

Харківський національний університет радіоелектроніки

БУРДА Роман Вадимович

УДК 519.6:519.85

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНІМАКСНИХ ЗАДАЧ
РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2010

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Житомирському державному технологічному університеті Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент, **Яремчук Світлана Іванівна**, Житомирський державний технологічний університет, доцент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Ємець Олег Олексійович**, завідувач кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики Полтавського університету економіки і торгівлі;
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, **Стецюк Петро Іванович**, в. о. завідувача відділом методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова;

Захист відбудеться “__” _____ 2010 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.052.07 Харківського національного університету радіоелектроніки МОН України за адресою: 61166, м. Харків, проспект Леніна, 14.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки МОН України (61166, м. Харків, проспект Леніна, 14).

Автореферат розісланий “__” _____ 2010 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради, д.т.н.

І. В. Гребеннік

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задачі пошуку оптимального розміщення джерел фізичного поля полягають у знаходженні такого розміщення джерел, при якому досягає екстремуму заданий критерій якості. Він може бути як фізичним полем, так і функцією, яка залежить від фізичного поля. На розміщення джерел накладаються обмеження взаємного неперетину та невиходу за межі області розміщення. Крім того, можливі додаткові технологічні обмеження.

Задачі розміщення джерел фізичного поля виникають у промисловості (оптимальне розміщення джерел забруднення, звуку), при проектуванні пристроїв радіоелектронної апаратури (забезпечення оптимального температурного режиму мікросхеми). Деякі обернені задачі математичної фізики можуть бути зведені до задачі розміщення джерел фізичного поля (визначення джерела цунамі по його показникам вздовж узбережжя, задача відновлення параметрів рослинності як обернена до задачі моделювання спектру відбиття рослин). В цьому випадку необхідно знайти таке розміщення джерел, при якому сумарне відхилення фізичного поля від заданої функції буде найменшим. Також такі задачі виникають при пошуку оптимального розміщення нафтових свердловин, де критерієм якості є час розробки родовища нафти, кількість свердловин, тощо.

Задачами оптимізації розміщення джерел фізичного поля займалися такі вчені: Сергієнко І. В., Ляшко С. І., Бутковский А. Г., Егоров А. І., Рудик А. П., Лур'є К. А., Ліонс Ж. Л., Хафтка Р. Т., Вігак В. М., Бірман Г., Уайт Д., Шаманський В. Е., Князев А. Д. та ін. Великий вклад в розвиток математичного апарату розв'язання цих задач внесли представники школи Рвачева В. Л. та Стояна Ю. Г., серед яких Путятін В. П. та ін.

Для задачі неперервного розміщення джерел фізичного поля розроблені методи її розв'язання, які базуються на методах нелінійного програмування та евристичних методах. В більшості випадків функція цілі повинна бути диференційованою. Недостатньо уваги приділено мінімаксімним задачам, в яких функція цілі є недиференційованою у деяких точках множини припустимих розв'язків. Задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця також приділено недостатньо уваги (зокрема мінімаксімній задачі). Тому є актуальним створення нових методів оптимізації для розв'язання цих задач.

Дисертаційна робота є продовженням досліджень, які проводяться в Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України під керівництвом чл.-кор. НАН України Ю.Г. Стояна, і присвячена питанням пошуку оптимального розміщення джерел фізичного поля в заданій області та на задані посадкові місця.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету в період з 2004 по 2010 роки у відповідності з тематикою та загальним планом досліджень кафедри. В даній роботі проводилися дослідження у рамках держбюджетної теми № 44-56/1409 ДБ "Розробка і вдосконалення методів теорії розкладів та дослідження транспортних операцій на основі сучасних комп'ютерних технологій" (№ ДР 0106U008579), яка входила до

плану НДР кафедри ПЗОТ ЖДТУ. В ній здобувач брав участь як виконавець, йому належить частина розділу, присвячена узагальненням задачі про призначення.

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є підвищення ефективності методів розв'язання задач розміщення джерел фізичних полів шляхом вдосконалення математичних моделей та розробки нових методів розв'язання цих задач.

Основними задачами дослідження є:

- 1) для мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на заданій області
 - вдосконалити математичну модель задачі;
 - розробити метод розв'язання задачі з використанням методу штрафних функцій та третього методу послідовних наближень;
- 2) для мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця:
 - побудувати математичну модель задачі в зручному для її розв'язання вигляді;
 - розробити метод розв'язання цієї задачі;
- 3) розробити програмний комплекс розв'язання задач розміщення джерел фізичного поля, який реалізує розроблені методи.

Об'єкт дослідження: процес розміщення джерел фізичного поля із заданими фізичними та геометричними характеристиками на заданій області розміщень.

Предмет дослідження: математичні моделі та методи розв'язання мінімаксних задач розміщення джерел фізичного поля.

Методи дослідження: при розробці методів оптимізації використовуються наступні існуючі методи та підходи: метод штрафних функцій, апарат R -функцій, градієнтні методи нелінійної оптимізації, метод потенціалів.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна в даній роботі наступна:

- набув подальшого розвитку метод розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на заданій області, який дозволив розміщувати джерела довільної опуклої форми в області довільної опуклої форми з використанням апарату Φ -функцій;
- вперше розроблено метод спуску зі стаціонарної точки для двічі неперервно диференційовної функції цілі, що дозволило побудувати вектор спуску зі стаціонарної точки, і сформульовано та доведено властивості цього вектора;
- вперше побудовано таку математичну модель мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця, яка дозволила зробити декомпозицію задачі, виділивши етап розрахунку поля та етап розв'язання оптимізаційної задачі;
- вперше розроблено метод "P-алгоритм" розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця з ітераційним покращанням функції цілі та доведені достатні умови оптимальності отриманого розв'язку;
- вперше побудовано комбінований метод розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця, який дозволив отримувати локальні розв'язки, та побудовано оцінки розв'язків цієї задачі.

Практичне значення одержаних результатів. Всі розроблені методи були реалізовані програмно. В результаті створено програмний комплекс розв'язання задачі оптимізації розміщення джерел фізичного поля в заданій області та задачі оптимізації розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця. Джерела та область мають форму опуклих багатокутників. В програму закладено механізм розширення можливих геометричних форм.

Матеріали дисертаційної роботи знайшли застосування при викладанні курсу «Математичні методи дослідження операцій» в Житомирському державному технологічному університеті. Результати, отримані в дисертаційній роботі, використовуються під час розробки дипломних робіт спеціалістів та атестаційних робіт магістрів кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету (довідка від 22.03.10).

Апробація результатів дисертації. Основні положення роботи доповідалися на наступних наукових конференціях і семінарах:

- V Міжнародна науково-практична конференція (м. Житомир, 2001);
- 34-а Регіональна молодіжна конференція “Проблеми теоретической и прикладной математики” (м. Єкатеринбург, 2002 р.);
- III міжнародна науково-практична конференція “Інформатика та механіка” (м. Хмельницький, 2006 р.);
- Міжнародна науково-технічна конференція “Інформаційно-комп'ютерні технології” (м. Житомир, 2006 р.);
- II міжнародна науково-технічна конференція “Інформаційно-комп'ютерні технології” (м. Житомир, 2008 р.);
- III міжнародна конференція “Обчислювальна та прикладна математика” (м. Київ, 2009 р.);
- всеукраїнська науково-практична конференція “Системний аналіз. Інформатика. Управління” (м. Запоріжжя, 2010 р.);
- науковий семінар “Оптимізація систем з розподіленими параметрами” Київського національного університету ім. Шевченка (м. Київ, 2010 р.);
- науковий семінар кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету ім. Шевченка (м. Київ, 2010 р.);
- об'єднаний науковий семінар відділу економічної кібернетики та відділу методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики імені Глушкова (м. Київ, 2010 р.);
- семінар відділу математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України (м. Харків, 2010 р.).

Особистий внесок здобувача. В роботах, написаних у співавторстві, дисертантові належать наступні результати.

В роботі [1] – побудована відкрита та замкнена математична модель мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця, доведено, що при виконанні певних умов точка, знайдена методом “Р-алгоритм”, є точкою глобального мінімуму. В роботах [2,9] – розроблено метод “Р-алгоритм” розв'язання

мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця та побудовано оцінки розв'язку, знайденого з використанням цього методу. В роботі [3] – розроблено комбінований метод розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця, який базується на методі “Р-алгоритм” та методі вектора спаду. В роботі [4] – розроблено метод спуску зі стаціонарної точки для двічі неперервно диференційованої функції цілі та метод розв'язання нерівностей спеціального типу. В роботі [5] – застосовано метод спуску зі стаціонарної точки до задачі розміщення джерел фізичного поля. В роботах [6,10] – використано метод штрафних функцій та третій метод послідовних наближень для розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля. Усі співавтори здобувача з задекларованим особистим внеском погодилися.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 наукових праць, серед них 7 статей (з них 3 статті у виданнях, які входять до переліку ВАК України) та 3 тези доповідей.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновків, додатків, списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації 166 сторінок. Робота містить один додаток на одній сторінці, 20 рисунків та 29 таблиць на 23 сторінках. Бібліографічний список налічує 191 назву на 23 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету, задачі та методи дослідження,

В першому розділі зроблено огляд літератури, що присвячена проблемам розміщення джерел фізичного поля, вирішення яких зводиться до розв'язання оптимізаційних задач розміщення об'єктів на заданій області, спорідненим задачам, та обрано напрямок досліджень.

Проведений аналіз робіт, присвячених задачам розміщення джерел фізичного поля та спорідненим задачам, дозволяє зробити наступні висновки.

Для задачі розміщення джерел фізичного поля в заданій області розроблені методи її розв'язання, які базуються на методах нелінійного програмування та евристичних методах. В більшості випадків функція цілі повинна бути диференційованою. Недостатньо уваги приділено мінімаксним задачам, в яких функція цілі є недиференційованою у деяких точках множини припустимих розв'язків. Задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця також приділено недостатньо уваги (зокрема мінімаксній задачі). Тому є актуальним створення нових методів оптимізації для розв'язання цієї задачі.

В другому розділі наводяться математичні постановки задач оптимізації розміщення. Для неперервної задачі розміщення джерел фізичного поля наведено постановку задачі, побудовано множину допустимих розв'язків з використанням апарату Φ -функцій, обґрунтовано доцільність застосування методу штрафних функцій до наведеної задачі, в загальному вигляді побудовані штрафні функції з використанням Φ -функцій. Для задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця наведено постановку задачі, побудовано математичну модель задачі

в зручному для її розв'язання виді, здійснено перехід від математичної моделі відкритого типу до математичної моделі закритого типу.

Математична постановка задачі неперервного розміщення. Нехай в n -вимірному евклідовому просторі маємо область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ та взаємно орієнтовані джерела фізичного поля $D_i \subset \mathbb{R}^n, i \in [1:N]$. Всі джерела та область є опуклими ϕ -об'єктами. Фізичні процеси в області описуються наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} Lu &= \tilde{f}(y, Z), \\ B_j u &= \varphi_j, j \in [1:J], \\ \tilde{f}(y, Z) &= \begin{cases} \sum_{i=1}^N A^i(y - Z^i) & \text{якщо } y \in D_i, \\ 0, & \text{якщо } y \in \bigcup_{i=1}^N D_i, \end{cases} \end{aligned}$$

Потрібно розмістити джерела таким чином, щоб задана функція цілі досягла свого мінімального значення. При цьому джерела не можуть перетинатися між собою та виходити за межі області.

В даній задачі керованими змінними є параметри розміщення джерел, що задаються величиною $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^N)$, де $Z^i, i \in [1:N]$ – координати полюсу i -го джерела.

Функція цілі є функцією максимуму та має наступний вигляд:

$$f(Z) = \max_{i \in [1:K]} f_i(Z),$$

де $f_i(Z), i \in [1:K]$ – неперервно-диференційовані функції, K – кількість таких функцій. Наприклад $f_i(Z) = u(y^i, Z), i \in [1:K]$, або $f_i(Z) = u(y^0, t_i, Z), i \in [1:K]$

Побудова множини допустимих розв'язків в аналітичному вигляді
Представимо обмеження взаємного неперетину джерел на їх невиходу за межі області у вигляді нерівностей. Розглянемо всі можливі пари джерел $(D_i, D_j), (i, j) \in I$, де $I = \{(i, j) | i \in [1:N], j \in [i+1:N]\}$.

Формалізуємо умови попарного неперетину джерел. Для цього використаємо, наприклад, апарат Φ -функцій Стояна. За означенням, Φ -функція $\Phi_{ij}(Z^i, Z^j)$ точкових множин $D_i(Z^i)$ та $D_j(Z^j)$ від'ємна у випадку, коли точкові множини мають спільні внутрішні точки, та невід'ємна у іншому випадку. Якщо припустити, що дотик об'єктів є допустимим розміщенням, то обмеження $\Phi_{ij}(Z^i, Z^j) \geq 0, (i, j) \in I$ є умовами неперетину джерел D_i та D_j . Приведемо його до виду “ \geq ”, отримаємо

$$-\Phi_{ij}(Z^i, Z^j) \leq 0, (i, j) \in I,$$

де $\Phi_{ij}(Z^i, Z^j)$ – Φ -функція точкових множин $D_i(Z^i)$ та $D_j(Z^j)$.

Формалізуємо умови невиходу i -го джерела за межі області. Для цього розглянемо точкову множину $\Omega_0(Z^0) = \{x + Z^0 \mid x \in R^n \setminus \Omega\}, Z^0 \in R^n$. Через $\Phi_i^\Omega(Z^0, Z^i), i \in [1:N]$ позначимо Φ -функції точкових множин $\Omega_0(Z^0)$ та $D_i(Z^i), i \in [1:N]$. Оскільки область розміщення є нерухомим об'єктом (Z^0 завжди співпадає з початком нерухомої системи координат), то $\Phi_i^\Omega(Z^0, Z^i), i \in [1:N]$ насправді є функцією лише від $Z^i, i \in [1:N]$. Тоді умова невиходу i -го об'єкту за межі області записується так:

$$-\Phi_i^\Omega(O, Z^i) \leq 0, i \in [1:N],$$

де $O \in R^n$ – початок нерухомої системи координат.

Таким чином, нерівності - задають множину допустимих розв'язків задачі -. Вигляд функцій $\Phi_{ij}(Z^i, Z^j), (i, j) \in I$ та $\Phi_i^\Omega(O, Z^i), i \in [1:N]$ великою мірою залежить від геометричної форми джерел та області. Тому їхня побудова здійснюється окремо для кожного класу задачі розміщення джерел фізичного поля.

Побудова штрафної функції. Функцію штрафу, який накладається на невиконання умов -, можна представити у наступному вигляді:

$$P_k(Z) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=i+1}^N P_{ijk}^D(Z^i, Z^j) + \prod_{i=1}^N P_{ik}^\Omega(Z^i), k = 1, 2, \dots,$$

де $P_{ijk}^D(Z^i, Z^j), (i, j) \in I, k = 1, 2, \dots$ – функції штрафу, який накладається на перетин джерел D_i та D_j , а $P_{ik}^\Omega(Z^i), i \in [1:N], k = 1, 2, \dots$ – функції штрафу, який накладається на вихід джерела $D_i, i \in [1:N]$ за межі області та мають наступний вигляд:

$$P_{ijk}^D(Z^i, Z^j) = e^{-k\chi\Phi_{ij}(Z^i, Z^j)}, (i, j) \in I, k = 1, 2, \dots$$

$$P_{ik}^\Omega(Z^i) = e^{-k\chi\Phi_i^\Omega(O, Z^i)}, i \in [1:N], k = 1, 2, \dots$$

Тоді задача умовної оптимізації -, , - зводиться до наступної послідовності задач безумовної оптимізації:

$$\Phi_k(Z) = \max_{Z \in [1:K]} \{f_i(Z) + P_k(Z)\} \rightarrow \min, k = 1, 2, \dots$$

Проблема стаціонарних точок. До розв'язання задач застосовується третій метод послідовних наближень, який збігається до стаціонарної точки. Через наявність великої кількості стаціонарних точок розробка методу спуску зі стаціонарної точки стала однією з тем даного дослідження.

Математична постановка задачі дискретного розміщення. Розглянемо задачу розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця. Є область розміщення $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, N джерел фізичного поля $D_i, i \in [1:N]$ та M посадкових місць $m^j \in \Omega, j \in [1:M]$. Необхідно розмістити джерела фізичного поля на посадкові місця таким чином, щоб заданий критерій якості був найменшим.

Фізичні процеси в області описуються наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} Lu &= \tilde{f}(y, Z), \\ B_j u &= \varphi_j, j \in [1:J], \end{aligned}$$

де L – заданий лінійний диференціальний оператор, B_j – задані лінійні оператори, які визначають граничні умови, φ_j – задані функції; y – поточна точка області Ω ,

$$\tilde{f}(y, Z) = \begin{cases} A^i(y - Z^i) & \text{якщо } y \in D_i, \\ 0 & \text{якщо } y \in \bigcup_{i=1}^N D_i, \end{cases}$$

$A^i(y - Z^i)$ – інтенсивність i -го джерела.

На розміщення джерел накладаються наступні обмеження.

$$\begin{aligned} m^j \cap \bigcup_{i=1}^N p^i &= \emptyset, j \in [1:M], \\ p^i \cap \bigcup_{j=1}^M m^j &= \emptyset, i \in [1:N]. \\ \bigcup_{i=1}^N p^i \cap \bigcup_{j=1}^M m^j &= \min\{N, M\}. \end{aligned}$$

де m – потужність множини, p^i – полюс i -го джерела, $i \in [1:N]$.

Посадкові місця розташовані таким чином, що будь-яке розміщення джерел в області, яке задовольняє обмеженням, не призводить до їхнього взаємного перетину або до виходу за межі області. Вважається, що координати полюсу тих джерел, які не розміщуються, мають нескінченно великі значення (тобто такі джерела не належать області).

За критерій якості оберемо функцію

$$f(Z) = \max_{k \in [1:K]} u(y^k, Z)$$

де $y^k \in \Omega$, $k \in [1:K]$ – задані точки області, вектор $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^N)$ визначає розміщення всіх джерел, Z^i визначає положення i -го джерела і співпадає з координатами його полюсу p^i , $i \in [1:N]$.

Математична модель задачі в зручному для її розв'язання виді. Нехай x_{ij} , $i \in [1:N]$, $j \in [1:M]$ – керовані змінні, які задаються так:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i - \text{те джерело не призначається на } j - \text{те місце} \\ 1, & \text{якщо } i - \text{те джерело призначається на } j - \text{те місце} \end{cases}$$

Тоді обмеження $\sum_{i=1}^N x_{ij} \leq 1$, $\sum_{j=1}^M x_{ij} \leq 1$, набувають вигляду відповідно $\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N x_{ij} \leq N$, $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_{ij} \leq M$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_{ij} &\leq N; \\ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N x_{ij} &\leq M; \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_{ij} &= \min\{N, M\}, \quad i \in [1:N], j \in [1:M]. \end{aligned}$$

Побудуємо функцію цілі вихідної задачі як функцію керованих змінних.

$$f(x) = \max_{k \in [1:K]} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^k x_{ij},$$

де c_{ij}^k – вклад джерела D_i при призначенні його на j -те посадкове місце ($i \in [1:N]$, $j \in [1:M]$) в значення поля в точці y^k ($u(y^k, Z(x))$). Всі вклади обраховуються перед розв'язанням оптимізаційної задачі.

Перехід від відкритої моделі до закритої. В роботі показано, що задача - може бути зведена до наступної задачі:

$$\begin{aligned} f(x) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x) &\rightarrow \min_{k \in [1:K]} f_k(x) = \sum_{i=1}^{L_{\max}} \sum_{j=1}^{L_{\max}} c_{ij}^k x_{ij}, \\ \sum_{i=1}^{L_{\max}} x_{ij} &= 1, j \in [1:L_{\max}], \\ \sum_{j=1}^{L_{\max}} x_{ij} &= 1, i \in [1:L_{\max}], \end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i \in [1:L_{\max}], j \in [1:L_{\max}],$$

де $L_{\max} = \max\{N, M\}$. Дана постановка задачі є предметом подальших досліджень.

В третьому розділі розроблено метод спуску зі стаціонарної точки для двічі неперервно-диференційованої функції цілі. В якості допоміжного алгоритму розроблено модифікацію градієнтного методу найшвидшого спуску для розв'язання нерівностей спеціального виду. Також розроблено метод розв'язання задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця – P -алгоритм. Побудовано оцінки розв'язку, знайденого методом “ P -алгоритм”. Побудовано умови, при виконанні яких точка, знайдена методом “ P -алгоритм”, буде точкою глобального мінімуму. Якщо умови не виконуються здійснюється спроба покращити розв'язок. Для цього розроблено комбінований метод, який базується на методі “ P -алгоритм” та методі вектора спаду.

Метод зсуву зі стаціонарної точки. Маємо задачу оптимізації $f(x) \rightarrow \min, x \in R^n$, де $f(x)$ – двічі неперервно диференційована в R^n . Нехай $\nabla f(x^*) = 0$, матриця $f''(x^*)$ є невизначеною або від'ємно визначеною. Знайдемо x^{**} таку, що $f(x^{**}) < f(x^*)$.

Така точка існує. Дійсно, нехай матриця $f''(x^*)$ визначена від'ємно, тоді x^* є точкою локального максимуму, тобто (за означенням строгого локального максимуму), $\exists \lambda_0 > 0$ таке, що $\forall \lambda \in (0; \lambda_0]$ і $\forall g \in R^n, \|g\|=1$, виконується

$$f(x^* + \lambda g) < f(x^*),$$

Нехай $f''(x^*)$ невизначена, тоді точка x^* не є точкою локального екстремуму. В цьому випадку існує такий вектор $g \in R^n, \|g\|=1$ та $\lambda_0 > 0$ що $\forall \lambda \in (0; \lambda_0]$ виконується. Тобто зазначена точка існує. Причому не одна, а будь-яка, що визначається за формулою $x = x^* + \lambda g, \forall \lambda \in (0; \lambda_0]$. Для знаходження цієї точки потрібно мати g та λ , для яких виконується умова. В даній роботі розроблено метод знаходження λ при відомому g .

Відшукання вектору спуску. Якщо матриця $f''(x^*)$ визначена від'ємно, в якості g можна обрати будь-який вектор з R^n , норма якого дорівнює одиниці. Якщо матриця других похідних невизначена, g ($\|g\|=1$) знаходиться з наступної умови

$$(f''(x^*) g, g) < 0$$

Побудуємо метод для розв'язання нерівності. Розглянемо матрицю $f''(x^*)$, яка складається з елементів матриці $f''(x^*)$, що знаходяться на перетині

однойменних рядків та стовпчиків, множина індексів яких – $S \cap \{1, 2, \dots, n\}$. Порядок такої матриці буде рівним потужності множини S .

Для невизначеної матриці $f \check{y}(x^*)$ завжди можна знайти таку матрицю $B_{m \times m} = f \check{y}(x^*)$ мінімального порядку, яка також є невизначеною (m – потужність множини S). Можливо, для її відшукування доведеться змінити порядок слідування змінних. Тобто знайдуться такі вектори $z \check{0} R^m$ і $z^* \check{0} R^m$, що виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} (B_{m \times m} \check{z}, z) &> 0 \\ (B_{m \times m} \check{z}^*, z^*) &< 0 \end{aligned}$$

Причому матриця $B_{m-1 \times m-1}$ буде визначена від'ємно або невід'ємно. Коли матриця $B_{m-1 \times m-1}$ визначена невід'ємно, тоді $\det B_{m \times m} < 0$, оскільки $B_{m \times m}$ – невизначена матриця мінімального порядку. Таким чином, вектор, координати якого знаходяться за формулами $g_i = 0, i \in S, g_i = z_{k_i}^*, i \notin S$ (k_i – номер, що відповідає i при зміні порядку слідування змінних, якщо така проводилася) є розв'язком, тобто вектором спуску g . У випадку, коли $B_{m-1 \times m-1}$ визначена від'ємно, за z^* можна обрати будь-який вектор z , для якого виконується $z_m = 0$ і $\|z\| = 1$, наприклад $z^*(1, 0, \dots, 0)$. У випадку коли $B_{m-1 \times m-1}$ визначена невід'ємно, для відшукування z^* використаємо методику, наведену нижче.

Знаходження вектору z . Знайдемо такий вектор z , що задовольняє умові і $\|z\| = 1$. Для цього використаємо наступні теореми.

Теорема 1. Нехай квадратична форма $f(z) = (B_{m \times m} \check{z}, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ij} z_i z_j$ невизначена, причому $B_{m-1 \times m-1}$ визначена невід'ємно. Тоді для всіх векторів z , що задовольняють умові, виконується: $z_m \check{0} 0$.

Теорема 2. Нехай квадратична форма $f(z) = (B_{m \times m} \check{z}, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ij} z_i z_j$ невизначена, причому $B_{m-1 \times m-1}$ визначена невід'ємно. Тоді існує пряма, яка проходить через початок координат, всі точки якої $z(z_1, \dots, z_m)$, за винятком початку координат, задовольняють нерівності $f(z) < 0$.

В роботі показано, що пряма може бути задана наступним чином

$$z_i = \frac{z_i^*}{z_m^*} \check{t}, i \in [1: m-1], z_m = t,$$

де $z^* \check{0} R^m$ – деяка точка, для якої виконується $f(z^*) < 0$.

З теореми 2 випливає, що нерівність має нескінченну кількість розв'язків ($\forall t \in \mathbb{R}^+$). Розглянемо випадок, коли $z_m = t = 1$. Тоді набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} b_{ij} z_i z_j + \sum_{i=1}^{m-1} b_{im} z_i + \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj} z_j + b_{mm} < 0$$

В зв'язку із тим що матриця $B_{m \times m}$ симетрична, ця нерівність може бути записана наступним чином

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} b_{ij} z_i z_j + 2 \sum_{i=1}^{m-1} b_{im} z_i + b_{mm} < 0$$

Ліва частина нерівності представляє собою опуклу функцію. Тому дана нерівність може бути розв'язана з використанням існуючих методів математичного програмування з модифікацією на випадок необмеженості функції цілі знизу. Знайдемо мінімум зазначеної функції, якщо він існує. Очевидно, отримане таким чином значення z є розв'язком нерівності, а отже, відповідним розв'язком нерівності. На випадок необмеженості функції цілі знизу розроблено модифікацію градієнтного методу найшвидшого спуску.

Припустимо, що знайдено $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{m-1}, 1)$, що задовольняє нерівності. На підставі теореми 2 $\forall t \in \mathbb{R}^+$ вектор $z = (\bar{z}_1 \cdot t, \dots, \bar{z}_{m-1} \cdot t, t)$ задовольняє нерівності.

Оскільки обирається z^* таке, що $\|z^*\| = 1$, то $t = \frac{1}{\sqrt{\bar{z}_1^2 + \dots + \bar{z}_{m-1}^2 + 1}}$.

Метод "P-алгоритм" розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця. Нехай є деяке наближення до розв'язку оптимізаційної задачі - $x^r \in X, r = 0, 1, 2, \dots$, де X - множина, задана умовами -. Знайдемо наступне наближення $x^{r+1} \in X$ так, щоб виконувалася нерівність

$$f(x^{r+1}) < f(x^r)$$

Для цього на кожному кроці розв'язання задачі - будемо розглядати K задач про призначення з різними функціями цілі, але з однаковою множиною допустимих розв'язків:

$$f_k(x) = \prod_{i=1}^{L_{\max}} \prod_{j=1}^{L_{\max}} c_{ij}^k x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\prod_{i=1}^{L_{\max}} x_{ij} = 1, j \in [1: L_{\max}],$$

$$\prod_{j=1}^{L_{\max}} x_{ij} = 1, i \in [1: L_{\max}], k \in [1: K],$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in [1: L_{\max}], j \in [1: L_{\max}].$$

Для того, щоб нерівність виконалася, наближення $x^{r+1} \in X$ повинне задовольняти наступній системі нерівностей: $f_k(x^{r+1}) < f(x^r), \forall k \in [1: K]$. Кожна із задач може бути поставлена як транспортна задача, тому для знаходження x^{r+1} використаємо ідею методу потенціалів.

Побудуємо множину $K_{\max}(x^r) = \{k \in [1: K] \mid f_k(x^r) = f(x^r)\}$. Щоб зменшити $f(x^r)$, зменшимо значення $f_k(x^r), k \in K_{\max}(x^r)$ так, щоб виконалася умова $f_k(x^{r+1}) < f(x^r), \forall k \in K_{\max}(x^r)$.

Для всіх задач побудуємо єдиний опорний план \bar{x}_0^r , який відповідає x^r і знайдемо потенціали. Позначимо їх наступним чином:

$$u_i^k(\bar{x}_0^r), i \in [1: N]; v_j^k(\bar{x}_0^r), j \in [1: L_{\max}].$$

Тоді оцінки можна розрахувати за формулою

$$\Delta_{ij}^k(\bar{x}_0^r) = u_i^k(\bar{x}_0^r) + v_j^k(\bar{x}_0^r) - c_{ij}^k, i \in [1: L_{\max}], j \in [1: L_{\max}].$$

Якщо хоча б для одного $k \in K_{\max}(x^r)$ для всіх клітин немає жодної додатної оцінки, тобто

$$\Delta_{ij}^k(\bar{x}_0^r) \leq 0, k \in K_{\max}(x^r), \forall i \in [1: L_{\max}], \forall j \in [1: L_{\max}],$$

то опорний план задачі k поліпшити неможливо. Дане твердження впливає із умов оптимальності опорного плану транспортної задачі. Іншими словами, функція f_k досягла мінімуму на множині допустимих розв'язків в точці x^r .

Теорема 3. Нехай $x^* \in X$, така, що функція f_{k^*} досягає в ній свого найменшого значення, $k^* \in K_{\max}(x^*)$. Тоді f також досягає свого найменшого значення в цій точці.

Якщо $\forall k \in K_{\max}(x^r)$ умова не виконується, необхідно провести додаткові дослідження.

Розглянемо два можливі випадки:

- в базис вводиться клітина, яка призводить до перевезення по циклу нуля.
- в базис вводиться клітина, яка призводить до перевезення по циклу одиниці.

При перевезенні по циклу нуля буде отримано ту ж саму точку x^r , якій відповідатиме деякий базис, відмінний від \bar{x}_0^r положенням однієї базисної клітини, що містить фіктивне перевезення. Для зручності позначимо через \bar{x}_s^r s -ий базис, який відповідає x^r -ій точці.

При перевезенні по циклу одиниці буде отримано точку $x^{r+1} \notin x^r$. В залежності від того, яка саме клітина вводиться в базис, функція цілі $f(x^{r+1})$ може збільшитися, зменшитися, або не змінитися. Справедлива наступна теорема.

Теорема 4. Нехай маємо задачу $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{L_{\max}} \sum_{j=1}^{L_{\max}} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, x \in X$, де X –

множина, яка описується системою обмежень $-$, і нехай \bar{x}^r – опорний план, що відповідає точці x^r . Тоді при введенні в базис клітини (i^*, j^*) , яка породжує перевезення по циклу одиниці виконується $\tilde{f}(x^r) - \tilde{f}(x^{r+1}) = \Delta_{i^* j^*}(\bar{x}^r)$.

Використаємо цю теорему при дослідженні випадку, коли по циклу перевозиться одиниця. Нехай в базис вводиться клітина (i^*, j^*) , і при цьому виникає одиничне перевезення. Тоді має місце один із наступних варіантів:

- 1) $\exists k^* \in K_{\max}(x^r)$ таке що $\Delta_{i^* j^*}^{k^*}(\bar{x}_s^r) < 0$;
- 2) $\exists k^* \in K_{\max}(x^r)$ таке що $\Delta_{i^* j^*}^{k^*}(\bar{x}_s^r) = 0$
та не існує $\bar{k} \in K_{\max}(x^r)$ такого, що $\Delta_{i^* j^*}^{\bar{k}}(\bar{x}_s^r) < 0$,
- 3) $\forall k^* \in K_{\max}(x^r)$ виконується $\Delta_{i^* j^*}^{k^*}(\bar{x}_s^r) > 0$.

На підставі теореми 4 можна зробити такі висновки.

В першому випадку функція f_{k^*} збільшиться. А це призведе до збільшення функції максимуму. У другому випадку f_{k^*} не зміниться ($f_{k^*}(x^{r+1}) = f_{k^*}(x^r)$), тому

$f(x^{r+1}) = \max_H^M \max_{k \in K_{\max}(x^r)} f_k(x^{r+1}), f_{k^*}(x^r) \Big|_{\exists}^b$. Оскільки $k^* \in K_{\max}(x^r)$, то $f_{k^*}(x^r) = f(x^r)$,

звідси $f(x^{r+1}) = \max_H^M \max_{k \in K_{\max}(x^r)} f_k(x^{r+1}), f(x^r) \Big|_{\exists}^b$ і $f(x^r)$. Тобто значення функції

максимуму не зменшиться $f(x^{r+1})$ і $f(x^r)$. В третьому випадку f_{k^*} зменшиться

$(f_k(x^{r+1}) < f_k(x^r), \forall k \in K_{\max})$. Для того, щоб значення функції максимуму в наступній точці зменшилося, необхідне виконання наступної нерівності:

$$f_k(x^r) - \Delta_{i^*, j^*}^k(\bar{x}_s^r) < f(x^r), \forall k \in K_{\max}.$$

Тобто, щоб виконалося, в базис можна вводити ті клітини, які задовольняють умовам 1.

Нехай в базис вводиться клітина (i^*, j^*) , і при цьому виникає перевезення по циклу нуля. Тоді значення функція цілі не зміниться, так як залишиться та ж сама точка x^r , якій відповідає інший опорний план \bar{x}_{s+1}^r . Введення в базис таких клітин не суперечить умові. Для уникнення зациклювання методу будемо вводити в базис лише ті клітини, які задовольняють умовам 1.

Алгоритм методу.

1. Обирається початковий базис \bar{x}_0^0 , якому відповідає точка x^0 . $s = 0$, $r = 0$.
2. Нехай є базис \bar{x}_s^r , якому відповідає точка x^r , тоді:
 - 2.1. Будується множина $K_{\max}(x^r) = \{k \in [1:K] \mid f_k(x^r) = f(x^r)\}$. Для \bar{x}_s^r знаходяться потенціали та оцінки для всіх $k \in [1:K]$.
 - 2.2. Якщо хоча б для одного $k \in K_{\max}(x^r)$ виконується умова, то $x^* = x^r$ є глобальним мінімумом задачі, кінець роботи алгоритму. Інакше:
 - 2.3. Знаходиться множина клітин $I(\bar{x}_s^r)$, кожен елемент якої задовольняє умові. Якщо вона порожня, то здійснюється перехід до пункту 4. Інакше:
 - 2.4. Серед елементів множини $I(\bar{x}_s^r)$ обирається такий, що задовольняє умові. Якщо таких не існує, то здійснюється перехід до пункту 4. Якщо таких елементів декілька, то в першу чергу обирається той, що призводить до одиничного перевезення. Позначимо його через (i^*, j^*) .
 - 2.5. Знаходиться наступний опорний план.
3. Якщо значення перевезення дорівнює одиниці, то отримано нову точку x^{r+1} , якій відповідає базис \bar{x}_0^{r+1} . r збільшується на одиницю, а s присвоюється нуль. У випадку фіктивного перевезення отримаємо ту ж точку x^r , але інший базис \bar{x}_{s+1}^r . r не змінюється, а s збільшується на одиницю. Здійснюється перехід до пункту 2.
4. За розв'язок обирається $x^* = x^r$. Оскільки в даній точці не виконуються умови теореми 3, то x^* є стаціонарною точкою методу.

Комбінований метод. У випадку, коли x^* не є точкою глобального мінімуму, для подальшого розв'язання задачі застосовується метод вектора спаду. В результаті його роботи виявляється, що x^* є точкою локального мінімуму (знайдено наближений розв'язок), або знаходиться точка з меншим значенням функції цілі –

x^{**} (метод “Р-алгоритм” застосовується знову з початковим базисом, який відповідає x^{**}).

Ефективність методу. Розроблений алгоритм є наближенням. Визначимо межі, в яких лежить значення функції цілі в точці глобального мінімуму задачі -. Нехай x^* – розв’язок, отриманий в результаті застосування методу, а x^{**} – точний розв’язок. Очевидна наступна нерівність $f(x^{**}) \leq f(x^*)$. Таким чином $f(x^*)$ є верхньою межею розв’язку $f(x^{**})$.

Нижню межу можна отримати, розв’язавши ослаблену задачу -. Вона зводиться до наступної задачі лінійного програмування

$$f(x, z) = z \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N e^{c_{ij}^k x_{ij} - z} \leq 0, k \in [1:K], \\ & \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N e^{x_{ij}} = 1, j \in [1:N], \\ & \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^M e^{x_{ij}} = 1, i \in [1:N], \\ & 0 \leq x_{ij} \leq 1, i \in [1:N], j \in [1:N], \end{aligned}$$

В результаті розв’язання отримаємо точку $(x^{\check{y}}, z^{\check{y}})$. Розв’язок задачі - визначається по розв’язку задачі наступним чином: $\tilde{x} = x^{\check{y}}, f(\tilde{x}) = z^{\check{y}}$. Очевидна нерівність $f(\tilde{x}) \leq f(x^{**})$. Після об’єднання побудованих нерівностей, отримаємо: $f(x^{**}) \leq f(\tilde{x}) \leq f(x^*)$.

У четвертому розділі наводяться результати чисельних експериментів задачі неперервного розміщення та задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця.

У п’ятому розділі здійснюється вибір інструментальних засобів розробки програмного комплексу “Physical fields” та описуються основні класи розроблених проектів.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі отримано вирішення наукової задачі підвищення ефективності методів розв’язання задач розміщення джерел фізичного поля шляхом вдосконалення математичних моделей та розробки нових методів розв’язання цих задач. При цьому отримано наступні наукові результати.

1. Набув подальшого розвитку метод розв’язання мінімаксної задачі неперервного розміщення, що дозволило розміщувати джерела довільної опуклої форми в області довільної опуклої форми;

2. Вперше розроблено метод спуску з стаціонарної точки для двічі неперервно диференційованої функції цілі та доведено теореми, які дозволяють побудувати вектор спуску;
3. Вперше побудовано таку математичну модель мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця, яка дозволила зробити декомпозицію задачі, виділивши етап розрахунку поля та етап розв'язання оптимізаційної задачі;
4. Вперше розроблено метод "P-алгоритм" розв'язання задачі дискретного розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця та доведена достатня умова, при виконанні якої точка, знайдена методом "P-алгоритм", є точкою глобального мінімуму;
5. Вперше побудовано комбінований метод розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця, який збігається до точки локального мінімуму;
6. Вперше побудовано оцінки розв'язку, отриманого в результаті застосування методу "P-алгоритм" або комбінованого методу, що дозволило оцінити точність розв'язку, отриманого в результаті застосування цих методів.
7. Розроблено програмний комплекс "Physical fields" розв'язання задач розміщення джерел фізичного поля.
8. Результати, отримані в дисертаційній роботі, використовуються під час розробки дипломних робіт спеціалістів та атестаційних роботах магістрів кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Яремчук С. І. P-алгоритм розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля / С. І. Яремчук, Р. В. Бурда // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2009. – № 2. – С. 119-133.
2. Яремчук С. І. Алгоритм рішення дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля / С. І. Яремчук, Р. В. Бурда, С. С. Матущенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 5. – С. 153-163.
3. Яремчук С. І. Комбінований метод розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля / С. І. Яремчук, Р. В. Бурда, С. С. Матущенко // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2009. – № 1. – С. 183-189.
4. Яремчук С. І. Метод спуску з стаціонарної точки двічі неперервно диференційованої функції цілі / С. І. Яремчук, Р. В. Бурда // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2007. – № 1. – С. 117-124.
5. Яремчук С. І. Оптимізація розміщення об'єктів з використанням алгоритму спуску зі стаціонарної точки / С. І. Яремчук, Р. В. Бурда // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2007. – № 1 (40). – С. 169-172.
6. Яремчук С. І. Метод штрафних функцій в мінімакській задачі розміщення стаціонарних джерел фізичного поля. / С. І. Яремчук, Р. В. Бурда // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – № 3. – С. 20-23.

7. Бурда Р. В. Размещение источников, минимизирующее максимальное по времени поле в точке / Р. В. Бурда // Проблемы теоретической и прикладной математики: 34 регион. молод. конф. 27–31 января 2003г.: труды конф. – Екатеринбург, Россия, 2003. – С. 193-197.
8. Бурда Р. В. Розрахунок поля методом Рітца з використанням R-функцій / Р. В. Бурда // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. – 2001. – № 19. – С. 114-118.
9. Яремчук С. І. Р-алгоритм розв'язання мінімаксної задачі про призначення. Побудова оцінок методу / С. І. Яремчук, Р. В. Бурда // Системний аналіз. Інформатика. Управління: всеукр. наук.-практ. конф. 04–05 березня. 2010р.: тези доповіді. – Запоріжжя, 2010. – С. 207.
10. Яремчук С. І. Розміщення джерел фізичного поля третім методом послідовних наближень / С. І. Яремчук, Р. В. Бурда // Обчислювальна та прикладна математика: III міжн. конф. 11-12 вересня 2009 р.: тези доп. – К., 2009. – С. 75.

АНОТАЦІЯ

Бурда Р. В. “Чисельні методи розв’язання мінімаксних задач розміщення джерел фізичних полів” – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. ХНУРЕ, Харків, 2010.

В дисертації досліджуються мінімаксні задачі розміщення джерел фізичного поля. На розміщення джерел накладаються обмеження взаємного неперетину та невиходу за межі області. У випадку мінімаксної задачі дискретного розміщення посадкові місця повинні бути розміщені таким чином, щоб джерела не перетиналися між собою та не виходили за межі області при будь-якому призначенні джерел на посадкові місця.

До розв’язання мінімаксної задачі неперервного розміщення джерел фізичного поля застосовано метод штрафних функцій та третій метод послідовних наближень. Для перевірки, чи знайдена точка являється точкою локального мінімуму, розроблено метод спуску зі стаціонарної точки. Для розв’язання мінімаксної задачі дискретного розміщення джерел фізичного поля розроблено метод “*P* - алгоритм” та комбінований метод розв’язання цієї задачі.

Запропоновані методи реалізовані у програмному комплексі “Physical fields”.

Ключові слова: фізичне поле, метод спуску зі стаціонарної точки, *P*-алгоритм, метод штрафних функцій, третій метод послідовних наближень, метод потенціалів.

THE ABSTRACT

Burda R.V. “Numerical methods for solving the minimax problems of physical fields allocation” – the Manuscript.

The thesis for getting the PhD degree in Physics and Mathematics on specialty 01.05.02 - mathematical modeling and numerical methods. KNURE, Kharkov, 2010.

The minimax problem of physical fields source allocation is considered in thesis. The described sources belong to the domain and are not crossed by one another. The specified positions are allocated the way to avoid their mutual intersection or the region overrunning

by means of appointing them to the fixed places – the case of discrete minimax problem is considered.

The penalty method and the third method of successive approximations are being used for solving the continuous minimax problem. To check whether the function reaches a local minimum at the point found the descent method with a stationary point is developed. Both -algorithm and the combined algorithm are developed to solve the discrete minimax task.

This methods are implemented in the software system entitled “Physical fields”.

Keywords: physical field, the descent method from the stationary point, -algorithm, the penalty function method, the third method of successive approximations, the method of potentials.

АННОТАЦИЯ

Бурда Р. В. “Численные методы решения минимаксных задач размещения источников физических полей” – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. ХНУРЭ, Харьков, 2010.

В диссертации рассматриваются две задачи: минимаксная задача размещения источников физического поля в заданной области и минимаксная задача размещения источников физического поля на заданные посадочные места. На размещение источников накладывается условие взаимного непересечения и невыхода за пределы источника. В случае задачи размещения источников физического поля на заданные посадочные места на размещение источников накладывается дополнительное ограничение: полюс каждого размещаемого источника должен принадлежать множеству посадочных мест.

Для решения минимаксной задачи размещения источников физического поля в заданной области используется известный подход, который базируется на методе штрафных функций и методах последовательных приближений. В данной работе в общем виде построены функции штрафа пересечения объектов произвольной выпуклой формы, при этом использован аппарат Φ -функций, что позволило размещать источники физического поля произвольной выпуклой формы в области произвольной выпуклой формы (для этого необходимо построить соответствующие Φ -функции). В случае, когда методы последовательных приближений останавливаются в стационарной точке, применяется построенный в данной работе метод спуска со стационарной точки. Доказаны теоремы, которые позволяют найти вектор спуска. Применение метода спуска со стационарной точки позволяет в некоторых случаях улучшить решение, полученное методами последовательных приближений.

Для решения минимаксной задачи размещения источников физического поля на заданные посадочные места построена математическая модель задачи, которая позволила отделить вычисление поля от метода оптимизации. В результате получена минимаксная задача о назначениях специального вида, которая решается разработанными в данной работе методами: “P-алгоритмом” и комбинированным методом. Метод “P-алгоритм” является методом спуска. Доказано условие, при выполнении которого точка, найденная методом “P-алгоритм” есть точкой глобального минимума минимаксной задачи. Комбинированный метод базируется на методе “P-алгоритм” и методе вектора спада. Его применение позволяет найти точку локального (а при выполнении построенного условия – глобального) минимума. Найдены оценки решения, полученного с использованием метода “P-алгоритм” или комбинированного метода. Предложенные методы реализованы в программном комплексе Physical fields”.

Ключевые слова: физическое поле, метод спуска с стационарной точки, P-алгоритм, метод штрафных функций, третий метод последовательных приближений, метод потенциалов.

