

**РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ  
ОБОБЩЕННОГО СИГНАЛЬНОГО ГРАФА ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ**

Применение методов топологического анализа линейных электрических цепей позволяет упростить процесс вычисления передаточных функций цепей. Большая группа топологических методов основана на составлении обобщенного сигнального графа цепи и применении формулы Мезона для расчета необходимых характеристик [1]. Обобщенный сигнальный граф является топологической моделью анализируемой цепи и может выглядеть по-разному в зависимости от того, какой сигнальный базис положен в основу составления модели. Сигнальные базисы могут быть однородными (базис узловых напряжений, базис контурных токов) и неоднородными (базис переменных состояния и т.п.). Важным достоинством моделей, сформированных в однородном сигнальном базисе, является простота и ясность процедуры составления обобщенного сигнального графа. Однако есть и недостатки. Использование формулы Мезона требует вычислять определитель графа и определители выбранных путей. При этом неизбежно возникает ситуация, когда в громоздких выражениях для определителей необходимо выявлять много взаимно сокращающихся членов [1]. Процесс этот зачастую весьма утомительный и может оказаться серьезным препятствием на пути достижения основной цели анализа цепи, например, вычисления передаточной функции.

Можно предложить методику вычисления определителей графа, которая позволила бы избежать учета сокращающихся в дальнейшем составляющих в выражении для определителя графа.

Рассмотрим абстрактный пример обобщенного сигнального графа  $\Gamma$  (рис. 1). Наличие в графе  $\Gamma$  контура, составленного из вершин  $x_i, x_j$  и встречных дуг, их соединяющих, служит причиной появления в выражении, вычисляющем определитель графа, пар взаимно сокращающихся слагаемых. Это является следствием того, что веса дуг входят в качестве слагаемых в выражения для весов вершин, в которые направлены соответствующие дуги:

$$t_{ii} = t_{ii}^* + t_{ij}, \quad t_{jj} = t_{jj}^* + t_{ji},$$

где  $t_{ii}, t_{jj}$  – веса вершин  $x_i, x_j$  соответственно;  $t_{ij}$  – вес дуги, соединяющей вершину  $x_j$  с вершиной  $x_i$ ;  $t_{ji}$  – вес дуги, соединяющей вершину  $x_i$  с вершиной  $x_j$ .

Присвоим выбранному контуру номер  $N$ . Далее следует предпринять некоторые действия с элементами, входящими в контур под номером  $N$ , и предложить способ учета весов этих элементов при формировании выражения для вычисления определителя графа либо подграфа, в котором присутствует этот контур.

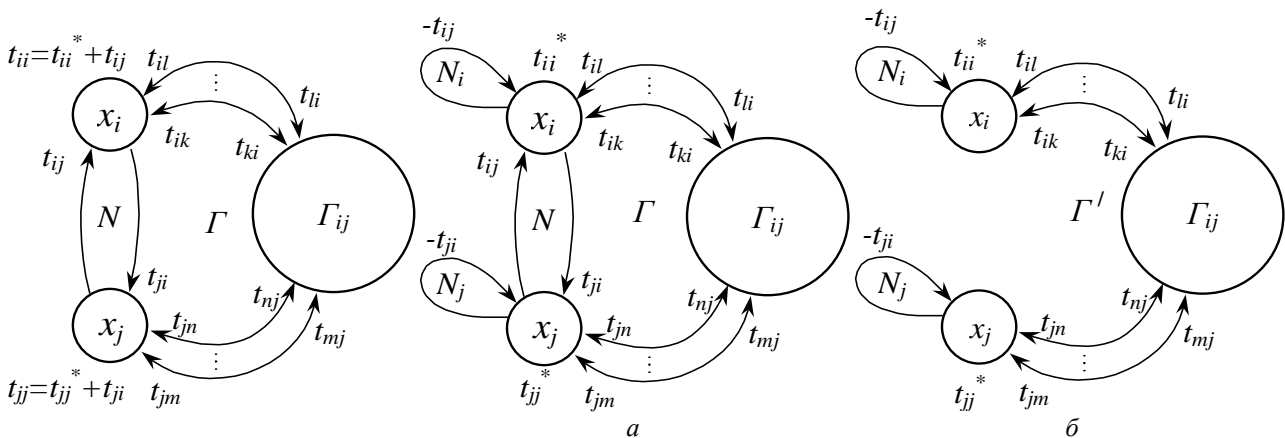


Рис. 1

Рис. 2

Воспользуемся одним из правил эквивалентных преобразований графов и дополним вершины контура  $x_i, x_j$  петлями с весами  $-t_{ij}$  и  $-t_{ji}$  соответственно. При этом веса этих вершин уменьшатся соответственно на  $t_{ij}$  и  $t_{ji}$  (рис. 2, а) [2].

Присвоим петле при вершине  $x_i$  номер  $N_i$ , петле при вершине  $x_j$  номер  $N_j$ . Тогда контур под номером  $N$  можно исключить из графа  $\Gamma$  (рис. 2, б). Таким образом, произошла замена контура  $N$  на два контура (петли)  $N_i$  и  $N_j$ . Теперь при вычислении определителя нужно рассматривать два вновь появившихся контура по-отдельности и не принимать во внимание пару несвязанных контуров  $N_i - N_j$ .

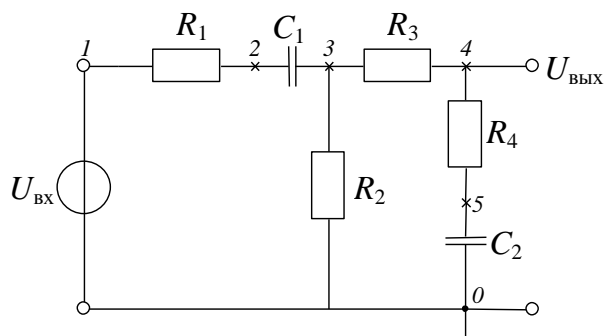


Рис. 3

В качестве иллюстрации предлагаемой методики расчета рассмотрим пример линейной электрической цепи (рис. 3) и вычислим ее передаточную функцию.

Обозначим все узлы и пронумеруем их цифрами от 0 до 5. Построим обобщенный сигнальный граф цепи (рис. 4, а) [2]. Узлу с номером 1 соответствует вершина-исток, не имеющая веса. Узлам с номерами от 2-го до 5-го соответствуют взвешенные простые каскадные вершины.

Сигнальными переменными вершин служат соответствующие узловые напряжения, отсчитываемые от базового узла с нулевым номером. В качестве входной выберем вершину с номером 1, а в качестве выходной – вершину с номером 4.

Воспользуемся формулой Мезона для вычисления передаточной функции [2]:

$$W(p) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot \Delta_i}{\Delta},$$

где  $n$  – общее количество различных путей от входной вершины к выходной;  $P_i$  – вес  $i$ -го пути;  $\Delta_i$  – определитель, соответствующий  $i$ -му пути;  $\Delta$  – определитель графа.

Вычисление определителя графа  $\Delta$ , находящегося в знаменателе формулы Мезона, наиболее громоздко.

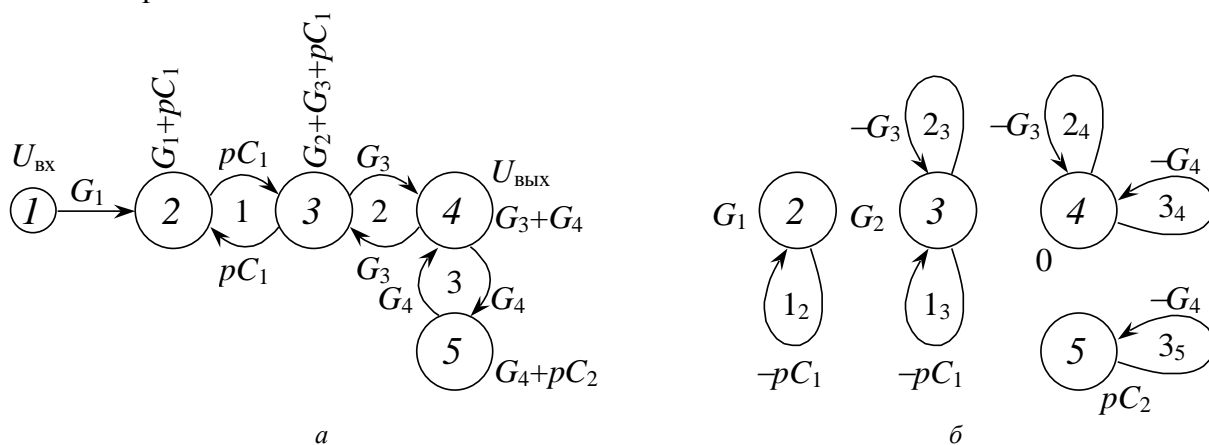


Рис. 4

Согласно общему правилу, определитель графа вычисляется как сумма определителей элементарных графов. Элементарный граф – это совокупность  $m$  не касающихся контуров и всех не принадлежащих этим контурам взвешенных вершин. Причем когда  $m=0$  – это просто все взвешенные вершины графа, а когда  $m=1$  – это одиночные контуры с невошедшими в них вершинами [2].

Граф (рис. 4, а) содержит пять элементарных графов, которые могут быть вычислены по формулам [2]:

$$\delta^{(0)} = (G_1 + pC_1)(G_2 + G_3 + pC_1)(G_3 + G_4)(G_4 + pC_2), \quad (1)$$

$$\delta_1^{(1)} = -(pC_1)^2(G_3 + G_4)(G_4 + pC_2), \quad (2)$$

$$\delta_2^{(1)} = -G_3^2(G_1 + pC_1)(G_4 + pC_2), \quad (3)$$

$$\delta_3^{(1)} = -G_4^2(G_1 + pC_1)(G_2 + G_3 + pC_1), \quad (4)$$

$$\delta_1^{(2)} = (-1)(pC_1)^2(-1)(G_4)^2, \quad (5)$$

где  $G$  и  $pC$  – обозначают проводимости соответствующих резистивных и емкостных элементов цепи. Определитель графа тогда вычисляется при помощи выражения:

$$\Delta = \delta^{(0)} + \delta_1^{(1)} + \delta_2^{(1)} + \delta_3^{(1)} + \delta_1^{(2)}. \quad (6)$$

После подстановки выражений (1) – (5) в (6) и раскрытия скобок в результирующем выражении образуется 39 слагаемых, среди которых имеется 14 пар взаимно сокращающихся. Таким образом, всего останется 11 слагаемых. Заранее сказать, какой вид будут иметь эти 11 слагаемых, не произведя подстановку (1) – (5) в (6), практически невозможно.

Если придать графу цепи вид, который показан на рис. 4, б и учесть нулевой вес четвертой вершины, то можно записать следующую формулу для вычисления определителя:

$$\Delta = \sum_{i=1}^2 \delta_i^{(1)} + \sum_{i=1}^6 \delta_i^{(2)} + \sum_{i=1}^3 \delta_i^{(3)}. \quad (7)$$

Общее количество слагаемых в формуле (7) равно одиннадцати, а это означает, что никакие из них не должны взаимно уничтожаться.

При рассмотрении одиночных контуров следует учесть только петли с номерами: 2<sub>4</sub> и 3<sub>4</sub>:

$$\sum_{i=1}^2 \delta_i^{(1)} = G_3 \cdot G_1 G_2 pC_2 + G_4 \cdot G_1 G_2 pC_2. \quad (8)$$

Пары несвязных контуров (петель), подлежащие учету, занесены в следующий список: 1<sub>2</sub>–2<sub>4</sub>, 1<sub>3</sub>–2<sub>4</sub>, 2<sub>4</sub>–3<sub>5</sub>, 1<sub>2</sub>–3<sub>4</sub>, 1<sub>3</sub>–3<sub>4</sub>, 2<sub>3</sub>–3<sub>4</sub>.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \delta_i^{(2)} = & G_3 \cdot pC_1 \cdot G_2 pC_2 + G_3 \cdot pC_1 \cdot G_1 pC_2 + G_3 \cdot G_4 \cdot G_1 G_2 + \\ & + G_4 \cdot pC_1 \cdot G_2 pC_2 + G_4 \cdot pC_1 \cdot G_1 pC_2 + G_4 \cdot G_3 \cdot G_1 pC_2. \end{aligned} \quad (9)$$

И, наконец, список подлежащих учету троек не касающихся контуров: 1<sub>2</sub>–2<sub>3</sub>–3<sub>4</sub>, 1<sub>2</sub>–2<sub>4</sub>–3<sub>5</sub>, 1<sub>3</sub>–2<sub>4</sub>–3<sub>5</sub>.

$$\sum_{i=1}^3 \delta_i^{(3)} = pC_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot pC_2 + pC_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_2 + pC_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_1. \quad (10)$$

Подставляя соотношения (8) – (10) в (7) и приводя подобные, получаем окончательное выражение для вычисления определителя графа  $\Gamma$  (рис. 4, а):

$$\begin{aligned} \Delta = & p^2 C_1 C_2 [(G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_3 G_4] + \\ & + p \{ C_1 G_3 G_4 (G_1 + G_2) + C_2 G_1 [G_2 (G_3 + G_4) + G_3 G_4] \} + (G_1 G_2 G_3 G_4). \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая (11) и формулу Мезона, получим окончательное выражение для операторной передаточной функции по напряжению цепи (рис. 3):

$$H(p) = \frac{G_1 G_3}{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_3 G_4} \left( p^2 + p \frac{G_4}{C_2} \right) / / \left\{ p^2 + p \left[ \frac{G_1 + G_2}{C_2} \cdot \frac{G_3 G_4}{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_3 G_4} + \frac{G_1}{C_1} \cdot \frac{G_2(G_3 + G_4) + G_3 G_4}{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_3 G_4} \right] + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} \cdot \frac{G_3 G_4}{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_3 G_4} \right\}$$

Подводя итог, сформулируем ряд рекомендаций, следуя которым можно кардинально сократить количество вычислений при анализе линейных электрических цепей методом обобщенных сигнальных графов с однородным базисом.

### Правила преобразования графа

1. Выявить все двугранные контуры графа.
2. Среди двугранных контуров выявить те, у которых вес каждой дуги, входящей в соответствующую вершину контура, также является слагаемым в весе этой вершины.
3. Выбранные таким образом контуры следует пронумеровать.
4. Вершины выбранных контуров также необходимо пронумеровать.
5. После этого следует пристроить к каждой пронумерованной вершине петлю с весом, равным значению слагаемого в весе вершины, которое совпадает по величине с весом дуги контура, входящей в рассматриваемую вершину, но взятым с обратным знаком.
6. Появившимся на графе петлям присваивается составной номер: первая цифра соответствует номеру двугранного контура, в составе которого находится вершина с рассматриваемой петлей (цифра обычного размера), вторая цифра равна номеру вышеупомянутой вершины (в виде подстрочного индекса).
7. Затем необходимо удалить дуги, образующие выбранные двугранные контуры.
8. Получившийся в результате такого преобразования граф можно использовать для вычисления определителя исходного графа.

### Правила вычисления определителя графа

1. В преобразованном графе возможно появление вершин с нулевым весом. В этом случае определитель элементарного графа, составленного только из всех взвешенных вершин, будет равен нулю ( $\delta^{(0)} = 0$ ). Также нужно вычислять определители только тех элементарных графов, контуры которых обязательно включают в себя все вершины с нулевым весом. Определитель элементарного графа, в котором имеется хотя бы одна вершина с нулевым весом, не вошедшая в состав ни одного контура, равен нулю.
2. При вычислении определителей элементарных графов, состоящих из пар, троек, четверок и т.д. несвязанных контуров и всех невошедших в них взвешенных вершин, необходимо обязательно исключить из расчета те элементарные графы, в составе которых имеются пары петель с одинаковой первой цифрой в ее номере.
3. Просуммировав все определители элементарных графов, вычисленных в п.п. 1, 2, получим выражение для определителя исходного графа. При этом искать слагаемые, которые могли бы сократиться, не следует, поскольку в предлагаемой методике их появление исключается.

**Список литературы:** 1. Анисимов В.И. Топологический расчет электронных схем. Л.: Энергия, 1977. 248 с.  
2. Зеленин А.Н., Костромицкий А.И., Бондарь Д.В. Активные фильтры на операционных усилителях. Харьков: Телетех, 2003. 150 с.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 27.10.2003.