(x_\alpha) = 1 - e^{-\frac{x_\alpha^2}{2\sigma^2}} = \alpha,$$

розв'язуючи яке, знаходимо

$$x_\alpha = \sqrt{2}\sigma\sqrt{\ln\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Зокрема, медіана дорівнює

$$x_{0,5} = \sigma\sqrt{2\ln 2}.$$

б) У прикладі 4.4 для розподілу Релея обчислені центральні моменти μ_3 й μ_4:

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = \sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\pi - 3);$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = \sigma^4\left(8 - \frac{3}{4}\pi^2\right).$$

Тоді асиметрія дорівнює

$$A = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi - 3)}{(4-\pi)^{3/2}} \approx 0,631;$$

а ексцес дорівнює

$$E = \frac{32 - 3\pi^2}{(4-\pi)^2} - 3 \approx 0,245.$$

г) Диференціюючи функцію розподілу Релея, знаходимо щільність

$$p_\xi(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x\geq 0.$$

Щільність розподілу Релея є диференційовною функцією (крім точки $x=0$). Обчислимо максимум функції $y=p(x)$. Для цього знайдемо похідні першого й другого порядків:

$$p'(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{x^2}{\sigma^4}\right), \qquad p''(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{x^3}{\sigma^6}-\frac{3x}{\sigma^4}\right).$$

Розв'язуючи рівняння $p'(x)=0$, знаходимо, що $x=\sigma$. Оскільки $p''(\sigma)=-e^{-\frac{1}{2}}2\sigma^{-3}<0$, то при $x=\sigma$ функція $p(x)$ має максимум. Таким чином, у точці $x=\sigma$ розподіл Релея має єдину моду. ◄

Приклад 4.15. Знайти ексцес і асиметрію рівномірного розподілу на відрізку $[a,\ b]$.

► Раніше було встановлено, що для рівномірного розподілу

$$M\xi=\frac{a+b}{2}, \qquad D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Знайдемо μ_3 й μ_4:

$$\mu_3=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{4}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^4\Bigg|_a^b=0;$$

$$\mu_4=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^4dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{5}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^5\Bigg|_a^b=\frac{(b-a)^4}{80}.$$

Тоді асиметрія й ексцес дорівнюють:

$$A=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=0, \qquad E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=-1{,}2. \text{ ◄}$$

Приклад 4.16. Випадкова величина ξ має біноміальний закон розподілу з параметром p. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\eta = e^{a\xi}$.

► Випадкова величина ξ набуває значення 0, 1, 2, ..., n з імовірностями $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, тому

$$M\eta = \sum_{k=0}^{n} y_k P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{ak} C_n^k p^k q^{n-k} = \left(q + pe^a\right)^n,$$

$$D\eta = \sum_{k=0}^{n} y_k^2 P(\xi = k) - (M\eta)^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(pe^{2a}\right)^k q^{n-k} - (M\eta)^2 =$$

$$= \left(q + pe^{2a}\right)^n - \left(q + pe^a\right)^{2n}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.17. Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом з параметром λ. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\eta = e^{\xi}$.

► Маємо

$$M\eta = \int_0^{\infty} e^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - 1)x} dx.$$

Останній інтеграл збігається при $\lambda - 1 > 0$ і дорівнює $\frac{1}{\lambda - 1}$. Таким чином, математичне сподівання випадкової величини $\eta = e^{\xi}$ існує при $\lambda > 1$ і дорівнює

$$M\eta = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Для дисперсії маємо

$$D\eta = \int_0^{\infty} e^{2x} \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right)^2 = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - 2)x} dx - \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right)^2.$$

Інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-(\lambda - 2)x} dx$ збігається при $\lambda > 2$ і дорівнює $\frac{1}{\lambda - 2}$. Тоді дисперсія випадкової величини $\eta = e^{\xi}$ існує при $\lambda > 2$ і дорівнює

$$D\eta = \frac{\lambda}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.18. Таблиця розподілу дискретного двовимірного випадкового вектора $(\xi,\ \eta)$ має вигляд

η	ξ		
	0,5	1	2
1	0,1	0,4	0,2
2	0,2	0	0,1

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\zeta = \log_2 \dfrac{\xi}{\eta}$.

► За формулою для визначення математичного сподівання функції дискретного двовимірного випадкового вектора знайдемо математичні сподівання випадкових величин ζ й ζ^2:

$$M\zeta = \log_2 \frac{0,5}{1} \cdot 0,1 + \log_2 \frac{1}{1} \cdot 0,4 + \log_2 \frac{2}{1} \cdot 0,2 +$$

$$+\log_2 \frac{0,5}{2} \cdot 0,2 + \log_2 \frac{1}{2} \cdot 0 + \log_2 \frac{2}{2} \cdot 0,1 = -0,3;$$

$$M\zeta^2 = \left(\log_2 \frac{0,5}{1}\right)^2 \cdot 0,1 + \left(\log_2 \frac{1}{1}\right)^2 \cdot 0,4 + \left(\log_2 \frac{2}{1}\right)^2 \cdot 0,2 +$$

$$+\left(\log_2 \frac{0,5}{2}\right)^2 \cdot 0,2 + \left(\log_2 \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0 + \left(\log_2 \frac{2}{2}\right)^2 \cdot 0,1 = 1,1.$$

Тоді

$$D\zeta = 1,1 - (-0,3)^2 = 1,01. \ ◄$$

Приклад 4.19. Двовимірний розподіл величин $(\xi,\ \eta)$ заданий щільністю

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}, & x^2+y^2 \le 1; \\ 0, & x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\zeta = \xi\eta$.

► Використовуючи формулу для обчислення математичного сподівання функції неперервного двовимірного випадкового вектора, знаходимо

$$M\zeta=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{3xy\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}dxdy=\frac{3}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}xdx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y\sqrt{x^2+y^2}dy=0,$$

$$D\zeta=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{3x^2y^2\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}dxdy=\frac{3}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_{0}^{1}\left(\rho^2\right)^2\rho\rho d\rho=\frac{3}{56}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.20. Таблиця розподілу двовимірної дискретної випадкової величини $(\xi,\ \eta)$ має вигляд

η	ξ		
	-1	0	1
0	$0,10$	$0,15$	$0,20$
1	$0,15$	$0,25$	$0,15$

Знайти:

а) вектор математичного сподівання $(M\xi,\ M\eta)$;

б) коваріаційну та кореляційну матриці випадкових величин ξ і η.

► а) Знайдемо математичні сподівання випадкових величин ξ і η:

$$M\xi=(-1)\cdot(0,10+0,15)+0\cdot(0,15+0,25)+1\cdot(0,20+0,15)=0,10;$$

$$M\eta=0\cdot(0,10+0,15+0,20)+1\cdot(0,15+0,25+0,15)=0,55.$$

Тоді $(M\xi,\ M\eta)=(0,10;\ 0,55)$.

б) Для знаходження коваріаційної та кореляційної матриць необхідно знайти $D\xi$, $D\eta$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$. Знайдемо дисперсії випадкових величин ξ і η:

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=(-1)^2\cdot(0,10+0,15)+0^2\cdot(0,15+0,25)+$$

$$+1^2\cdot(0,20+0,15)-(0,10)^2=0,59;$$

$$D\eta=M\eta^2-(M\eta)^2=0^2\cdot(0,10+0,15+0,20)+$$

$$+1^2\cdot(0{,}15+0{,}25+0{,}15)-(0{,}55)^2=0{,}2475.$$

Для знаходження $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ скористаємося формулою

$$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)=M\xi\eta-M\xi M\eta.$$

Тоді

$$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)=(-1)\cdot 0\cdot 0{,}10+0\cdot 0\cdot 0{,}15+1\cdot 0\cdot 0{,}20+(-1)\cdot 1\cdot 0{,}15+$$

$$+0\cdot 1\cdot 0{,}25+1\cdot 1\cdot 0{,}15-0{,}10\cdot 0{,}55=-0{,}055$$

Коефіцієнт кореляції дорівнює

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{-0{,}055}{\sqrt{0{,}59}\sqrt{0{,}2475}}\approx-0{,}1439.$$

Коваріаційна та кореляційна матриці мають вигляд

$$K=\begin{bmatrix}0{,}59 & -0{,}055\\ -0{,}055 & 0{,}2475\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}1 & -0{,}1439\\ -0{,}1439 & 1\end{bmatrix}.\ ◄$$

Приклад 4.21. Відома щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора $(\xi,\ \eta)$: $p_{\xi,\ \eta}(x,y)=\frac{1}{2}\sin(x+y)$, де $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$. Побудувати коваріаційну та кореляційну матриці.

► Спочатку знайдемо математичні сподівання $M\xi$ і $M\eta$. Для $M\xi$ маємо

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{\xi,\ \eta}(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+\cos x)dx=\frac{\pi}{4}.$$

Оскільки щільність імовірності симетрична відносно x і y, то $M\eta=M\xi=\frac{\pi}{4}$. Знайдемо, далі, $D\xi$:

$$D\xi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin(x+y)dxdy-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\sin x+\cos x)dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}.$$

Звідси $D\eta=D\xi$. Знаходимо $\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)$:

$$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)=M\xi\eta-M\xi M\eta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xy\sin(x+y)\,dxdy-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\cos x-\sin x+\frac{\pi}{2}\sin x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}=-\frac{\pi^2-8\pi+16}{16}.$$

Тоді

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=-\frac{\pi^2-8\pi+16}{\pi^2+8\pi-32}.$$

Коваріаційна та кореляційна матриці мають вигляд

$$K=\begin{bmatrix}\dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16} & -\dfrac{\pi^2-8\pi+16}{16}\\ -\dfrac{\pi^2-8\pi+16}{16} & \dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16}\end{bmatrix};$$

$$R=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{\pi^2-8\pi+16}{\pi^2+8\pi-32}\\ -\dfrac{\pi^2-8\pi+16}{\pi^2+8\pi-32} & 1\end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.22. Нехай ξ_1 і ξ_2 – випадкові величини, крім того, $M\xi_1=1,2$, $M\xi_2=2$, $D\xi_1=0,5$, $D\xi_2=1$, $\operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2)=-1,2$. Знайти $M\eta$ й $D\eta$, якщо $\eta=3\xi_1-2\xi_2+3$.

► Використовуючи властивість математичного сподівання й дисперсії, маємо:

$$M\eta=M(3\xi_1-2\xi_2+3)=3M\xi_1-2M\xi_2+3=3\cdot1,2-2\cdot2+3=2,6;$$

$$D\eta=D(3\xi_1-2\xi_2+3)=3^2D\xi_1+(-2)^2D\xi_2+2\cdot3\cdot(-2)\operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2)=$$

$$=9\cdot0,5+4\cdot1-12\cdot(-1,2)=22,9. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.23. Тривимірний випадковий вектор $\vec{\xi}$ має вектор середніх значень $\vec{a}_{\vec{\xi}}=(-1,\ 0,\ 2)$ і коваріаційну матрицю

$$K_{\vec{\xi}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Знайти вектор середніх значень і коваріаційну матрицю випадкового вектора $\vec{\eta}=\vec{\xi}B+\vec{c}$, якщо $B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & 5\\ 2 & -7\end{bmatrix}$, $\vec{c}=(1,\ 13)$.

► Маємо:

$$\vec{a}_{\vec{\eta}}=\vec{a}_{\vec{\xi}}B+\vec{c}=(-1,\ 0,\ 2)\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & 5\\ 2 & -7\end{bmatrix}+(1,\ 13)=(1,\ 2);$$

$$K_{\vec{\eta}}=B^TK_{\vec{\xi}}B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ -3 & 5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & 5\\ 2 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}51 & -8\\ -8 & 77\end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.24. Відомі математичні сподівання двох нормальних випадкових величин $M\xi=26$, $M\eta=-12$ і їх коваріаційна матриця $K=\begin{bmatrix}196 & -91\\ -91 & 169\end{bmatrix}$.

Визначити щільність імовірності двовимірної величини $(\xi,\ \eta)$.

► З матриці R знаходимо: $\sigma_\xi=\sqrt{k_{11}}=14$; $\sigma_\eta=\sqrt{k_{22}}=13$; $\rho(\xi,\eta)=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi\sigma_\eta}=-0{,}5$. Тоді

$$p_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{182\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{2}{3}\left(\frac{(x-26)^2}{196}+\frac{(x-26)(y+12)}{182}+\frac{(y+12)^2}{169}\right)}. \blacktriangleleft$$

4.3 Задачі для самостійного розв’язання

Задача 4.1. Знайти математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини ξ, якщо її ряд розподілу має вигляд:

а)

ξ	1	1,5	2	3
P_ξ	0,20	0,17	0,30	0,33

б)

ξ	0	1	2	3
P_ξ	0,41	0,43	0,11	0,05

Відповідь: а) $M\xi = 2,045$, $D\xi = 0,57$; б) $M\xi = 0,8$, $D\xi = 1,32$.

Задача 4.2. Знайти математичне сподівання і дисперсію гіпергеометричного розподілу.

Відповідь: $M\xi = \dfrac{nM}{N}$, $D\xi = \dfrac{nM}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$.

Задача 4.3. Знайти дисперсію геометричного розподілу.

Відповідь: $\dfrac{q}{p^2}$.

Задача 4.4. Випадкова величина ξ отримуає лише цілі невід'ємні значення з імовірностями

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$$

(***розподіл Паскаля*** з параметром $a > 0$). Знайти математичне сподівання, дисперсію і моду розподілу.

Відповідь: $M\xi = a$, $D\xi = a(a+1)$, $Mo = 0$.

Задача 4.5. Випадкова величина ξ може набувати значень -2, -1, 0, 1, 2 з імовірностями p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2 відповідно. Знайти ці ймовірності, якщо:

а) $M\xi = M\xi^3 = 0$, $M\xi^2 = 1$, $M\xi^4 = 2$;

б) $M\xi = M\xi^3 = 0$, $M\xi^2 = 2$, $M\xi^4 = 6$.

Відповідь: а) $p_{-2} = p_2 = \dfrac{1}{24}$, $p_{-1} = p_1 = \dfrac{1}{3}$, $p_0 = \dfrac{1}{4}$; б) $p_{-2} = p_2 = \dfrac{1}{6}$, $p_{-1} = p_1 = \dfrac{1}{3}$, $p_0 = 0$.

Задача 4.6. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} & \text{при } x\in(-a,\ a);\\ 0 & \text{при } x\notin(-a,\ a).\end{cases}$$

Знайти: а) величину b, якщо a задано; б) $M\xi$, $D\xi$; в) функцію розподілу $F_\xi(x)$.

Відповідь: а) $b=\dfrac{2}{\pi a}$; б) $M\xi=0$, $D\xi=\dfrac{a^2}{4}$;

в) $$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -a;\\ \dfrac{1}{\pi a^2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{a^2\pi}{2}\right] & \text{при } -a<x\le a;\\ 1 & \text{при } x>a.\end{cases}$$

Задача 4.7. Швидкість молекул газу має щільність імовірності (***закон Максвелла***)

$$p(v)=Av^2e^{-h^2v^2},\qquad v\ge 0.$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію ξ швидкості молекул, а також величину A при заданому h.

Відповідь: $M\xi=\dfrac{2}{h\sqrt{\pi}}$, $D\xi=\dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{\pi}\right)$, $A=\dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}}$.

Задача 4.8. Випадкова величина ξ має закон арксинуса зі щільністю розподілу ймовірностей

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} & \text{при } |x|<a;\\ 0 & \text{при } |x|>a.\end{cases}$$

Знайти: а) функцію розподілу; б) $M\xi$ і $D\xi$; в) моду і медіану.

Відповідь: а) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -a;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a;\\ 1, & x>a;\end{cases}$ б) $M\xi=0$, $D\xi=\dfrac{a^2}{2}$;

в) мода не існує; медіана $x=a$.

Задача 4.9. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на відрізку $[a,\ b]$, крім того, $M\xi = 4$, $D\xi = 3$. Знайти a і b.

Відповідь: $a = 1,\ b = 7$.

Задача 4.10. Випадкова величина ξ має розподіл Лапласа зі щільністю

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-\lambda|x|}.$$

Знайти: а) математичне сподівання і дисперсію; б) асиметрію та ексцес; в) моду; г) α-квантиль; д) медіану.

Відповідь: а) $M\xi = 0$, $D\xi = \dfrac{2}{\lambda^2}$; б) $A = 0$, $E = 3$; в) мода $x_0 = 0$; г) $x_\alpha = \dfrac{1}{\lambda}\ln 2\alpha$ при $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2}$, $x_\alpha = -\dfrac{1}{\lambda}\ln\left(2(1-\alpha)\right)$ при $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$; д) $x_{0,5} = 0$.

Задача 4.11. Щільність випадкової величини ξ дорівнює

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ Ax, & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти: а) коефіцієнт A; б) $M\xi$ і $D\xi$; в) $P\left(|\xi - M\xi| < 0,5\right)$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{2}$; б) $M\xi = \dfrac{4}{3}$, $D\xi = \dfrac{2}{9}$; в) $\dfrac{2}{3}$.

Задача 4.12. Функція розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти: а) моду; б) медіану; в) $M\xi$; г) $P(0,5 \le \xi < 1,5)$.

Відповідь: а) 2; б) $\sqrt{2}$; в) $\dfrac{4}{3}$; г) $\dfrac{1}{2}$.

Задача 4.13. Для гамма-розподілу з параметрами α і λ знайти:
а) початкові моменти α_k

б) асиметрію та ексцес.

Відповідь: $\alpha_k = \dfrac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}{\lambda^k}$ 4; б) $A = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$, $E = \dfrac{6}{\alpha}$.

Задача 4.14. Знайти початкові моменти, асиметрію та ексцес показникового розподілу з параметром λ.

Відповідь: $\alpha_k = \dfrac{k!}{\lambda^k}$, $A = 2$, $E = 6$.

Задача 4.15. Дискретна випадкова величина ξ має такий розподіл:

ξ	1	e	e^2	e^3
P_ξ	0,2	0,1	0,5	0,2

Знайти $M\eta$, $D\eta$, якщо $\eta = \ln\xi$.

Відповідь: $M\eta = 1{,}7$, $D\eta = 1{,}01$.

Задача 4.16. Нехай випадкові величини ξ і η незалежні та $M\xi = 1$, $M\eta = 2$, $D\xi = 1$, $D\eta = 4$. Знайти математичні сподівання випадкових величин:

а) $\zeta_1 = \xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4$;

б) $\zeta_2 = (\xi + \eta + 1)^2$.

Відповідь: а) $M\zeta_1 = 18$; б) $M\zeta_2 = 22$.

Задача 4.17. Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\eta = 2\xi_1 - 3\xi_2$, якщо $M\xi_1 = 1$, $M\xi_2 = 2$, $D\xi_1 = 0{,}8$, $D\xi_2 = 0{,}2$.

Відповідь: $M\eta = -4$, $D\eta = 5$.

Задача 4.18. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на відрізку $[1,\ 2]$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\eta = \dfrac{1}{\xi}$.

Відповідь: $M\eta = \ln 2$, $D\eta = \dfrac{1}{2} - (\ln 2)^2$.

Задача 4.19. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right);\\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини а) $\eta=\sin\xi$, б) $\eta=|\sin\xi|$.

Відповідь: **а)** $M\eta=0$**,** $D\eta=\frac{1}{3}$; б) $M\eta=\frac{1}{2}$, $D\eta=\frac{1}{12}$.

Задача 4.20. Закон розподілу дискретного випадкового вектора $(\xi,\ \eta)$ має вигляд

η	ξ		
	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Знайти $M\eta$ й $D\eta$, якщо $\eta=\xi^2+2\eta$.

Відповідь: $M\eta=1{,}9$, $D\eta=1{,}29$.

Задача 4.21. Визначити математичні сподівання та коваріаційну матрицю випадкового вектора $(\xi,\ \eta)$, якщо щільність спільного розподілу

$$p_{\xi,\ \eta}(x,y)=\frac{2}{\pi\left(x^2+y^2+1\right)^3}.$$

Відповідь: $M\xi=M\eta=0$, $K=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}5\end{bmatrix}$.

Задача 4.22. Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 мають математичні сподівання $M\xi_1=-5$, $M\xi_2=2$, дисперсії $D\xi_1=0{,}5$, $D\xi_2=0{,}4$ і коваріацію $\operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2)=0{,}2$. Знайти $M\eta$ і $D\eta$, якщо $\eta=4\xi_1-5\xi_2+25$.

Відповідь: $M\eta=-5$, $D\eta=10$.

5 УМОВНІ РОЗПОДІЛИ Й
УМОВНІ МАТЕМАТИЧНІ СПОДІВАННЯ

5.1 Теоретичні відомості

Під час розв'язування багатьох задач, пов'язаних із системами випадкових величин, особливо при вивченні залежностей між ними, використовують поняття умовного розподілу ймовірностей.

Розглянемо двовимірний випадковий вектор (ξ,η), який є дискретним. Він отримує не більш ніж зліченну кількість значень з імовірностями $P\big((\xi,\eta)=(x_i, y_j)\big)$.

Подію $(\xi,\eta)=(x_i, y_j)$ можна розглядати як добуток подій $\xi = x_i$ і $\eta = y_j$.

Застосувавши правило множення ймовірностей, отримаємо

$$P\big((\xi,\eta)=(x_i, y_j)\big)=P(\xi = x_i)P\left(\eta = y_j | \xi = x_i\right).$$

Звідси можна знайти ***умовну ймовірність***

$$P\left(\eta = y_j | \xi = x_i\right)=\frac{P\big((\xi,\eta)=(x_i, y_j)\big)}{P(\xi = x_i)}.$$

Тут $P(\xi = x_i)=\sum_j P\big((\xi,\eta)=(x_i, y_j)\big)$.

Сукупність імовірностей визначає умовний розподіл імовірностей випадкової величини η за умови $\xi = x_i$. Умовний розподіл імовірностей випадкової величини ξ визначається аналогічно.

Нехай випадкова величина (ξ,η) має абсолютно неперервний розподіл зі щільністю $p_{\xi,\eta}(x, y)$. Тоді умовний розподіл випадкової величини ξ за умови $\eta = y$ визначається щільністю

$$p_\xi(x|y)=\frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)}.$$

Щільність $p_\eta(y)$ можна знайти за формулою:

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x, y)dx.$$

Щільність умовного розподілу η за умови $\xi = x$ визначається за аналогічними формулами.

Для абсолютно неперервних випадкових величин правило множення ймовірностей визначають такі формули:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = p_{\xi}(x)\, p_{\eta}(y|x),$$

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = p_{\eta}(y)\, p_{\xi}(x|y).$$

Аналогом формули повної ймовірності є формула

$$p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\eta}(y)\, p_{\xi}(x|y)\, dy.$$

Все сказане вище можна легко узагальнити і для системи більше двох випадкових величин.

Нехай A – деяка подія. ***Повна ймовірність події*** A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) P(A|x)\, dx,$$

де $p_{\xi}(x)$ – щільність випадкової величини ξ, від значень якої залежить імовірність появи події A; $P(A|x)$ – імовірність появи події A, обчислена в припущенні, що випадкова величина ξ отримала значення x.

Умовна щільність $p_{\xi}(x|A)$ випадкової величини ξ (щільність імовірності за умови, що подія A має місце) визначається за допомогою ***узагальненої формули Байєса***:

$$p_{\xi}(x|A) = \frac{p_{\xi}(x) P(A|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) P(A|x)\, dx},$$

де $p_{\xi}(x)$ – щільність випадкової величини ξ до досліду.

Визначимо деякі числові характеристики умовних розподілів. Найбільш важливою з них є умовне математичне сподівання.

Умовне математичне сподівання випадкової величини ξ за умови $\eta = y$ визначається за формулами:

– для дискретного випадку

$$M\left(\xi\middle|\eta=y_j\right)=\sum_i x_i P\left(\xi=x_i\middle|\eta=y_j\right)=\sum_i \frac{x_i P\left(\left(\xi,\eta\right)=\left(x_i,\,y_j\right)\right)}{P\left(\eta=y_j\right)};$$

– для абсолютно неперервного випадку

$$M\left(\xi\middle|\eta=y\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x\ p_{\xi}\left(x\,|\,\eta=y\right)dx=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\ p_{\xi,\,\eta}\left(x,\,y\right)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\,\eta}\left(x,\,y\right)dx}.$$

Справедлива формула повного математичного сподівання:

$$M\xi=\sum_j P\left(\eta=y_j\right)M\left(\xi\middle|\eta=y_j\right)$$

або (для неперервних випадкових величин ξ і η)

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\eta}\left(y\right)M\left(\xi\,|\,\eta=y\right)dy.$$

Якщо ймовірності значень випадкової величини ξ залежать від подій A_k ($k=1,2,...,n$), то умовне математичне сподівання випадкової величини ξ за умови здійснення події A_k обчислюється за формулою

$$M\left(\xi\middle|A_k\right)=\sum_i P\left(\xi=x_i\middle|A_k\right).$$

Якщо події A_k ($k=1,2,...,n$) утворюють повну групу несумісних подій, то

$$M\xi=M\left[M\left(\xi\middle|A_k\right)\right]=\sum_{k=1}^{n} M\left(\xi\middle|A_k\right)P\left(A_k\right).$$

Умовне математичне сподівання має такі ***властивості***:

1) $M\left(\varphi\left(\eta\right)\middle|\eta=y\right)=\varphi\left(\eta\right)$;

2) $M\left(\varphi\left(\eta\right)\cdot\xi\middle|\eta=y\right)=\varphi\left(\eta\right)M\left(\xi\middle|\eta=y\right)$;

3) $M\left(\xi_1+\xi_2\middle|\eta=y\right)=M\left(\xi_1\middle|\eta=y\right)+M\left(\xi_2\middle|\eta=y\right)$;

4) для незалежних випадкових величин ξ і η:

$$M\left(\xi\middle|\eta=y\right)=M\xi.$$

Умовна дисперсія випадкової величини ξ за умови $\eta = y$ визначається:
– для дискретних випадкових величин

$$D\left(\xi \middle| \eta = y_j\right) = \sum_i \left(x_i - M\left(\xi \middle| \eta = y_j\right)\right)^2 P\left(\xi = x_i \middle| \eta = y_j\right);$$

– для абсолютно неперервних випадкових величин

$$D\left(\xi \middle| \eta = y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M\left(\xi \middle| \eta = y\right)\right)^2 p_\xi\left(x \mid y\right) dx.$$

Умовні ймовірності, умовні математичні сподівання й умовні дисперсії можна розглядати як випадкові величини $P\left(\xi|\eta\right)$, $M\left(\xi|\eta\right)$ і $D\left(\xi|\eta\right)$, які отримують при $\eta = y$ значення, обумовлені вказаними вище формулами.

Умовне математичне сподівання $M\left(\xi|\eta\right)$ називається ***функцією регресії*** випадкової величини η на випадкову величину ξ. Зазначимо, що $M\left(\xi|\eta\right)$ є функцією, що залежить від x. Функцію регресії позначимо через $f\left(x\right)$:

$$f\left(x\right) = M\left(\xi|\eta\right).$$

Рівняння $y = f\left(x\right)$ називається ***рівнянням регресії***, а відповідна крива – ***лінією регресії*** випадкової величини η на ξ.

Визначимо одну важливу властивість регресії. Нехай $f\left(x\right)$ – це функція регресії випадкової величини η на ξ, тоді математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини η від функції $f\left(x\right)$ менше, ніж математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини η від будь-якої іншої функції $\varphi(\xi)$:

$$M\left(\eta - f\left(\xi\right)\right)^2 \le M\left(\eta - \varphi(\xi)\right)^2.$$

Тут рівність досягається тільки для тих функцій $\varphi(\xi)$, для яких

$$M\left(f\left(\xi\right) - \varphi(\xi)\right)^2 = 0.$$

Регресійні залежності вивчаються за допомогою методів ***кореляційного аналізу***.

Нехай обидві функції $f(x)$ регресії η на ξ і $g(x)$ регресії ξ на η є лінійними. У цьому випадку вважають, що між випадковими величинами ξ і η має місце ***лінійна кореляція***.

Зазначимо, що при лінійній кореляції криві регресії збігаються з прямими середньоквадратичної регресії.

Для нормального розподілу справедлива така властивість. Нехай випадковий вектор (ξ,η) має двовимірний нормальний розподіл. Тоді між випадковими величинами ξ і η має місце лінійна кореляція.

5.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1. Імовірність події A залежить від випадкової величини ξ і виражається формулою

$$P(A|x) = \begin{cases} 1-e^{kx}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad (k>0).$$

Знайти повну ймовірність події, якщо ξ є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням a та дисперсією σ^2.

► Повна ймовірність події A дорівнює

$$P(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) P(A|x) dx.$$

Підставивши сюди задану щільність імовірності

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

отримаємо

$$P(A) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(1-e^{-kx}\right) dx = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-kx} dx.$$

Оскільки

$$-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-kx=-\frac{\left(x-a+k\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}-k\left(a-\frac{k\sigma^2}{2}\right),$$

то

$$P(A)=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right)-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-k\left(a-\frac{k\sigma^2}{2}\right)}\cdot\int_0^{\infty}e^{-\frac{\left(x-a+k\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}}dx\,.$$

Але

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\left(x-a+k\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{a-k\sigma^2}{\sigma}\right).$$

Тому

$$P(A)=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right)-\left[1+\Phi_0\left(\frac{a-k\sigma^2}{\sigma}\right)\right]\exp\left[-k\left(a-\frac{k\sigma^2}{2}\right)\right].\ \blacktriangleleft$$

Приклад 5.2. Відхилення розміру деталі від середини поля допуску шириною $2d$ дорівнює сумі двох випадкових величин ξ і ζ, що мають щільності ймовірностей:

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}\quad \text{і}\quad p_\zeta(y)=\frac{1}{\sigma_\zeta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_\zeta^2}}.$$

Знайти щільність імовірності випадкової величини ξ для якісних деталей, якщо $p_\zeta(y)$ не залежить від того, які значення отримує випадкова величина ξ.

► Нехай подія A полягає в тому, що виготовлена деталь виявилася якісною. Умовна ймовірність $P(A|x)$ отримати якісну деталь у припущенні, що випадкова величина ξ набула значення x, дорівнює

$$P(A|x)=\int_{x-d}^{x+d}\frac{1}{\sigma_\zeta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_\zeta^2}}dy=\Phi_0\left(\frac{x+d}{\sigma_\zeta}\right)-\Phi_0\left(\frac{x-d}{\sigma_\zeta}\right).$$

Нехай $p_{\xi|A}(x)$ – умовна щільність імовірності випадкової величини ξ для якісних деталей. Тоді

$$p_{\xi|A}(x)=\frac{p_\xi(x)P(A|x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)P(A|x)dx}=\frac{\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}\cdot\left[\Phi_0\left(\frac{x+d}{\sigma_\zeta}\right)-\Phi_0\left(\frac{x-d}{\sigma_\zeta}\right)\right]}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}\cdot\left[\Phi_0\left(\frac{x+d}{\sigma_\zeta}\right)-\Phi_0\left(\frac{x-d}{\sigma_\zeta}\right)\right]dx}.$$

Остаточно маємо

$$p_{\xi|A}(x)=\frac{\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}\cdot\left[\Phi_0\left(\frac{x+d}{\sigma_\zeta}\right)-\Phi_0\left(\frac{x-d}{\sigma_\zeta}\right)\right]}{2\Phi_0\left(\frac{d}{\sqrt{\sigma_\xi^2+\sigma_\zeta^2}}\right)}. \blacktriangleleft$$

Приклад 5.3. Прилад має n запобіжників. У випадку перевантаження перегоряє один із запобіжників і замінюється новим. Чому дорівнює математичне сподівання $M[N]$ кількості перевантажень N, після яких у приладі виявляться заміненими всі спочатку встановлені запобіжники, якщо вихід з ладу в момент перевантаження кожного з n запобіжників (як спочатку встановленого, так і нового) є рівноймовірним.

► Позначимо через $M[N|k]$ математичне сподівання кількості перевантажень, після яких всі спочатку встановлені n запобіжників будуть замінені, у випадку, якщо k запобіжників будуть встановленими спочатку. Для визначення $M[N|k]$ скористаємося формулою повного математичного сподівання. Якщо залишилося k спочатку встановлених запобіжників, то для виходу з ладу одного з цих k запобіжників необхідне чергове перевантаження. При черговому перевантаженні можливі події:

A – згорів один із спочатку встановлених запобіжників,

B – згорів запобіжник, що був замінений.

Імовірності цих подій такі:

$$P(A)=\frac{k}{n},\qquad P(B)=1-\frac{k}{n}.$$

Якщо під час чергового перевантаження відбудеться подія A, то математичне сподівання кількості перевантажень для заміни всіх k запобіжників, які не були замінені до чергового перевантаження, дорівнюватиме $1+M\left[N|k-1\right]$. Якщо під час чергового перевантаження відбудеться подія B, то це математичне сподівання дорівнюватиме $1+M\left[N|k\right]$. За формулою повного математичного сподівання

$$M\left[N|k\right]=\frac{k}{n}\left(1+M\left[N|k-1\right]\right)+\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1+M\left[N|k\right]\right)=$$

$$=1+\frac{k}{n}M\left[N|k-1\right]+\frac{n-k}{n}M\left[N|k\right].$$

Звідси

$$M\left[N|k\right]-M\left[N|k-1\right]=\frac{n}{k}.$$

Якщо $k=1$, тобто тільки один запобіжник не був замінений (імовірність його заміни дорівнює $\frac{1}{n}$), то

$$M\left[N|1\right]=n.$$

Отже, справедлива така послідовність рівностей:

$$M\left[N|n\right]-M\left[N|n-1\right]=\frac{n}{n};$$

$$M\left[N|n-1\right]-M\left[N|n-2\right]=\frac{n}{n-1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M\left[N|3\right]-M\left[N|2\right]=\frac{n}{3};$$

$$M\left[N|2\right]-M\left[N|1\right]=\frac{n}{2};$$

$$M\left[N|1\right]=n.$$

Підсумовуючи ці рівності, отримаємо

$$M\left[N|n\right]=\frac{n}{n}+\frac{n}{n-1}+\ldots+\frac{n}{3}+\frac{n}{2}+n,$$

або

$$M\left[N\right]=M\left[N|n\right]=n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right).\ ◄$$

Приклад 5.4. Визначити математичне сподівання квадрата відстані між двома точками, вибраними навмання на кожній зі сторін прямокутника.

► При виборі двох точок навмання на кожній зі сторін прямокутника можливі такі можливі й несумісні події (гіпотези) (рис. 5.1):

H_1 – точки вибрані на одній тій самій стороні a;

H_2 – точки вибрані на одній тій самій стороні b;

H_3 – точки вибрані на суміжних сторонах прямокутника;

H_4 – точки вибрані на протилежних сторонах a;

H_5 – точки вибрані на протилежних сторонах b.

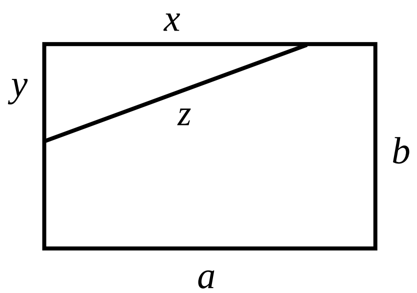


Рисунок 5.1

Для ймовірностей цих гіпотез маємо:

$$P(H_1)=2\left(\frac{a}{2p}\cdot\frac{a}{2p}\right)=\frac{a^2}{2p^2},\qquad P(H_2)=2\left(\frac{b}{2p}\cdot\frac{b}{2p}\right)=\frac{b^2}{2p^2},$$

$$P(H_3)=8\left(\frac{a}{2p}\cdot\frac{b}{2p}\right)=2\frac{ab}{p^2},\qquad P(H_4)=2\left(\frac{a}{2p}\cdot\frac{a}{2p}\right)=\frac{a^2}{2p^2},$$

$$P(H_5)=2\left(\frac{b}{2p}\cdot\frac{b}{2p}\right)=\frac{b^2}{2p^2},$$

де $2p$ – периметр прямокутника.

Визначимо умовне математичне сподівання (тобто математичне сподівання за умови, що мала місце гіпотеза H_i) квадрата відстані між двома точками:

$$M\left[\zeta^2 \middle| H_1\right] = \frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^a (x-y)^2\,dxdy = \frac{a^2}{6},$$

$$M\left[\zeta^2 \middle| H_2\right] = \frac{1}{b^2}\int_0^b\int_0^b (x-y)^2\,dxdy = \frac{b^2}{6},$$

$$M\left[\zeta^2 \middle| H_3\right] = \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b \left(x^2+y^2\right)dxdy = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2\right),$$

$$M\left[\zeta^2 \middle| H_4\right] = M\left[b^2+(\xi-\eta)^2\right] = b^2 + M\left[(\xi-\eta)^2\right] = b^2+\frac{a^2}{6},$$

$$M\left[\zeta^2 \middle| H_5\right] = M\left[a^2+(\xi-\eta)^2\right] = a^2 + M\left[(\xi-\eta)^2\right] = a^2+\frac{b^2}{6}.$$

Знаходимо повне математичне сподівання випадкової величини ζ^2:

$$M\left[\zeta^2\right] = \sum_{j=1}^{5} P\left(H_j\right) M\left[\zeta^2 \middle| H_j\right] = \frac{1}{6p^2}\left(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\right) =$$

$$= \frac{(a+b)^4}{6p^2} = \frac{p^2}{6}. \blacktriangleleft$$

Приклад 5.5. Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини. Знайти $D\left[M\left(\xi\eta|\xi\right)\right]$, якщо:

а) ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0,\ 1]$, а η нормально розподілена з параметрами $\left(a,\ \sigma^2\right)$;

б) ξ і η мають показниковий розподіл з параметрами λ і μ відповідно.

► Спростимо спочатку $M\left(\xi\eta|\xi\right)$. За визначенням

$$M\left(\xi\eta|\xi\right) = M\left(\xi\eta|F_\xi\right),$$

де F_ξ – σ-алгебра, породжена випадковою величиною ξ. Зрозуміло, що ξ є вимірною відносно F_ξ. Тоді з властивостей умовного математичного сподівання випливає

$$M\left(\xi\eta|\xi\right)=\xi M\left(\eta|\xi\right).$$

Далі, ξ і η незалежні, тобто η не залежить від σ-алгебри F_ξ. Тоді

$$M\left(\eta|\xi\right)=M\eta.$$

Отже,

$$M\left(\xi\eta|\xi\right)=\xi M\eta,$$

а

$$D\left[M\left(\xi\eta|\xi\right)\right]=D(\xi M\eta)=(M\eta)^2 D\xi.$$

а) Для рівномірного розподілу $D\xi=\dfrac{1}{12}$, а для нормального – $M\eta=a$. Тоді

$$D\left[M\left(\xi\eta|\xi\right)\right]=\frac{a^2}{12}.$$

б) Для показникового розподілу $D\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $M\eta=\dfrac{1}{\mu}$. Тоді

$$D\left[M\left(\xi\eta|\xi\right)\right]=\frac{1}{\lambda^2\mu^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 5.6. Закон сумісного розподілу дискретного випадкового вектора $(\xi,\ \eta)$ має вигляд

ξ	η		
	-1	0	1
0,1	0,40	0,20	0,10
0,3	0,15	0,05	0,10

а) Знайти умовні закони розподілу $P(\xi|\eta)$ й $P(\eta|\xi)$.

б) Перевірити, чи будуть випадкові величини ξ й η незалежними.

► а) Спочатку знайдемо одномірні закони:

ξ	0,1	0,3
P_ξ	0,70	0,30

η	-1	0	1
P_η	0,55	0,25	0,20

Знайдемо $P(\xi|\eta)$:

$$P(\xi=0{,}1|\eta=-1)=\frac{0{,}40}{0{,}55}=\frac{8}{11};\qquad P(\xi=0{,}3|\eta=-1)=\frac{0{,}15}{0{,}55}=\frac{3}{11};$$

$$P(\xi=0{,}1|\eta=0)=\frac{0{,}20}{0{,}25}=\frac{4}{5};\qquad P(\xi=0{,}3|\eta=0)=\frac{0{,}05}{0{,}25}=\frac{1}{5};$$

$$P(\xi=0{,}1|\eta=1)=\frac{0{,}10}{0{,}20}=\frac{1}{2};\qquad P(\xi=0{,}3|\eta=1)=\frac{0{,}10}{0{,}20}=\frac{1}{2},$$

тобто

ξ	0,1	0,3
$P(\xi\|\eta=-1)$	$\frac{8}{11}$	$\frac{3}{11}$
$P(\xi\|\eta=0)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$P(\xi\|\eta=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Аналогічно знаходимо $P(\eta|\xi)$:

η	-1	0	1
$P(\eta\|\xi=0{,}1)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
$P(\eta\|\xi=0{,}3)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

б) Випадкові величини ξ й η незалежні, оскільки, наприклад, стовпчики в таблиці $P(\xi|\eta)$ не збігаються. ◄

Приклад 5.7. В умовах прикладу 5.6 знайти $M(\xi|\eta)$, $M(\eta|\xi)$, $D(\xi|\eta)$, $D(\eta|\xi)$.

► Знайдемо значення $M(\xi|y_j)$ й $M(\eta|x_i)$ умовні математичні сподівання $M(\xi|\eta)$ й $M(\eta|\xi)$:

$$M(\xi|-1) = 0,1 \cdot \frac{8}{11} + 0,3 \cdot \frac{3}{11} = \frac{17}{110};$$

$$M(\xi|0) = 0,1 \cdot \frac{4}{5} + 0,3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{50};$$

$$M(\xi|-1) = 0,1 \cdot \frac{1}{2} + 0,3 \cdot \frac{1}{2} = 0,2;$$

$$M(\eta|0,1) = (-1) \cdot \frac{4}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{1}{7} = -\frac{3}{7};$$

$$M(\eta|0,3) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Обчислимо тепер значення $D(\xi|y_j)$ і $D(\eta|x_i)$ умовних дисперсій $D(\xi|\eta)$ і $D(\eta|\xi)$:

$$D(\xi|-1) = M(\xi^2|-1) - \left[M(\xi|-1)\right]^2 = (0,1)^2 \cdot \frac{8}{11} + (0,3)^2 \cdot \frac{3}{11} - \left(\frac{17}{110}\right)^2 = \frac{24}{3025};$$

$$D(\xi|0) = M(\xi^2|0) - \left[M(\xi|0)\right]^2 = (0,1)^2 \cdot \frac{4}{5} + (0,3)^2 \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{7}{50}\right)^2 = \frac{4}{625};$$

$$D(\xi|1) = M(\xi^2|1) - \left[M(\xi|1)\right]^2 = (0,1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (0,3)^2 \cdot \frac{1}{2} - (0,2)^2 = 0,01;$$

$$D(\eta|0,1) = M(\eta^2|0,1) - \left[M(\eta|0,1)\right]^2 = (-1)^2 \cdot \frac{4}{7} + 0^2 \cdot \frac{2}{7} + 1^2 \cdot \frac{1}{7} - \left(-\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{26}{49};$$

$$D(\eta|0,3) = M(\eta^2|0,3) - \left[M(\eta|0,3)\right]^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{29}{36}. \blacktriangleleft$$

Приклад 5.8. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні та розподілені за законом Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. Знайти умовний розподіл випадкової величини ξ_1 за умови, що $\xi_1 + \xi_2 = n$.

► За визначенням умовної ймовірності

$$P\left(\xi_1 = k \middle| \xi_1 + \xi_2 = n\right) = \frac{P\left(\xi_1 = k,\ \xi_1 + \xi_2 = n\right)}{P\left(\xi_1 + \xi_2 = n\right)} = \frac{P\left(\xi_1 = k,\ \xi_2 = n - k\right)}{P\left(\xi_1 + \xi_2 = n\right)}.$$

Відомо, що згортка $\xi_1 + \xi_2$ випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Тоді

$$P\left(\xi_1 = k,\ \xi_2 = n - k\right) = P\left(\xi_1 = k\right) P\left(\xi_2 = n - k\right) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!},$$

$$P\left(\xi_1 + \xi_2 = n\right) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^n}{n!}.$$

Отже,

$$P\left(\xi_1 = k \middle| \xi_1 + \xi_2 = n\right) = \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k p^k \left(1 - p\right)^{n-k},$$

де $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, тобто умовний розподіл ξ_1 при фіксованій сумі $\xi_1 + \xi_2 = n$ є біноміальним розподілом. Зазначимо, що в окремому випадку, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, умовний закон $P\left(\xi_1 = k \middle| \xi_1 + \xi_2 = n\right)$ від λ не залежатиме. ◄

Приклад 5.9. Двовимірна неперервна випадкова величина $(\xi,\ \eta)$ розподілена рівномірно у частині кола радіуса R, розташованій у другому квадранті.

а) Знайти умовні щільності $p_\xi\left(x \middle| y\right)$ і $p_\eta\left(y \middle| x\right)$.

б) Чи будуть випадкові величини ξ і η незалежними?

► а) Щільність сумісного розподілу за умовою дорівнює

$$p_{\xi,\ \eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi R^2},\ x^2+y^2<R^2,\ x<0,\ y>0;\\ 0, \qquad\qquad \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Знаходимо одновимірні щільності:

$$p_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi,\eta}(x,y)dy=\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{4}{\pi R^2}dy=\frac{4}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}\ \text{ при }\ x\in(-R,\ 0);$$

$$p_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi,\eta}(x,y)dx=\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0}\frac{4}{\pi R^2}dx=\frac{4}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}\ \text{ при }\ y\in(0,\ R).$$

Тоді

$$p_\xi(x|y)=\frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{R^2-y^2}},\ x\in\left(-\sqrt{R^2-y^2},\ 0\right),\ y\in(0,\ R);\\ 0, \qquad\qquad x\notin\left(-\sqrt{R^2-y^2},\ 0\right),\ \ y\in(0,\ R).\end{cases}$$

Аналогічно

$$p_\eta(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2}},\ x\in(-R,\ 0),\ y\in\left(0,\ \sqrt{R^2-x^2}\right);\\ 0, \qquad\qquad x\in(-R,\ 0),\ \ y\notin\left(0,\ \sqrt{R^2-x^2}\right).\end{cases}$$

б) Випадкові величини ξ і η залежні, оскільки $p_\xi(x|y)$ залежить від y, а $p_\eta(x|y)$ залежить від x. ◄

Приклад 5.10. В умовах прикладу 5.9 знайти $M(\xi|\eta)$, $M(\eta|\xi)$, $D(\xi|\eta)$, $D(\eta|\xi)$.

► Знайдемо умовні математичні сподівання:

$$M\left(\xi|y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xp_{\xi}\left(x|y\right)dx=\int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{0}\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}dx=-\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{2},\ y\in(0,\ R);$$

$$M\left(\eta|x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yp_{\eta}\left(x|y\right)dy=\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}dy=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{2},\ x\in(-R,\ 0).$$

Таким чином,

$$M\left(\xi|\eta\right)=-\frac{\sqrt{R^2-\eta^2}}{2},\qquad M\left(\eta|\xi\right)=\frac{\sqrt{R^2-\xi^2}}{2}.$$

Знаходимо дисперсії:

$$D\left(\xi|y\right)=M\left(\xi^2\middle|y\right)-\left[M\left(\xi|y\right)\right]^2=$$

$$=\int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{0}\frac{x^2}{\sqrt{R^2-y^2}}dx-\left(-\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{2}\right)^2=\frac{R^2-y^2}{12},\quad y\in(0,\ R);$$

$$D\left(\eta|x\right)=M\left(\eta^2\middle|x\right)-\left[M\left(\eta|y\right)\right]^2=$$

$$=\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{y^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dy-\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{2}\right)^2=\frac{R^2-x^2}{12},\quad x\in(-R,\ 0).$$

Отже,

$$D\left(\xi|\eta\right)=\frac{R^2-\eta^2}{12},\qquad D\left(\eta|\xi\right)=\frac{R^2-\xi^2}{12}.\ ◄$$

5.3 Задачі для самостійного розв’язання

Задача 5.1. Навмання вибираються дві точки на суміжних сторонах прямокутника зі сторонами a і b. Знайти математичне сподівання відстані між цими точками.

Відповідь: $\frac{a^2}{6b}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+\frac{b^2}{6a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 5.2. Випадкові величини $\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_n,\ ...$ незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $[0,\ 1]$. Нехай випадкова величина τ дорівнює тому k, за якого сума $S_k = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k$ вперше перевищить 1. Довести, що $M\tau = e$.

Задача 5.3. Таблиця розподілу двовимірного дискретного випадкового вектора (ξ, η) має вигляд

ξ	η		
	$0,20$	$0,5$	$0,8$
$0,04$	$0,15$	$0,30$	$0,35$
$0,08$	$0,05$	$0,12$	$0,03$

Знайти: а) умовні закони розподілу $P\left(\xi | \eta = y_j\right)$, $j = 1,\ 2,\ 3$; $P\left(\eta | \xi = x_i\right)$, $i = 1,2$; б) $M\left(\xi|\eta\right)$, $M\left(\eta|\xi\right)$, $D\left(\xi|\eta\right)$, $D\left(\eta|\xi\right)$.

в) Чи будуть випадкові величини ξ і η незалежними?

Відповідь: а)

ξ	$0,04$	$0,08$
$P\left(\xi\|\eta = 0,2\right)$	$0,750$	$0,250$
$P\left(\xi\|\eta = 0,5\right)$	$0,714$	$0,286$
$P\left(\xi\|\eta = 0,8\right)$	$0,921$	$0,079$

η	$0,20$	$0,5$	$0,8$
$P\left(\eta\|\xi = 0,04\right)$	$0,1875$	$0,3750$	$0,4375$
$P\left(\eta\|\xi = 0,08\right)$	$0,2500$	$0,6000$	$0,1500$

б) $M\left(\xi|0,2\right) = 0,05$, $M\left(\xi|0,5\right) = 0,05144$, $M\left(\xi|0,8\right) = 0,04316$, $M\left(\eta|0,04\right) = 0,575$, $M\left(\eta|0,08\right) = 0,47$; $D\left(\xi|0,2\right) = 0,0003$, $D\left(\xi|0,5\right) = 0,00033$, $D\left(\xi|0,8\right) = 0,00012$, $D\left(\eta|0,04\right) = 0,051$, $D\left(\eta|0,08\right) = 0,035$;

в) випадкові величини ξ і η залежні.

Задача 5.4. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні та мають однаковий геометричний розподіл. Довести, що

$$P\left(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n\right) = \frac{1}{n+1},\ k = 0,\ 1,\ ...,\ n.$$

Задача 5.5. Випадковий вектор (ξ, η) має рівномірний розподіл у трикутнику з вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 2)$, $(1; 0)$.

Знайти:

а) умовні щільності $p_\xi(x|y)$ й $p_\eta(y|x)$;

б) умовні математичні сподівання $M(\xi|\eta)$, $M(\eta|\xi)$ і дисперсії $D(\xi|\eta)$, $D(\eta|\xi)$;

в) перевірити, чи будуть випадкові величини ξ і η незалежними.

Відповідь: а) $p_\xi(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-y}, & x\in\left(0,\ 1-\dfrac{y}{2}\right),\ y\in(0,\ 2);\\ 0, & x\notin\left(0,\ 1-\dfrac{y}{2}\right),\ y\in(0,\ 2);\end{cases}$

$$p_\eta(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-x)}, & x\in(0,\ 1),\ y\in(0,\ 2(1-x));\\ 0, & x\in(0,\ 1),\ y\notin(0,\ 2(1-x));\end{cases}$$

б) $M(\xi|\eta)=\dfrac{2-\eta}{4}$, $M(\eta|\xi)=1-\xi$, $D(\xi|\eta)=\dfrac{(2-\eta)^2}{48}$, $D(\eta|\xi)=\dfrac{(1-\xi)^2}{3}$;

в) ξ і η залежні.

Задача 5.6. Випадковий вектор (ξ,η) розподілений рівномірно в прямокутнику з вершинами в точках $(-3;-10)$, $(-3;10)$, $(3;10)$, $(3;-10)$.

Знайти:

а) умовні щільності $p_\xi(x|y)$ й $p_\eta(y|x)$;

б) умовні математичні сподівання $M(\xi|\eta)$, $M(\eta|\xi)$ і дисперсії $D(\xi|\eta)$, $D(\eta|\xi)$;

в) перевірити, чи будуть випадкові величини ξ і η незалежними.

Відповідь: а) $p_\xi(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & |x|\le 3,\ |y|\le 10;\\ 0, & |x|>3,\ |y|\le 10;\end{cases}$ $p_\eta(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & |y|\le 10,\ |x|\le 3;\\ 0, & |y|>10,\ |x|\le 3;\end{cases}$

б) $M(\xi|\eta)=M\xi=0$, $M(\eta|\xi)=M\eta=0$, $D(\xi|\eta)=D\xi=3$, $D(\eta|\xi)=\dfrac{100}{3}$;

в) випадкові величини ξ й η незалежні.

Задача 5.7. Випадковий вектор (ξ,η) має щільність

$$p_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}Cy, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

де D – область, обмежена лініями $y=x^2$ й $y=1$.

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) умовні щільності $p_\xi\left(x|y\right)$ й $p_\eta\left(y|x\right)$.

Відповідь: а) $C=\dfrac{5}{4}$; б) $p_\xi\left(x|y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & x\in\left(-\sqrt{y},\ \sqrt{y}\right),\ y\in(0,\ 1);\\ 0, & x\notin\left(-\sqrt{y},\ \sqrt{y}\right),\ y\in(0,\ 1);\end{cases}$

$$p_\eta\left(y|x\right)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^4}, & y\in\left(x^2,\ 1\right),\ x\in(-1,\ 1);\\ 0, & y\in\left(x^2,\ 1\right),\ x\in(-1,\ 1).\end{cases}$$

Задача 5.8. Двовимірний випадковий вектор (ξ,η) має нормальний розподіл зі щільністю

$$p_{\xi,\eta}(x,\,y)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-2xy-y^2}.$$

Знайти умовні щільності $p_\xi\left(x|y\right)$ і $p_\eta\left(y|x\right)$.

Відповідь: $p_\xi\left(x|y\right)=\dfrac{2}{\pi}e^{-\frac{(4x+y)^2}{4}}$, $p_\eta\left(y|x\right)=\dfrac{1}{\pi}e^{-(x+y)^2}$.

Задача 5.9. Відома щільність імовірності системи невід'ємних випадкових величин (ξ,η):

$$p_{\xi,\eta}(x,\,y)=Cxye^{-\left(x^2+y^2\right)},\ x\geq 0,\ y\geq 0.$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) одновимірні щільності $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$;

в) умовні щільності $p_\xi\left(x|y\right)$ й $p_\eta\left(y|x\right)$;

Відповідь: а) $C=4$; б) $p_\xi(x)=2xe^{-x^2}$, $x\geq 0$; $p_\eta(y)=2ye^{-y^2}$, $y\geq 0$;

в) $p_\xi\left(x|y\right)=p_\xi(x)$, $p_\eta\left(y|x\right)=p_\eta(y)$.

Задача 5.10. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1; \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

а випадкова величина $\eta = \xi^4$. Знайти умовні характеристики $M(\xi|\eta)$, $M(\eta|\xi)$ $D(\xi|\eta)$, $D(\eta|\xi)$.

Відповідь: $M(\xi|\eta) = 0$, $M(\eta|\xi) = \xi^4$, $D(\xi|\eta) = \sqrt{\eta}$, $D(\eta|\xi) = 0$.

6 ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

6.1 Теоретичні відомості

Нехай є ймовірнісний простір $\langle \Omega, F, P \rangle$ із заданою на ньому системою випадкових величин $\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_n,\ ...$ і випадковою величиною ξ.

В теорії ймовірностей розглядаються такі види збіжності послідовностей випадкових величин і ймовірнісних розподілів.

Послідовність випадкових величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ***збігається*** до випадкової величини ξ ***з імовірністю 1*** (***майже напевно***), якщо

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right) = 1.$$

Цей вид збіжності позначається

$$\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi \qquad \text{або} \qquad \text{м.н.} \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi .$$

Послідовність випадкових величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ***збігається за ймовірністю*** до випадкової величини ξ (позначається – $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ або $P \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\xi_n - \xi\right| \geq \varepsilon\right) = 0 .$$

Збіжність $\text{м.н.} \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ спричиняє збіжність $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Теорема 6.1. $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$ тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{m\geq n}\left|\xi_m - \xi\right| \geq \varepsilon\right) = 0 ,$$

або, що те саме,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\left|\xi_m - \xi\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0 .$$

Послідовність випадкових величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ ***збігається в середньому порядку*** p ($0 < p < \infty$) до випадкової величини ξ, якщо

$$\lim_{n\to\infty} M\left|\xi_n - \xi\right|^p = 0.$$

Таку збіжність позначатимемо $\xi_n \xrightarrow{(p)} \xi$. При $p = 2$ говорять про ***збіжність у середньому квадратичному*** і позначають $\text{с.к.}\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$.

Зі збіжності $\xi_n \xrightarrow{(p)} \xi$ випливає збіжність $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Однак збіжність за ймовірністю не спричиняє збіжність у середньому порядку $p > 0$.

Розподіли ймовірностей P_{ξ_n} випадкових величин ξ_n ***слабко збігаються*** до розподілу P_ξ випадкової величини ξ, якщо для будь-якої неперервної обмеженої функції φ виконується умова

$$M\varphi(\xi_n) \to M\varphi(\xi).$$

Слабку збіжність позначатимемо $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$.

Якщо йдеться про функції розподілу F_{ξ_n} і F_ξ відповідних P_{ξ_n} і P_ξ, то слабка збіжність $F_{\xi_n} \Rightarrow F_\xi$ означає, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dF_{\xi_n}(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dF_\xi(x).$$

Тут інтеграл розуміється у сенсі Лебега-Стілтьєса.

Справедлива основна ***теорема про слабку збіжність.***

Теорема 6.2. Нехай послідовність випадкових величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ слабко збігається до випадкової величини ξ. Тоді для будь-яких точок x' і x'', що задовольняють умові

$$P(\xi = x') = P(\xi = x'') = 0,$$

вірна рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\xi_n \in [x', x'']\right) = P\left(\xi \in [x', x'']\right).$$

Якщо має місце слабка збіжність $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$, то вважають, що випадкові величини ξ_n збігаються до випадкової величини ξ ***за розподілом***, і позначають $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$.

Функцію φ називають ***фінітною***, якщо вона нескінченно диференційовна та дорівнює нулю поза деяким інтервалом.

Слабка збіжність $P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi}$ рівносильна збіжності $M\varphi(\xi_n) \to M\varphi(\xi)$ для нескінченно диференційовних фінітних функцій φ.

6.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1. Заданий імовірнісний простір $\langle \Omega, F, P \rangle$, де $\Omega = [0,1]$, $F = \beta[0,1]$, β – борелівська σ-алгебра.

Нехай послідовність випадкових величин має вигляд

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n, & 0 \le \omega \le \dfrac{1}{n}; \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le \omega \le 1. \end{cases}$$

Перевірити її збіжність на відрізку $[0,1]$ до нуля: а) за ймовірністю; б) майже всюди; в) у середньому порядку p.

► а) Очевидно, що послідовність ξ_n збігається за ймовірністю до нуля на $[0,1]$, оскільки для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P\left(|\xi_n - 0| \ge \varepsilon\right) = P\left(\xi_n = e^n\right) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

б) Аналогічно перевіряється, що послідовність $\{\xi_n\}$ збігається до нуля майже всюди.

в) Перевіримо, що збіжність цієї послідовності в середньому при кожному $p > 0$ не має місця. Дійсно, при $n \to \infty$

$$M|\xi_n - 0|^p = M|\xi_n|^p = |0|^p \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(e^n\right)^p \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(e^n\right)^p \to \infty. \text{ ◄}$$

Приклад 6.2. Нехай $\xi_n \to \xi$ майже напевно. Показати, що ця послідовність збігається до випадкової величини ξ за ймовірністю.

► Нехай послідовність випадкових величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... збігається до випадкової величини ξ майже напевно. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{m \ge n} |\xi_m - \xi| \ge \varepsilon\right) = 0.$$

Оскільки $\left\{\left|\xi_n-\xi\right|\ge\varepsilon\right\}\subset\left\{\sup\limits_{m\ge n}\left|\xi_m-\xi\right|\ge\varepsilon\right\}$, то

$$P\left(\left|\xi_n-\xi\right|\ge\varepsilon\right)\le P\left(\sup_{m\ge n}\left|\xi_m-\xi\right|\ge\varepsilon\right)$$

і зі збіжності $\xi_n\xrightarrow{\text{м.н.}}\xi$ випливає, що ξ_n збігається до ξ за ймовірністю, оскільки в цьому випадку

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\xi_n-\xi\right|\ge\varepsilon\right)=0\,.◄$$

Приклад 6.3. Нехай послідовність ξ_n збігається до випадкової величини ξ у середньому порядку p, де $p=2$. Показати, що вона збігається до ξ і за ймовірністю.

► Якщо $\xi_n\xrightarrow{(p)}\xi$, то $M\left|\xi_n-\xi\right|^p\to0$. Для випадку $p=2$ скористаємося нерівністю Чебишева: для довільних $\varepsilon>0$ і $p>0$

$$P\left(\left|\xi_n-\xi\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{M\left|\xi_n-\xi\right|^2}{\varepsilon^2}\,.$$

Але $M\left|\xi_n-\xi\right|^2\to0$ і, отже, $P\left(\left|\xi_n-\xi\right|\ge\varepsilon\right)\to0$, тобто має місце збіжність за ймовірністю. ◄

Приклад 6.4. Довести, що ξ_n збігається до ξ майже напевно (з імовірністю 1) тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sup_{m\ge n}\left|\xi_m-\xi\right|\ge\varepsilon\right)=0\,.$$

► Розглянемо подію $A=\left\{\xi_n\ \text{збігається до}\ \xi\right\}$:

$$A=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\omega:\left|\xi_m(\omega)-\xi(\omega)\right|<\frac{1}{r}\right\}.$$

Протилежна їй подія $B=\overline{A}$ має вигляд

$$B=\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{\omega:\left|\xi_m(\omega)-\xi(\omega)\right|\geq\frac{1}{r}\right\}.$$

Збіжність з імовірністю 1 означає, що $P(B)=0$. Нехай $\varepsilon=\frac{1}{r}$. Позначимо

$$B_{rn}=\left\{\sup_{m\geq n}\left|\xi_m-\xi\right|\geq\frac{1}{r}\right\}=\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{\left|\xi_m-\xi\right|\geq\frac{1}{r}\right\}.$$

Події B_{rn}, $n=1, 2, \ldots$, монотонно спадають і для $B_r=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{rn}$ згідно з властивістю неперервності ймовірності

$$P(B_r)=\lim_{n\to\infty}P(B_{rn}).$$

Події B_r, $r=1, 2, \ldots$, монотонно зростають і для $B=\bigcup_{r=1}^{\infty}B_r$

$$P(B)=\sup_r P(B_r)=0.$$

Це виконується тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $r=1, 2, \ldots$ $P(B_r)=0$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sup_{m\geq n}\left|\xi_m-\xi\right|\geq\varepsilon\right)=0.$$

Зазначимо, що оскільки події $\left\{\sup_{m\geq n}\left|\xi_m-\xi\right|\geq\varepsilon\right\}$ і $\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{\left|\xi_m-\xi\right|\geq\varepsilon\right\}$ еквівалентні, то необхідну і достатню умову для збіжності з імовірністю 1 можна записати у вигляді

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\left|\xi_m-\xi\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

або у вигляді

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\left|\xi_m-\xi\right|<\varepsilon\right\}\right)=1. \blacktriangleleft$$

Приклад 6.5. Довести, що зі збіжності за ймовірністю не випливає збіжність майже напевно.

► Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – послідовність незалежних випадкових величин, що мають ту саму функцію розподілу $F(x)$, яка дорівнює нулю при $x \le 0$ і дорівнює $1 - \dfrac{1}{x+1}$ при $x > 0$. Розглянемо послідовність

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \eta_2 = \frac{\xi_2}{2}, \ \dots, \quad \eta_n = \frac{\xi_n}{n}, \quad \dots\dots$$

Ця послідовність збігається до нуля за ймовірністю, оскільки

$$P(\eta_n \ge \varepsilon) = P(\xi_n \ge \varepsilon n) = 1 - P(\xi_n < \varepsilon n) = 1 - F(\varepsilon n) = \frac{1}{n\varepsilon + 1}$$

наближається до нуля за будь-якого фіксованого ε і $n \to \infty$, але збіжності до нуля майже напевно не буде. Дійсно,

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{\eta_m \ge \varepsilon\}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\eta_m < \varepsilon\}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\xi_m < \varepsilon m\}\right) =$$

$$= 1 - \prod_{m=n}^{\infty} P(\xi_m < \varepsilon m) = 1 - \prod_{m=n}^{\infty} F(\varepsilon m) = 1 - \prod_{m=n}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{m\varepsilon + 1}\right)$$

наближається до одиниці, тобто з імовірністю 1 за будь-яких ε і n у послідовності $\eta_n, \eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+p}, \dots$ знайдуться реалізації, які перевищуватимуть ε.

Зазначимо, що за наявності деяких додаткових умов, що накладають на величини ξ_n, збіжність за ймовірністю спричиняє збіжність майже напевно. ◄

Приклад 6.6. Нехай ξ_n – монотонна послідовність. Довести, що в цьому випадку збіжність ξ_n до ξ за ймовірністю спричиняє збіжність ξ_n до ξ з імовірністю 1.

► Нехай ξ_n – послідовність, що монотонно спадає, тобто $\xi_1 \ge \xi_2 \ge \dots \ge \xi_n \ge \dots$. Для спрощення наших міркувань вважатимемо, що $\xi \equiv 0$, $\xi_n \ge 0$ при всіх n. Нехай ξ_n збігається до ξ за ймовірністю, але збіжність майже напевно не має місця. Тоді існує $\varepsilon > 0$, таке, що при всіх n

$$P\left(\sup_{m \ge n} \xi_m \ge \varepsilon\right) > \delta > 0.$$

Але $\sup\limits_{m \geq n} \xi_m = \xi_n$ і сказане означає, що при всіх n

$$P(\xi_n \geq \varepsilon) > \delta > 0,$$

що суперечить збіжності ξ_n до ξ за ймовірністю. Таким чином, для монотонної послідовності ξ_n, що збігається до ξ за ймовірністю, має місце збіжність з імовірністю 1. ◄

Приклад 6.7. Довести, що якщо при кожному $\varepsilon > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)$ збігається, то $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$.

► Оскільки зазначений ряд збігається, то при кожному $\varepsilon > 0$ залишок цього ряду $\sum\limits_{m=n}^{\infty} P(|\xi_m - \xi| \geq \varepsilon)$ прямує до нуля. Але тоді прямує до нуля і

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|\xi_m - \xi| \geq \varepsilon\}\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(|\xi_m - \xi| \geq \varepsilon),$$

тобто $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$. ◄

Приклад 6.8. Нехай послідовність ξ_n збігається до ξ за ймовірністю. Довести, що з цієї послідовності можна виділити підпослідовність ξ_{n_k}, що збігається до ξ з імовірністю 1 при $k \to \infty$.

► Нехай $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ – деяка послідовність додатних чисел, крім того $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$, і $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots$ – такі додатні числа, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k$ збігається. Побудуємо послідовність індексів $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, вибираючи n_k так, щоб

$$P\left(\left|\xi_{n_k} - \xi\right| \geq \varepsilon_k\right) \leq \eta_k .$$

Тоді ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left|\xi_{n_k} - \xi\right| \geq \varepsilon_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty ,$$

тобто, як випливає з попередньої задачі, $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$. ◄

Приклад 6.9. Нехай $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ і $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$. Довести, що $P(\xi = \eta) = 1$.

► Введемо події $A_n = \left\{ |\xi - \eta| < \frac{1}{n} \right\}$. Тоді $\{\xi = \eta\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Припустимо, що

$$P(\xi = \eta) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) < 1.$$

Це означає, що існує n_0 таке, що

$$P\left(A_{n_0}\right) < 1 \qquad \text{або} \qquad P\left(|\xi - \eta| \geq \frac{1}{n_0} \right) > 0.$$

З іншого боку,

$$P\left(|\xi - \eta| \geq \frac{1}{n_0} \right) \leq P\left(|\xi - \xi_n| + |\eta - \xi_n| \geq \frac{1}{n_0} \right) \leq P\left(|\xi - \xi_n| \geq \frac{1}{2n_0} \right) + P\left(|\eta - \xi_n| \leq \frac{1}{2n_0} \right) \to 0$$

при $n \to \infty$, оскільки $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ і $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$. Це суперечить зробленим припущенням, тобто $P(\xi = \eta) = 1$. ◄

Приклад 6.10. Нехай $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ й $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$. Довести, що:
а) $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{P} a\xi + b\eta$ (a і b – сталі); б) $|\xi_n| \xrightarrow{P} |\xi|$; в) $\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} \xi\eta$.
► а) Розглянемо

$$P\left(|a\xi_n + b\eta_n - a\xi - b\eta| \geq \varepsilon \right) = P\left(|a(\xi_n - \xi) + b(\eta_n - \eta)| \geq \varepsilon \right).$$

Застосувавши нерівність $|x + y| \leq |x| + |y|$, отримаємо, що

$$P\left(|a\xi_n + b\eta_n - a\xi + b\eta| \geq \varepsilon \right) \leq P\left(|a| \cdot |\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) + P\left(|b| \cdot |\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) =$$

$$= P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2|a|} \right) + P\left(|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2|b|} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

тобто $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{P} a\xi + b\eta$.

б) Відомо, що $\left||x|-|y|\right| \le |x-y|$. Тоді

$$P\left(\left||\xi_n|-|\xi|\right| \ge \varepsilon\right) \le P\left(|\xi_n-\xi| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

тобто $|\xi_n| \xrightarrow{P} |\xi|$.

в) Оскільки

$$|x_n y_n - xy| = |y_n(x_n-x)+x(y_n-y)| \le |y_n|\cdot|x_n-x|+|x|\cdot|y_n-y|,$$

то

$$P\left(|\xi_n\eta_n-\xi\eta| \ge \varepsilon\right) \le P\left(|\eta_n|\cdot|\xi_n-\xi| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|\xi|\cdot|\eta_n-\eta| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right)=$$

$$=P\left(|\xi_n-\xi| \ge \frac{\varepsilon}{2|\eta_n|}\right)+P\left(|\eta_n-\eta| \ge \frac{\varepsilon}{2|\xi|}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Отже, $\xi_n\eta_n \xrightarrow{P} \xi\eta$. Припускаємо, що при всіх n $|\eta_n| \ne 0$ й $|\xi| \ne 0$. ◄

Приклад 6.11. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями. Нехай $\eta_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n$. Довести, що якщо $M|\xi_1| = M|\xi_2| = \ldots = M|\xi_n| < 1$, то $\eta_n \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$. Чи є вірним зворотне твердження, якщо всі ξ_i однаково розподілені?

► Скористаємося нерівністю Чебишева. При $n \to \infty$ для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(|\eta_n| \ge \varepsilon\right) \le \frac{M|\eta_n|}{\varepsilon} = \frac{\left(M|\xi_n|\right)^n}{\varepsilon} \to 0 .$$

Зворотне твердження є невірним. Розглянемо приклад. Нехай $\xi_n = 0$ з імовірністю p ($0 < p < 1$) і $\xi_n = b > \dfrac{1}{1-p}$ з імовірністю $1-p$. Тоді $\eta_n = 0$ з імовірністю $1-(1-p)^n$ і, отже, $\eta_n \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$, але, мабуть, $M|\xi_n| = b(1-p) > 1$. ◄

Приклад 6.12. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – послідовність випадкових величин зі скінченними дисперсіями. Нехай $a_n = M\xi_n$. Довести, що якщо $a_n \to \infty$ і $D\xi_n = o\left(a_n^2\right)$ при $n \to \infty$, то $\dfrac{\xi_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1$ при $n \to \infty$.

► Застосовуючи нерівність Чебишева, отримаємо, що

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{a_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(|\xi_n - a_n| \geq a_n\varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_n}{a_n^2\varepsilon^2} = \frac{o\left(a_n^2\right)}{a_n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Це означає, що

$$\frac{\xi_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1. \blacktriangleleft$$

Приклад 6.13. Нехай $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0$. Довести, що $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$.

► Якщо $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0$, то $P\left((\xi_n - \xi)^2 \geq \varepsilon\right) \to 0$ або, що те саме, $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \sqrt{\varepsilon}\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Врахуємо, що

$$(\xi_n - \xi)^2 = \xi_n^2 - 2\xi_n\xi + \xi^2.$$

Зазначимо, що $\xi_n\xi \xrightarrow{P} \xi^2$. Отже, $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$. ◄

Приклад 6.14. Довести, що якщо послідовність ξ_n збігається до випадкової величини ξ за ймовірністю, то має місце слабка збіжність $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$.

► Покажемо, що якщо $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ в кожній точці x, що є точкою неперервності F_ξ, де $F_{\xi_n}(x)$ – функція розподілу величини ξ_n, а $F_\xi(x)$ – величини ξ.

Нехай x – точка неперервності функції F. Якщо $\xi_n < x$, то справедливою є принаймні одна з нерівностей $\xi < x + \varepsilon$ або $\xi_n - \xi < -\varepsilon$. Тоді

$$P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + P(\xi_n - \xi < -\varepsilon).$$

Аналогічно, при $\xi_n \geq x$ справедлива хоча б одна з нерівностей $\xi \geq x - \varepsilon$ або $\xi_n - \xi \geq \varepsilon$ і

$$P(\xi_n \geq x) \leq P(\xi \geq x-\varepsilon) + P(\xi_n - \xi \geq \varepsilon),$$

або

$$1 - P(\xi_n < x) \leq 1 - P(\xi < x-\varepsilon) + P(\xi_{\_n} - \xi \geq \varepsilon).$$

Звідки

$$P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x-\varepsilon) - P(\xi_n - \xi \geq \varepsilon).$$

Якщо $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке N, що при всіх $n > N \quad P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < \varepsilon$. Тоді

$$P(\xi < x-\varepsilon) - \varepsilon \leq P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x+\varepsilon) + \varepsilon.$$

З іншого боку, якщо x – точка неперервності $F_\xi(x)$, то можна знайти таке $\varepsilon > 0$, що для як завгодно малого η

$$P(\xi < x) - \eta \leq P(\xi < x-\varepsilon)$$

і

$$P(\xi < x+\varepsilon) \leq P(\xi < x) + \eta.$$

Отже, для як завгодно малих ε й η існує таке N, що при $n > N$

$$P(\xi < x) - (\varepsilon + \eta) \leq P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x) + (\varepsilon + \eta),$$

або

$$\left| P(\xi_n < x) - P(\xi < x) \right| \leq \varepsilon + \eta,$$

або, що те саме,

$$\left| F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x) \right| \leq \varepsilon + \eta.$$

Це означає, що у всіх точках неперервності F_ξ має місце збіжність $F_{\xi_n}(x)$ і $F_\xi(x)$.

Зворотне, взагалі, не має місця. Щоб переконатися в цьому, візьмемо послідовність випадкових величин $\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_n,\ ...,\ \xi$, що не дорівнюють з імовірністю 1 сталим і мають однакову функцію розподілу $F(x)$. Вважатимемо, що при всіх n величини ξ_n і ξ незалежні. Очевидно, слабка збіжність $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$ має місце, оскільки у всіх членів послідовності однакова функція розподілу. Розглянемо $P(|\xi_n - \xi| \geq 2\varepsilon)$:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq 2\varepsilon) \geq P(\xi_n - \xi \geq 2\varepsilon) \geq P(\xi < -\varepsilon,\ \xi_n \geq \varepsilon).$$

З незалежності й однакового розподілу величин $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots,\ \xi$ випливає, що

$$P(\xi < -\varepsilon,\ \xi_n \geq \varepsilon) = P(\xi < -\varepsilon) P(\xi_n \geq \varepsilon) =$$

$$= P(\xi < -\varepsilon)\left[1 - P(\xi_n < \varepsilon)\right] = F(-\varepsilon)\left[1 - F(\varepsilon)\right],$$

тобто

$$P(|\xi_n - \xi| \geq 2\varepsilon) \geq F(-\varepsilon)\left[1 - F(\varepsilon)\right].$$

Виберемо серед усіх функцій розподілу невироджених випадкових величин таку $F(x)$, що $F(-\varepsilon)\left[1 - F(\varepsilon)\right]$ буде відмінним від нуля при всіх досить малих ε. Тоді $P(|\xi_n - \xi| \geq 2\varepsilon)$ не прямує до нуля при необмеженому зростанні n і збіжності за ймовірністю не буде. ◄

Приклад 6.15. Нехай має місце слабка збіжність $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$, де ξ з імовірністю 1 є сталою. Довести, що в цьому випадку послідовність ξ_n збігатиметься до випадкової величини ξ за ймовірністю.

► Нехай ξ з імовірністю 1 дорівнює a. Тоді слабка збіжність $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$ означає збіжність $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ при будь-яких $x \neq a$. Оскільки $P(\xi = a) = 1$, то $F_\xi(x) = 0$ при $x \leq a$ і $F_\xi(x) = 1$ за $x > a$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = 0$ при $x < a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = 1$ при $x > a$. Звідси випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ ймовірності

$$P(\xi_n < a - \varepsilon) = F_{\xi_n}(a - \varepsilon)$$

і

$$P\left(\xi_n \geq a+\varepsilon\right)=1-P\left(\xi_n < a+\varepsilon\right)=1-F_{\xi_n}\left(a+\varepsilon\right)$$

прямують до нуля при $n \to \infty$. Це означає, що

$$P\left(\left|\xi_n - a\right| < \varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon < \xi_n - a < \varepsilon\right) \leq P\left(\xi_n < a-\varepsilon\right)+P\left(\xi_n \geq a+\varepsilon\right)$$

прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто ξ_n збігається до ξ за ймовірністю. ◄

Приклад 6.16. Довести, що слабка збіжність $P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi}$ рівносильна збіжності $M\varphi\left(\xi_n\right) \to M\varphi\left(\xi\right)$ для нескінченно диференційовних фінітних функцій φ.

► Нехай збіжність $M\varphi\left(\xi_n\right) \to M\varphi\left(\xi\right)$ має місце для кожної нескінченно диференційовної функції $\varphi\left(x\right)$, яка перетворюється в 0 поза деяким скінченним інтервалом. Тоді для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\xi_n\right| > c\right) \leq \varepsilon$$

при досить великому c одночасно для всіх $n=1,\ 2,\ \ldots$ (це властивість ***компактності розподілу*** або ***обмеженості за ймовірністю***).

Для доведення візьмемо функцію φ, схематично зображену на рис. 6.1, для якої

$$P\left(\left|\xi_n\right| > c\right) \leq 1-M\varphi\left(\xi_n\right) \to 1-M\varphi\left(\xi\right) \leq P\left(\left|\xi\right| > c-\delta\right).$$

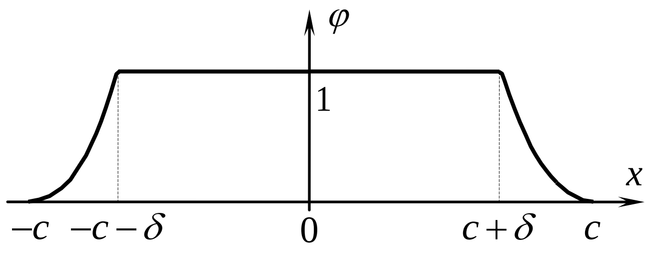


Рисунок 6.1

Відомо, що кожна неперервна функція $\varphi\left(x\right)$ на скінченному відрізку $-c \leq x \leq c$ допускає рівномірну апроксимацію нескінченно диференційовними функціями $\varphi_{\varepsilon}\left(x\right)$, $\left|\varphi\left(x\right)-\varphi_{\varepsilon}\left(x\right)\right| \leq \varepsilon$, $-c \leq x \leq c$, і $\varphi_{\varepsilon}\left(x\right)$ можна вибрати фінітними, тобто рівними 0 за межами відрізка $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\sup\limits_{m \geq n}\left|\xi_m - \xi\right| \geq \varepsilon\right)=0$. Очевидно, для обмеженої функції φ можна вибрати обмежені φ_{ε}. Для таких функцій $\left|\varphi\right| \leq C$ й $\left|\varphi_{\varepsilon}\right| \leq C$. Тоді

$$\left|M\varphi(\xi_n)-M\varphi(\xi)\right|\le\left|M\varphi_\varepsilon(\xi_n)-M\varphi_\varepsilon(\varepsilon)\right|+\left|M\varphi(\xi_n)-M\varphi_\varepsilon(\xi_n)\right|+$$

$$+\left|M\varphi(\xi)-M\varphi_\varepsilon(\xi)\right|\le\left|M\varphi_\varepsilon(\xi_n)-M\varphi_\varepsilon(\xi)\right|+2\varepsilon+2C\left[P\left(|\xi_n|>c\right)+P\left(|\xi_n|>c\right)\right].$$

З умови компактності розподілів випадкових величин ξ_n, довільності $\varepsilon>0$ і збіжності $M\varphi_\varepsilon(\xi_n)\to M\varphi_\varepsilon(\xi)$ робимо висновок, що $P_{\xi_n}\Rightarrow P_\xi$. Таким чином, слабка збіжність $P_{\xi_n}\Rightarrow P_\xi$ рівносильна збіжності $M\varphi(\xi_n)\to M\varphi(\xi)$ для нескінченно диференційовних фінітних функцій φ. ◄

Приклад 6.17. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин ($M\xi_i=0$, $D\xi_i=1$, $i=1,2,\ldots$), $\nu_1,\nu_2,\ldots$ – послідовність цілочисельних позитивних випадкових величин таких, що ν_i не залежить від $\xi_1,\xi_2,\ldots$ для кожного i. Нехай $\eta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Довести, що якщо $\nu_n\xrightarrow{P}\infty$ при $n\to\infty$, то розподіл $\dfrac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}}$ слабко збігається при $n\to\infty$ до $N(0;\ 1)$

.

► За формулою повної ймовірності

$$P\left(\frac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}}<x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)\cdot P(\nu_n=k).$$

Але $P\left(\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)\to F(x)$ при $k\to\infty$, $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Отже, для кожного $\varepsilon>0$ існує k_0, таке що для будь-якого $k\ge k_0$

$$\left|P\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)-F(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Далі, $\nu_n\xrightarrow{P}\infty$ при $n\to\infty$. Звідси випливає існування n_0 такого, що для кожного $n\ge n_0$ $P(\nu_n<k_0)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Отже, для будь-якого $n\ge n_0$

$$\left|P\left(\frac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}}<x\right)-F(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}P(\nu_n=k)\cdot\left(P\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<x\right)-F(x)\right)\right|\le$$

$$\le P\left(\nu_n < k_0\right) + \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\sqrt{k}} < x \right) - F(x) \right| \cdot P\left(\nu_n = k\right) \le \varepsilon .$$

Це означає, що розподіл випадкової величини $\dfrac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}}$ слабко збігається до $N(0;\ 1)$. ◄

6.3 Задачі для самостійного розв’язання

Задача 6.1. Нехай $\xi_n - a_n \xrightarrow{P} 0$. Довести, що $m\xi_n - a_n \to 0$ ($m\xi_n$ – медіана ξ_n).

Задача 6.2. Нехай $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$ і $\eta_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \eta$. Довести, що:

а) $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{\text{м.н.}} a\xi + b\eta$ (a і b – сталі);

б) $|\xi_n| \xrightarrow{\text{м.н.}} |\xi|$;

в) $\xi_n\eta_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi\eta$.

Задача 6.3. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – послідовність випадкових величин. Довести, що:

а) якщо $\xi_n \xrightarrow{P} a \ne 0$, то $\dfrac{1}{\xi_n} \xrightarrow{P} \dfrac{1}{a}$;

б) якщо $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} a \ne 0$, то $\dfrac{1}{\xi_n} \xrightarrow{\text{м.н.}} \dfrac{1}{a}$.

Задача 6.4. Довести, що якщо $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$ і для деякого $p > 0$ $M|\xi_n - \eta|^p \to 0$, то $P(\xi = \eta) = 1$.

Задача 6.5. Нехай послідовність $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ***обмежена за ймовірністю***, тобто

$$\sup_n \left(|\xi_n| > c \right) \xrightarrow[c \to \infty]{} 0,$$

а $\eta_n \xrightarrow{P} 0$. Довести, що $\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} 0$.

Задача 6.6. Нехай $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ і $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, крім того, $P(\xi_n \le \eta_n) = 1$. Довести, що $P(\xi \le \eta) = 1$.

Задача 6.7. Нехай $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\zeta_n \xrightarrow{P} \xi$ і $P(\xi_n \le \eta_n \le \zeta_n) = 1$. Довести, що $\eta_n \xrightarrow{P} \xi$.

Задача 6.8. Нехай $\xi_n \xrightarrow{(p)} \xi$ ($p > 0$). Довести, що послідовність ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... рівномірно інтегровна, тобто

$$\sup_n \int_{\{|\xi_n| > c\}} |\xi_n| P(d\omega) \xrightarrow[c \to \infty]{} 0.$$

Задача 6.9. Нехай величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ приймають тільки натуральні значення, і

$$P(\xi_n = k) = c_n k^{-\left(2 + \frac{1}{n}\right)},$$

де $c_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)} \right)^{-1}$. Довести, що ξ_n збігаються за розподілом до величини ξ: $P(\xi = k) = \dfrac{c}{k^2}$, де $c = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \right)^{-1}$.

Задача 6.10. Нехай $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, а $\eta_n \xrightarrow{P} c$, де c – стала. Довести, що:
а) $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{D} \xi + c$; б) $\xi_n \eta_n \xrightarrow{D} c\xi$.

Задача 6.11. Довести, що якщо $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$, $|\xi_n - \eta_n| \le \zeta_n |\xi_n|$ і $\zeta_n \xrightarrow{P} 0$, то $P_{\eta_n} \Rightarrow P_\xi$.

Задача 6.12. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – послідовність випадкових величин така, що для деякого $p > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left|\xi_n\right|^p < \infty .$$

Довести, що $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} 0$.

7 ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ

7.1 Теоретичні відомості

Комплексною випадковою величиною $\xi(\omega)$ називається випадкова величина вигляду

$$\xi(\omega)=\xi_1(\omega)+i\xi_2(\omega),$$

де ξ_1 і ξ_2 – дійсні випадкові величини.

Математичне сподівання випадкової величини $\xi(\omega)$ визначається:

$$M\xi_1+iM\xi_2,$$

припускаючи, що $M\xi_1$ і $M\xi_2$ існують.

Комплексні випадкові величини $\xi=\xi_1+i\xi_2$ й $\eta=\eta_1+i\eta_2$ будуть ***незалежними***, якщо незалежні σ-алгебри F_{ξ_1,ξ_2} і F_{η_1,η_2}, (тобто незалежні випадкові вектори (ξ_1,ξ_2) і (η_1,η_2)). Для таких ξ і η

$$M\xi\eta=M\xi M\eta.$$

Характеристичною функцією дійсної випадкової величини називається комплекснозначна функція дійсної змінної

$$f_\xi(u)=Me^{iu\xi}=M(\cos u\xi+i\sin u\xi).$$

Для дискретної випадкової величини ξ, що набуває значення $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots$ з відповідними ймовірностями $P(\xi=x_k)$, характеристична функція має вигляд

$$f_\xi(u)=\sum_k e^{iux_k}P(\xi=x_k).$$

Для цілочисельної величини ξ, що набуває лише значення $k=0,\pm1,\ldots$ з відповідними ймовірностями

$$P(k)=P(\xi=k),\qquad \sum_k P(k)=1,$$

характеристична функція має вигляд

$$f_\xi(u)=\sum_k P(k)e^{iuk}.$$

Вона є періодичною (з періодом 2π) і визначається зазначеним рядом Фур'є з коефіцієнтами

$$P(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iuk}\cdot f_\xi(u)du,\;\; k=0,\pm1,\ldots.$$

Для випадкової величини ξ зі щільністю ймовірності $p(x)$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1\right)$ характеристична функція має вигляд

$$f_\xi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}p(x)dx.$$

Це – перетворення Фур'є. Тому

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}f_\xi(u)du.$$

Характеристична функція має такі ***властивості***:

1) для будь-якої випадкової величини ξ $\left|f_\xi(u)\right|\le 1$ для всіх u, і $f_\xi(0)=1$;

2) якщо випадкова величина $\eta=a+b\xi$, то

$$f_\xi(u)=e^{iub}f_\xi(ua);$$

3) якщо $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – незалежні випадкові величини, то характеристична функція випадкової величини $\xi=\xi_1,\ldots,\xi_n$ дорівнює

$$f_\xi(u)=f_{\xi_1}(u)\ldots f_{\xi_n}(u);$$

4) характеристична функція неперервна на всій числовій прямій;

5) $\overline{f_\xi}(u)=f_\xi(-u)=f_{-\xi}(u)$, де риска означає комплексну спряженість;

6) якщо існує початковий момент порядку k, то

$$\alpha_k=M\xi^k=\frac{1}{i^k}\left.\frac{d^kf_\xi(u)}{du^k}\right|_{u=0}.$$

Справедлива така теорема.

Теорема 7.1. Слабка збіжність послідовності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ до випадкової величини ξ рівносильна збіжності послідовності характеристичних функцій $f_{\xi_1}(u),\ f_{\xi_2}(u), \ldots$ до характеристичної функції $f_{\xi}(u)$. Ця збіжність є рівномірною на будь-якому скінченному відрізку числової прямої.

Теорема 7.2. ***Бохнера-Хінчіна.*** Для того щоб неперервна функція $f(u)$, яка задана на дійсній осі та має властивість $f(0)=1$, була характеристичною, необхідно й достатньо, щоб вона була невід'ємно визначеною, тобто щоб при кожному цілому $n>0$ для будь-яких дійсних $u_1,\ \ldots,\ u_n$ і будь-яких комплексних чисел $z_1,\ \ldots,\ z_n$

$$\sum_{k,\ j=1}^{n} f\left(u_k - u_j\right) z_k \overline{z}_j \geq 0 .$$

Клас функцій e^{iux} визначає розподіл, тобто за характеристичною функцією однозначно відновлюється розподіл. Цей факт доводить формула обернення.

Формула обернення. Якщо $F_{\xi}(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ, а $f_{\xi}(u)$ – її характеристична функція, то для будь-яких точок неперервності x_1 і x_2 функції $F_{\xi}(x)$

$$F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux_1} - e^{-iux_2}}{iu} f_{\xi}(u) e^{-u^2\sigma^2} du .$$

Якщо функція $\dfrac{f_{\xi}(u)}{u}$ інтегровна на нескінченності, то можливий граничний перехід під знаком інтеграла. Можна записати

$$F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux_1} - e^{-iux_2}}{iu} f_{\xi}(u) du .$$

7.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 7.1. Знайти характеристичну функцію біноміального розподілу.

► Для випадкової величини ξ з біноміальним розподілом

$$P(k) = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} ,$$

де $k=\overline{0,n}$, отримуємо

$$f_\xi(u)=Me^{iu\xi}=\sum_{k=0}^{n}e^{iuk}C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(pe^{iu}\right)^k q^{n-k}=\left(pe^{iu}+q\right)^n, \quad q=1-p. \blacktriangleleft$$

Приклад 7.2. Знайти характеристичну функцію пуассонівського розподілу.

► Для випадкової величини ξ з пуассонівським розподілом

$$P(k)=P(\xi=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},$$

де $k=0,1,\dots,$ $a>0$ маємо

$$f_\xi(u)=Me^{iu\xi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ae^{iu}\right)^k}{k!}e^{-a}=e^{a\left(e^{iu}-1\right)}. \blacktriangleleft$$

Приклад 7.3. Знайти характеристичну функцію найпростішого нормального розподілу.

► Для випадкової величини ξ з найпростішим нормальним розподілом щільність розподілу має вигляд

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Розглянемо функцію комплексної змінної z

$$f_2(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{z^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}d(x-z).$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}d(x-z)$ збігається рівномірно в будь-якій замкнутій області комплексної площини Z. Тому $f(z)$ аналітична у всій комплексній площині.

При дійсному z маємо

$$f_2(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{z^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}d(x-z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{z^2}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}=e^{\frac{z^2}{2}}.$$

Отже, за теоремою єдиності рівність $f_2(z)=e^{\frac{z^2}{2}}$ має місце при всіх комплексних z. При $z=iu$ (u – дійсна змінна) отримуємо $f_2(z)=f_\xi(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}$. Таким чином, $f(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}$. ◄

Приклад 7.4. Знайти характеристичну функцію розподілу Лапласа, щільність розподілу якого має вигляд

$$p_\xi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

► Маємо

$$f_\xi(u)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux-|x|}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{x(iu-1)}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x(iu+1)}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-iu}+\frac{1}{1+iu}\right)=\frac{1}{1+u^2}.$$

Таким чином, $f_\xi(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$. ◄

Приклад 7.5. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, рівномірно розподіленої на відрізку $[a,b]$.

► Для рівномірно розподіленої на відрізку $[a,b]$ випадкової величини ξ щільність має вигляд

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Далі маємо

$$f_\xi(u)=\int_a^b e^{iux}p_\xi(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{iux}dx=\left.\frac{e^{iux}}{(b-a)iu}\right|_a^b=\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}.$$ ◄

Приклад 7.6. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, щільність імовірності якої дорівнює

$$p_\xi(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0; \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

► Знаходимо, що

$$f_\xi(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}p_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{0} e^{iux}\cdot 0dx+\int_{0}^{\infty} e^{iux}\cdot e^{-x}dx=\int_{0}^{\infty} e^{x(iu-1)}dx=\frac{1}{1-iu}. \blacktriangleleft$$

Приклад 7.7. У партії, що складається з n виробів, є m ($m<n$) неякісних. Для перевірки їхньої якості зроблена вибірка без повернення, що містить r виробів, де $m<r<n-m$. Знайти характеристичну функцію кількості неякісних виробів, що містяться у вибірці.

► Випадкова величина ξ – кількість неякісних виробів, що містяться у вибірці, може приймати всі цілочисельні значення з відрізка $[0,m]$ з імовірностями

$$P(k)=P(\xi=k)=\frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}.$$

Отже, шукана характеристична функція

$$f_\xi(u)=\sum_{k=0}^{m}\frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}\cdot e^{iku}. \blacktriangleleft$$

Приклад 7.8. Випадкова величина має характеристичну функцію $f_\xi(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$. Знайти її щільність розподілу.

► Щільність розподілу $p(x)$ пов'язана з характеристичною функцією $f_\xi(u)$ формулою:

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}f_\xi(u)du.$$

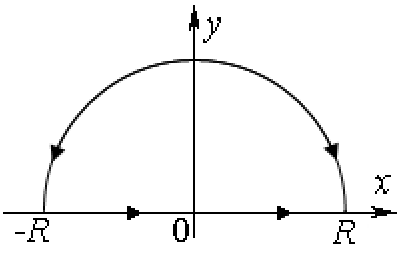


Рисунок 7.1

Обчислимо цей інтеграл. Використаємо теорію лишків і лему Жордана.

При $u>0$ вибираємо контур інтегрування, що має вигляд, показаний на рис. 7.1. Він складається з відрізка $[-R,R]$ дійсної осі, $R>1$, і дуги кола радіуса R. Єдиний полюс підінтегральної функції в точці

$z=i$, що лежить у верхній півплощині, потрапляє всередину цього контуру. Знаходимо лишок підінтегральної функції в точці $z=i$. Далі використаємо теорему Коші про лишки. Переходячи до границі при $R\to\infty$, отримуємо (інтеграл уздовж дуги кола за лемою Жордана при граничному переході дає нуль)

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iux}}{1+u^2}du=\frac{1}{2}e^{x}.$$

При $u<0$ також слід скористатися теоремою Коші. Контур інтегрування в цьому випадку матиме вигляд, показаний на рис. 7.2.

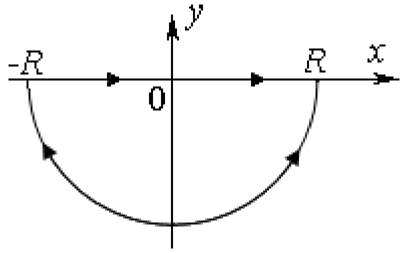


Рисунок 7.2

$$p_{\xi}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iux}}{1+u^2}du=\frac{1}{2}e^{-x}.$$

Внаслідок цього отримуємо, що $\forall x\in R$

$$p_{\xi}(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.\ ◄$$

Приклад 7.9. Знайти початкові моменти випадкової величини ξ, характеристична функція якої $f_{\xi}(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$.

► Початкові моменти будь-якого порядку існують, оскільки всі похідні від $f_{\xi}(u)$ неперервні в нулі. Отже,

$$\alpha_k=\frac{1}{i^k}\cdot\left.\frac{d^k f_{\xi}(u)}{du^k}\right|_{u=0}.$$

Знайдемо похідні $\left.\dfrac{d^k f_{\xi}(u)}{du^k}\right|_{u=0}$ як коефіцієнти при $\dfrac{u^k}{k!}$ у розкладанні функції $\dfrac{1}{1+u^2}$ в ряд Маклорена, тобто, використаємо рівність

$$\frac{1}{1+u^2}=\frac{1}{1-(iu)^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(iu)^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}i^{2m}(2m)!\frac{u^{2m}}{(2m)!}.$$

Ряд Маклорена для функції $\dfrac{1}{1+u^2}$ містить тільки парні степені. Звідси випливає, що

$$\left.\frac{d^k f_\xi(u)}{du^k}\right|_{u=0} = \begin{cases} i^k k!, & k=2n, \\ 0, & k=2n+1, \end{cases} \qquad n \in N,$$

а початкові моменти

$$\alpha_k = \begin{cases} k!, & k=2n, \\ 0, & k=2n+1, \end{cases} \qquad n \in N. \blacktriangleleft$$

Приклад 7.10. Довести, що для характеристичної функції суми незалежних величин ξ_1 і ξ_2 має місце рівність $f(u) = f_1(u) \cdot f_2(u)$, де f_1, f_2 – характеристичні функції доданків ξ_1 і ξ_2, $f(u)$ – характеристична функція суми.

► Для незалежних ξ_1 і ξ_2 відповідно до загальної мультиплікативної властивості математичного сподівання маємо

$$Me^{iu(\xi_1+\xi_2)} = M\left(e^{iu\xi_1} \cdot e^{iu\xi_2}\right) = Me^{iu\xi_1} \cdot Me^{iu\xi_2},$$

що для характеристичної функції суми $\xi_1 + \xi_2$ дає $f(u) = f_1(u)\, f_2(u)$. ◄

7.3 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.1. Знайти характеристичну функцію показникового розподілу.

Відповідь: $f_\xi(u) = \dfrac{\lambda}{\lambda - iu}$.

Задача 7.2. Знайти характеристичну функцію гамма-розподілу.

Відповідь: $f_\xi(u) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - iu}\right)^\alpha$.

Задача 7.3. Знайти характеристичну функцію розподілу хі-квадрат.

Відповідь: $f_{\chi_n^2}(u) = (1 - 2iu)^{-\frac{n}{2}}$.

Задача 7.4. Випадкова величина ξ має закон розподілу Коші зі щільністю $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{a}{(x-c)^2 + a^2}$. Знайти її характеристичну функцію.

Відповідь: $f_\xi(u) = e^{iuc - a|u|}$.

Задача 7.5. Випадкова величина має характеристичну функцію $f_\xi(u) = \dfrac{1+iu}{1+u^2}$. Знайти щільність розподілу.

Відповідь: $p_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при } x \ge 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Задача 7.6. Випадкова величина має характеристичну функцію $f_\xi(u) = \dfrac{1-iu}{1+u^2}$. Знайти щільність розподілу.

Відповідь: $p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \ge 0; \\ e^{x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Задача 7.7. Випадкова величина має характеристичну функцію $f_\xi(u) = e^{-a|u|}$ $(a > 0)$. Знайти щільність розподілу.

Відповідь: $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+x^2}$.

Задача 7.8. Чи будуть такі функції характеристичними:

а) $f_\xi(u) = \sin u$; б) $f_\xi(u) = e^u$; в) $f_\xi(u) = \begin{cases} 0, & |u| > 1; \\ 1, & |u| \le 1 \end{cases}$&?

Відповідь: а) – в) ні.

Задача 7.9. Дана характеристична функція

$$f(u) = \frac{1}{2e^{-iu} - 1}.$$

Показати, що вона відповідає дискретній випадковій величині. Знайти ряд розподілу цієї величини.

Відповідь: $P(\xi = k) = \dfrac{1}{2^k}$.

Задача 7.10. Знайти початкові моменти випадкової величини ξ, характеристична функція якої $f_\xi(u) = \dfrac{4}{u^2} e^{iu} \sin^2 \dfrac{u}{2}$.

Відповідь: $\alpha_j = \dfrac{2^{j+2} - 2}{(j+2)!}$.

Задача 7.11. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ, що має характеристичну функцію $f_\xi(u) = \dfrac{1}{1+2iu}$.

Відповідь: $M\xi = -2$, $D\xi = 4$.

Задача 7.12. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні та мають показниковий розподіл з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. Знайдіть характеристичну функцію суми $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Відповідь: $f_\eta(u) = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 - iu)(\lambda_2 - iu)}$.

Задача 7.13. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, і ξ_1 розподілена рівномірно в інтервалі $(0,\ 1)$, а ξ_2 має найпростіший нормальний розподіл. Знайти характеристичну функцію випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Відповідь: $f_\eta(u) = \dfrac{\left(e^{iu} - 1\right)e^{-\frac{u^2}{2}}}{iu}$.

8 ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

8.1 Теоретичні відомості

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями $a_i = M\xi_i$. Вважають, що для цієї послідовності виконується ***закон великих чисел*** (***ЗВЧ***), якщо

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Для перевірки, чи виконується ЗВЧ, часто є корисними нерівності Чебишева: для кожної невід'ємної випадкової величини ξ, що має математичне сподівання $M\xi$ при будь-якому $\varepsilon>0$ справедлива нерівність:

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}.$$

Або: для кожної випадкової величини ξ, що має дисперсію $D\xi = \sigma^2$, при будь-якому $\varepsilon>0$ справедлива нерівність:

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Чебишева для частоти випадкової величини, розподіленої за законом Бернуллі, має вигляд

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Ця нерівність дає оцінку знизу для відхилення частоти події від її ймовірності при розподілі Бернуллі.

Зв'язок між відносною частотою появи події A та її ймовірністю при розподілі Бернуллі виражається нерівністю

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

яка називається ***нерівністю Бернуллі***.

Можна також довести нерівність

$$P\left(|\xi|>\varepsilon\right)\le\frac{M|\xi|^k}{\varepsilon^k},$$

яку іноді називають ***нерівністю Маркова***.

Теорема 8.1. ***Чебишева.*** Якщо є послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, які мають скінченні математичні сподівання $M\xi_i = a_i$, а дисперсії рівномірно обмежені числом C, тобто $D\xi_i \le C < \infty$ для будь-якого i, то для середнього арифметичного величин $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\bar{X}-\bar{a}\right|\ge\varepsilon\right)=0.$$

Тут $\bar{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$ – середнє арифметичне математичних сподівань випадкових величин ξ_i.

Теорема 8.2. ***Маркова.*** Нехай випадкові величини $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ як завгодно залежні та мають моменти другого порядку. Тоді для виконання закону великих чисел достатньо, щоб

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to 0 \qquad \text{при} \qquad n\to\infty.$$

Теорема 8.3. ***Хінчіна.*** Нехай $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, що мають скінченне математичне сподівання $M\xi_n = a$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-a\right|\ge\varepsilon\right)=0.$$

Вважають, що для послідовності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ виконується ***посилений закон великих чисел*** (***ПЗВЧ***), якщо з імовірністю 1

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \sum_{i=1}^{n}a_i}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 8.3. Нехай випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні, $M\xi_k < \infty$, $D\xi_k < \infty$ і $\sum_{л=1}^{m} \frac{D\xi_k}{k^2} < \infty$. Тоді для послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ виконується ПЗВЧ.

Лема 8.1. (*Бореля-Кантеллі*). Нехай $A = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} A_m$. Подія A складається лише з тих елементарних наслідків, під час реалізації яких відбувається нескінченна кількість подій з послідовності $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді:

1) якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ збігається, то $P(A) = 0$;

2) якщо події $A_1, A_2, \ldots$ незалежні й ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ розбігається, то $P(A) = 1$

.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$, $F_{n,\infty}$ – σ-алгебра, породжена випадковими величинами $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$, то σ-алгебра

$$F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{n,\infty}$$

називається ***залишковою σ-алгеброю*** щодо послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$, а будь-яка подія $A \in F_\infty$ – ***залишковою подією***.

Теорема 8.5. ***Закон 0 або 1 Колмогорова.*** Будь-яка залишкова подія має ймовірність 0 або 1 .

Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, то за законом «0» або «1» Колмогорова ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ або з імовірністю 1 збігається, або з імовірністю 1 розбігається.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність випадкових величин, що мають скінченні моменти другого порядку, і нехай $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Говорять, що послідовність випадкових величин $\zeta_n = \frac{\eta_n - M\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}}$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, є ***асимптотично нормальною***, якщо послідовність розподілів випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ слабко збігається при $n \to \infty$ до найпростішого нормального розподілу, тобто для будь-якого дійсного x:

$$\lim_{n\to\infty} P(\zeta_n < x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\eta_n - M\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x),$$

де $\Phi(x)$ – функція стандартного нормального розподілу. Цикл теорем, які стверджують, що послідовність $\xi_1, \xi_2, \ldots$ є асимптотично нормальною, називається ***центральною граничною теоремою*** (***ЦГТ***).

Нижче подаються найважливіші теореми, в яких вказані умови, при виконанні яких до послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ можна застосувати центральну граничну теорему. Ці умови зводяться переважно до того, щоб серед центрованих доданків $\xi_1, \xi_2, \ldots$ не було таких, які домінували б над іншими, тобто щоб всі $\xi_1, \xi_2, \ldots$ були рівномірно малі.

Теорема 8.6. ***Центральна гранична теорема для незалежних однаково розподілених випадкових величин.*** Нехай ξ_1, ξ_2, ... – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченною дисперсією і $\eta_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Тоді при $n \to \infty$

$$P\left(\frac{\eta_n - M\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}} < x \right) \to \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R} .$$

Інтегральна гранична теорема Муавра-Лапласа (див. теорему 1.2 п.1.1.8), отримана біля двохсот років тому, є окремим випадком зазначеної вище теореми. Тут, як і раніше, всі ξ_k незалежні та набувають лише двох значень 0 або 1 з імовірностями q і p.

Сформулюємо найбільш загальний результат із циклу ЦГТ, що належить Ліндебергу.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин. Позначимо $\alpha_k = M\xi_k$, $\sigma_k^2 = D\xi_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, $F_k(x) = P(\xi_k < x)$. ***Нормованою сумою*** випадкових величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ називається випадкова величина

$$\zeta_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k)}{B_n} = \frac{\eta_n - M\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}},$$

для якої $M\zeta_n = 0$, $D\zeta_n = 1$ для всіх $n \geq 1$.

Вважають, що для послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ виконується ***умова Ліндеберга***, якщо для будь-якого $\tau > 0$

$$\frac{1}{B_n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} M\left[\left(\xi_k - a_k\right)^2 ; \left|\xi_k - a_k\right| \geq \tau \cdot B_n \right] \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де

$$M\left[\left(\xi_k - a_k\right)^2 ; \left|\xi_k - a_k\right| \geq \tau B_n \right] = \int\limits_{\left|x - a_k\right| \geq \tau B_n} \left(x - a_k\right)^2 dF_k\left(x\right).$$

Теорема 8.6. ***Ліндеберга.*** Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними дисперсіями. Якщо для цієї послідовності виконується умова Ліндеберга, то для неї виконується ЦГТ.

Якщо для послідовності незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$

$$\max_{1 \leq k \leq n} P\left(\left| \frac{\xi_k - a_k}{B_n} \right| \geq \varepsilon \right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

і виконується ЦГТ, то для неї виконується умова Ліндеберга.

Говорять, що для послідовності незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ виконується ***умова Ляпунова***, якщо для деякого $\delta > 0$

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \cdot \sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Зазначимо, що якщо виконується умова Ляпунова, то умова Ліндеберга також має місце. Це означає таке: якщо послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ задовольняє умові Ляпунова, то до неї можна застосувати ЦГТ.

Виявляється, якщо має місце умова Ліндеберга, то

$$\max_{1 \leq k \leq n} M\left| \frac{\xi_k - a_k}{B_n} \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Це так звана ***властивість рівномірної малості випадкових величин*** при досить великих *n*. Якщо ця умова виконується, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\max_{1 \leq k \leq n} P\left(\frac{\left|\xi_k - a_k\right|}{B_n} \geq \varepsilon \right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Цю властивість називають ***рівномірним прагненням за ймовірністю до нуля*** ймовірностей величин $\dfrac{\xi_n - a_k}{B_n}$.

Зазначимо також, що

$$\max_{1 \le k \le n} D\left(\frac{\xi_k - a_k}{B_n}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Це є властивість рівномірної малості дисперсії.

8.2 Нерівності Чебишева

8.2.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 8.1. Середнє квадратичне відхилення помилки виміру азимута дорівнює $30'$ (математичне сподівання дорівнює нулю). Оцінити ймовірність того, що помилка середнього арифметичного трьох незалежних вимірів не перевищить $1^\circ = 60'$.

► Нехай випадкові величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 – помилки трьох вимірів. Тоді помилка їх середнього арифметичного – це також випадкова величина $\eta = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3}$. Знайдемо числові характеристики цієї величини:

$$M[\eta] = 0, \qquad D[\eta] = D\left[\frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3}\right] = \frac{1}{9}\left(D[\xi_1] + D[\xi_2] + D[\xi_3]\right) = \frac{3 \cdot 900}{9} = 300.$$

Застосувавши другу нерівність Чебишева, отримаємо оцінку для шуканої ймовірності:

$$P\{|\eta| < 60\} \ge 1 - \frac{D\eta}{60^2} = 1 - \frac{300}{3600} \approx 0{,}917. \text{ ◄}$$

Приклад 8.2. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченими математичними сподіваннями. Нехай $\eta_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n$. Довести, що якщо $M|\xi_1| = M|\xi_2| = \ldots = M|\xi_n| < 1$, то $\eta_n \to 1$ при $n \to \infty$. Чи вірне зворотне твердження за умови, що всі $\xi_1, \xi_2, \ldots$ однаково розподілені?

► Скористаємося нерівністю Чебишева: при $n\to\infty$ для будь-якого $\varepsilon>0$

$$P\left(\left|\eta_n\right|>\varepsilon\right)<\frac{M\left|\eta_n\right|}{\varepsilon}=\frac{\left(M\left|\xi_n\right|\right)^n}{\varepsilon}\to 0.$$

Зворотне твердження невірне. Розглянемо приклад.

Нехай $\xi_n=0$ з імовірністю p $(0<p<1)$ і $\xi_n=b>\dfrac{1}{1-p}$ з імовірністю $1-p$. Тоді $\eta_n=0$ з імовірністю $1-(1-p)$ і, отже, $\eta_n\to\infty$, але, мабуть, $M\left|\xi_n\right|=b(1-p)>1$. ◄

Приклад 8.3. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними дисперсіями. Позначимо $a_n=M\xi_n$, $\sigma^2=D\xi_n$. Довести, що якщо $a_n\to\infty$ і $\sigma^2=o(a_n)$ при $n\to\infty$, то $\dfrac{\xi_n}{a_n}\xrightarrow{P}1$ при $n\to\infty$.

► Застосовуючи нерівність Чебишева, при $n\to\infty$ маємо

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{a_n}-1\right|\ge\varepsilon\right)=P\left(\left|\xi_n-a_n\right|\ge a_n\varepsilon\right)\le\frac{D\xi_n}{a_n^2\varepsilon^2}\to 0. \text{ ◄}$$

Приклад 8.4. Припустимо, що ми вирішили виміряти діаметр місячного диска, використовуючи фотографії Місяця. Внаслідок атмосферних перешкод виміри за фотографіями, зробленими у різний час, дадуть різні результати. Нехай ξ – відхилення виміру від справжнього значення дорівнює в деякому масштабі a, $M\xi=a$, $\sigma=\sqrt{D\xi}=1$. Нехай $\eta_n=\dfrac{1}{n}\left(\xi_1+\ldots+\xi_n\right)$, де ξ_i результат i-го виміру. Скільки необхідно зробити спостережень, щоб $\left|\eta_n-a\right|\le 0{,}1$ з імовірністю, більшою 0,99?

► Маємо:

$$M\eta_n=a;$$

$$D\eta_n=D\left[\frac{1}{n}\left(\xi_1+\ldots+\xi_n\right)\right]=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n};$$

$$P\left(\left|\eta_n-a\right|<0{,}1\right)>0{,}99.$$

Отже

$$P\left(\left|\eta_n - a\right| > 0{,}1\right) \le 0{,}01.$$

Використовуючи нерівність Чебишева, отримаємо

$$P\left(\left|\eta_n - a\right| > 0{,}1\right) \le \frac{\sigma^2}{0{,}01 \cdot n}.$$

Отже, якщо вибрати n таким, щоб $\frac{\sigma^2}{0{,}01 \cdot n} \le 0{,}01$, то необхідна нерівність буде виконана. Звідси $n \ge 10^4$. ◄

Приклад 8.5. Нехай ξ – випадкова величина, для якої $0 < D\xi < \infty$. Показати, що

$$P\left(-3{,}2 < \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} < 3{,}2\right) > 0{,}9.$$

► За нерівністю Чебишева

$$P\left(-3{,}2 < \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} < 3{,}2\right) = 1 - P\left(\left|\xi - M\xi\right| \ge 3{,}2\sqrt{D\xi}\right) \ge 1 - \frac{1}{(3{,}2)^2} > 0{,}9. \ ◄$$

Приклад 8.6. Нехай ξ – випадкова величина, для якої $a = M\xi$ і $0 < b = \left[M(\xi - a)^{10}\right]^{\frac{1}{10}} < \infty$. Показати, що $P\left(-2 < \frac{\xi - a}{b} < 2\right) > 0{,}99$.

► За нерівністю Маркова

$$P\left(\left|\xi\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{M\left|\xi\right|^k}{\varepsilon^k},\ k > 0,$$

маємо

$$P\left(-2 < \frac{\xi - a}{b} < 2\right) = 1 - P\left(\left|\xi - a\right| \ge 2b\right) \ge 1 - \frac{M\left(\xi - a\right)^{10}}{2^{10} b^{10}} = 1 - \frac{1}{2^{10}} > 0{,}999. \ ◄$$

Приклад 8.7. Оцінити знизу ймовірність того, що при 40000 підкиданнях монети частота випадіння герба відхилиться від імовірності $p = 0{,}5$ не більше, ніж на 0,005.

► Умова задачі дозволяє вважати, що випадкова величина ξ – кількість випадінь герба – має розподіл Бернуллі. Тоді

$$P\left(\left|\xi - a\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Тут $p = q = 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}005$; $n = 40000$. Отже,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0{,}005\right) \ge 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{40000 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 0{,}75,$$

тобто шукана ймовірність не менша 0,75.

Ця сама ймовірність може бути знайдена за допомогою нерівності Бернуллі:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0{,}005\right) = 2\Phi\left(0{,}005\sqrt{\frac{40000}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Очевидно, що нерівність Чебишева дає в цьому випадку дуже грубу оцінку. ◄

Приклад 8.8. Скільки вимірювань слід зробити, щоб їх середнє арифметичне дало вимірювану величину з точністю до 0,05 і надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин дорівнюють 0,2?

► Зв'язок між середнім арифметичним і вимірюваною величиною встановлюється нерівністю Чебишева:

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Тут $\varepsilon = 0{,}05$; $p = 0{,}9$; $C = D\xi_i = 0{,}2$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Потрібно визначити n. Достатньо n вибрати так, щоб

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \ge 0{,}9 \quad \text{або} \quad \frac{C}{n\varepsilon^2} \le 0{,}1.$$

Звідки знаходимо, що

$$n \ge \frac{C}{\varepsilon^2 \cdot 0{,}1} \quad \text{або} \quad n \ge \frac{0{,}2}{0{,}05^2 \cdot 0{,}1} = 800. \text{ ◄}$$

Приклад 8.9. На даному відрізку ланцюга середнє значення напруги становить $22\,\text{В}$. Оцінити ймовірність того, що на даному відрізку ланцюга при одному спостереженні значення напруги не перевищить $132\,\text{В}$.

► Нехай ξ – значення напруги на даному відрізку ланцюга. Тоді

$$P(\xi < 132) \geq 1 - \frac{M\xi}{132} = 1 - \frac{22}{132} \approx 0{,}83.$$

Отже, на даному відрізку ланцюга напруга не перевищить $132\,\text{В}$ з імовірністю, більшою або рівною 0,83. ◄

Приклад 8.10. У середньому споживання електроенергії населенням одного з районів міста Харкова в березні поточного року становить $7 \cdot 10^5$ кВт·год. Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії в березні майбутнього року перевищить $2 \cdot 10^6$ кВт·год.

► Нехай ξ – величина споживання електроенергії. Оцінку для ймовірності отримаємо, застосувавши нерівність Чебишева:

$$P\left(\xi > 2 \cdot 10^6\right) \leq \frac{M\xi}{2 \cdot 10^6} = \frac{7 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6} = 0{,}35. \text{ ◄}$$

Приклад 8.11. Математичне сподівання сили струму на даному відрізку ланцюга становить $25\,\text{А}$. Яких значень струму слід очікувати на даному відрізку ланцюга з імовірністю, не меншою 0,9, якщо середньоквадратичне відхилення сили струму дорівнює $4{,}5\,\text{А}$?

► Нехай η – сила струму на даному відрізку ланцюга. Позначимо через ε величину відхилення сили струму від свого математичного сподівання, що очікується з імовірністю, не меншою 0,9, тобто

$$P\left(|\eta - M\eta| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\eta}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{4{,}5^2}{\varepsilon^2} > 0{,}9.$$

Звідси знаходимо, що $\varepsilon = 14{,}2\,\text{А}$. Тоді з імовірністю, більшою 0,9,

$$10{,}8\,\text{А} \leq \eta \leq 39{,}2\,\text{А}. \text{ ◄}$$

Приклад 8.12. На склад надійшла партія технічних приладів. Кількість бракованих приладів у партії є випадковою величиною з математичним сподіванням, що дорівнює 75 штукам. Оцінити ймовірність того, що в даній партії буде не більше 200 бракованих приладів.

► Нехай ξ – кількість бракованих приладів у партії, $M\xi = 75$. Тоді

$$P(\xi \le 200) \ge 1 - \frac{M\xi}{200} = 1 - \frac{75}{200} = 0,625. \blacktriangleleft$$

Приклад 8.13. Середнє квадратичне відхилення помилки виміру курсу літака дорівнює 3°. Оцінити ймовірність того, що помилка за даного виміру курсу літака буде більшою 7°. Вважати, що математичне сподівання помилки виміру курсу дорівнює нулю.

► Нехай ξ – помилка виміру курсу літака, $M\xi = 0$, $D\xi = 9^\circ$. Тоді

$$P(\xi > 7) \ge \frac{D\xi}{7^2} = \frac{9}{49} \approx 0,184. \blacktriangleleft$$

Приклад 8.14. Зношування електроприладу під час його експлуатації призвело до того, що кожне його підключення приводить до зменшення ймовірності отримання істинних результатів вимірів на 1%. При першому підключенні приладу ця ймовірність дорівнює 0,8. Проводиться $n = 100$ підключень приладу. Визначити, в яких межах з імовірністю 0,85 знаходитиметься кількість вірних випробувань.

► Імовірність того, що на k-му підключенні приладу буде зроблений істинний вимір, дорівнює

$$p_k = 0,8 \cdot 0,99^{k-1}, \quad k = \overline{1,100}.$$

Тоді середнє значення

$$p_c = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_{100}}{100} = 0,8\left(1 - 0,99^{100}\right) \approx 0,507.$$

Нехай ξ – кількість вірних вимірів. Випробування вважаємо незалежними, тоді $M\xi = np_c = 50,7$, $D\xi \approx np_c\left(1 - p_c\right) = 25$. Позначимо ε – відхилення кількості вірних випробувань від свого середнього. На підставі нерівності Чебишева отримаємо, що

$$P\left(\left|\xi - 50,7\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{25}{\varepsilon^2} = 0,85.$$

Звідси $\varepsilon = 12,9$. Тоді з імовірністю 0,85

$$38 < \xi < 64. \blacktriangleleft$$

Приклад 8.15. Подія A, що відбувається з імовірністю p, і випадкова величина ξ з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2 визначені на одному ймовірнісному просторі. Довести, що при $x > a$

$$P\left(\xi \geq x \middle| A\right) \leq \frac{\sigma^2}{p\left(x-a\right)^2}.$$

► Маємо

$$P\left(\xi \geq x \middle| A\right) = \frac{P\left(\xi \geq x,\, A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{1}{p} P\left(\xi \geq x,\, A\right) \leq \frac{1}{p} P\left(\xi \geq x\right) = \frac{1}{p} P\left(\left|\xi - a\right| \geq x - a\right).$$

Застосувавши нерівність Чебишева, отримаємо

$$P\left(\xi \geq x \middle| A\right) \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{D\xi}{\left(x-a\right)^2} = \frac{\sigma^2}{p\left(x-a\right)^2},$$

Що й необхідно було довести. ◄

Приклад 8.16. Випадкова величина η_n є сумою очок, що випали при n підкиданнях правильного грального кубика. За допомогою нерівності Чебишева оцінити зверху

$$P\left(\left|\frac{\eta_n}{n} - 3{,}5\right| \geq \varepsilon\right), \quad \varepsilon > 0.$$

► Нехай ξ_i – кількість очок, що випали при i-му підкиданні (підкидання вважаємо незалежними). Тоді

$$M\xi_i = \frac{1}{6}\left(1 + 2 + \ldots + 6\right) = 3{,}5;$$

$$D\xi_i = M\xi_i^2 - \left(M\xi_i\right)^2 = \frac{1}{6}\left(1 + 2^2 + \ldots + 6^2\right) - 3{,}5^2 = 2{,}92.$$

Оскільки $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, знайдемо $M\eta_n$ і $D\eta_n$:

$$M\eta_n = M\left(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\right) = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n = 3{,}5n;$$

$$D\eta_n = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n = 2{,}92n.$$

Тоді

$$P\left(\left|\frac{\eta_n}{n} - 3{,}5\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\eta_n - 3{,}5n\right| \geq n\varepsilon\right) \leq \frac{D\eta_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{2{,}92}{n\varepsilon^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 8.17. Час τ безвідмовної роботи приладу має математичне сподівання $a > 0$ і дисперсію $\sigma^2 < \infty$. При кожній відмові прилад ремонтується, і час до наступної відмови не залежить від попередніх ремонтів і розподілений так само, як і τ. Після k відмов прилад вважається несправним і списується. Нехай ζ_k – сумарний час роботи приладу до списання. Показати, що при будь-якому $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\left|\frac{\zeta_k}{M\zeta_k} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

► Нехай τ_i – час безвідмовної роботи приладу між $(i-1)$-м та i-м ремонтами. Тоді $\zeta_k = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k$, $M\zeta_k = ka$, $D\zeta_k = k\sigma^2$. За допомогою нерівності Чебишева отримаємо таку оцінку:

$$P\left(\left|\frac{\zeta_k}{M\zeta_k} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\zeta_k - ka\right| \geq ka\varepsilon\right) \leq \frac{k\sigma^2}{k^2a^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{ka^2\varepsilon^2}.$$

Очевидно, що

$$P\left(\left|\frac{\zeta_k}{M\zeta_k} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

що необхідно було довести. ◄

8.2.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. Нехай випадкова величина ξ – час запізнення студента на лекцію, крім того, відомо, що $M\xi = 1$ хв. Оцінити ймовірність того, що студент спізниться не менше, ніж на 5 хв.

Відповідь: 0,2.

Задача 8.2. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Оцінити ймовірності:

$$p_{\varepsilon} = P\left(|\xi| \geq \varepsilon\right)$$

для $\varepsilon = 2; 5; 10$.

Відповідь: $p_2 \approx 0{,}1353$; $p_5 \approx 0{,}0067$; $p_{10} \approx 0{,}000045$.

Задача 8.3. За багаторічними спостереженнями, середня швидкість вітру в деякому пункті дорівнює 16 км/год. Оцінити ймовірність того, що у випадковий момент часу швидкість вітру в цьому пункті перевищить 80 км/год.

Відповідь: 0,2.

Задача 8.4. Оцінити ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого середнього значення a більше ніж на 3σ, де σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

Відповідь: $1/9$.

Задача 8.5. Середнє значення сили струму в ланцюзі становить $3\,\text{А}$. Оцінити ймовірність того, що в даному ланцюзі в певний момент часу значення сили струму не перевищить $9\,\text{А}$.

Відповідь: 0,66.

Задача 8.6. Середній термін служби автомобіля без капітального ремонту – 4 роки. Оцінити знизу ймовірність того, що даний автомобіль не прослужить більше 20 років без капітального ремонту.

Відповідь: 0,8.

Задача 8.7. Сума всіх внесків деякого ощадбанку становить 2 млрд. грн., а ймовірність того, що випадково вибраний внесок не перевищує 100000 грн., дорівнює 0,8. Що можна сказати про кількість вкладників даного ощадбанку?

Відповідь: кількість вкладників не перевищує 100000.

Задача 8.8. Невід’ємні випадкові величини ξ й η незалежні, а їх математичні сподівання дорівнюють $M\xi = 5$ і $M\eta = 4$. Оцінити знизу ймовірності таких нерівностей:

1) $\xi + \eta < 40$;

2) $\xi \cdot \eta < 200$.

Відповідь: 1) 0,775; 2) 0,9.

Задача 8.9. Електростанція обслуговує селище, в якому 18000 електроламп. Імовірність увімкнення кожної з них у зимовий вечір дорівнює 0,9. Оцінити ймовірність того, що кількість ламп, підключених у мережу в зимовий вечір, відрізняється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною менше, ніж на 200.

Відповідь: 0,955.

8.3 Закон великих чисел (ЗВЧ)

8.3.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 8.18. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, крім того, ξ_n набуває значення $\sqrt{n}$, 0, $-\sqrt{n}$ з імовірностями $\frac{1}{2n}$, $1-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$ відповідно.

Чи виконується для цієї послідовності ЗВЧ?

► Знайдемо $M\xi_i$ і $M\xi_i^2$:

$$M\xi_i = \sqrt{n}\cdot\frac{1}{2n} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) - \sqrt{n}\cdot\frac{1}{2n} = 0;$$

$$M\xi_i^2 = n\cdot\frac{1}{2n} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + n\cdot\frac{1}{2n} = 1;$$

$$D\xi_i = M\xi_i^2 - \left(M\xi_i\right)^2 = 1-0 = 1 < \infty.$$

З теореми Маркова випливає, що

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k = \frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Звідси випливає, що виконується ЗВЧ. ◄

Приклад 8.19. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, і ξ_n набуває значення $-n$, 0, n з імовірностями $\frac{1}{2n^2}$, $1-\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{2n^2}$ відповідно. Чи можна застосувати до цієї послідовності ЗВЧ?

► Знайдемо $M\xi_n$ і $M\xi_n^2$:

$$M\xi_n = -n\cdot\frac{1}{2n^2} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + n\cdot\frac{1}{2n^2} = 0\,;$$

$$M\xi_n^2 = n^2\cdot\frac{1}{2n^2} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + n^2\cdot\frac{1}{2n^2} = 1;$$

$$D\xi_n = 1 < \infty\,.$$

Достатньо перевірити, що $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D\xi_k}{k^2} < \infty$. Дійсно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D\xi_k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\xrightarrow[k\to\infty]{}0\,.$$

Звідси випливає, що виконується ЗВЧ. ◄

Приклад 8.20. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, і ξ_n набуває значення -2^n, -1, 1, 2^n з імовірностями 2^{-n-1}, $\frac{1-2^{-n}}{2}$, $\frac{1-2^{-n}}{2}$, 2^{-n-1} відповідно. Чи можна застосувати до цієї послідовності ЗВЧ?

► Знайдемо $M\xi_n$ і $M\xi_n^2$:

$$M\xi_n = -2^n\cdot 2^{-n-1} - 1\cdot\frac{1-2^{-n}}{2} + 1\cdot\frac{1-2^{-n}}{2} + 2^n\cdot 2^{-n-1} = 0\,;$$

$$M\xi_n^2 = 2^{2n}\cdot 2^{-n-1} + 2\cdot\frac{1-2^{-n}}{2} + 2^{2n}\cdot 2^{-n-1} = 2^n - 2^{-n} + 1;$$

$$D\xi_n = M\xi_n^2 - \left(M\xi_n\right)^2 = 2^n - 2^{-n} + 1.$$

Неважко перевірити, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D\xi_k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k - 2^{-k} + 1}{k^2}\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty\,.$$

Звідси випливає, що закон великих чисел не виконується. ◄

Приклад 8.21. ***Теорема Бореля.*** Нехай ν_n – кількість успіхів у n випробуваннях Бернуллі з імовірністю успіху p. Довести, що

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{м.н.} p.$$

► Нехай

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

де

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } k\text{-е випробування закінчується успіхом,} \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тоді $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = 0) = 1 - p$. Доведемо, що

$$P\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\omega)}{n} = p \right\} = 1.$$

Оскільки

$$M\xi_i = p;$$

$$M\xi_n^2 = 1p + 0(1-p) = p;$$

$$D\xi_n = M\xi_n^2 - (M\xi_n)^2 = p - p^2,$$

тоді

$$M\nu_n = M\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p-p^2}{k^2} = \left(p - p^2\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Цей ряд збігається. Отже, відповідно до теореми 8.3, виконується ЗВЧ:

$$P\left(\frac{\nu_n - np}{n} \to 0\right) = 1$$

або

$$P\left(\frac{\nu_n}{n} \to p\right) = 1,$$

тобто

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{м.н.} p. \blacktriangleleft$$

Приклад 8.22. Дана послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, кожна з яких може отримати тільки два значення з рівною ймовірністю: $\xi_1 = \pm\alpha_1$, $\xi_2 = \pm\alpha_2$, ..., і

$$\alpha_n \geq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i + \beta n,$$

де β – позитивна стала. Чи можна застосувати до даної послідовності закон великих чисел?

► Очевидно, $M\xi_k = 0$, $|\xi_n| = \alpha_n \geq \left|\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k\right|$. Тоді

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right| < \varepsilon\right) = P\left(\frac{1}{n}\left|\xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k\right| < \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq P\left(\frac{1}{n}|\xi_n| - \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k\right| < \varepsilon\right) = P\left(\frac{\alpha_n}{n} - \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k\right| < \varepsilon\right).$$

У свою чергу, $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$, але тоді $\frac{\alpha_n}{n} - \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k\right| \geq \beta$. Тому при $\varepsilon < \beta$ отримуємо, що

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right| < \varepsilon\right) = 0,$$

тобто ця ймовірність не прямує до одиниці для будь-якого $\varepsilon > 0$, а отже, до послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ закон великих чисел застосувати не можна. ◄

Приклад 8.23. ***Теорема С. Бернштейна.*** Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність випадкових величин з обмеженими дисперсіями ($D\xi_n \le c$), а коефіцієнт кореляції ρ_{ij} між ξ_i і ξ_j прямує до нуля при $|i-j| \to \infty$. Довести, що до цієї послідовності можна застосувати закон великих чисел.

► Для доведення застосуємо теорему Маркова, відповідно до якої для виконання ЗВЧ достатньо, щоб $\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Запишемо дисперсію суми цих величин:

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + 2 \sum_{1 \le i \le j \le n} \sqrt{D\xi_i}\sqrt{D\xi_j}\,\rho_{ij}\,.$$

Нехай ε – деяке позитивне число. Тоді існує таке число $N = N(\varepsilon)$, що при виконанні умови $|i-j| > N$ буде вірною нерівність $|\rho_{ij}| < \varepsilon$. Отже, для будь-якого $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ $(n > N)$ і не більше ніж $2N$ номерів j буде вірною нерівність $\varepsilon < \rho_{ij} \le 1$. Для дисперсії суми отримаємо оцінку

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) < nc + 4cNn + 2c\varepsilon\left(n^2 - 2Nn\right) = c_1 n + c_2 \varepsilon n^2\,.$$

Звідси видно, що

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

тобто закон великих чисел можна застосувати. ◄

Приклад 8.24. Незалежні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такі, що кожна випадкова величина отримує тільки два значення $\pm\sqrt{\ln n}$ з рівними ймовірностями. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

► Знайдемо $M\xi_n$ і $D\xi_n$:

$$M\xi_n = \frac{1}{2}\sqrt{\ln n} - \frac{1}{2}\sqrt{\ln n} = 0;$$

$$D\xi_n = \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln n = \ln n\,.$$

Оцінимо $D\sum_{i=1}^{n}\xi_i$:

$$D\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i=\sum_{i=1}^{n}\ln n<\int_1^{n+1}\ln x dx=(n+1)\ln(n+1)-n.$$

Тоді на підставі нерівності Чебишева маємо

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|<\varepsilon\right)=P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|<\varepsilon\right)=P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|<n\varepsilon\right)>$$

$$>1-\frac{D\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{\varepsilon^2n^2}>1-\frac{(n+1)\ln(n+1)-n}{\varepsilon^2n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Таким чином, закон великих чисел можна застосувати. ◄

Приклад 8.25. Нехай випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – незалежні та рівномірно розподілені на відрізках $[a_n;\ b_n]$ відповідно, і

$$b_n-a_n=b_{n-1}-a_{n-1}+\frac{c}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}},$$

де $c>0,\ \alpha>0$ – деякі сталі. Чи виконується для послідовності $\xi_1,\xi_2,\ldots$ ЗВЧ?

► Відповідно до теореми Маркова, для виконання ЗВЧ достатньо, щоб $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)=0$. Знайдемо дисперсії випадкових величин ξ_k ($k=1,2,\ldots$):

$$D\xi_k=\int_{a_n}^{b_n}\left(x-\frac{a_n+b_n}{2}\right)\frac{1}{b_n-a_n}dx=\frac{(b_n-a_n)^2}{12}.$$

Застосувавши послідовно рекурентну формулу для b_n-a_n, отримаємо, що

$$b_n-a_n=b_1-a_1+c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\alpha}}<b_1-a_1+c\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}}=$$

$$=b_1-a_1+\frac{c}{\frac{1}{2}-\alpha}\left((n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}-1\right)=c_1+c_2(n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Тоді

$$\frac{1}{n}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k=\frac{1}{12n^2}\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2<$$

$$<\frac{1}{12n}\left(c_1+c_2(n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^2<c_3(n+1)^{-2\alpha}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Таким чином, для послідовності $\xi_1,\xi_2,\dots$ ЗВЧ виконується. ◄

Приклад 8.26. Випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\dots$ – незалежні та мають трикутний розподіл зі щільністю

$$p_{\xi_n}(x)=\begin{cases}0, & x\le -a_n,\\ \dfrac{a_n+x}{a_n^2}, & -a_n<x\le 0,\\ \dfrac{a_n-x}{a_n^2}, & 0<x\le a_n,\\ 0, & x>a_n,\end{cases}$$

крім того, $a_n=n^\alpha$ $(\alpha<\frac{1}{2})$. Чи можна застосувати до послідовності $\xi_1,\xi_2,\dots$ закон великих чисел (випадкові величини вважати незалежними).

► Знайдемо математичні сподівання і дисперсії випадкових величин ξ_n $(n=1,2,\dots)$:

$$M\xi_n=\int_{-a_n}^{0}x\frac{a_n+x}{a_n^2}dx+\int_{0}^{a_n}x\frac{a_n-x}{a_n^2}dx=\frac{1}{a_n^2}\left(\frac{a_nx^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a_n}^{0}+\frac{1}{a_n^2}\left(\frac{a_nx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{a_n}=0;$$

$$D\xi_n=\int_{-a_n}^{0}x^2\frac{a_n+x}{a_n^2}dx+\int_{0}^{a_n}x^2\frac{a_n-x}{a_n^2}dx=$$

$$=\frac{1}{a_n^2}\left(\frac{a_n x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-a_n}^{0}+\frac{1}{a_n^2}\left(\frac{a_n x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{a_n}=\frac{a_n^2}{6}.$$

Розглянемо величину $\frac{1}{n^2}D\sum_{k=1}^{n}\xi_k$:

$$\frac{1}{n^2}D\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k=\frac{1}{6n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\frac{1}{6n^2}\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha}<\frac{1}{6n^2}\int_1^{n+1}x^{2\alpha}dx=$$

$$=\frac{1}{6n^2}\cdot\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\Bigg|_1^{n+1}<\frac{(n+1)^{2\alpha+1}-1}{6(2\alpha+1)n^2}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Таким чином, за теоремою Маркова закон великих чисел можна застосувати. ◄

8.3.2 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.10. Проводиться серія випробувань Бернуллі з постійною ймовірністю успіху p. Нехай

$$\xi_i=\begin{cases}1, \text{ якщо } i\text{-е й } (i+1)\text{-е випробування закінчилися успіхом;}\\ 0 \text{ у протилежному випадку.}\end{cases}$$

Чи виконується для послідовності $\xi_1,\xi_2,\ldots$ ЗВЧ?

Відповідь: так.

Задача 8.11. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин таких, що

$$P\left(\xi_n=\pm 2^n\right)=2^{-(2n+1)},\qquad P\left(\xi_n=0\right)=1-2^{-2n}.$$

Чи можна застосувати до цієї послідовності ЗВЧ?

Відповідь: так.

Задача 8.12. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, і ξ_n отримує значення 2^n та -2^n з імовірностями $\frac{1}{2}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності ЗВЧ?

Відповідь: так.

Задача 8.13. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, і ξ_n отримує значення $-n$, 0, n з імовірностями $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ відповідно. Чи можна застосувати до цієї послідовності ЗВЧ?

Відповідь: ні.

Задача 8.14. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, і ξ_n отримує значення $-n$, 0, n з імовірностями 2^{-n}, $1-2^{-n+1}$, 2^{-n} відповідно. Чи можна застосувати до цієї послідовності ЗВЧ?

Відповідь: так.

Задача 8.15. За яких значень $\alpha > 0$ до послідовності незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2, ... таких, що

$$P\left(\xi_n = n^{\alpha}\right) = P\left(\xi_n = -n^{\alpha}\right) = \frac{1}{2},$$

можна застосувати ЗВЧ?

Відповідь: при $\alpha < \frac{1}{2}$.

Задача 8.16. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, і ξ_n має щільність розподілу

$$p_{\xi_n}(x) = \frac{n^{2(n+1)}|x|}{\left(n^2 + x^2\right)^{n+2}}.$$

Перевірити, чи задовольняє ця послідовність закону великих чисел у формі Чебишева.

Відповідь: задовольняє.

Задача 8.17. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з математичним сподіванням a, $\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$. Довести, що до послідовності $\eta_1, \eta_2, \ldots$ можна застосувати ПЗВЧ.

Задача 8.18. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежні та такі, що

$$P(\xi_n = -n) = P(\xi_n = n) = \frac{1}{n}; \qquad P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{2}{n}, \qquad n \geq 2$$

Чи виконується для цієї послідовності ПЗВЧ?

Відповідь: не виконується.

Задача 8.19. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, задана рядом розподілу

$$P\left(\xi_k = k(-1)^{k-1}\right) = \frac{6}{k^2\pi^2}.$$

Перевірити, чи можна застосувати до цієї послідовності випадкових величин ЗВЧ.

Відповідь: ні.

8.4 Центральна гранична теорема (ЦГТ)

8.4.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 8.27. Довести, що умова Ліндеберга виконується для послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченною дисперсією.

► Умова Ліндеберга:

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} M\left[(\xi_k - a_k)^2; |\xi_k - a_k| > \tau B_n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

З умови задачі

$$M\xi_k = a_k = a, \qquad D\xi_k = \sigma_k^2 = \sigma^2, \qquad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 = n\sigma^2.$$

Тоді

$$\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n} M\left[(\xi_k - a)^2; |\xi_k - a| > \tau\sigma\sqrt{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{a-\tau\sigma\sqrt{n}} (x-a)^2\,dx + \int_{a+\tau\sigma\sqrt{n}}^{+\infty} (x-a)^2\,dx\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Умова Ліндеберга виконана. ◄

Приклад 8.28. Довести, що якщо для послідовності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ виконується умова Ляпунова, то виконується і умова Ліндеберга.

► Нехай $D\xi_k = \sigma_k^2$, $M\xi_k = a_k$. Нехай для послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ виконується умова Ляпунова, тобто існує $\delta > 0$ таке, що

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Доведемо, що умова Ліндеберга виконується, тобто

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} M\left[\left(\xi_k - a_k\right)^2; \left|\xi_k - a_k\right| > \tau B_n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\tau > 0).$$

Маємо

$$M\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x_k - a_k\right|^{2+\delta} p_{\xi_k}\left(x_k\right) dx_k \ge \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_k - a_k\right)^{2+\delta} p_{\xi_k}\left(x_k\right) dx_k =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_k - a_k\right)^{\delta} \left(x_k - a_k\right)^2 p_{\xi_k}\left(x_k\right) dx_k \ge \tau^{\delta} B_n^{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_k - a_k\right)^2 p_{\xi_k}\left(x_k\right) dx_k .$$

Підсумуємо по k від 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta} \ge \tau^{\delta} B_n^{\delta} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_k - a_k\right)^2 p_{\xi_k}\left(x_k\right) dx_k =$$

$$= \left|\left\{x_n : \left|x_n - a_k\right| > \tau B_n\right\}\right| = \tau^{\delta} B_n^{\delta} \sum_{k=1}^{n} M\left\{\left(\xi_k - a_k\right)^2, \left|\xi_k - a_k\right| > \tau B_n\right\}.$$

Помножимо на $\dfrac{1}{\tau^{\delta} B_n^{2+\delta}}$:

$$\underbrace{\frac{1}{\tau^{\delta} B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta}}_{\text{умова Ляпунова}} \ge \underbrace{\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} M\left\{\left(\xi_k - a_k\right)^2; \left|\xi_k - a_k\right| > \tau B_n\right\}}_{\text{умова Ліндеберга}}.$$

Таким чином, умова Ліндеберга виконується. ◄

Приклад 8.29. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченними дисперсіями; $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести, що для будь-яких скінченних дійсних чисел a та b

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le S_n \le b\right) = 0.$$

► Нехай $m = M\xi$, $\sigma^2 = D\xi$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le S_n \le b\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{a-mn}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{S_n - mn}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{b-mn}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a-mn}{\sigma\sqrt{n}}}^{\frac{b-mn}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

При $n \to \infty$ відрізок інтегрування звужується і прямує до $-\infty$. Отже,

$$P\left(a \le S_n \le b\right) = 0. ◄$$

Приклад 8.30. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченними позитивними дисперсіями. Довести, що для будь-якого дійсного числа x границя $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n < x\right)$ дорівнює або 0, або $\frac{1}{2}$, або 1. Вказати умову, за якої має місце кожен зазначений випадок.

► Нехай $M\xi_i = a,\ D\xi_i = \sigma^2$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тоді

$$MS_n = na, \qquad P\left(S_n < x\right) = P\left(\frac{S_n - MS_n}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{x - MS_n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-MS_n}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Даний інтеграл дорівнює 0, коли $\frac{x - MS_n}{\sigma\sqrt{n}} \to -\infty$, тоді $\frac{MS_n}{\sigma\sqrt{n}} \to +\infty$. Отже, $a > 0$.

Інтеграл дорівнює 1, коли $\frac{x - MS_n}{\sigma\sqrt{n}} \to +\infty$, тоді $\frac{MS_n}{\sigma\sqrt{n}} \to -\infty$ й $a < 0$.

Інтеграл дорівнює $\frac{1}{2}$, коли $\frac{x - MS_n}{\sigma\sqrt{n}} = 0$, тоді $x = MS_n$ й $a = 0$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_n < x\right) = \begin{cases} 0, & a > 0; \\ 1, & a < 0; \\ \dfrac{1}{2}, & a = 0. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Приклад 8.31. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, що мають скінченні моменти третього порядку. Довести, що для даної послідовності можна застосувати ЦГТ.

► Нехай $M\xi_k = a$, $D\xi_k = \sigma^2$, $M\left|\xi_k - a\right|^3 = \mu_3 < \infty$.

Тоді

$$B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D\xi_k} = \sqrt{n}\sigma .$$

Тепер визначимо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - a\right|^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{n\mu_3}{\left(\sigma\sqrt{n}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_3}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 .$$

Тут виконується умова Ляпунова, а, отже, для заданої послідовності випадкових величин можна застосувати ЦГТ. ◄

Приклад 8.32. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних обмежених випадкових величин. Довести, що для цієї послідовності можна застосувати ЦГТ за умови, що $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ($n = 1, 2, \ldots$).

► Оскільки випадкові величини ξ_n обмежені, то існує константа c така, що $P\left(\left|\xi_n\right| \le c\right) = 1$ для всіх n. Нехай $M\xi_n = a_n$. Тоді $\left|a_n\right| \le c$.

Розглянемо величину

$$\left|\xi_n - a_n\right| \le \left|\xi_n\right| + \left|a_n\right| \le 2c .$$

Таким чином,

$$\frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - a_k\right|^3 \le \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M\left(2c\left|\xi_k - a_k\right|^2\right) = \frac{2c}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - a_k\right|^2 = \frac{2cB_n^2}{B_n^3} = \frac{2c}{B_n} .$$

При $n\to\infty$ B_n прямує до ∞. Звідси

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2c}{B_n}=0.$$

Отже, виконується умова Ляпунова і ЦГТ можна застосувати . ◄

Приклад 8.33. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, що мають скінченні моменти третього порядку, і для всіх k виконується

$$c_1\le D\xi_k\le c_2, \qquad d_1\le M\left|\xi_k-a_k\right|^3\le d_2.$$

Довести, що до послідовності $\xi_1,\xi_2,\ldots$ можна застосувати ЦГТ.

► Оскільки $c_1\le D\xi_k\le c_2$, $d_1\le M\left|\xi_k-a_k\right|^3\le d_2$, то

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}D\xi_k\ge\sum_{k=1}^{n}c_1=nc_1,$$

$$\sum_{k=1}^{n}M\left|\xi_k-a_k\right|^3\le\sum_{k=1}^{n}d_2=nd_2.$$

Тому

$$\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n}M\left|\xi_k-a_k\right|\le\frac{nd_2}{\left(\sqrt{nc_1}\right)^3}=\frac{d_2}{c_1^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Умова Ляпунова виконується, а, отже, до послідовності $\xi_1,\xi_2,\ldots$ можна застосувати ЦГТ. ◄

Приклад 8.34. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин ($M\xi_i=0$, $D\xi_i=0$, $i=1,2,\ldots$), $v_1,v_2,\ldots$ – послідовність цілочисельних позитивних випадкових величин таких, що v_i не залежить від $\xi_1,\xi_2,\ldots$ для кожного i. Нехай $\eta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Довести, що якщо $v_n\to\infty$ при $n\to\infty$, то розподіл $\dfrac{\eta_{v_n}}{\sqrt{v_n}}$ слабко збігається при $n\to\infty$ до $N(0;1)$.

► За формулою повної ймовірності маємо

$$P\left(\frac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}} < x\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\sqrt{k}} < x\right) P\left(\nu_n = k\right).$$

Але $P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\sqrt{k}} < x\right) \to F\left(x\right)$ при $k \to \infty$, де $F\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Отже, для кожного $\varepsilon > 0$ існує k_0 таке, що для будь-якого $k \ge k_0$

$$\left| P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\sqrt{k}} < x\right) - F\left(x\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далі, $\nu_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Звідси випливає існування n_0 такого, що для кожного $n \ge n_0$ $P\left(\nu_n = k_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Отже, для будь-якого $n \ge n_0$

$$\left| P\left(\frac{\eta_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}} < x\right) - F(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\sqrt{k}} < x\right) P\left(\nu_n = k\right) - F\left(x\right) \right| \le$$

$$\le P\left(\nu_n = k_0\right) + \sum_{k=1}^{n} \left| P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\sqrt{k}} < x\right) - F(x) \right| P\left(\nu_n = k\right) \le \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Приклад 8.35. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин таких, що

$$\xi_n = \begin{cases} n^{\alpha}, & p = \frac{1}{2}; \\ -n^{\alpha}, & p = \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

Визначити, чи можна застосувати до послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ умову Ляпунова.

► Знайдемо $M\xi_n$, $D\xi_n$ і $M\left|\xi_n - a_n\right|^3$.

$$M\xi_n = \sum_{k} x_k P\left(\xi_n = x_k\right) = n^{\alpha} \frac{1}{2} + \left(-n^{\alpha}\right) \frac{1}{2} = 0,$$

$$D\xi_n = M\xi_n^2 - \left(M\xi_n\right)^2 = n^{2\alpha},$$
$$M\left|\xi_n - a_n\right|^3 = M\left|\xi_n\right|^3 = n^{3\alpha}.$$

При кожному $2\alpha+1>0$ маємо

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha}=n^{2\alpha+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha}\frac{1}{n}\approx n^{2\alpha+1}\int_0^1 x^{2\alpha}dx=\frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}.$$

При $\alpha=-\frac{1}{2}$

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^{-1}\approx\ln n.$$

Якщо $\alpha<-\frac{1}{2}$, то всі величини B_n будуть обмеженими при $n\to\infty$, а, отже, не виконуватиметься умова знехтуваної малості доданків.

Аналогічно при $3\alpha+1>0$ знаходимо

$$\sum_{k=1}^{n}M\left|\xi_k\right|^3=\sum_{k=1}^{n}k^{3\alpha}=n^{3\alpha+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{3\alpha}\frac{1}{n}\approx n^{3\alpha+1}\int_0^1 x^{3\alpha}dx=\frac{n^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}.$$

При $\alpha=-\frac{1}{3}$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}M\left|\xi_k\right|^3=\sum_{k=1}^{n}k^{-1}\approx\ln n,$$

Якщо $\alpha<-\frac{1}{3}$, то $\sum_{k=1}^{n}M\left|\xi_k\right|^3$ – обмежені.

Оскільки

$$n^{\alpha+\frac{1}{3}}=o\left(n^{\alpha+\frac{1}{2}}\right),$$

то при $\alpha\geq-\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n}M\left|\xi_k\right|^3=o\left(B_n^3\right)$$

і умова Ляпунова виконуватиметься. ◄

Приклад 8.36. Знайти ймовірність того, що при 100 підкиданнях монети кількість випадінь герба виявиться в межах від 40 до 60.

► Оскільки, що $p=0,5$, то $np=100\cdot 0,5=50$ і

$$\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0,5\cdot(1-0,5)}=5.$$

Тоді, якщо $40<k<60$, то $-2<\frac{k-50}{5}<2$. Застосовуючи інтегральну теорему Муавра-Лапласа, використовуючи табл. А.2, маємо

$$P(40<k<60)=P\left(-2<\frac{k-50}{5}<2\right)=$$

$$=\Phi_0(2)-\Phi_0(-2)=2\Phi_0(2)=2\cdot 0,4772=0,9544. ◄$$

Приклад 8.37. В умовах попереднього прикладу знайти ймовірність того, що випаде саме 45 гербів.

► Знайдемо $x=\frac{45-50}{5}=-1$, тоді, використовуючи локальну теорему Муавра-Лапласа і табл. А.1, маємо

$$P(45,100)\approx\frac{1}{5}\cdot\varphi(-1)=\frac{1}{5}\cdot\varphi(1)=\frac{1}{5}\cdot 0,2420=0,0484. ◄$$

8.4.2 Задачі для самостійного розв’язання

Задача 8.20. Дана послідовність випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots$. Величина ξ_k може набувати значення $-n\alpha$, 0 і $n\alpha$ з імовірностями, рівними відповідно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; α – стала. Використовуючи ЦГТ, доведіть, що для послідовності $\xi_1,\xi_2,\ldots$ ЗВЧ не виконується.

Задача 8.21. Використовуючи метод характеристичних функцій, доведіть, що при $\lambda\to\infty$ розподіл випадкової величини $\eta=\frac{\xi-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$, де ξ розподілена за законом Пуассона з параметром λ, прямує до найпростішого нормального розподілу.

Задача 8.22. Дана послідовність $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежних випадкових величин. Величина ξ_n розподілена рівномірно на відрізку $[-a_n;\ a_n]$. Довести, що до даної послідовності можна застосувати ЦГТ, якщо всі a_n обмежені знизу.

Задача 8.23. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежні та розподілені за законом Релея зі щільністю

$$p_k(x) = \frac{x(4-\pi)}{2} e^{-\frac{(4-\pi)x^2}{4}}.$$

Переконатися в тому, що до цієї послідовності можна застосувати локальну граничну теорему для щільностей.

Задача 8.24. Перевірити, що для послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ з імовірностями $P(\xi_k = \pm k) = \frac{1}{2}$ виконується умова Ляпунова.

Задача 8.25. Випадкова величина χ_n^2 має хі-квадрат розподіл зі щільністю

$$p(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \geq 0.$$

Використовуючи теорему Ляпунова, довести, що розподіл випадкової величини $\dfrac{\chi_n^2 - M\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}}$ є асимптотично нормальним з параметрами $(0;\ 1)$.

Задача 8.26. Обчислення числа π проводиться методом статистичних випробувань, які полягають в n незалежних випадкових підкиданнях голки довжиною $l = 2r$ на площину, розграфлену паралельними прямими і віддаленими одна від одної на відстань $2a$ (див. приклад 1.27). Вимірюється кількість перетинань голкою кожної з паралельних прямих. Знайти мінімальну кількість випробувань, необхідних для того, щоб з імовірністю $0{,}9996$ відносна похибка визначення числа π була не більша ніж, 3%.

Відповідь: $n_{\min} = 27427$.

Задача 8.27. Імовірність появи події при одному досліді дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що частота цієї події при 100 дослідах знаходитиметься в межах від 0,2 до 0,4?

Відповідь: 0,98.

Задача 8.28. 100 верстатів однакової потужності працюють незалежно один від одного в однаковому режимі, при якому їх приводи є увімкненими протягом 0,8 всього робочого часу. Яка ймовірність того, що в довільно вибраний момент часу будуть увімкненими від 7 до 86 верстатів?

Відповідь: 0,944.

Задача 8.29. Імовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що за час T зі 100 конденсаторів вийдуть з ладу: а) не менше 20 конденсаторів; б) менше 28 конденсаторів; в) від 14 до 26 конденсаторів.

Відповідь: а) 0,55; б) 0,98; в) 0,9.

Задача 8.30. Скільки необхідно провести дослідів, щоб з імовірністю 0,9 стверджувати, що частота події, яка нас цікавить, відрізнятиметься від імовірності появи цієї події, що дорівнює 0,4, не більше ніж на 0,1?

Відповідь: 65.

Задача 8.31. Випадкова величина ξ_n з рівними ймовірностями отримує лише два значення $\pm n^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\varphi(n)}\right)}$, де $\varphi(n)$ при $n\to\infty$ зростає не повільніше, ніж $\ln n$. Використовуючи ЦГТ, перевірити, чи можна застосувати до послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ закон великих чисел.

Відповідь: не можна.

Задача 8.32. Проводиться вибіркове обстеження великої партії електричних лампочок для визначення середнього часу їхнього горіння. Середнє квадратичне відхилення часу горіння лампочки дорівнює $\sigma = 80$ год. Зі всієї партії навмання вибирається 400 лампочок. Користуючись центральною граничною теоремою, оцінити ймовірність того, що середній час горіння лампочки (математичне сподівання) відрізнятиметься від спостереженого середнього часу горіння обраних 400 лампочок не більше ніж, на 10 год.

Відповідь: 0,98738.

Задача 8.33. Випадкова величина ξ є середнім арифметичним n незалежних однаково розподілених випадкових величин, дисперсія кожної з яких дорівнює 5. Користуючись центральною граничною теоремою, оцінити, яку кількість доданків n необхідно взяти для того, щоб з імовірністю, не меншою 0,9973,
випадкова величина ξ відхилялася від свого середнього не більше, ніж на 0,01.

Відповідь: $n \geq 450000$.

9 ДИСКРЕТНІ ЛАНЦЮГИ МАРКОВА

9.1 Теоретичні відомості

Важливим узагальненням послідовностей незалежних випадкових величин є послідовності випадкових величин, пов’язаних у ланцюг Маркова.

Теорія ланцюгів Маркова має науковий інтерес і широко застосовується в інженерних задачах.

Нехай випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ визначені на одному і тому самому імовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ і приймають не більше, ніж зліченну множину значень $\{X_1, X_2, \ldots\}$.

Вважатимемо, що послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ пов’язана в ***ланцюг Маркова*** (утворює ланцюг Маркова), якщо для будь-якого n і будь-яких $i_0, i_1, \ldots, i_n$ таких, що

$$P\left(\xi_{n-1} = X_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_0 = X_{i_0}\right) > 0,$$

має місце рівність

$$P\left(\xi_n = X_{i_n} \middle| \xi_{n-1} = X_{i_{n-1}}, .., \xi_0 = X_{i_0}\right) = P\left(\xi_n = X_{i_n} \middle| \xi_{n-1} = X_{i_{n-1}}\right)$$

(***марковська властивість***).

Таким чином, ланцюг Маркова можна трактувати як деяку систему з можливими станами $\{X_1, X_2, \ldots\}$. Часто стани позначають цілими числами $\{1, 2, \ldots\}$.

Нехай є стохастична система зі зліченною кількістю можливих станів, яка в дискретні моменти часу $t = 0, 1, \ldots$ переходить зі стану в стан. Нехай $\xi(t)$ є її положення у момент часу t внаслідок ланцюга випадкових переходів $\xi(0) \to \xi(1) \to \ldots \to \xi(t) \to \ldots$. Всі можливі стани позначимо цілими числами: $i = 0, 1, \ldots$. Припустимо, що при відомому стані $\xi(t) = k$ на наступному кроці система переходить у стан $\xi(t+1) = j$ з умовною ймовірністю

$$p_{kj} = P\left\{\xi(t+1) = j \middle| \xi(t) = k\right\}$$

незалежно від її поведінки в минулому, тобто незалежно від ланцюга переходів до моменту t:

$$P\left\{\xi(t+1)=j\,\middle|\,\xi(0)=i,\ldots,\xi(t)=k\right\}=P\left\{\xi(t+1)=j\,\middle|\,\xi(t)=k\right\}$$

при всіх k і j. Описана імовірнісна схема називається ***однорідним ланцюгом Маркова*** зі зліченною кількістю станів. Її однорідність полягає в тому, що перехідні ймовірності p_{kj} не залежать від часу. Для них виконується умова нормування:

$$\sum_j p_{kj}=1.$$

Матриця P з елементами p_{ij} називається ***матрицею ймовірності переходу за один крок.***

Матриця P є ***стохастичною***, тобто для будь-яких i та j $p_{ij}>0$ і $\sum_j p_{ij}=1$
.

Нехай

$$p_i^0=P\left\{\xi(0)=i\right\}\quad(i=0,1,\ldots)-$$

початковий розподіл ймовірності, і $\sum_i p_i^0=1$. Тоді

$$P\left\{\xi(0)=i,\xi(1)=j\right\}=P\left\{\xi(1)=j\,\middle|\,\xi(0)=i\right\}P\left\{\xi(0)=i\right\}=p_i^0p_{ij}.$$

З марковської властивості випливає, що для всього ланцюга справедливою є така рівність:

$$P\left\{\xi(0)=i,\ldots,\ \xi(t)=k,\xi(t+1)=j\right\}=p_i^0\ldots p_{kj}.$$

Основною задачею дослідження марковського ланцюга є обчислення ***безумовної ймовірності*** знаходження системи в стані j на будь-якому n-му кроці, тобто обчислення ймовірності

$$p_j(n)=P\left\{\xi(n)=j\right\},\quad j=0,1,\ldots.$$

При початковому розподілі

$$p_i^0=P\left\{\xi(0)=i\right\},\quad i=0,1,\ldots,\qquad \sum_i p_i^0=1$$

для ймовірності $p_j(n)$ справедлива формула

$$p_j(n)=\sum_i p_i^0 p_{ij}(n).$$

Зміни в ланцюзі Маркова з дискретним часом можуть відбуватися тільки в моменти, що задаються натуральним рядом чисел.

Для марковського ланцюга з перехідною ймовірністю p_{ij} і початковим розподілом $\left\{p_i^0\right\}$ виконуються такі співвідношення:

$$p_{ij}(s+t)=\sum_k p_{ik}(s)\,p_{kj}(t),$$

$$p_j(s+t)=\sum_i p_i(s)\,p_{ij}(t)$$

для будь-яких i, j і цілих $s,t\geq 0$.

Матриця $P(n)$ з елементами $p_{ij}(n)=P\left(\xi_n=j\,|\,\xi_0=i\right)$ називається ***матрицею ймовірності переходу за*** n ***кроків.*** Можна показати, що $P(n)=P^n$. Для будь-яких невід’ємних n і m справедливе рівняння ***Чепмена – Колмогорова:***

$$P(n+m)=P(n)\cdot P(m).$$

Тут $P(0)$ – одинична матриця.

Очевидно, що матриця P ймовірності переходу за один крок і початковий розподіл $\left\{p_i^0\right\}$ повністю визначають ланцюг Маркова.

У теорії ланцюгів Маркова важливу роль відіграє класифікація станів ланцюга. Наведемо класифікацію, запропоновану А. М. Колмогоровим. Говорять, що стан j ***досяжний*** із стану i, якщо існує таке $n>0$, що $p_{ij}(n)>0$. Стани i та j називаються ***станами, що сполучаються***, якщо вони досяжні один з одного. Стан i називається ***неістотним***, якщо існує такий стан j, що j досяжний з i, а i недосяжний з j. Стан i називається ***істотним*** в іншому випадку. Множина всіх істотних станів ланцюга Маркова розбивається на непересічні класи станів, що сполучаються, отже будь-які два стани з одного класу сполучаються між собою, а для будь-яких двох станів i і j з різних класів $p_{ij}(n)=p_{ji}(n)=0$ для всіх *n.*

Ланцюг Маркова, всі стани якого складають один клас станів, що сполучаються, називається ***нерозкладним***. Введемо такі позначення:

$$f_j(n)=P\left(\xi(n)=j\,|\,\xi(0)=j,\xi(1)\neq j,\ldots,\xi(n-1)\neq j\right),$$

$$F_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n).$$

Очевидно, що $f_i(n)$ є ймовірність того, що система вперше повернеться у стан j через n кроків, якщо в початковий момент часу система в цьому стані знаходилася; а F_j – ймовірність того, що система, вийшовши із стану j, будь-коли в нього повернеться.

Стан i називається ***зворотним***, якщо ймовірність $F_j = 1$, і ***незворотним***, якщо $F_j < 1$.

Стан i називається ***нульовим***, якщо $p_{ii}(n) \to 0$ при $n \to \infty$ і ***ненульовим*** в іншому випадку.

Стан i називається ***періодичним***, якщо НСД $\{n : p_{ij}(n) > 0\} = d > 1$ при цьому d називається ***періодом стану***. Якщо $d = 1$, то стан називається ***неперіодичним***.

Сформулюємо основні теореми теорії дискретних ланцюгів Маркова.

Теорема 9.1. Для того, щоб стан i був зворотним, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty;$$

Зазначимо, що незворотний стан завжди є нульовим.

Теорема 9.2. ***Теорема солідарності.*** Якщо ланцюг Маркова є нерозкладним, то всі його стани належать до одного і того самого класу: якщо хоча б один із них зворотний, то і всі зворотні; якщо хоча б один із них нульовий, то і всі нульові; якщо хоча б один стан періодичний з періодом d, то і решта станів періодичні та мають той самий період d.

Нерозкладний ланцюг Маркова називається ***періодичним***, якщо всі його стани періодичні з періодом $d > 1$.

Теорема 9.3. Нехай нерозкладний ланцюг Маркова є періодичним з періодом d. Тоді множину всіх його станів можна розбити на d непересічних класів $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{d-1}$. При цьому з імовірістю 1 за один крок система відображає клас ψ_k у клас ψ_{k+1} ($k = 0, 1, \ldots, d-2$), а клас ψ_{d-1} у клас ψ_0.

Ланцюг Маркова називається ***ергодичним***, якщо для будь-яких i та j існує

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j > 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1.$$

Справедливі такі критерії ергодичності нерозкладних ланцюгів Маркова.

Теорема 9.4. Якщо для однорідного ланцюга Маркова зі скінченним числом станів існує n_0 таке, що $p_{ij}(n_0) > 0$ для будь-яких i та j, то ланцюг Маркова є ергодичним.

Теорема 9.5. ***Ергодична.*** Нехай ланцюг Маркова є нерозкладним і неперіодичним, і нехай існує такий стан, що час повернення в нього має скінченне математичне сподівання. Ці умови є необхідними та достатніми для того, щоб за будь-яких i та j існували незалежні від i границі

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j > 0, \qquad i, j = 0,1,\ldots.$$

Числа $\{p_i\}$ є єдиним у множині послідовностей, що створюють збіжні ряди, розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_j = 1, \\ p_j = \sum\limits_{k}^{\infty} p_k p_{kj}, \quad j = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Отже, такий ланцюг є ергодичним.

Розподіл імовірності $p_1^*, p_2^*, \ldots$ називається ***стаціонарним розподілом ланцюга Маркова***, якщо для будь-якого n

$$p_j^* = \sum_{i}^{\infty} p_i^* p_{ij}(n), \qquad j = 0,1,\ldots.$$

Теорема 9.6. ***Про збіжність до стаціонарного розподілу.*** Нехай існує хоча б один стан j_0 і такі $h > 0$ і $\delta > 0$, що існує і до того ж єдиний стаціонарний розподіл $\{p_j^*\}$ такий, що при $n \to \infty$

$$p_j^{(n)} = P(\xi(n) = j) \to p_j^*, \qquad j = 1,2,\ldots.$$

Крім того,

$$\left|p_j^{(n)} - p_j^*\right| \le (1-\delta)^{\frac{n}{h}-1}$$

рівномірно за всіма станами незалежно від початкового розподілу ймовірності.

9.2 Приклади розв’язання задач

Приклад 9.1. Довести, що якщо j-й стан є незворотним, то для всіх i

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) < \infty.$$

► Оскільки стан j незворотний, то

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k)\, p_{ij}(n-k);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k)\, p_{jj}(n-k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k) \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} p_{jj}(n-k)}_{0<A<1} = A \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k)}_{=1}.$$

Тобто ряд збігається. ◄

Приклад 9.2. Ланцюг Маркова має r станів. Довести, що якщо j-й стан досяжний з i-го ($j \ne i$), то його можна досягнути менше ніж за r кроків.

► Оскільки j-й стан досяжний з i-го, то існує n і ланцюжок станів $i_1, \ldots, i_{n-1}$, таких, що $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0$.

Припустимо, що $n \ge r$, тоді

1) або серед станів $i_1, \ldots, i_{n-1}$ є такі, що збігаються;

2) або один із станів $i_1, \ldots, i_{n-1}$ збігається з i або j.

Нехай у першому випадку $i_l = i_k$, $l < k$. Тоді

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{l-1} i_l} p_{i_l i_{k+1}} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0,$$

тобто стан j є досяжним з i за $n-(k-l)$ кроків.

Нехай у другому випадку, наприклад, $i = i_l$. Тоді $p_{ii_{l+1}} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0$, тобто стан j є досяжним з i за $n-l$ кроків.

Звідси випливає, що якщо стан j є досяжним з i, то можна вибрати ланцюжок з різних, відмінних i та j станів $i_1, \ldots, i_m$ таких, що $p_{ii_1}, \ldots, p_{i_m j} > 0$, але оскільки всього станів r, то $m \leq r-2$ і, отже, j є досяжним з i не більше ніж за $r-1$ крок. ◄

Приклад 9.3. Довести, що нерозкладний ланцюг Маркова, у матриці перехідних імовірностей якого є хоча б один перехідний елемент $p_{jj} > 0$, не може бути періодичним.

► Візьмемо будь-який стан i. Оскільки ланцюг є нерозкладним, то існують m і n такі, що $p_{ij}(n) > 0$, $p_{ji}(m) > 0$. Отже, $p_{ii}(n+m) > 0$ і, оскільки $p_{jj} > 0$, то і $p_{ii}(m+n+1) \geq p_{ij}(n) p_{jj} p_{ji}(m) > 0$. Оскільки $m+n$ і $m+n+1$ взаємно прості, звідси випливає неперіодичність ланцюга. ◄

Приклад 9.4. Чи може кожна стохастична матриця бути матрицею ймовірностей переходу за два кроки деякого ланцюга Маркова?

► Розглянемо стохастичну матрицю:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що вона є матрицею ймовірностей переходу за два кроки деякого ланцюга Маркова. Тоді існує така стохастична матриця:

$$P' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

що $P'^2 = P$. Тоді

$$\begin{cases} p_{11}^2 + p_{12}p_{21} = 0, \\ p_{22}^2 + p_{21}p_{12} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p_{11}^2 + 2p_{12}p_{21} + p_{22}^2 = 0.$$

Якщо $p_{11} = p_{22} = 0$, то $p_{12}p_{21} = 0$. Але це неможливо, оскільки $\sum_j p_{ij} = 1$. Отже, наведено приклад стохастичної матриці, яка не може бути матрицею ймовірностей переходу за два кроки деякого ланцюга Маркова. ◄

Приклад 9.5. Відомо, що ланцюг Маркова повністю визначається початковим розподілом імовірностей і матрицею ймовірностей переходу за один крок. Чи визначає цілком початковий розподіл імовірностей і матриця ймовірностей переходу за два кроки ланцюг Маркова?

► Розглянемо стохастичну матрицю:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай ця матриця є матрицею ймовірностей переходу за два кроки деякого ланцюга Маркова. Проте цій матриці відповідають дві матриці ймовірностей переходу за один крок:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P,$$

$$P_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

Таким чином, ми маємо приклад того, що матриця ймовірностей переходу за два кроки P і початковий розподіл імовірностей визначає ланцюг Маркова неоднозначно. ◄

Приклад 9.6. Довести, що стохастична матриця другого порядку є матрицею ймовірностей переходу за два кроки деякого ланцюга Маркова тоді і тільки тоді, коли сума її діагональних елементів більша або дорівнює одиниці.

► ***Необхідність***. Нехай P – матриця ймовірностей переходу за один крок деякого ланцюга Маркова:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad 0 \le p_{ij} \le 1, \quad \sum_j p_{ij} = 1, \quad \forall i.$$

P^2 – матриця ймовірностей переходу за два кроки – матиме вигляд:

$$P^2 = \begin{pmatrix} p_{11}^2 + p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} + p_{11}p_{12} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{22}^2 + p_{21}p_{12} \end{pmatrix}.$$

Тоді сума діагональних елементів матриці P^2 дорівнює

$$p_{11}^2 + p_{12}p_{21} + p_{22}^2 + p_{21}p_{12} = p_{11}^2 + 2p_{12}p_{21} + p_{22}^2 = p_{11}^2 + 2(1 - p_{11})(1 - p_{22}) + p_{22}^2 =$$

$$= 2 + (p_{11} + p_{22})^2 - 2(p_{11} + p_{22}).$$

Розглянемо функцію $F(p_{11}, p_{22})$:

$$F(p_{11}, p_{22}) = 2 + (p_{11} + p_{22})^2 - 2(p_{11} + p_{22}).$$

Знайдемо її мінімум

$$\frac{\partial F}{\partial p_{11}} = 2(p_{11} + p_{22}) - 2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{22}} = 2(p_{11} + p_{22}) - 2.$$

Тоді

$$\frac{\partial F}{\partial p_{11}} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial p_{22}} = 0 \Rightarrow 2(p_{11} + p_{22}) - 2 = 0 \Rightarrow p_{11} + p_{22} = 1.$$

Отже,

$$\min F(p_{11}, p_{22}) = 1 \qquad \text{при} \qquad p_{11} + p_{22} = 1.$$

Таким чином,

$$F(p_{11}, p_{22}) \geq 1, \quad \forall p_{11}, p_{22}.$$

Отже, для будь-якої стохастичної матриці P сума діагональних елементів матриці P^2 більша або дорівнює 1.

Достатність. Нехай P – стохастична матриця

$$P = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-d & d \end{pmatrix}, \qquad c + d \geq 1.$$

Доведемо, що ця матриця може бути матрицею ймовірностей переходу за два кроки деякого ланцюга Маркова. Припустимо, що існує стохастична матриця $\varPi$ така, що

$$\varPi=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}, \qquad \varPi^2=P.$$

Тоді

$$\begin{cases} a^2+(1-a)(1-b)=c, \\ (a+b)(1-a)=1-c, \\ (a+b)(1-b)=1-d, \\ b^2+(1-a)(1-b)=d. \end{cases}$$

Якщо $c+d=1$, тоді $a=b=1$.

Якщо $c+d<2$, тоді $a+b-1=\pm\sqrt{c+d-1}$.

Розглянемо один варіант

$$a+b-1=\sqrt{c+d-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a&=1-\frac{1-c}{1+\sqrt{c+d-1}}, \\ b&=1-\frac{1-d}{1+\sqrt{c+d-1}}. \end{aligned}$$

Тоді $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$.

Таким чином, ми побудували стохастичну матрицю, яка є матрицею ймовірностей переходу за один крок деякого ланцюга Маркова. Отже, для будь-якої стохастичної матриці P з сумою діагональних елементів, більшою або рівною одиниці, існує стохастична матриця $\varPi$ така, що $\varPi^2=P$ і матриця P може бути матрицею ймовірностей переходу за два кроки деякого ланцюга Маркова. ◄

Приклад 9.7. Визначити, за яких значень c і d ланцюг Маркова однозначно визначається початковим розподілом і матрицею ймовірностей переходу за два кроки:

$$P(2)=\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-d & d \end{pmatrix}.$$

► З розв'язку задачі 9.6 відомо, що для деякої стохастичної матриці P існують дві стохастичні матриці такі, що їх квадрат дорівнює матриці P. Отже, для стохастичної матриці $P(2)$ існують дві стохастичні матриці Π_1, Π_2 такі, що

$$\Pi_1^2 = \Pi_2^2 = P(2).$$

Вони мають вигляд

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}, \qquad \Pi_2 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix},$$

де

$$a = 1 - \frac{1-c}{1+\sqrt{c+d-1}}, \qquad a = 1 - \frac{1-c}{1-\sqrt{c+d-1}},$$

$$b = 1 - \frac{1-d}{1+\sqrt{c+d-1}}, \qquad b = 1 - \frac{1-d}{1-\sqrt{c+d-1}}.$$

Матриця Π – розв'язок рівняння $\Pi^2 = P$ – єдина, якщо $c+d=1$. Тоді $\Pi_1 = \Pi_2$.

Крім того, матриця Π – стохастична, якщо $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$. Тоді розв'язок рівняння, яке нас задовольняє, є єдиним, якщо для матриці Π_2 $a < 0$ або $b < 0$ (для матриці Π_1 це неможливо).

Розглянемо випадок $a < 0$. Це означає, що

$$a = 1 - \frac{1-c}{1+\sqrt{c+d-1}} < 0,$$

$$\frac{1-c}{1+\sqrt{c+d-1}} > 1,$$

$$1 - c > 1 + \sqrt{c+d-1},$$

$$c^2 - c - d > -1.$$

Розглянемо випадок $b<0$. Це означає, що

$$b=1-\frac{1-d}{1+\sqrt{c+d-1}}<0,$$

$$\frac{1-d}{1+\sqrt{c+d-1}}>1,$$

$$1-d>1+\sqrt{c+d-1},$$

$$d^2-d-c>-1.$$

Отже, якщо для стохастичної матриці Π_2 $a<0$ або $b<0$, для матриці ймовірностей переходу за два кроки деякого ланцюга Маркова існує тільки єдина можлива матриця ймовірностей переходу за один крок даного ланцюга Маркова.

Отже, ланцюг Маркова визначається однозначно початковим розподілом і матрицею ймовірностей переходу за два кроки $P(2)=\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-d & d \end{pmatrix}$ у трьох випадках:

1) якщо $c+d=1$;

2) якщо $c^2-c-d>-1$;

3) якщо $d^2-d-c>-1$. ◄

Приклад 9.8. Довести, що для будь-якого ланцюга Маркова за будь-яких $0\le k\le n-1$ вірні такі рівності:

а) $P\left(\xi(n)=i_n\,\middle|\,\xi(n-1)=i_{n-1},\ldots,\xi(k)=i_k\right)=P\left(\xi(n)=i_n\,\middle|\,\xi(n-1)=i_{n-1}\right)$;

б) $$P\left(\xi(n)=i_n,\ldots,\xi(k+1)=i_{k+1}\,\middle|\,\xi(k)=i_k,\ldots,\xi(0)=i_0\right)=$$

$$=P\left(\xi(n)=i_n,\ldots,\xi(k+1)=i_{k+1},\xi(k)=i_k\right);$$

в) $P\left(\xi(n)=i_n\,\middle|\,\xi(k)=i_k,\ldots,\xi(0)=i_0\right)=P\left(\xi(n)=i_n\,\middle|\,\xi(k)=i_k\right)$.

► Нехай для деякого ланцюга Маркова $P=\left(p_{ij}\right)$ – матриця ймовірностей переходу за один крок.

а) Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi(n)=i_n \middle| \xi(n-1)=i_{n-1},\ldots,\xi(k)=i_k\right).$$

За визначенням умовної ймовірності, цей вираз дорівнює

$$\frac{P\left(\xi(n)=i_n,\xi(n-1)=i_{n-1},\ldots,\xi(k)=i_k\right)}{P\left(\xi(n-1)=i_{n-1},\ldots,\xi(k)=i_k\right)}.$$

Тоді, за визначенням матриці ймовірностей переходу за один крок, ця умовна ймовірність має вигляд

$$\frac{\sum\limits_{i_1,\ldots,i_{k-1}} p_{i_0}^0 p_{i_0 i_1}\cdots p_{i_{k-1}i_k}\cdots p_{i_{n-1}i_n}}{\sum\limits_{i_1,\ldots,i_{k-1}} p_{i_0}^0 p_{i_0 i_1}\cdots p_{i_{k-1}i_k}\cdots p_{i_{n-2}i_{n-1}}}.$$

Цей вираз дорівнює

$$p_{i_{n-1}i_n} = P\left(\xi(n)=i_n \middle| \xi(n-1)=i_{n-1}\right).$$

Таким чином,

$$P\left(\xi(n)=i_n \middle| \xi(n-1)=i_{n-1},\ldots,\xi(k)=i_k\right)=P\left(\xi(n)=i_n \middle| \xi(n-1)=i_{n-1}\right).$$

б) Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi(n)=i_n,\ldots,\xi(k+1)=i_{k+1} \middle| \xi(k)=i_k,\ldots,\xi(n)=i_0\right).$$

За визначенням умовної ймовірності, цей вираз дорівнює

$$\frac{P\left(\xi(n)=i_n,\xi(n-1)=i_{n-1},\ldots,\xi(k)=i_k,\ldots,\ \xi(0)=i_0\right)}{P\left(\xi(k)=i_k,\ \ldots,\xi(0)=i_0\right)}.$$

Тоді, за визначенням матриці ймовірності переходу за один крок, ця умовна ймовірність має вигляд

$$\frac{p_{i_0}^0 p_{i_0 i_1}\cdots p_{i_{k-1}i_k}\cdots p_{i_{n-1}i_n}}{p_{i_0}^0 p_{k_0 i_1}\cdots p_{i_{k-1}i_k}}=$$

$$= p_{i_k i_{k+1}} \cdots p_{i_{n-1} i_n} = \frac{\sum\limits_{i_0, \ldots, i_{k-1}} p_{i_0}^0 p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k} \cdots p_{i_{n-1} i_n}}{\sum\limits_{i_0, \ldots, i_{k-1}} p_{i_0}^0 p_{k_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k}} =$$

$$= \frac{P\left(\xi(n) = i_n, \xi(n-1) = i_{n-1}, \ldots, \xi(k) = i_k\right)}{P\left(\xi(k) = i_k\right)} = P\left(\xi(n) = i_n, \ldots, \xi(k+1) = i_{k+1} \middle| \xi(k) = i\right).$$

Отже,

$$P\left(\xi(n) = i_n, \ldots, \xi(k+1) = i_{k+1} \middle| \xi(k) = i_k, \ldots, \xi(0) = i_0\right) =$$

$$= P\left(\xi(n) = i_n, \ldots, \xi(k+1) = i_{k+1} \middle| \xi(k) = i_k\right).$$

в) Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi(n) = i_n \middle| \xi(k) = i_k, \ldots, \xi(0) = i_0\right).$$

Із визначення умовної ймовірності маємо

$$\frac{P\left(\xi(n) = i_n, \xi(k) = i_k, \ldots, \xi(0) = i_0\right)}{P\left(\xi(k) = i_k, \ldots, \xi(0) = i_0\right)}.$$

Тоді

$$\frac{\sum\limits_{i_{k+1}, \ldots, i_n} P\left(\xi(n) = i_n, \xi(k) = i_k, \ldots, \xi(0) = i_0\right)}{P\left(\xi(k) = i_k, \ldots, \xi(0) = i_0\right)}.$$

За визначенням умовної ймовірності, цей вираз дорівнює

$$\sum_{i_{k+1}, \ldots, i_n} P\left(\xi(n) = i_n, \xi(n-1) = i_{n-1}, \ldots, \xi(k+1) = i_{k+1} \middle| \xi(k) = i_k, \ldots, \xi(0) = i_0\right).$$

Оскільки ми маємо справу з ланцюгом Маркова, то

$$\sum_{i_{k+1}, \ldots, i_n} P\left(\xi(n) = i_n, \xi(n-1) = i_{n-1}, \ldots, \xi(k+1) = i_{k+1} \middle| \xi(k) = i_k\right) = P\left(\xi(n) = i_n \middle| \xi(k) = i_k\right).$$

Отже,

$$P\left(\xi(n)=i_n\left|\xi(k)=i_k,\ldots,\xi(0)=i_0\right.\right)=P\left(\xi(n)=i_n\left|\xi(k)=i_k\right.\right).\ ◄$$

Приклад 9.9. Нехай A – подія, яка залежить тільки від станів ланцюга Маркова на перших $n-1$ кроках, B – подія, яка залежить тільки від станів на $(n+1),\ldots,(n+m)$ кроках. Довести, що при фіксованому стані на $n-m$ кроці події A і B незалежні.

► Нехай

$$A=\left(\xi(0)\in A_0,\ldots,\xi(n-1)\in A_{n-1}\right),$$

$$B=\left(\xi(n+1)\in A_{n+1},\ldots,\xi(n+m)\in A_{n+m}\right).$$

де $A_0,\ldots,A_{n+m}\subset B_R$

Розглянемо умовну ймовірність $P\left(AB\left|\xi(n)=x_n\right.\right)$. Із визначення випливає, що умовна ймовірність дорівнює

$$\frac{P\left(AB,\xi(n)=x_n\right)}{P\left(\xi(n)=x_n\right)}=\frac{P\left(\xi(0)\in A_0,\ldots,\xi(n-1)\in A_{n-1},\xi(n)=x_n,\ldots,\xi(n+m)\in A_{n+m}\right)}{P\left(\xi(n)=x_n\right)}=$$

$$=\frac{P\left(\xi(n+m)\in A_{n+m},\ldots,\xi(n+1)\in A_{n+1}\left|\xi(n)=x_n,\xi(n-1)\in A_{n-1},\ldots,\xi(0)\in A_0\right.\right)}{P\left(\xi(n)=x_n\right)}.$$

Із визначення умовної ймовірності маємо

$$P\left(\xi(n+m)\in A_{n-m},\ldots,\xi(n+1)\in A_{n+1}\left|\xi(n)=x_n\right.\right)\times$$

$$\times P\left(\xi(n-1)\in A_{n-1},\ldots,\xi(0)\in A_0\left|\xi(n)=x_n\right.\right).$$

Враховуючи прийняті припущення, отримаємо, що

$$P\left(A\left|\xi(n)=x_n\right.\right)P\left(B\left|\xi(n)=x_n\right.\right).$$

Остаточно

$$P\left(AB\left|\xi(n)=x_n\right.\right)=P\left(A\left|\xi(n)=x_n\right.\right)P\left(B\left|\xi(n)=x_n\right.\right).$$

Таким чином, при фіксованому стані на n-му кроці події A і B незалежні. ◄

Приклад 9.10. Нехай є ланцюг Маркова. Довести, що для будь-яких n_i ($0 \le n_i \le n$)

$$P\left(\xi(n+1)=i_{n+1}\middle|\xi(n_1)=i_{n_1},\dots,\xi(n_k)=i_{n_k}\right)=P\left(\xi(n+1)=i_{n+1}\middle|\xi(n_1)=i_{n_1}\right),$$

де $n_k = \max\limits_i(n_i)$.

► Нехай $n_k = \max\limits_i(n_i)$ $0 \le n_i \le n$. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi(n+1)=i_{n+1}\middle|\xi(n_1)=i_{n_1},\dots,\xi(n_k)=i_{n_k}\right).$$

З визначення умовної ймовірності випливає, що

$$P\left(\xi(n+1)=i_{n+1}\middle|\xi(n_1)=i_{n_1},\dots,\xi(n_k)=i_{n_k}\right)=$$

$$=\frac{P\left(\xi(n+1)=i_{n+1},\xi(n_k)=i_{n_k},\dots,\xi(n_1)=i_{n_1}\right)}{P\left(\xi(n_1)=i_{n_1},\dots,\xi(n_k)=i_{n_k}\right)}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{i_{n_k+1},\dots,i_n}P\left(\xi(n+1)=i_{n+1},\xi(n_{k+1})=i_{n_{k+1}},\xi(n_k)=i_{n_k},\dots,\xi(n_1)=i_{n_1}\right)}{P\left(\xi(n_1)=i_{n_1},\dots,\xi(n_k)=i_{n_k}\right)}=$$

$$=\sum\limits_{i_{n_k+1},\dots,i_n}P\left(\xi(n+1)=i_{n+1},\xi(n_{k+1})=i_{n_{k+1}},\xi(n_k)=i_{n_k},\dots,\xi(n_1)=i_{n_1}\right)=$$

$$P\left(\xi(n+1)=i_{n+1}\middle|\xi(n_k)=i_{n_k},\dots,\xi(n_1)=i_{n_1}\right).$$

Відповідно до результатів прикладу 9.8, останній вираз дорівнює

$$P\left(\xi(n+1)=i_{n+1}\middle|\xi(n_k)=i_{n_k}\right).$$

Отже,

$$P\Big(\xi(n+1)=i_{n+1}\Big|\xi(n_1)=i_{n_1},\ldots,\xi(n_k)=i_{n_k}\Big)=P\Big(\xi(n+1)=i_{n+1}\Big|\xi(n_1)=i_{n_1}\Big).\ ◄$$

Приклад 9.11. Довести, що нерозкладний ланцюг Маркова, який має скінченну кількість станів, є неперіодичним тоді і тільки тоді, коли існує таке n, що ймовірність переходу за n кроків з i-го стану в j-й стан $p_{ij}(n)>0$ для будь-яких i та j.

► ***Необхідність***. Розглянемо скінченний нерозкладний ланцюг Маркова.

Нехай $P=\left(p_{ij}\right)_1^r$ – матриця ймовірностей переходу за один крок цього ланцюга. Припустимо, що існує n таке, що

$$p_{ij}(n)=0 \qquad \forall\, i,\, j. \tag{9.1}$$

Розглянемо $p_{ij}(n+1)$. Відповідно до рівняння Чепмена-Колмогорова, ця ймовірність дорівнює $p_{ij}(n+1)=\sum\limits_k p_{ik}(n)\,p_{kj}$.

Припустимо, що $p_{ij}(n+1)=0$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$p_{kj}=0, \quad \forall\, k, \tag{9.2}$$

оскільки за нашими припущеннями $p_{ij}(n)>0$ для будь-яких i та j.

Тоді з (9.2) випливає, що $p_{kj}(n)=0$, оскільки $p_{ij}(n)=\sum\limits_k p_{ik}(n-1)\,p_{kj}$.

Отже, припущення про те, що $p_{ij}(n+1)=0$, суперечить нашому припущенню (9.1). Звідси випливає, що $p_{ij}(n)>0$ для будь-яких i та j.

Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо, що з припущення (9.1) випливає, що $p_{ij}(n+m)>0$ для будь-яких i, j ($1\le i,\ j\le r$), m ($m>0$).

Очевидно, що це справедливо для $i=j$. Найбільший загальний дільник чисел $n,\ldots,n+m,\ldots$ дорівнює одиниці. Звідси випливає, що, за визначенням неперіодичного стану ланцюга Маркова, будь-який її стан i є неперіодичним станом. Отже, даний ланцюг Маркова є неперіодичним.

Достатність. Розглянемо скінченний нерозкладний ланцюг Маркова. Нехай, крім того, він є неперіодичним. Тоді, за визначенням неперіодичного ланцюга Маркова, найбільший загальний дільник чисел n

$$d(i)=\text{НСД}\big(n: p_n(n)>0\big)=1 \quad \forall\, i. \tag{9.3}$$

Відома теорема, згідно з якою існує n_0 таке, що

$$p_{ij}\left(nd\left(i\right)\right)>0 \quad \forall\, n>n_0. \tag{9.4}$$

З (9.3) і (9.4) випливає, що

$$p_{ij}\left(n\right)>0 \quad \forall\, n>n_0, \;\; \forall\, i. \tag{9.5}$$

За визначенням нерозкладного ланцюга Маркова, існує m_{ij} таке, що

$$p_{ij}\left(m_{ij}\right)>0 \quad \forall\, i,\, j. \tag{9.6}$$

Крім того,

$$p_{ij}\left(m_{ij}+n\right)\geq p_{ij}\left(m_{ij}\right)p_{ij}\left(n\right) \quad \forall\, i,\, j, n. \tag{9.7}$$

Тоді з (9.5), (9.6), (9.7) випливає, що існує n_0 таке, що

$$p_{ij}\left(m_{ij}+n\right)>0 \quad \forall\, i,\, j, n \;\; \left(n>n_0\right). \tag{9.8}$$

За умовою задачі, даний ланцюг Маркова має тільки скінченну кількість станів. Тоді існує $\max\limits_{i,\, j} m_{ij}$. Позначимо його M. Тоді з (9.8) випливає, що існує n_0 таке, що $p_{ij}\left(M+n\right)>0$ для будь-яких n $\left(n>n_0\right)$.

Отже, нерозкладний ланцюг Маркова, що має скінченну кількість станів, є неперіодичним тоді і тільки тоді, коли існує n таке, що ймовірність переходу за n кроків з i-го стану в j-й стан $p_{ij}\left(n\right)>0$ для будь-яких i та j. ◄

Приклад 9.12. Довести, що всі стани ланцюга Маркова з матрицею ймовірностей переходу за один крок зворотні, якщо

1) $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

3) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 4) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \dots \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \dots \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \dots \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

► 1) Знайдемо матрицю ймовірностей переходів за n кроків:

$$P(n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже $p_{ii}(n)=1$, для будь-яких i, $n>1$. Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)=\sum_{n=1}^{\infty} 1$ є рядом, що розбігається, для будь-якого i. Отже, згідно з критерієм зворотності, всі стани цього ланцюга Маркова є зворотними станами.

2) Знайдемо матрицю ймовірностей переходів за n кроків:

$$P(n)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $p_{ii}(n)=\frac{1}{2}$ для будь-яких i, $n\geq 1$. Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ є рядом, що розбігається, для будь-якого i. Тоді, згідно з критерієм зворотності, всі стани цього ланцюга Маркова є зворотними станами.

3) Знайдемо матрицю ймовірностей переходів за n кроків:

$$P(n)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $p_{ii}(n)=\frac{1}{2}$ для будь-яких i, $n\geq 1$. Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ є рядом, що розбігається, для будь-якого i. Згідно з критерієм зворотності, всі стани цього ланцюга Маркова є зворотними станами.

4) Знайдемо матрицю ймовірностей переходів за n кроків:

$$P(n)=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \ldots \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \ldots \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \ldots \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \ldots \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \ldots \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Отже, $p_{ii}(n)=\frac{1}{n}$ для будь-яких i, $n\geq 1$. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є рядом, що розбігається, для будь-якого i. Згідно з критерієм зворотності, всі стани цього ланцюга Маркова є зворотними станами. ◄

Приклад 9.13. Довести, що будь-який ланцюг Маркова зі скінченною множиною станів має хоча б один зворотний стан.

► Нехай ланцюг Маркова має m станів. Припустимо, що цей ланцюг має тільки незворотні стани. Звідси, з властивості незворотних станів, випливає, що $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n) < \infty$, тобто цей числовий ряд збігається для будь-яких j $(1 \le i,\ j \le m)$. Згідно з необхідною ознакою збіжності числових рядів $\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = 0$ для будь-яких i j ($1 \le i,\ j \le m$).

З визначення границі числової послідовності випливає, що для $\varepsilon = \frac{1}{2m}$ існує n_j таке, що

$$p_{ij}(n) \le \frac{1}{2m} \tag{9.9}$$

для будь-яких n $(n > n_j)$, j $(1 \le j \le m)$.

Оскільки ланцюг Маркова має скінченну кількість станів, то існує величина $N = \max_j n_j$. Тоді з (9.9) випливає, що

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(n) = \frac{1}{2} \tag{9.10}$$

для будь-яких n $(n < N)$, i $(1 \le i \le m)$. Проте, ймовірності переходу за n кроків $p_{ij}(n)$ мають властивість

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(n) = 1,$$

що суперечить (9.10).

Отже, отримана суперечність доводить той факт, що будь-який ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів має хоча б один зворотний стан. ◄

Приклад 9.14. Чи можуть усі стани ланцюга Маркова зі зліченною кількістю станів бути незворотними?

► Розглянемо приклад. Нехай є деякий ланцюг Маркова зі зліченною кількістю станів і вектором початкових ймовірностей. Нехай також матриця ймовірностей переходу за один крок має вигляд:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що для будь-якого початкового стану k ймовірність переходу за n кроків дорівнює

$$P\left(\xi(n)=l\middle|\xi(0)=k\right)=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad l=n+k, \\ 0, & \text{якщо} \quad l\neq n+k\end{cases}$$

для будь-якого $k\geq 0$.

Звідси випливає, що

$$P\left(\xi(n)=i\middle|\xi(0)=i\right)=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad n=0, \\ 0, & \text{якщо} \quad n>0\end{cases}$$

для будь-якого i. Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=p_{ii}(0)=1<\infty,$$

тобто цей числовий ряд збігається для будь-якого i. За критерієм зворотності це означає, що всі стани даного ланцюга Маркова є незворотними.

Отже, ми навели приклад ланцюга Маркова зі зліченною кількістю станів, всі стани якого є незворотними. ◄

Приклад 9.15. Довести, що для скінченного ланцюга Маркова стан є зворотним тоді і тільки тоді, коли він є істотним.

► ***Необхідність***. Нехай ланцюг Маркова має m станів. Нехай будь-який стан i цього ланцюга є неістотним. З визначення істотного стану випливає, що існують такий стан j і число $n>0$, що

$$p_{ij}(n)>0.$$

Але

$$p_{ij}(k)=0, \quad \forall\, k.$$

Позначимо через $F_i(n)$ ймовірність того, що система вперше повернеться у стан i через n кроків. Тоді ймовірність того, що система коли-небудь повернеться у стан i, за формулою повної ймовірності дорівнює

$$F_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n).$$

Якщо система коли-небудь потрапить зі стану i у стан j, то вона ніколи не повернеться в стан i.

Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що система коли-небудь повернеться у стан i, а через B – подію, яка полягає в тому, що система ніколи не потрапить зі стану i у стан j. Тоді, очевидно, ці події пов'язані співвідношенням $A \subset B$. Звідси випливає, що $P(A) \le P(B)$.

За визначенням події A, ймовірність того, що система коли-небудь повернеться у стан i, дорівнює

$$P(A) = F_i.$$

За визначенням події B і ймовірності переходу зі стану i в стан j за n кроків $p_{ij}(n)$ маємо

$$P(B) = 1 - p_{ij}(n).$$

Із зроблених припущень випливає, що

$$p_{ij}(n) > 0.$$

Тоді

$$F_i = P(A) \le P(B) = 1 - p_{ij}(n),$$

тобто

$$F_i < 1.$$

Звідси і з визначення незворотного стану ланцюга Маркова, випливає, що стан i даного ланцюга є незворотним.

Достатність. Нехай стан i є істотним станом початкового ланцюга Маркова. Тоді можливими є тільки два випадки. У першому випадку цей стан не сполучається з жодним іншим станом, тобто $p_{ii}(n) = 1$ для будь-якого n.

Тоді числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ є рядом, що розбігається, для будь-якого i. З критерію зворотності стану випливає, що i є зворотним станом ланцюга Маркова.

Другий випадок: стан i сполучається зі скінченною кількістю станів $i_0,\ldots,i_l$ де $l<m$ (оскільки ланцюг Маркова має m станів).

Згідно з результатами прикладу 9.13, хоча б один з цих станів є зворотним. Звідси і відповідно до властивості класу станів ланцюга, що сполучаються, випливає, що всі ці стани, у тому числі й стан i, є зворотними. ◄

Приклад 9.16. Нехай послідовність випадкових величин $\xi_0,\xi_1,\ldots$ утворює ланцюг Маркова. Довести, що будь-яка підпослідовність послідовності $\xi_0,\xi_1,\ldots$ також утворює ланцюг Маркова.

► Нехай ξ_{n_k} $(k\geq 0)$ – підпослідовність ланцюга Маркова. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_{n_{m+1}}=i_{m+1}\middle|\xi_{n_m}=i_m,\ldots,\xi_{n_0}=i_0\right)$$

для деякого $m>0$. Ця умовна ймовірність дорівнює

$$P\left(\xi_{n_{m+1}}=i_{m+1}\middle|\xi_{n_m}=i_m,\ldots,\xi_{n_0}=i_0\right)=P\left(\xi_{n_{m+1}}=i_{m+1}\middle|\xi_{n_s}=i_s\right), \qquad (9.11)$$

де

$$n_s=\max_{0\leq i\leq m} n_i.$$

Оскільки n_k є послідовністю n ($n=0,1,2,\ldots$), то

$$\max_{0\leq i\leq m} n_i = n_m.$$

Тоді права частина виразу (9.11) запишеться у вигляді

$$P\left(\xi_{n_{m+1}}=i_{m+1}\middle|\xi_{n_m}=i_m\right).$$

Отже,

$$P\left(\xi_{n_{m+1}}=i_{m+1}\middle|\xi_{n_m}=i_m,\ldots,\xi_{n_0}=i_0\right)=P\left(\xi_{n_{m+1}}=i_{m+1}\middle|\xi_{n_m}=i_m\right)$$

для деякого $m>0$.

Таким чином, будь-яка підпослідовність ланцюга Маркова також утворює ланцюг Маркова. ◄

Приклад 9.17. Нехай $\xi_0, \xi_1, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених цілочисельних випадкових величин. Довести, що вона утворює ланцюг Маркова. Знайти матрицю ймовірностей переходу за n кроків.

► Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\right),$$

яка дорівнює

$$P\left(\xi_n = i_n\right),$$

оскільки за умовою задачі $\xi_0, \xi_1, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин. Отже, умовна ймовірність

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}\right)$$

дорівнюватиме

$$P\left(\xi_n = i_n\right)$$

у зв'язку з незалежністю випадкових величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$.

Тоді

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\right) = P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}\right).$$

Таким чином, послідовність $\xi_0, \xi_1, \ldots$ утворює ланцюг Маркова.

Нехай для послідовності $\xi_0, \xi_1, \ldots$

$$P\left(\xi_n = i_m\right) = p_m.$$

Тоді

$$P\left(\xi_n = i_m \middle| \xi_{n-1} = i_j\right) = P\left(\xi_n = i_m\right) = p_m$$

для будь-якого $j > 0$. Звідси випливає, що матриця ймовірностей переходу за n кроків ланцюга Маркова має вигляд

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

для будь-якого n. ◄

Приклад 9.18. Точки $A_1, \ldots, A_n$ є вершинами правильного n-кутника. Нехай деяка частинка блукає точками $A_1, \ldots, A_n$. Визначити, чи є послідовність положень частинки ланцюгом Маркова, якщо:

а) частинка здійснює детермінований рух за годинниковою стрілкою;

б) частинка в початковий момент часу випадково вибирає напрямок за або проти годинникової стрілки і далі постійно рухається у вибраному напрямку;

в) з будь-якої точки A_i, $i \neq 1$, частинка з імовірністю p переміщується за годинниковою стрілкою, а з імовірністю $q = 1 - p$ – проти годинникової стрілки в сусідню точку. Потрапляючи в точку A_1, частинка повертається в ту точку, звідки вона потрапила в A_1.

► Нехай ξ_n – послідовність положень частинки, тобто послідовність номерів вершин, в яких знаходиться частинка.

а) Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\right).$$

Ця ймовірність дорівнює 1, якщо $i_n = i_{n-1} + 1$, і 0, якщо $i_n \neq i_{n-1} + 1$. Вона також дорівнюватиме 1, якщо $i_n = 1$, $i_{n-1} = n$. Таким чином,

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_n = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\right) = P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}\right).$$

Отже, послідовність положень частинки в цьому випадку утворює ланцюг Маркова.

б) Нехай, наприклад, частинка блукає вершинами правильного трикутника.

Розглянемо умовні ймовірності

$$P\left(\xi_n = 2 \middle| \xi_{n-1} = 1, \xi_{n-2} = 3\right) \qquad \text{і} \qquad P\left(\xi_n = 2 \middle| \xi_{n-1} = 1, \xi_{n-2} = 2\right).$$

Очевидно, що ці ймовірності дорівнюють 1 і 0 відповідно. Таким чином,

$$P\left(\xi_n = 2 \middle| \xi_{n-1} = 1, \xi_{n-2} = 3\right) \neq P\left(\xi_n = 2 \middle| \xi_{n-1} = 1, \xi_{n-2} = 2\right).$$

Отже, ця послідовність положень частинки не є ланцюгом Маркова.

в) Нехай частинка здійснює випадкові блукання вершинами правильного трикутника за правилом, описаним в умові в) задачі. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = 2 \middle| \xi_{n-1} = 1, \xi_{n-2} = 3\right). \tag{9.12}$$

За умовою, потрапляючи в точку A_1, частинка повертається в точку, звідки вона потрапила в A_1. Тому ймовірність (9.12) дорівнює 1. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = 2 \middle| \xi_{n-1} = 1, \xi_{n-2} = 2\right). \tag{9.13}$$

Потрапляючи в точку A_1, частинка повертається в точку, звідки вона потрапила в A_1. Тому ймовірність (9.13) дорівнює 0. Таким чином,

$$P\left(\xi_n = 2 \middle| \xi_{n-1} = 1, \xi_{n-2} = 3\right) \neq P\left(\xi_n = 2 \middle| \xi_{n-1} = 1, \xi_{n-2} = 2\right).$$

Отже, ця послідовність положень частинки не є ланцюгом Маркова. ◄

Приклад 9.19. Нехай деяка частинка здійснює випадкові блукання цілочисельними точками (i, j) площини такими, що $0 < i,\ j < n$. З будь-якої внутрішньої точки вказаного квадрата частинка з рівними ймовірностями, незалежно від її попереднього руху, переходить в одну з сусідніх точок по вертикалі або горизонталі. Після виходу на межу квадрата частинка далі:

а) рухається межею квадрата детерміновано за годинниковою стрілкою;

б) повертається в ту точку, з якої вона вийшла на межу.

Визначити, чи є послідовність положень частинки ланцюгом Маркова.

► а) Нехай j – остання внутрішня точка квадрата, з якої частинка перейшла на межу, а i – точка межі, в яку перейшла частинка. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = i \middle| \xi_{n-1} = j, \ldots, \xi_0 = i_0\right).$$

З умови задачі випливає, що ця ймовірність дорівнює

$$P\left(\xi_n = i \middle| \xi_{n-1} = j\right).$$

Нехай частинка далі рухається межею. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\right).$$

Вона дорівнює 1, якщо $i_n = i_{n-1} + 1$, і 0, якщо $i_n \neq i_{n-1} + 1$. Ця ймовірність також дорівнюватиме 1, якщо $i_n = 1,\ i_{n-1} + n$. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}\right).$$

Вона дорівнює 1, якщо $i_n = i_{n-1} + 1$, і 0, якщо $i_n \neq i_{n-1} + 1$. Ця ймовірність також дорівнюватиме 1, якщо $i_n = 1,\ i_{n-1} + n$. Таким чином,

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\right) = P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = i_{n-1}\right).$$

Отже, послідовність положень частинки в цьому випадку утворює ланцюг Маркова.

б) Нехай j – остання внутрішня точка квадрата, з якої частинка перейшла на межу, а i – точка межі, в яку перейшла частинка. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = i \middle| \xi_{n-1} = j, \ldots, \xi_0 = i_0\right).$$

З умови задачі випливає, що ця ймовірність дорівнює

$$P\left(\xi_n = i \middle| \xi_{n-1} = j\right).$$

Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_n = i_n \middle| \xi_{n-1} = j, \xi_{n-1} = i, \ldots, \xi_0 = i_0\right).$$

Вона дорівнює 1 для всіх наборів $i_0, \ldots, i_{n-2}, i, j$, для яких

$$P\left(\xi_n = j, \xi_{n-1} = i, \ldots, \xi_0 = i_0\right) > 0.$$

Таким чином,

$$P\left(\xi_{n+1} = i \middle| \xi_n = j, \xi_{n-1} = i, \ldots, \xi_0 = i_0\right) = P\left(\xi_{n+1} = i \middle| \xi_n = j\right),$$

якщо i, j – сусідні точки. До і після можливого переходу на межу і назад частинка рухається по-марковськи. Отже, послідовність положень частинки в даному випадку утворює ланцюг Маркова. ◄

Приклад 9.20. У початковий момент часу в урні n_0 білих куль і m_0 чорних куль. За кожен крок з урни за схемою вибору без повернення виймається одна куля. Нехай n_k – кількість білих, а m_k – кількість чорних куль в урні в момент часу k. Чи утворюють ланцюги Маркова такі послідовності:

а) n_k,

б) $n_k = n_k - m_k$?

► а) Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(n_{k+1} = l_{k+1} \middle| n_k = l_k, \ldots, n_1 = l_1\right).$$

За умовою задачі можливими є тільки два випадки $l_{k+1} = l_k - 1$ і $l_{k+1} = l_k$. У першому випадку умовна ймовірність

$$P\left(n_{k+1} = l_k - 1 \middle| n_k = l_k, \ldots, n_1 = l_1\right) = \frac{l_k}{n_0 + m_0 - k},$$

оскільки розглядається схема вибору без повернення. Очевидно, що

$$P\left(n_{k+1} = l_k - 1 \middle| n_k = l_k\right) = \frac{l_k}{n_0 + m_0 - k},$$

тобто в цьому випадку

$$P\left(n_{k+1} = l_{k+1} \middle| n_k = l_k, \ldots, n_1 = l_1\right) = P\left(n_{k+1} = l_{k+1} \middle| n_k = l_k\right).$$

У другому випадку умовна ймовірність

$$P\left(n_{k+1} = l_k \middle| n_k = l_k, \ldots, n_1 = l_1\right) = \frac{n_0 + m_0 - k - l_k}{n_0 + m_0 - k},$$

оскільки розглядається схема вибору без повернення. Очевидно, що

$$P\left(n_{k+1} = l_k \middle| n_k = l_k\right) = \frac{n_0 + m_0 - k - l_k}{n_0 + m_0 - k},$$

тобто в цьому випадку

$$P\left(n_{k+1} = l_{k+1} \middle| n_k = l_k, \ldots, n_1 = l_1\right) = P\left(n_{k+1} = l_{k+1} \middle| n_k = l_k\right).$$

Таким чином, в обох можливих випадках

$$P\left(n_{k+1}=l_{k+1}\middle|n_k=l_k,\ldots,n_1=l_1\right)=P\left(n_{k+1}=l_{k+1}\middle|n_k=l_k\right),$$

тобто, ця випадкова послідовність утворює ланцюг Маркова.

б) Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\eta_{k+1}=l_{k+1}\middle|\eta_k=l_k,\ldots,\eta_1=l_1\right).$$

За умовою задачі, можливими є тільки два випадки $l_{k+1}=l_k-1$ і $l_{k+1}=l_k+1$
.

У першому випадку умовна ймовірність

$$P\left(\eta_{k+1}=l_k-1\middle|\eta_k=l_k,\ldots,\eta_1=l_1\right)=\frac{n_0+m_0-k-l_k}{n_0+m_0-k},$$

оскільки розглядається схема вибору без повернення. Очевидно, що

$$P\left(\eta_{k+1}=l_k\middle|\eta_k=l_k\right)=\frac{n_0+m_0-k-l_k}{n_0+m_0-k},$$

тобто в цьому випадку

$$P\left(\eta_{k+1}=l_{k+1}\middle|\eta_k=l_k,\ldots,\eta_1=l_1\right)=P\left(\eta_{k+1}=l_{k+1}\middle|\eta_k=l_k\right).$$

У другому випадку умовна ймовірність

$$P\left(\eta_{k+1}=l_k+1\middle|\eta_k=l_k,\ldots,\eta_1=l_1\right)=\frac{n_0+m_0-k-l_k}{n_0+m_0-k},$$

оскільки розглядається схема вибору без повернення. Очевидно, що

$$P\left(\eta_{k+1}=l_{k+1}\middle|\eta_k=l_k\right)=\frac{n_0+m_0-k-l_k}{n_0+m_0-k},$$

тобто в цьому випадку

$$P\left(\eta_{k+1}=l_{k+1}\middle|\eta_k=l_k,\ldots,\eta_1=l_1\right)=P\left(\eta_{k+1}=l_{k+1}\middle|\eta_k=l_k\right).$$

Таким чином, в обох можливих випадках

$$P\left(\eta_{k+1}=l_{k+1}\middle|\eta_k=l_k,\ldots,\eta_1=l_1\right)=P\left(\eta_{k+1}=l_{k+1}\middle|\eta_k=l_k\right),$$

тобто, ця випадкова послідовність також утворює ланцюг Маркова. ◄

Приклад 9.21. Нехай $\xi_0,\xi_1,\ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин. Чи утворює ланцюг Маркова послідовність $\xi_2+\xi_3$?

► Розглянемо, наприклад, послідовність незалежних випадкових величин $\xi_0,\xi_1,\ldots$ таких, що

$$P\left(\xi_i=1\right)=p,$$

$$P\left(\xi_i=0\right)=q=1-p,$$

і $p\neq\frac{1}{2}$. Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_2+\xi_3=1\middle|\xi_1+\xi_2=1,\ \xi_0+\xi_1=0\right).$$

З визначення умовної ймовірності

$$P\left(\xi_2+\xi_3=1\middle|\xi_1+\xi_2=1,\ \xi_0+\xi_1=0\right)=\frac{P\left(\xi_0=0,\ \xi_1=0,\ \xi_2=0,\ \xi_3=1\right)}{P\left(\xi_0=0,\ \xi_1=0,\ \xi_2=0\right)}.$$

Згідно зі зробленими припущеннями, цей вираз дорівнює

$$\frac{pq^3}{q^3}=p.$$

Розглянемо умовну ймовірність

$$P\left(\xi_2+\xi_3=1\middle|\xi_1+\xi_2=1\right).$$

З визначення умовної ймовірності

$$P\left(\xi_2+\xi_3=1\middle|\xi_1+\xi_2=1\right)=\frac{P\left(\xi_1+\xi_2=1,\ \xi_2+\xi_3=1\right)}{P\left(\xi_1+\xi_2=1\right)}.$$

За формулою повної ймовірності цей вираз дорівнює

$$\frac{P\left(\xi_1=0,\ \xi_2=1,\ \xi_3=0\right)+P\left(\xi_1=1,\ \xi_2=0,\ \xi_3=1\right)}{P\left(\xi_1=0,\ \xi_2=1\right)+P\left(\xi_1=1,\ \xi_2=0\right)}.$$

Згідно зі зробленими припущеннями, маємо

$$P\left(\xi_2+\xi_3=1\middle|\xi_1+\xi_2=1\right)=\frac{pq^2+p^2q}{2pq}=\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$P\left(\xi_2+\xi_3=1\middle|\xi_1+\xi_2=1,\xi_0+\xi_1=0\right)\neq P\left(\xi_2+\xi_3=1\middle|\xi_1+\xi_2=1\right),$$

якщо $p\neq\frac{1}{2}$. Таким чином, ця послідовність випадкових величин не є ланцюгом Маркова. ◄

Приклад 9.22. Чи можуть всі стани ланцюга Маркова зі зліченною кількістю станів бути неістотними?

► Розглянемо приклад. Нехай ξ_n – ланцюг Маркова зі зліченною кількістю станів з деяким вектором початкових ймовірностей. Нехай також матриця ймовірностей переходу за один крок має вигляд

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що для будь-якого стану n імовірність переходу за m кроків дорівнює

$$P\left(\xi_m=l\middle|\xi_0=n\right)=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad l=n+m,\\ 0, & \text{якщо} \quad l\neq n+m\end{cases}$$

для будь-якого $m>0$.

Звідси випливає, що всі стани l цього ланцюга Маркова такі, що є досяжними із стану n, а стан n в цьому випадку є недосяжним з будь-якого стану l такого, що $l>n$. Таким чином, за визначенням неістотного стану, стан n початкового ланцюга є неістотним. Всі ці міркування справедливі для будь-якого стану даного ланцюга. Звідси випливає, що будь-який стан є неістотним. Отже, ми навели приклад ланцюга Маркова зі зліченною кількістю станів такого, що всі його стани є неістотними. ◄

Приклад 9.23. Нехай $\xi_0, \xi_1, \ldots$ – незалежні випадкові величини з дискретним розподілом, $f_0, f_1, \ldots$ – деякі функції. Довести, що послідовність випадкових величин $\eta_0, \eta_1, \ldots$, де $\eta_{k+1} = f_k(\eta_k, \xi_{k+1})$, утворює ланцюг Маркова.

► Розглянемо умовну ймовірність

$$P(\eta_{n+1} = i_{n+1} | \eta_n = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0).$$

З визначення умовної ймовірності випливає, що

$$P(\eta_{n+1} = i_{n+1} | \eta_n = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0) = \frac{P(\eta_{n+1} = i_{n+1}, \eta_n = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0)}{P(\eta_n = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0)}.$$

З умови задачі маємо

$$P(\eta_{n+1} = i_{n+1} | \eta_n = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0) = \frac{P(f_n(i_n, \xi_{n+1}) = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0)}{P(f_{n-1}(i_{n-1}, \xi_n) = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0)}.$$

Оскільки випадкові величини $\xi_0, \xi_1, \ldots$ незалежні, то за властивістю функцій від незалежних випадкових величин цю умовну ймовірність можна записати так:

$$\frac{P(f_n(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}) P(f_{n-1}(i_{n-1}, \xi_n) = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0)}{P(f_{n-1}(i_{n-1}, \xi_n) = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0)}$$

Очевидно, що останній вираз дорівнює

$$P(f_n(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}).$$

Таким чином,

$$P(\xi_{n+1} = i_{n+1} | \eta_n = i_n, \ldots, \eta_0 = i_0) = P(f_n(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n-1}).$$

Тепер розглянемо умовну ймовірність

$$P(\eta_{n+1} = i_{n+1} | \eta_n = i_n),$$

яка за визначенням дорівнює

$$\frac{P(\eta_{n+1}=i_{n+1},\eta_n=i_n)}{P(\eta_n=i_n)}.$$

З умови задачі маємо

$$\frac{P(f_n(i_n,\xi_{n+1})=i_{n+1},\ f_{n-1}(i_{n-1},\xi_n)=i_n)}{P(f_{n-1}(i_{n-1},\xi_n)=i_n)}.$$

Оскільки випадкові величини $\xi_0,\xi_1,\ldots$ незалежні, то за властивістю функцій від незалежних величин останній вираз дорівнює

$$\frac{P(f_n(i_n,\xi_{n+1})=i_{n+1})P(f_{n-1}(i_{n-1},\xi_n)=i_n)}{P(f_{n-1}(i_{n-1},\xi_n)=i_n)}=P(f_n(i_n,\xi_{n+1})=i_{n+1}).$$

Тоді

$$P(\eta_{n+1}=i_{n+1}|\eta_n=i_n)=P(f_n(i_n,\xi_{n+1})=i_{n+1}).$$

Отже,

$$P(\eta_{n+1}=i_{n+1}|\eta_n=i_n,\ldots,\eta_0=i_0)=P(\eta_{n+1}=i_{n+1}|\eta_n=i_n).$$

Таким чином, послідовність $\eta_0,\eta_1,\ldots$, де $\eta_{k+1}=f_k(\eta_k,\xi_{k+1})$ утворює ланцюг Маркова. ◄

Приклад 9.24. Довести, що якщо ланцюг Маркова має хоча б один неістотний стан, то він не може бути ергодичним.

► Розглянемо деякий ланцюг Маркова. Нехай він має хоча б один неістотний стан. Припустимо, наприклад, що цей стан k. Тоді за визначенням неістотного стану існує стан l такий, що ймовірність переходу зі стану l в стан k дорівнює

$$p_{lk}(n)=0$$

для будь-якого $n>0$. Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}p_{lk}(n)=0. \tag{9.14}$$

Ланцюг Маркова називається ергодичним, якщо для будь-яких i та j існує границя

$$\lim_{n\to\infty} p_{lk}(n) = p_j$$

така, що $p_j > 0$. Це суперечить (9.14).

Таким чином, якщо ланцюг Маркова має хоча б один неістотний стан, то він не може бути ергодичним. ◄

Приклад 9.25. Довести, що для скінченного ланцюга Маркова завжди існує стаціонарний розподіл імовірності.

► Розглянемо ланцюг Маркова ξ_n. Нехай він має n станів. Нехай також для цього ланцюга матриця ймовірностей переходу за один крок має вигляд

$$P = \left(p_{ij}\right)_1^n .$$

Розглянемо систему рівнянь

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} x_j . \qquad (9.15)$$

для $1 \le i \le n$.

Доведемо, що ця система завжди має невід'ємний розв'язок, крім того, який тотожно не дорівнює нулю. Доведемо це за індукцією.

Нехай $n = 2$. Тоді система (9.15) має вигляд

$$\begin{cases} p_{11}x_1 + p_{21}x_2 = x_1, \\ p_{12}x_1 + p_{22}x_2 = x_2. \end{cases}$$

Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} \left(p_{11} - 1\right)x_1 + p_{21}x_2 = 0, \\ p_{12}x_1 + \left(p_{22} - 1\right)x_2 = 0. \end{cases} \qquad (9.16)$$

$\left(p_{ij}\right)_1^2$ є матрицею ймовірностей переходу за один крок ланцюга Маркова, тому вона є стохастичною матрицею, тобто

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j,$$

$$p_{11} + p_{12} = 1,$$
$$p_{21} + p_{22} = 1.$$

Тоді система (9.16) матиме вигляд

$$\begin{cases} -p_{12}x_1 + p_{21}x_2 = 0, \\ p_{12}x_1 - p_{21}x_2 = 0. \end{cases}$$

Розглянемо різні випадки.

1. Якщо $p_{12} = p_{21} = 0$, то матриця ймовірностей переходу за один крок має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді будь-який вектор (x_1, x_2) є розв'язком системи (9.15).

2. Якщо $p_{11} = p_{22} = 0$, то матриця ймовірностей переходу за один крок має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді вектор $\left(\frac{1}{2} . \frac{1}{2}\right)$ є розв'язком системи (9.15).

3. У будь-якому іншому випадку

$$\begin{cases} -p_{12}x_1 + p_{21}x_2 = 0, \\ p_{12}x_1 - p_{21}x_2 = 0. \end{cases}$$

Тоді величини x_1 і x_2 мають однаковий знак і хоча б одна з них не дорівнює нулю. Таким чином, при $n = 2$ система (9.15) завжди має невід'ємний розв'язок, що не дорівнює тотожно нулю. Тепер припустимо, що при $n = m$ система (9.15) має не невід'ємний розв'язок, який дорівнює тотожно нулю. Перепишемо систему (9.15) у вигляді

$$\sum_{j=1}^{m} \left(p_{ji} - \delta_{ji}\right) x_j = 0, \tag{9.17}$$

де

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Розглянемо систему (9.17), коли $n = m+1$:

$$\sum_{j=1}^{m+1} \left(p_{ji} - \delta_{ji} \right) x_j = 0. \qquad (9.18)$$

Якщо виключити з цієї системи невідому x_{m+1}, то отримаємо систему вигляду (9.17) за винятком останнього рівняння

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \left(p'_{ji} - \delta_{ji} \right) x_j, & \text{якщо } 1 \le i \le m, \\ x_{m+1} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{m} p_{j,\, m+1} \cdot x_j}{1 - p_{m+1,\, m+1}}, & i = m, \end{cases}$$

де

$$\sum_{i=1}^{m+1} p'_{ji} = 1$$

для будь-якого j.

Звідси випливає, що система (9.17) при $n = m+1$ також має невід'ємний розв'язок, який не дорівнює тотожно нулю.

Отже, система (9.15) завжди має невід'ємний розв'язок, який не дорівнює тотожно нулю. Розглянемо такий розв'язок $\left(x_1, \ldots, x_n \right)$. Визначимо вектор $p^* = \left(p_1^*, \ldots, p_n^* \right)$ таким чином:

$$p_i^* = \frac{x_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}$$

для будь-якого i $(1 \le i \le n)$.

За своїм визначенням вектор p^* задовольняє системі (9.15):

$$p_i^* = \sum_{j=1}^{m} p_j^* p_{ij} . \qquad (9.19)$$

Розглянемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* p_{ji}(n), \qquad (9.20)$$

де $p_{ij}(n)$ – ймовірність переходу зі стану i в стан j за n кроків. Згідно з рівнянням Чепмена-Колмогорова останній вираз дорівнює

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* \sum_{k=1}^{n} p_{ik} p_{kj} .$$

Перепишемо його у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} p_{kj} \sum_{i=1}^{m} p_i^* p_{ik} .$$

З (9.19) випливає, що останній вираз дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^* p_{kj} = p_j^* .$$

Таким чином,

$$p_j^* = \sum_{i=1}^{n} p_i^* p_{ij}(n).$$

Продовжуючи аналогічні міркування, маємо

$$p_j^* = \sum_{i=1}^{n} p_i^* p_{ij}(m) .$$

для будь-якого $m > 0$.

Отже, для скінченного ланцюга Маркова завжди існує вектор $p^* = \left(p_1^*, \ldots, p_n^* \right)$ такий, що

$$p_i^* \geq 0 \qquad \forall i \quad (1 \leq i \leq n), \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1,$$

$$p_j^* = \sum_{i=1}^{n} p_i^* p_{ij}(m)$$

для будь-якого $m > 0$.

Звідси, згідно з визначенням стаціонарного розподілу ймовірностей, випливає, що вектор p^* є стаціонарним розподілом імовірностей для даного ланцюга Маркова. ◄

Приклад 9.26. Нехай кількість станів ланцюга Маркова дорівнює двом. Довести, що може мати місце тільки один з трьох випадків:

а) ланцюг є ергодичним;

б) стани цього ланцюга не є такими, що сполучаються;

в) матриця ймовірностей переходу за один крок цього ланцюга має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

► Розглянемо деякий ланцюг Маркова з двома станами. Можливими є тільки два випадки: стани цього ланцюга є такими, що або сполучаються, або не сполучаються. Якщо стани є такими, що сполучаються, то виділимо випадок, коли матриця ймовірностей переходу за один крок цього ланцюга має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.21}$$

Якщо стани є такими, що сполучаються, а матриця ймовірностей переходу за один крок цього ланцюга відмінна від (9.21), то існують n_1 і n_2 такі, що

$$p_{12}(n_1) > 0, \qquad\qquad p_{21}(n_2) > 0.$$

Крім того, $p_{11} > 0$ і $p_{22} > 0$. Нехай, наприклад, $p_{11} > 0$. Тоді, з рівняння Чепмена – Колмогорова випливає, що

$$p_{12}(n_1 + n_2 + 1) \geq p_{11}(n_2 + 1)\, p_{12}(n_1) > 0,$$

$$p_{21}(n_1 + n_2 + 1) \geq p_{11}(n_1 + 1)\, p_{21}(n_2) > 0,$$

$$p_{11}(n_1+n_2+1) \geq p_{12}(n_1)\,p_{22}p_{21}(n_2) > 0,$$

$$p_{22}(n_1+n_2+1) \geq p_{21}(n_2)\,p_{11}p_{12}(n_1) > 0.$$

Тоді існує n_0:

$$n_0 = n_1 + n_2 + 1,$$

таке, що $p_{ij}(n_0) > 0$ для будь-яких j.

Відома теорема: якщо для однорідного ланцюга Маркова зі скінченною кількістю станів існує n таке, що $p_{lk}(n) > 0$ для будь-яких l і k, то цей ланцюг є ергодичним. З цієї теореми випливає, що заданий ланцюг Маркова є ергодичним.

Таким чином, для ланцюга Маркова, що має два стани, може мати місце тільки один з трьох випадків:

а) ланцюг є ергодичним;

б) стани цього ланцюга не є такими, що сполучаються;

в) матриця ймовірностей переходу за один крок цього ланцюга має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 9.27. Розглянемо ланцюг Маркова зі зліченною кількістю станів і матрицею ймовірностей переходу за один крок $P = \left(p_{ij}\right)_0^{\alpha}$. Нехай елементи матриці P мають вигляд

$$p_{ij} = \begin{cases} p_i > 0, & \text{якщо} \quad j = i+1; \\ r_i \geq 0, & \text{якщо} \quad j = i; \\ q_i > 0, & \text{якщо} \quad j = i-1; \\ 0, & \text{при інших} \quad j. \end{cases} \tag{9.22}$$

Нехай $\rho_m = \dfrac{q_1 \cdots q_m}{p_1 \cdots p_m}$.

Довести справедливість таких тверджень:

1. Ланцюг Маркова є незворотним тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m < \infty.$$

2. Ланцюг Маркова є зворотним тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty .$$

3. Ланцюг Маркова є позитивним тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty , \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m} < \infty .$$

4. Ланцюг Маркова є нульовим тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty , \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m} = \infty .$$

► Визначимо числову послідовність v_n. Нехай $v_0 = 0$

$$v_n = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i , \quad \text{якщо} \quad n \geq 1.$$

Розглянемо систему рівнянь

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j \quad \text{для} \quad i \geq 1.$$

Доведемо, що величини v_n утворюють розв’язок цієї системи. Дійсно, використовуючи умову (9.22), остання система запишеться у вигляді

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} u_j = q_i u_{i-1} + r_i u_i + p_i u_{i+1} . \tag{9.23}$$

Перепишемо систему так:

$$u_i = q_i u_{i-1} + r_i u_i + p_i u_{i+1} . \tag{9.24}$$

Підставимо величини v_n в рівняння (9.24):

$$q_n v_{n-1} + r_n v_n + p_n v_{n+1} .$$

За визначенням величини v_n цей вираз дорівнює

$$q_n\sum_{m=0}^{n-2}\frac{q_1\cdots q_m}{p_1\cdots p_m}+r_n\sum_{m=0}^{n-1}\frac{q_1\cdots q_m}{p_1\cdots p_m}+p_n\sum_{m=0}^{n}\frac{q_1\cdots q_m}{p_1\cdots p_m}.$$

Перепишемо останній вираз у вигляді

$$q_n\sum_{m=0}^{n-2}\frac{q_1\cdots q_m}{p_1\cdots p_m}+r_n\sum_{m=0}^{n-1}\frac{q_1\cdots q_m}{p_1\cdots p_m}+p_n\sum_{m=0}^{n}\frac{q_1\cdots q_m}{p_1\cdots p_m}+q_n\rho_0+r_n\rho_0+p_n\rho_0=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-2}\left(q_n+r_n+p_n\right)\frac{q_1\ldots q_m}{p_1\ldots p_m}+\left(r_n+p_n\right)\frac{q_1\ldots q_{n-1}}{p_1\ldots p_{n-1}}+p_n\frac{q_1\ldots q_n}{p_1\ldots p_n}+\left(q_n+r_n+p_n\right)\rho_0. \quad (9.25)$$

За визначенням величин q_n, r_n, p_n:

$$q_n+r_n+p_n=1.$$

Крім того, за умовою задачі $\rho_n=\dfrac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}$. Тоді (9.25) отримає такий вигляд

$$\sum_{m=0}^{n-2}\frac{q_1\ldots q_m}{p_1\ldots p_m}+(1-q_n)\frac{q_1\ldots q_{n-1}}{p_1\ldots p_{n-1}}+p_n\frac{q_1\ldots q_n}{p_1\ldots p_n}+\rho_0. \quad (9.26)$$

Остаточно

$$\sum_{m=0}^{n-2}\frac{q_1\cdots q_m}{p_1\cdots p_m}+\frac{q_1\cdots q_{n-1}}{p_1\cdots p_{n-1}}+\rho_0, \quad (9.27)$$

оскільки

$$\left(1-q_n\right)\frac{q_1\cdots q_{n-1}}{p_1\cdots p_{n-1}}+p_n\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}=$$

$$=\frac{q_1\cdots q_{n-1}}{p_1\cdots p_{n-1}}-\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_{n-1}}+\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_{n-1}}=\frac{q_1\cdots q_{n-1}}{p_1\cdots p_{n-1}}.$$

За визначенням величин ρ_n (9.27) запишеться у вигляді

$$\sum_{m=1}^{n-2}\rho_m+\rho_{n-1}+\rho_0=\sum_{m=0}^{n-1}\rho_m.$$

З визначення величин v_n випливає, що останній вираз дорівнює v_n. Таким чином,

$$q_n v_{n-1} + r_n v_n + p_n v_{n+1} = v_n$$

для $n \geq 1$.

Отже, величини v_n утворюють розв'язок системи (9.24). Звідси випливає, що величини v_n утворюють розв'язок системи (9.22).

Для величин v_n, за визначенням, виконується рекурентне співвідношення

$$v_n = v_{n-1} + \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}. \tag{9.28}$$

За умовою задачі $p_{n-1} > 0$, $q_{n-1} > 0$. Тоді з (9.28) випливає, що не існує такого c, що

$$v_n \equiv c$$

для будь-якого n. Тепер розглянемо матрицю P ймовірностей переходу за один крок початкового ланцюга Маркова. З її вигляду випливає, що для будь-яких i, j існує n таке, що

$$p_{ij}(n) > 0,$$

тобто всі стани цього ланцюга є досяжними зі всіх. Це означає, що всі стани утворюють один клас станів, що сполучаються, тобто початковий ланцюг Маркова є нерозкладним.

1. Припустимо, що виконується

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m < \infty,$$

тобто числовий ряд збігається. Це означає, що, за визначенням величин v_n як частинних сум цього ряду, $v_n < \infty$ для всіх n. Крім того, зі збіжності ряду випливає, що існує таке c ($c > 0$), що $v_n < c$ для всіх n.

Таким чином, величини v_n утворюють обмежений розв'язок системи рівнянь (9.22), що не дорівнює тотожно деякій константі. Крім того, доведено, що заданий ланцюг Маркова є нерозкладним. Існує теорема, згідно з якою нерозкладний ланцюг Маркова зі зліченною кількістю станів є незворотним тоді і тільки тоді, коли система (9.22) для цього ланцюга Маркова має обмежений розв'язок, що не дорівнює тотожно деякій константі.

Отже, ланцюг Маркова є незворотним тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m < \infty,$$

тобто, коли даний числовий ряд збігається.

2. Розглянемо нерозкладний ланцюг Маркова, для якого всі його стани є одночасно зворотними або незворотними. Для такого ланцюга числовий ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m$ або збігається, або розбігається. У першій частині задачі було доведено, що ланцюг Маркова є незворотним тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m < \infty,$$

тобто коли даний числовий ряд збігається. З цього доведення випливає, що нерозкладний ланцюг Маркова є зворотним тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \infty,$$

тобто, коли цей числовий ряд є розбіжним.

3. Визначимо числову послідовність w_n так:

$$w_0 = 0, \qquad w_1 = \frac{p_0}{q_1}, \qquad w_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \quad (n > 1).$$

Розглянемо систему рівнянь

$$u_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ji} u_i \qquad j > 0. \tag{9.29}$$

Доведемо, що величини w_n утворюють розв’язок системи (9.29). Дійсно, використовуючи (9.22), запишемо систему (9.29) у вигляді

$$\begin{cases} u_n = p_{n-1}u_{n-1} + r_n u_n + q_{n+1}u_{n+1}, \ \forall n \ge 1; \\ u_0 = r_0 u_0 + q_1 u_1. \end{cases} \tag{9.30}$$

Підставимо величини w_n у рівняння (9.30) для $n \geq 1$:

$$w_n = p_{n-1} w_{n-1} + r_n w_n + q_{n+1} w_{n+1}.$$

За визначенням величин w_n, цей вираз дорівнюватиме

$$p_{n-1} \frac{p_1 \cdots p_{n-2}}{q_1 \cdots q_{n-1}} + r_n \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} + q_{n+1} \frac{p_1 \cdots p_n}{q_1 \cdots q_{n+1}}. \qquad (9.31)$$

З визначення величин $q_n, \ p_n, \ r_n$ випливає, що

$$q_n + r_n + p_n = 1.$$

Тоді вираз (9.31) набуде такого вигляду:

$$\frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_{n-1}} + \left(1 - p_n - q_n\right) \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} + \frac{p_1 \cdots p_n}{q_1 \cdots q_n} =$$

$$= \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_{n-1}} + \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} - \frac{p_1 \cdots p_n}{q_1 \cdots q_n} - \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_{n-1}} + \frac{p_1 \cdots p_n}{q_1 \cdots q_n} = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n}.$$

Таким чином,

$$w_n = p_{n-1} w_{n-1} + r_n w_n + q_{n+1} w_{n+1}, \qquad n \geq 1.$$

Підставимо w_0 і w_1 у рівняння

$$u_0 = r_0 u_0 + q_1 u_1.$$

Маємо, за визначенням w_0 і w_1:

$$r_0 + q_1 \frac{p_0}{q_1} = r_0 + p_0.$$

З визначення величин r_0 і p_0 випливає, що останній вираз дорівнює одиниці, тобто

$$w_0 = r_0 w_0 + q_1 w_1.$$

Отже, величини w_n утворюють розв'язок системи (9.30), а отже, і системи (9.29).

Для величин w_n виконується співвідношення

$$w_n = \frac{1}{p_n \rho_n}.$$

Крім того, очевидно, що $w_n > 0$ для будь-якого $n \geq 0$. Припустимо, що для початкового ланцюга Маркова виконується:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty, \tag{9.32}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m} < \infty. \tag{9.33}$$

З твердження (9.33) випливає, що величини w_n утворюють нетривіальний абсолютно сумовний розв'язок системи рівнянь (9.29). Існує теорема, згідно з якою нерозкладний ланцюг Маркова зі зліченною кількістю станів є позитивним тоді і тільки тоді, коли система рівнянь (9.29) для цього ланцюга має нетривіальний абсолютно сумовний розв'язок. Крім того, у другій частині задачі було доведено, що нерозкладний ланцюг Маркова є зворотним тоді і тільки тоді, коли виконується (9.32), тобто коли цей числовий ряд є розбіжним.

Отже, ланцюг Маркова є позитивним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (9.32) і (9.33).

4. Розглянемо нерозкладний ланцюг Маркова, для якого всі його стани є одночасно позитивними або нульовими. Для цього ланцюга Маркова числовий ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m}$$

або збігається, або розбігається.

У третій частині задачі було доведено, що ланцюг Маркова є позитивним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (9.32) і (9.33). З цих умов випливає, що нерозкладний ланцюг Маркова є нульовим тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m = \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m} < \infty. \blacktriangleleft$$

9.3 Задачі для самостійного розв’язання

Задача 9.1. З таблиці, що містить всі цілі позитивні числа від 1 до m включно, навмання послідовно вибирають числа. Система знаходиться у стані X_j, якщо число j є найбільшим з вибраних. Знайти ймовірність того, що після вибору з таблиці n чисел найбільше число дорівнюватиме k, якщо перед цим найбільшим було число i.

Відповідь: $$p_{ik}^n = \begin{cases} 0, & i > k; \\ \left(\dfrac{k}{m}\right)^n, & i = k; \\ \left(\dfrac{k}{m}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{m}\right)^n, & i < k. \end{cases}$$

Задача 9.2. Для однорідного ланцюга Маркова задані матриця перехідних імовірностей і вектор початкового розподілу:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \qquad p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти вектори ймовірностей станів за один і два кроки.

Відповідь: $\vec{p}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; $\vec{p}(2) = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Задача 9.3. Відома матриця P перехідних імовірностей однорідного ланцюга Маркова. Визначити: а) кількість можливих станів цього ланцюга; б) ймовірності станів за два кроки, якщо в початковий момент часу ймовірності станів однакові, а

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) 3; б) $\vec{p}(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Задача 9.4. Матриця перехідних імовірностей однорідного ланцюга Маркова має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Визначити: а) стани, з яких досягається стан X_k, $k = \overline{1,4}$; б) стани, які досягаються зі стану X_i, $i = \overline{1,4}$.

Відповідь: а) стани X_k, $k = 1, 2, 3$, досягаються з будь-якого стану, а стан X_4 не досягається з жодного стану; б) із станів X_k, $k = 1, 2, 3$, досягаються всі стани, крім X_4, а зі стану X_4 досягаються всі стани.

Задача 9.5. Нехай у початковий момент часу $t = 0$ система з рівною імовірністю знаходиться в одному з можливих станів, що зображаються точкою на осі Ox: $x = -1$ – стан X_1; $x = 0$ – стан X_2; $x = 1$ – стан X_3, $x = 2$ – стан X_4. Залежно від випадку точка може переміщуватися вправо або вліво на одиничну відстань: вправо – з імовірністю $1/6$, вліво – з імовірністю $5/6$. Зі станів X_1 і X_4 переміщення неможливі. Знайти матрицю перехідних імовірностей, початковий розподіл імовірностей і вектори ймовірностей станів за один і два кроки.

Відповідь: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $\vec{p}(1) = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{5}{24} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{7}{24} \end{pmatrix}$; $\vec{p}(2) = \begin{pmatrix} \frac{91}{144} \\ \frac{5}{144} \\ \frac{5}{144} \\ \frac{43}{144} \end{pmatrix}$.

Задача 9.6. Розглядається система – верстат з числовим програмним управлінням (ЧПУ), який може знаходитися в таких станах:

X_1 – налагоджений і працює;

X_2 – не працює; поломка не виявлена;

X_3 – не працює, проводиться середній ремонт;

X_4 – не працює, знаходиться на профілактиці;

X_5 – не працює, проводиться капітальний ремонт.

Даному процесу відповідає матриця перехідних імовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Знайти граничні ймовірності станів верстата ЧПУ.

Відповідь: $\overline{p}^{*} = \begin{pmatrix} 0,6139 & 0,0877 & 0,0743 & 0,0682 & 0,1559 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Задача 9.7. Є ланцюг з поглинаючою множиною станів E. Нехай $\{\xi_n\}$ – довільний однорідний ланцюг Маркова з простором станів X і матрицею перехідних імовірностей P. Виділимо підмножину E множини X. Змінимо початковий процес так, щоб під час потрапляння в будь-який стан j з E він не міг залишити цей стан.

Чи буде новий процес ланцюгом Маркова? Яка матриця ймовірностей переходу цього нового ланцюга?

Відповідь: новий процес також буде ланцюгом Маркова; його перехідна матриця P' відрізняється від матриці P тим, що $p'_{jj} = 1$; $p'_{ji} = 0$ $\forall j \in E$ і $i \neq j$.

Задача 9.8. ***Гра двох гравців.*** Нехай m і M – деякі невід'ємні цілі числа – початкові капітали 1-го і 2-го гравців. Йде гра, і після кожного раунду капітал 1-го гравця з постійною ймовірністю p збільшується на одиницю і з імовірністю $q = 1 - p$ зменшується на одиницю (для 2-го гравця навпаки, p і q – ймовірності зменшення і збільшення капіталу на 1).

Побудувати модель гри у вигляді ланцюга Маркова. Записати матрицю перехідних імовірностей марковського ланцюга.

Зауваження. Результати будь-якого раунду не залежать від результатів попередніх раундів.

Відповідь: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ланцюг Маркова даного прикладу називається процесом випадкового блукання прямою з двома поглинаючими границями в точках станів $X_1 = 0$; $X_n = M + m$. Початковим станом є $X_0 = m$.

Задача 9.9. Основоположник теорії ланцюгів А.А. Марков проаналізував 20000 літер твору А.С. Пушкіна «Євгеній Онєгін» і з'ясував, що після голосної стоїть голосна з імовірністю 0,128 і приголосна – з імовірністю 0,872, після приголосної – приголосна з імовірністю 0,337 і голосна – з імовірністю 0,663 (літера «й» вважалася голосною, «ь» і «ъ» не враховувалися).

Знайти матрицю $P(2)$ (за два кроки); знайти також імовірність того, що третя літера буде голосною, якщо перша була голосною.

Відповідь: $P(2) = \begin{pmatrix} 0{,}595 & 0{,}405 \\ 0{,}308 & 0{,}692 \end{pmatrix}$; 0,595.

Задача 9.10. Нехай ланцюг Маркова має два стани, і $p_{11} = \alpha$, $p_{12} = p_{21} = 1 - \alpha$, $p_{22} = \alpha$. Дослідити ланцюг на нерозкладність, періодичність і зворотність. Знайти, якщо існує, стаціонарний розподіл.

Відповідь: $p_1^* = p_2^* = \dfrac{1}{2}$; X_1, X_2 – зворотні стани; ланцюг неперіодичний.

Задача 9.11. Перехідні ймовірності для ланцюга Маркова з нескінченною кількістю станів визначаються рівностями:

$$p_{i,1} = \frac{i}{i+1}, \qquad p_{i,i+1} = \frac{1}{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Дослідити ланцюг на нерозкладність, періодичність і зворотність. Знайти, якщо існує, стаціонарний розподіл.

Відповідь: ланцюг нерозкладний, неперіодичний; всі стани зворотні; $p_i^* = \dfrac{1}{i!(1-e)}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Задача 9.12. Перехідні ймовірності для ланцюга Маркова з нескінченною кількістю станів визначаються рівностями:

$$p_{i1} = q, \qquad p_{i,i+1} = p = 1 - q \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Дослідити ланцюг на нерозкладність, періодичність. Знайти, якщо існує, стаціонарний розподіл.

Відповідь: ланцюг нерозкладний, неперіодичний; $p_i^* = qp^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Задача 9.13. При обмірковуванні основних постулатів кінетичної теорії матерії Еренфестом була запропонована така модель: m молекул, розділених у двох резервуарах, випадково по одній переміщуються зі свого резервуару в інший. Знайти граничні ймовірності кількості молекул у першому резервуарі. Дослідити ланцюг на нерозкладність, періодичність і зворотність.

Відповідь: $p_k^* = \frac{1}{2}C_m^k$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Ланцюг періодичний з періодом $d = 2$, нерозкладний, зворотний.

Задача 9.14. Матриця перехідних імовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю перехідних імовірностей за два кроки та граничні ймовірності.

Відповідь: $P(2) = \begin{pmatrix} 0,68 & 0,32 \\ 0,32 & 0,68 \end{pmatrix}$, $p_1^* = p_2^* = \frac{1}{2}$.

Задача 9.15. Випадкова точка може зміщуватися вправо з імовірністю p і вліво – з імовірністю $q = 1 - p$ на одну масштабну одиницю відрізка, довжина якого дорівнює 5 одиницям, перебуваючи тільки в цілочисельних точках відрізка. Якщо точка дійшла до кінця відрізка, то вона там і залишається.

Знайти матрицю перехідних імовірностей за один крок.

Відповідь: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Додаток А

Таблиця А.1 – Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28747	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця А.2 – Значення функції $\Phi_0\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{\frac{-z^2}{2}}dz$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0.00	0. 0000	0.43	0. 1664	0.86	0. 3051	1.29	0. 4015	1.72	0. 4573	2.30	0. 4893
0.01	0. 0040	0.44	0. 7000	0.87	0. 3078	1.30	0. 4032	1.73	0. 4582	2.32	0. 4898
0.02	0. 0080	0.45	0. 1736	0.88	0. 3106	1.31	0. 4049	1.74	0. 4591	2.34	0. 4904
0.03	0. 0120	0.46	0. 1772	0.89	0. 3133	1.32	0. 4066	1.75	0. 4599	2.36	0. 4909
0.04	0. 0160	0.47	0. 1808	0.90	0. 3159	1.33	0. 4082	1.76	0. 4608	2.38	0. 4913
0.05	0. 0199	0.48	0. 1844	0.91	0. 3186	1.34	0. 4099	1.77	0. 4616	2.40	0. 4918
0.06	0. 0239	0.49	0. 1879	0.92	0. 3212	1.35	0. 4115	1.78	0. 4625	2.42	0. 4922
0.07	0. 0279	0.50	0. 1915	0.93	0. 3238	1.36	0. 4131	1.79	0. 4633	2.44	0. 4927
0.08	0. 0319	0.51	0. 1950	0.94	0. 3264	1.37	0. 4147	1.80	0. 4641	2.46	0. 4931
0.09	0. 0359	0.52	0. 1985	0.95	0. 3289	1.38	0. 4162	1.81	0. 4649	2.48	0. 4934
0.10	0. 0398	0.53	0. 2019	0.96	0. 3315	1.39	0. 4177	1.82	0. 4656	2.50	0. 4938
0.11	0. 0438	0.54	0. 2054	0.97	0. 3340	1.40	0. 4192	1.83	0. 4664	2.52	0. 4941
0.12	0. 0478	0.55	0. 2088	0.98	0. 3365	1.41	0. 4207	1.84	0. 4671	2.54	0. 4945
0.13	0. 0517	0.56	0. 2123	0.99	0. 3389	1.42	0. 4222	1.85	0. 4686	2.56	0. 4948
0.14	0. 0557	0.57	0. 2157	1.00	0. 3413	1.43	0. 4236	1.86	0. 4686	2.58	0. 4951
0.15	0. 0596	0.58	0. 2190	1.01	0. 3438	1.44	0. 4251	1.87	0. 4693	2.60	0. 4953
0.16	0. 0636	0.59	0. 2224	1.02	0. 3461	1.45	0. 4265	1.88	0. 4699	2.62	0. 4956
0.17	0. 0675	0.60	0. 2257	1.03	0. 3485	1.46	0. 4279	1.89	0. 4706	2.64	0. 4959
0.18	0. 0714	0.61	0. 2291	1.04	0. 3508	1.47	0. 4292	1.90	0. 4713	2.66	0. 4961
0.19	0. 0753	0.62	0. 2324	1.05	0. 3531	1.48	0. 4306	1.91	0. 4719	2.68	0. 4963
0.20	0. 0793	0.63	0. 2357	1.06	0. 3554	1.49	0. 4319	1.92	0. 4726	2.70	0. 4965
0.21	0. 0832	0.64	0. 2389	1.07	0. 3577	1.50	0. 4332	1.93	0. 4732	2.72	0. 4967
0.22	0. 0871	0.65	0. 2422	1.08	0. 3599	1.51	0. 4345	1.94	0. 4738	2.74	0. 4969
0.23	0. 0910	0.66	0. 2454	1.09	0. 3621	1.52	0. 4357	1.95	0. 4744	2.76	0. 4971
0.24	0. 0948	0.67	0. 2486	1.10	0. 3643	1.53	0. 4370	1.96	0. 4750	2.78	0. 4973
0.25	0. 0987	0.68	0. 2517	1.11	0. 3665	1.54	0. 4382	1.97	0. 4756	2.80	0. 4974
0.26	0. 1026	0.69	0. 2549	1.12	0. 3686	1.55	0. 4394	1.98	0. 4761	2.82	0. 4976
0.27	0. 1064	0.70	0. 2580	1.13	0. 3708	1.56	0. 4406	1.99	0. 4767	2.84	0. 4977
0.28	0. 1103	0.71	0. 2511	1.14	0. 3729	1.57	0. 4418	2.00	0. 4772	2.86	0. 4979
0.29	0. 1141	0.72	0. 2642	1.15	0. 3749	1.58	0. 4429	2.02	0. 4783	2.88	0. 4980
0.30	0. 1179	0.73	0. 2673	1.16	0. 3770	1.59	0. 4441	2.04	0. 4793	2.90	0. 4981
0.31	0. 1217	0.74	0. 2703	1.17	0. 3790	1.60	0. 4452	2.06	0. 4803	2.92	0. 4982
0.32	0. 1255	0.75	0. 2734	1.18	0. 3810	1.61	0. 4463	2.08	0. 4812	2.94	0. 4984
0.33	0. 1293	0.76	0. 2764	1.19	0. 3830	1.62	0. 4474	2.10	0. 4821	2.96	0. 4985
0.34	0. 1331	0.77	0. 2794	1.20	0. 3849	1.63	0. 4484	2.12	0. 4830	2.98	0. 4986
0.35	0. 1368	0.78	0. 2823	1.21	0. 3869	1.64	0. 4495	2.14	0. 4838	3.00	0. 49865
0.36	0. 1406	0.79	0. 2852	1.22	0. 3883	1.65	0. 4505	2.16	0. 4846	3.20	0. 49931
0.37	0. 1443	0.80	0. 2881	1.23	0. 3907	1.66	0. 4515	2.18	0. 4854	3.40	0. 49966
0.38	0. 1480	0.81	0. 2910	1.24	0. 3925	1.67	0. 4525	2.20	0. 4861	3.80	0. 49984
0.39	0. 1517	0.82	0. 2939	1.25	0. 3944	1.68	0. 4535	2.22	0. 4868	4.00	0. 49997
0.40	0. 1554	0.83	0. 2967	1.26	0. 3962	1.69	0. 4545	2.24	0. 4875	4.50	0. 49999
0.41	0. 1591	0.84	0. 2995	1.27	0. 3980	1.70	0. 4554	2.26	0. 4881	5.00	0. 49999
0.42	0. 1628	0.85	0. 3023	1.28	0. 3997	1.71	0. 4564	2.28	0. 4887		

Таблиця А.3 – Значення функції e^{-x}

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,00000	0,99005	0,98020	0,97045	0,96079	0,95123	0,94176	0,93239	0,92312	0,91393
0,1	0,90484	0,89583	0,88692	0,87810	0,86936	0,86071	0,85214	0,84366	0,83527	0,82696
0,2	0,81873	0,81058	0,80252	0,79453	0,78663	0,77880	0,77105	0,76338	0,75578	0,74826
0,3	0,74082	0,73345	0,72615	0,71892	0,71177	0,70469	0,69768	0,69073	0,68386	0,67706
0,4	0,67032	0,66365	0,65705	0,65051	0,64404	0,63763	0,63128	0,62500	0,61878	0,61263
0,5	0,60653	0,60050	0,59452	0,58860	0,58275	0,57695	0,57121	0,56553	0,55990	0,55433
0,6	0,54881	0,54335	0,53794	0,53259	0,52729	0,52205	0,21685	0,51171	0,50662	0,50158
0,7	0,49659	0,49164	0,48675	0,48191	0,47711	0,47237	0,46767	0,46301	0,45841	0,45384
0,8	0,44933	0,44486	0,44043	0,43605	0,43171	0,42741	0,42316	0,41895	0,41478	0,41066
0,9	0,40657	0,40252	0,39852	0,39455	0,39063	0,38674	0,38289	0,37908	0,37531	0,37158
1,0	0,36788	0,36422	0,36060	0,35701	0,35345	0,34994	0,34646	0,34301	0,33960	0,33622
1,1	0,33287	0,32956	0,32628	0,32303	0,31982	0,31664	0,31349	0,31037	0,30728	0,30422
1,2	0,30119	0,29820	0,29523	0,29229	0,28938	0,28650	0,28365	0,28083	0,27804	0,27527
1,3	0,27253	0,26982	0,26714	0,26448	0,26185	0,25924	0,25666	0,25411	0,25158	0,24908
1,4	0,24660	0,24414	0,24171	0,23931	0,23693	0,23457	0,23224	0,22993	0,22764	0,22537
1,5	0,22312	0,22091	0,21871	0,21654	0,21438	0,21225	0,21014	0,20805	0,20598	0,20393
1,6	0,20190	0,19989	0,19790	0,19593	0,19398	0,19205	0,19014	0,18825	0,18637	0,18452
1,7	0,18268	0,18087	0,17907	0,17728	0,17552	0,17377	0,17204	0,17033	0,16864	0,16696
1,8	0,16530	0,16365	0,16203	0,16041	0,15882	0,15724	0,15567	0,15412	0,15259	0,15107
1,9	0,14957	0,14808	0,14661	0,14515	0,14370	0,14227	0,14086	0,13946	0,13807	0,13670
2,0	0,13534	0,13399	0,13266	0,13134	0,13003	0,12873	0,12745	0,12619	0,12493	0,12369
2,1	0,12246	0,12124	0,12003	0,11884	0,11756	0,11648	0,11533	0,11418	0,11304	0,11192
2,2	0,11080	0,10970	0,10861	0,10753	0,10646	0,10540	0,10435	0,10331	0,10228	0,10127
2,3	0,10026	0,09926	0,09827	0,09730	0,09633	0,09537	0,09442	0,09348	0,09255	0,09163
2,4	0,09072	0,08982	0,08892	0,08804	0,08716	0,08629	0,08543	0,08454	0,08374	0,08291
2,5	0,08208	0,08127	0,08046	0,07966	0,07887	0,07808	0,07730	0,07654	0,07577	0,07502
2,6	0,07427	0,07353	0,07280	0,07208	0,07136	0,07065	0,06995	0,06925	0,06856	0,06788
2,7	0,06421	0,06654	0,06587	0,06522	0,06457	0,06393	0,06329	0,06266	0,06204	0,06142
2,8	0,06081	0,06020	0,05961	0,05901	0,05843	0,05784	0,05727	0,05670	0,05613	0,05559
2,9	0,05502	0,05448	0,05393	0,05340	0,05287	0,05234	0,05182	0,05130	0,05079	0,05029
3,0	0,04979	0,04929	0,04880	0,04832	0,04783	0,04736	0,04689	0,04642	0,04596	0,04550
3,1	0,04505	0,04460	0,04416	0,04372	0,04328	0,04285	0,04243	0,04200	0,04159	0,04117
3,2	0,04076	0,04036	0,03996	0,03956	0,03916	0,03877	0,03839	0,03801	0,03763	0,03725
3,3	0,03688	0,03652	0,03615	0,03579	0,03544	0,03508	0,03474	0,03439	0,03405	0,03371
3,4	0,03337	0,03304	0,03271	0,03239	0,03206	0,03175	0,03143	0,03112	0,03081	0,03050
3,5	0,03020	0,02990	0,02960	0,02930	0,02901	0,02872	0,02844	0,02816	0,02788	0,02760
3,6	0,02732	0,02705	0,02678	0,02652	0,02625	0,02599	0,02573	0,02548	0,02522	0,02497
3,7	0,02472	0,02448	0,02423	0,02399	0,02375	0,02352	0,02328	0,02305	0,02282	0,02260
3,8	0,02237	0,02215	0,02193	0,02171	0,02149	0,02128	0,02107	0,02086	0,02065	0,02045
3,9	0,02024	0,02004	0,01984	0,01964	0,01945	0,01925	0,01906	0,01887	0,01869	0,01850
4,0	0,01832	0,01657	0,01500	0,01357	0,01228	0,01111	0,01005	0,00909	0,00823	0,00745
5,0	0,00674	0,00610	0,00552	0,00500	0,00452	0,00409	0,00370	0,00335	0,00303	0,00274
6,0	0,00248	0,00224	0,00203	0,00184	0,00166	0,00150	0,00136	0,00123	0,00111	0,00101
7,0	0,00091	0,00083	0,00075	0,00068	0,00061	0,00055	0,00050	0,00045	0,00041	0,00037
8,0	0,00034	0,00030	0,00027	0,00025	0,00023	0,00020	0,00018	0,00017	0,00015	0,00014
9,0	0,00012	0,00011	0,00010	0,00009	0,00008	0,00008	0,00007	0,00006	0,00006	0,00005
10,0	0,00005									

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1973. – 415 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Задачник – М.: Наука, 1973. – 172 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1988. – 439 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1977. – 479 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1975. – 333 с.
6. Дикарев В.А., Семенец В.В., Шкляров Л.И. Сборник задач по теории вероятностей с решениями. – Харьков: ХНУРЭ, 2004. – 172 с.
7. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1992. – 304 с.
8. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
9. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1970. – 256 с.
10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
11. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.– 256 с.
12. Теория вероятностей: Учебник для вузов / А.В. Печинкин, О.В. Тескин, Г.М. Цветкова и др./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.
13. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1978 – 224 с.
14. Ширяев А. Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. – Т.1, 2. – М.: Мир, 1984. – 1008 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

АГАПОВА Ірина Степанівна
БОНДАРЕНКО Михайло Федорович
ДІКАРЄВ Вадим Анатолійович
СЕМЕНЕЦЬ Валерій Васильович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ З РОЗВ’ЯЗКАМИ

Навчальний посібник

Відповідальний випусковий А.Д. Тевяшев

Редактор О.Г. Троценко

Комп'ютерна верстка Н.Є. Сіпатова

План 2009 (друге півріччя), поз. 45

Підп. до друку 8.07.2009. Формат 60x84 1/16 . Спосіб друку – ризографія.
Умов. друк. арк. 21,1. Облік.-вид. арк. 18,7. Тираж 300 прим.
Зам. № 1-45 Ціна договірна

ХНУРЕ, 61166, Харків, просп. Леніна, 14

Віддруковано в навчально-науковому
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Леніна, 14