

Харьковский национальный университет радиозлектроники

Кафедра прикладной математики

Колосова С.В., Сидоров М.В.

**ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Радиозлектроника и информатика. – 2013. – № 3 (62). – С. 28 – 31.

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

КОЛОСОВА С.В., СИДОРОВ М.В.

(Системы и процессы управления)

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения с экспоненциальной нелинейностью. С помощью функции Грина и квазифункции Грина эта задача заменяется эквивалентными интегральными уравнениями, для которого предлагаются и обосновываются численные методы.

Введение. В современной науке наблюдается большой интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Математическими моделями таких процессов обычно являются нелинейные краевые задачи математической физики. В связи с этим актуальным является построение методов конструктивного решения таких задач.

1. Постановка задачи. Целью работы является рассмотрение некоторых подходов к построению последовательных приближений к положительному решению краевой задачи вида

$$-\Delta u = e^{-u} \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) возникает, например, при математическом моделировании течения проводящей среды в цилиндре с непроницаемыми стенками [1] и математическом моделировании теплового самовоспламенения химически активной смеси газов в сосуде [7].

2. Построение двусторонних приближений. Известно [2], что задача (1), (2) в классе непрерывных функций эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, s) e^{-u(s)} ds, \quad (3)$$

где $G(x, s)$ – функция Грина оператора Лапласа $-\Delta$ для первой краевой задачи в области Ω , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$.

На конусе K неотрицательных в $C(\Omega)$ функций введем в рассмотрение нелинейное операторное уравнение $u = Tu$, где

$$Tu = \int_{\Omega} G(x, s) e^{-u(s)} ds.$$

Рассмотрим некоторые свойства оператора T :

– оператор T антитонный на конусе K , т.е. для всех $u, v \in K$, таких, что $u \leq v$, выполняется $Tu \geq Tv$. Сопутствующим [4] оператору T является оператор

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} G(x, s) e^{-w(s)} ds;$$

– существует инвариантный для оператора T конусный отрезок $\langle v_0, u_0 \rangle$ такой, что

$$T \langle v_0, u_0 \rangle \subset \langle v_0, u_0 \rangle,$$

здесь $v_0(x) \equiv 0$, $u_0(x) = \int_{\Omega} G(x, s) ds$.

Конусный отрезок $\langle v_0, u_0 \rangle$ является также сильно инвариантным, т.к. выполняются неравенства

$$\hat{T}(v_0, u_0) \geq v_0, \quad \hat{T}(u_0, v_0) \leq u_0;$$

– оператор T вполне непрерывен на K [4], следовательно, конус K является нормальным;

– оператор T псевдогогнутый [4] на K , т.е. существуют положительные числа α, β , такие, что для всех $v, w \in K$ ($v, w \neq 0$)

$$\alpha u_0 \leq \hat{T}(v, w) \leq \beta u_0 \quad (4)$$

и для всех $v, w \in K(u_0)$ и любого $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{T}(v, w). \quad (5)$$

Имеет место признак псевдогогнутости [4]: для всех $v, w \in K$ ($v, w \neq 0$)

$$\Phi(v, w) = \hat{T}(v, w) - \hat{T}'_v(v, w)v + \hat{T}'_w(v, w)w \geq 0. \quad (6)$$

Здесь $\hat{T}'_v(v, w)$, $\hat{T}'_w(v, w)$ – производные Фреше.

В нашем случае (6) принимает вид:

$$\Phi(v, w)h(x) = [1 - w(x)] \int_{\Omega} G(x, s) e^{-w(s)} h(s) ds.$$

При условии $\|u_0(x)\|_{C(\Omega)} = \left\| \int_{\Omega} G(x, s) ds \right\|_{C(\Omega)} \leq 1$,

чего можно всегда достичь, применив к области Ω преобразование сжатия, имеем $1 - w(x) \geq 0$, т.к. $w(x) \in \langle 0, u_0 \rangle$, и, следовательно, условие (6) выполняется;

– оператор T u_0 -псевдогогнутый на $K(u_0)$. следовательно [4], для всех $v, w \in K(u_0)$ и любого $\tau \in (0, 1)$ существует $\eta(v, w, \tau) > 0$ такая, что

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq [1 + \eta(v, w, \tau)] \tau \hat{T}(v, w). \quad (7)$$

Здесь и ранее $K(u_0)$ означат множество u_0 -ограниченных элементов $u \in K$, т.е. таких элементов $u \in K$, для которых

$$a(u)u_0 \leq u \leq b(u)u_0, \quad a, b > 0.$$

Используя (4) и (5), приходим к выводу, что в нашем случае неравенство (7) принимает вид

$$\int_{\Omega} G(x, s) e^{-\frac{w(s)}{\tau}} ds \geq (1 + \eta)\tau \int_{\Omega} G(x, s) e^{-w(s)} ds,$$

где $\eta(v, w, \tau) = \frac{\alpha}{\tau\beta}$, т.е. оператор T является u_0 -псевдогогнутым.

Для уравнения (3) с антитонным оператором T строим итерационный процесс по схеме

$$u^{(k+1)}(x) = \int_{\Omega} G(x, s) e^{-u^{(k)}(s)} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Взяв в качестве начального приближения $u^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$, получим

$$u^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = u_0(\mathbf{x}),$$

причем $u^{(0)} \leq u^{(1)} = u_0$.

Поскольку оператор T антитонный, то получим $u^{(2)} = Tu^{(1)} \leq u^{(1)} = Tu^{(0)}$, то есть $u^{(2)} \leq u^{(1)}$. Таким образом, $u^{(0)} \leq u^{(2)} \leq u^{(1)}$. Снова действуя оператором T , получим $u^{(0)} \leq u^{(2)} \leq u^{(3)} \leq u^{(1)}$. Продолжая этот процесс, получим

$$u^{(0)} \leq u^{(2)} \leq \dots \leq u^{(2k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq u^{(2k+1)} \leq \dots \leq u^{(3)} \leq u^{(1)},$$

где $u^* \in \llcorner v_0, u_0 \gg -$ точное решение задачи (1), (2).

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема. Задача (1), (2) в $C(\Omega)$ имеет единственное положительное решение, которое можно построить по схеме (8) с двусторонними приближениями, равномерно сходящимися к решению.

3. Метод квазифункций Грина. Знание функции Грина позволяет от нелинейной краевой задачи (1), (2) перейти к эквивалентному интегральному уравнению (3). Однако построение функции Грина в замкнутом виде возможно лишь для некоторых конкретных достаточно простых областей. Нами предлагается приближенный метод решения задачи (1), (2), основанный на использовании квазифункции Грина, которая строится с помощью конструктивного аппарата теории R -функций.

Пусть $\omega(\mathbf{x}) = 0$ – нормализованное до первого порядка уравнение границы $\partial\Omega$ области Ω , т.е. функция $\omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω ;
- $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$;
- $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = 1$ на $\partial\Omega$, где \mathbf{n} – внутренняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Если граница $\partial\Omega$ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых (без точек возврата), каждая из которых допускает аналитическое задание с помощью элементарной функции, то такая $\omega(\mathbf{x})$ может быть построена практически для любой Ω методом R -функций в виде элементарной функции [6].

Следуя [6], нами доказано, что решение задачи (1), (2), принадлежащее $\overset{\circ}{W}_{1/2}(\Omega)$, также является решением нелинейного интегрального уравнения

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) e^{-u(\xi)} d\xi + \int_{\Omega} u(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi, \quad (9)$$

где

$$G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r} - q(\mathbf{x}, \xi) \right],$$

$$q(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2} \ln \left[r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi) \right],$$

$$r = |\mathbf{x} - \xi|, \quad K(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\xi} q(\mathbf{x}, \xi).$$

Применяя к интегральному уравнению (9) метод последовательных приближений, сводим его к последовательности линейных интегральных уравнений

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} u^{(k)}(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi = \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) e^{-u^{(k-1)}(\xi)} d\xi, \quad (10)$$

$k = 2, 3, \dots$, где положили $u^{(1)}(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Приближенное решение уравнения (10) на каждом шаге итерационного процесса предлагается находить методом Бубнова-Галеркина [3], что позволяет получить результат в аналитическом виде.

Приближенное решение каждого из уравнений (10) ищем в виде

$$u_n^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} \varphi_j(\mathbf{x}),$$

что приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $c_j^{(k)}$,

$j = 1, 2, \dots, n, k = 2, 3, \dots$:

$$\sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \left[\int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\xi) \varphi_i(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x} \right] = \int_{\Omega} \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) \varphi_i(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n c_j^{(k)} \left[\int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\xi) \varphi_i(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x} \right] = \int_{\Omega} \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) e^{-u_n^{(k-1)}(\xi)} \varphi_i(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x},$$

$i = 1, 2, \dots, n, k = 3, 4, \dots$,

где $\{\varphi_i(\mathbf{x})\}$ – координатная последовательность.

4. Результаты вычислительного эксперимента.

Вычислительный эксперимент в задаче (1), (2) был проведен для двух областей: круга радиуса R и прямоугольника со сторонами a и b .

Для случая, когда область Ω представляет собой круг радиуса R функция Грина и квазифункция Грина задачи (1), (2) совпадают. Кроме того, для $R = 1$ известно [5] точное решение задачи из $C(\Omega)$

$$u^*(\mathbf{x}) = \ln(8k) - \ln(1 - k\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $k = 5 - 2\sqrt{6}$.

В таблице 1 приведены значения $u^{(2)}(\mathbf{x})$, $u^{(3)}(\mathbf{x})$ и $u^*(\mathbf{x})$ на луче $\varphi = 0$ при различных значениях ρ (ρ, φ – полярные координаты точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$).

Как видно из таблицы 1, точное решение $u^*(\mathbf{x})$

задачи (1), (2) на луче $\varphi = 0$ заключено в «вилку», образованную функциями $u^{(2)}(\mathbf{x})$ и $u^{(3)}(\mathbf{x})$. Норма разности между приближениями $u^{(2)}(\mathbf{x})$ и $u^{(3)}(\mathbf{x})$ составила

$$\|u^{(2)}(\mathbf{x}) - u^{(3)}(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} = 0,62 \cdot 10^{-2}.$$

Таблица 1

ρ	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$u^{(3)}$	0,21392	0,21181	0,20570	0,19561	0,18121
u^*	0,21299	0,21097	0,20489	0,19472	0,18040
$u^{(2)}$	0,20777	0,20574	0,19988	0,19019	0,17633

ρ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$u^{(3)}$	0,16231	0,13956	0,11200	0,07961	0,04239
u^*	0,16183	0,13890	0,11146	0,07931	0,04225
$u^{(2)}$	0,15812	0,13614	0,10942	0,07790	0,04156

На рис. 1 приведены поверхность и линии уровня приближения $u^{(3)}(\mathbf{x})$.

Для случая, когда область Ω представляет собой прямоугольник со сторонами a и b , функция Грина не совпадает с квазифункцией Грина и точное решение задачи (1), (2) неизвестно.

Вычисления были проведены для $a = b = 1$. В таблице 2 приведены значения $u^{(2)}(\mathbf{x})$ и $u^{(3)}(\mathbf{x})$, построенные по схеме (4), при $x_2 = \frac{1}{2}$ и различных x_1 .

Норма разности между приближениями $u^{(2)}(\mathbf{x})$ и $u^{(3)}(\mathbf{x})$ составила

$$\|u^{(2)}(\mathbf{x}) - u^{(3)}(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} = 0,13 \cdot 10^{-3}.$$

В таблице 3 приведены значения $u_{21}^{(4)}(\mathbf{x})$, построенные по схеме (10), в тех же точках, что и в таблице 2. На рис. 2 приведены поверхность и линии уровня приближения $u_{21}^{(4)}(\mathbf{x})$.

Как видно, полученные обоими методами приближенные решения хорошо согласуются.

Таблица 2

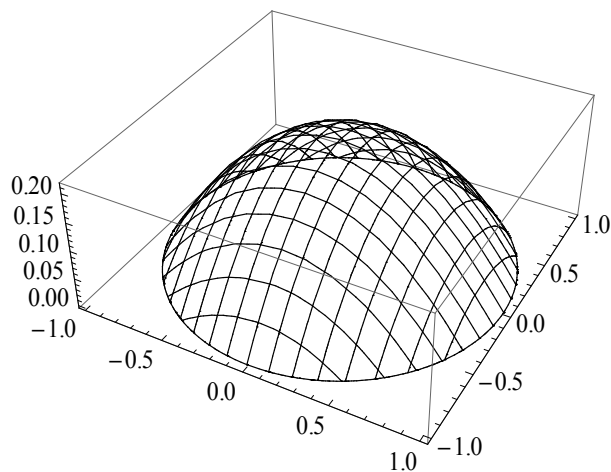
x_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u^{(3)}$	0,02800	0,04738	0,06043	0,06756	0,07004
$u^{(2)}$	0,02797	0,04731	0,06033	0,06744	0,06991

x_1	0,6	0,7	0,8	0,9
$u^{(3)}$	0,06756	0,06043	0,04738	0,02800
$u^{(2)}$	0,06744	0,06033	0,04731	0,02797

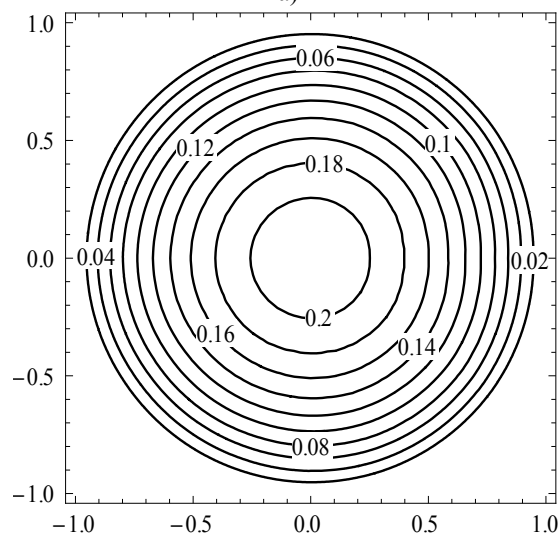
Таблица 3

x_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u_{21}^{(4)}$	0,02791	0,04756	0,06031	0,06751	0,06984

x_1	0,6	0,7	0,8	0,9
$u_{21}^{(4)}$	0,06751	0,06031	0,04755	0,02791



а)



б)

Рис. 1. Поверхность (а) и линии уровня (б) приближения $u^{(3)}(\mathbf{x})$.

5. Заключение. В работе исследована возможность построения приближенных методов решения задачи (1), (2). Один из методов основан на использовании точной функции Грина, что позволяет получить двусторонние приближения к решению рассматриваемой задачи. Другой метод использует квазифункцию Грина, которая строится, используя конструктивный аппарат теории R -функций, что позволяет приближенно решить задачу (1), (2) в областях практически произвольной геометрии, для которых функция Грина либо неизвестна, либо сложна в построении. Предлагаемые методы могут быть использованы при решении прикладных задач, математическими

моделями которых служат краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений.

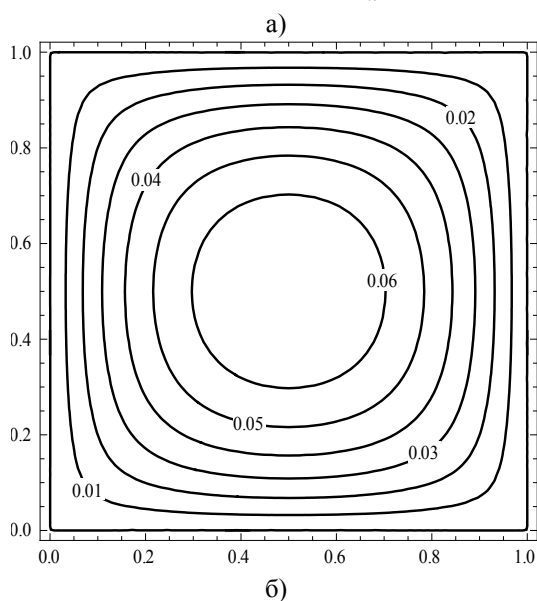
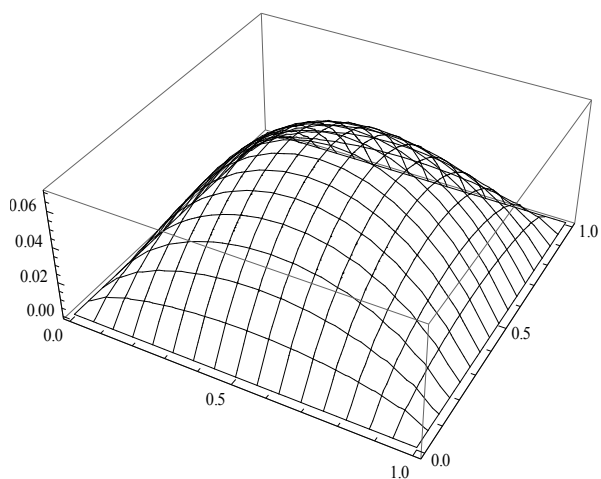


Рис. 2. Поверхность (а) и линии уровня (б) приближения $u_{21}^{(4)}(x)$.

ство и литература. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: всемирная история, история искусств. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

- Литература:** 1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 183 с. 2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с. 3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 4. Опоицев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Моск. матем. общества. – Т. 36, 1978. – С. 237 – 273. 5. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник нелинейные уравнения математической физики: точные решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с. 6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 7. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Интеллект, 2008. – 408 с.

Поступила в редколлегию 00.00.0000

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Колосова Светлана Васильевна, канд. физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы математической физики. Увлечения и хобби: театр, искус-