УДК 004.67

Е.В. Мантула[1], С.В. Машталир[2]
[1]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, elenamantula@gmail.com
[2]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, mashtalir_s@kture.kharkov.ua

АДАПТИВНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ НЕРАВНООТСТОЯЩИХ НАБЛЮДЕНИЯХ

В данной работе предлагается подход для решения задачи прогнозирования коротких временных рядов при неравноотстоящих наблюдениях при помощи адаптивной модели, основанной на системе полиномов Чебышева, а также алгоритма идентификации на скользящем окне. С помощью данного подхода возможно обрабатывать существенно нестационарные процессы, которые содержат как нерегулярные тренды, так и внезапные скачки, при этом не корректируя структуру полиномов в процессе настройки параметров модели. Развиваемый подход является простым с точки зрения численной реализации и позволяет существенно сократить время на обработку данных и выполнение операции прогнозирования.

ПРОГНОЗИРУЕМАЯ МОДЕЛЬ, ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ С НЕРАВНООТСТОЯЩМИ НАБЛЮДЕНИМИ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА, АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА СКОЛЬЗЯЩЕМ ОКНЕ.

Введение

Задача прогнозирования временных рядов самой разнообразной природы достаточно часто встречается в различных приложениях, в частности, промышленных, технических, финансово-экономических, медико-биологических, экологических и других с целью предсказания поведения исследуемой системы в будущие моменты времени.

На сегодня существует достаточно много эффективных математических методов решения этой задачи. К ним можно отнести как классические статистические методы (регрессионные, корреляционные, спектральные, метод Бокса-Дженкинса), которые применяются для анализа стационарных процессов, но ограничены для анализа и моделирования непредсказуемых скачков, поэтому их целесообразно использовать для краткосрочных прогнозов, так и адаптивные методы, которые основаны на экспоненциальном сглаживании, и интеллектуальные [1-12]. При этом инструментом прогнозирования в итоге является математическая модель от простейшей регрессионной до сложной нейросетевой.

Исходной информацией для построения математической прогнозирующей модели является временной ряд, описывающий изучаемый показатель. При этом задача синтеза модели может существенно усложниться нестационарностью, резкими изменениями показателей, высоким уровнем стохастичности или хаотичности, нелинейностью и тому подобными факторами.

Следует также отметить, что для успешного использования всех упомянутых методов, исходная выборка наблюдений, временной ряд, должна быть достаточно репрезентативной, при этом чем больше параметров содержит прогнозирующая модель, тем больше по объему должна быть исходная информация. Вместе с тем в реальных задачах достаточно часто возникает ситуация, когда эта выборка либо мала по объему, либо прогнозируемый процесс нестационарен – содержит как нерегулярные тренды, так и внезапные скачки, поэтому его предыстория не может быть использована для нахождения параметров модели. Понятно, что многие известные методы синтеза моделей в этом случае неэффективны, а сама построенная модель должна содержать небольшое число оцениваемых параметров.

Еще более сложная ситуация возникает, когда наблюдения распределены неравномерно на временной шкале, т.е. квантование контролируемого процесса происходит с переменным шагом. В этом случае спектр возможных подходов еще более суживается.

Особый интерес в данном контексте представляет собой использование прогнозирования при неравноотстоящих наблюдениях для задачи анализа видеоданных, учитывая, что данный тип информации может быть представлен в виде двумерного временного ряда. При этом, если решается задача выделения содержимого из данных, то естественным путем является сегментация видео.

В общем случае разбиение будет проводиться на неравномерные части, что вполне логично, учитывая принципы формирования видео. После получения разбиения для дальнейшего использования в различных задачах анализа информации в каждом из сегментов есть необходимость выделить некоторый кадр, так называемый ключевой кадр, который однозначно интерпретирует данный сегмент. Таким образом, исходные видеоданные для построения модели прогноза/анализа используют фактически набор ключевых кадров, неравномерно отстоящих на временной оси.

В связи с этим в настоящей работе предлагается подход к синтезу адаптивных прогнозирующих моделей, который производится в условиях ограниченной обучающей выборки, при этом данные

на обработку могут подаваться через произвольные, заранее неизвестные интервалы времени.

1. Прогнозирующая модель на основе ортогональных полиномов

Для решения рассматриваемой задачи с успехом могут быть использованы ортогональные полиномы Чебышева [13-16], обладающие рядом полезных свойств.

Математическая модель на основе этих полиномов может быть построена на основе малой выборки и содержит небольшое число оцениваемых параметров. При добавлении нового члена в модель нет необходимости пересчитывать уже существующие параметры, которые, в свою очередь, могут рассчитываться на основе обычного метода наименьших квадратов, а погрешность аппроксимации распределяется равномерно по интервалу наблюдений. Кроме того, многие известные полиномы, например, Лагерра, Эрмита и др. являются частным случаем полиномов Чебышева.

В общем случае формула аппроксимации полиномами Чебышева может быть записана в виде [13, 14]:

$$Q_m(x)=\sum_{l=0}^{m} c_l f_l(x), \qquad (1)$$

$$c_l=\frac{\sum_{k=0}^{N} y(k) f_l(x(k))}{\sum_{k=0}^{N} f_l^2(x(k))},$$

где $y(0), y(1),..., y(N)$ — аппроксимируемая функция, заданная на произвольных узлах $x(0), x(1),..., x(N)$,

$$f_0(x)=x-b_1, f_{l+1}(x)=(x-b_{l+1}) f_l(x)-a_{l+1} f_{l-1}(x), \quad l=0,1,...N,$$

$$a_{l+1}=\frac{\sum_{k=0}^{N} x^l(k) f_l(x(k))}{\sum_{k=0}^{N} x^{l-1}(k) f_{l-1}(x(k))},$$

$$b_{l+1}=\frac{\sum_{k=0}^{N} x^{l+1}(k) f_l(x(0))}{\sum_{k=0}^{N} x^l(k) f_l(x(k))}-\frac{\sum_{k=0}^{N} x^l(k) f_{l-1}(x(k))}{\sum_{k=0}^{N} x^{l-1}(k) f_{l-1}(x(k))}.$$

При этом наилучший порядок полинома m, который обеспечивает требуемую точность $\sigma_m<\varepsilon$, можно определить по формулам [16]

$$\sigma_m=\sqrt{\frac{\sigma_m^2}{N-m-1}},$$

$$\sigma_m^2=\sigma_{m-1}^2-c_m^2\sum_{k=0}^{N} x^m(k) f_m(x(k)),$$

$$\sigma_0^2=\sum_{k=0}^{N} y^2(k)-\frac{1}{N}\Big(\sum_{k=0}^{N} y(k)\Big)^2.$$

Аргумент $x(k)$ для решения задачи прогнозирования можно перевести во временную шкалу, при этом непрерывное время, в котором происходит контролируемый процесс, преобразуется в дискретное в форме

$$k=\frac{x(k)-x(0)}{\Delta},$$

где Δ — минимальный такт квантования.

При этом можно перейти от представления полинома в форме (1) к выражению

$$Q_m(k)=c_0\varphi_{0N}(k)+c_1\varphi_{1N}(k)+...+c_m\varphi_{mN}(k), \qquad (2)$$

где коэффициенты разложения могут быть найдены путем минимизации критерия

$$I^1(k)=\sum_{k=0}^{N}(y(k)-Q_m(k))^2,$$

что ведет к простым соотношениям [16]

$$C_L=\frac{\sum_{k=0}^{n} y(k)\phi_{lN}(k)}{\sum_{k=0}^{n}\phi_{lN}^2(k)},$$

$$C_0=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} y(k).$$

Сами же ортогональные функции $\varphi_{lN}(k)$ известны заранее [14, 15] и имеют следующий вид:

$$\varphi_{0N}(k)=1,$$

$$\varphi_{1N}(k)=1-2\frac{k}{N},$$

$$\varphi_{2N}(k)=1-6\frac{k}{N}+6\frac{k(k-1)}{N(N-1)},$$

$$\varphi_{3N}(k)=1-12\frac{k}{N}+30\frac{k(k-1)}{N(N-1)}-20\frac{k(k-1)(k-2)}{N(N-1)(N-2)}$$

и т.д.

Здесь важно отметить, что в описание всех ортогональных полиномов входит объем выборки N, поэтому приведенные выше выражения должны быть соответствующим образом модифицированы, для того чтобы организовать процессы адаптивной обработки и прогнозирования.

2. Адаптивное прогнозирование на основе ортогональных полиномов

В задачах, когда данные поступают на обработку последовательно, целесообразно организовать процесс адаптивной настройки параметров прогнозирующей модели, а поскольку параметры, подлежащие оцениванию, входят в описание (2) линейно, то в этом случае можно воспользоваться методами классической теории идентификации [17].

Вводя в рассмотрение критерий идентификации

$$I^1(k)=\sum_{k=0}^{N}\alpha(k)(y(k)-\sum_{l=0}^{m}c_l\varphi_{lN}(k))^2$$

(здесь $\alpha(k)$ — система весов, которая определяет процесс забывания устаревшей информации) и минимизируя его по параметрам c_l, приходим к стандартной оценке взвешенных наименьших квадратов:

$$c_l(N)=\frac{\sum_{k=0}^{N}\alpha(k)y(k)\varphi_{lN}(k)}{\sum_{k=0}^{N}\alpha(k)y_{lN}^2(k)}. \qquad (3)$$

Вводя далее векторы

$$c=(c_0,c_1,...,c_m)^T,\ \varphi(k)=(\varphi_{0N}(k),\varphi_{1N}(k),...,\varphi_{mN}(k))^T,$$

оценку (3) можно переписать в векторно-матричной форме

$$c(N)=(\sum_{k=0}^{N}\alpha(k)\varphi(k)\varphi^T(k))^{-1}\sum_{k=0}^{N}\alpha(k)\varphi(k)y(k) \qquad (4)$$

или

$$\begin{cases} c(N)=c(N-1)+\\ \quad+\dfrac{\alpha(N)\mathrm{P}(N-1)(y(N)-c^T(N-1)\varphi(N))\varphi(N)}{1+\alpha(N)\varphi^T(N)P(N-1)\varphi(N)},\\ P(N)=P(N-1)+\\ \quad+\dfrac{\alpha(N)P(N-1)\varphi(N)\varphi^T(N)P(N-1)}{1+\alpha(N)\varphi^T(N)P(N-1)\varphi(N)}, \end{cases} \qquad (5)$$

при этом в качестве компонентов $\varphi_{lN}(k)$ удобно воспользоваться системой ортонормированных полиномов Чебышева вида [16]:

$$\varphi_{0N}(k)=\frac{1}{\sqrt{N}},$$

$$\varphi_{1N}(k)=\sqrt{\frac{3}{N(N^2-1)}}(2k-N-1),$$

$$\begin{cases} \varphi_{lN}(k)=(A_lk+B_l)\varphi_{l-1,N}(k)-H_l\varphi_{l-2,N}(k),l=2,3,...m,\\ A_l=\dfrac{2}{l}\sqrt{\dfrac{D_l(D_l-2)}{G_l}},\\ B_l=-\dfrac{N+1}{l}\sqrt{\dfrac{D_l(D_l-2)}{G_l}}=-\dfrac{N+1}{l}A_l,\\ H_l=\dfrac{l-1}{l}\sqrt{\dfrac{D_l(D_l+G_l-2)}{(D_l-4)G_l}},\\ D_l=2l+1,\\ G_l=N^2-l^2. \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь следует заметить, что при совместном использовании рекуррентного метода наименьших квадратов (5) и соотношений (6), на каждом такте необходимо пересчитывать не только параметры модели $c(k)$, но и параметры полиномов A_l,B_l,H_l,D_l,G_l, которые определяются объемом обучающей выборки. Понятно, что в адаптивном режиме обработки это усложняет численную реализацию алгоритма.

Избежать это неудобство можно, применяя в этом случае в качестве весовой функции $\alpha(k)$ в (4) “скользящее окно” размера s

$$\alpha(k)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad N-s+1\le k\le N\\ 0 & \text{иначе},\end{cases}$$

что ведет к оценке

$$c(N)=\sum_{\chi=N-S+1}^{N}\phi(\chi)\phi^T(\chi))^{-1}\sum_{\chi=N-s+1}^{N}\phi(\chi)y(\chi).$$

Тогда вместо рекуррентного взвешенного метода наименьших квадратов (5), приходим к адаптивной процедуре вида:

$$\begin{cases} \mathrm{P}(N)=\mathrm{P}_S(N-1)-\dfrac{\mathrm{P}_S(N-1)\phi(N)\phi^T(N)P_s(N-1)}{1+\phi^T(N)P_s(N-1)\phi(N)},\\ \mathrm{P}_S(N)=P(N)+\dfrac{\mathrm{P}(N)\phi(N-s)\phi^T(N-s)P(N)}{1-\phi^T(N-s)P(N)\phi(N-s)},\\ P_s(N)=P_s(N-1)+\phi(N)y(N)-\phi(N-s)y(N-s),\\ c(N)=\mathrm{P}_S(N)P_s(N). \end{cases} \qquad (7)$$

При этом соотношения (6) могут быть переписаны в форме:

$$\begin{cases} \phi_{0S}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{s}},\\ \phi_{1S}(k)=\sqrt{\dfrac{3}{s(s^2-1)}}(2k-s-1),\\ \phi_{lS}(k)=(A_lk+B_l)\phi_{l-1,s}(k)-H_l\phi_{l-2,s}(k),l=2,3,...m,\\ A_l=\dfrac{2}{l}\sqrt{\dfrac{D_l(D_l-2)}{G_l}},\\ B_l=-\dfrac{1+S}{l}\sqrt{\dfrac{D_l(D_l-2)}{G_l}}=-\dfrac{1+s}{l}A_l,\\ H_l=\dfrac{l-1}{l}\sqrt{\dfrac{D_l(D_l+G_l-2)}{(D_l-4)G_l}},\\ D_l=2l+1,\\ G_l=s^2-l^2,s>m. \end{cases} \qquad (8)$$

Как видно, система ортонормальных полиномов может быть рассчитана заранее и не корректироваться в процессе настройки адаптивной модели.

Выводы

Задачу прогнозирования коротких временных рядов с неравноотстоящими наблюдениями предлагается решать с помощью адаптивной модели, которая основана на системе полиномов Чебышева, а также алгоритма идентификации на скользящем окне. Использование данной модели позволяет не корректировать структуру полиномов в процессе настройки параметров модели.

Отличительной особенностью предлагаемой процедуры прогнозирования является то, что она проста с точки зрения численной реализации, позволяет значительно сократить время на выполнение операции, а также дает возможность обрабатывать существенно нестационарные процессы, содержащие как нерегулярные тренды, так и внезапные скачки.

Список литературы: **1.** *Бокс Дж.* Анализ временных рядов / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1924. – 406 с. **2.** *Чуев Ю.В.* Прогнозирование количественных характеристик процессов / Ю.В. Чуев, Ю.Б. Михайлов, И.В. Кузьмин. – М.: Сов. радио, 1975. – 400 с. **3.** *Lewis D.C.* Industrial and Business Forecasting Methods / D.C. Lewis –London. Butterworths Scientific, 1982. – 145 p. **4.** *Ивахненко А.Г.* Самоорганизация прогнозирующих моделей / А.Г. Ивахненко, Й.А. Мюллер. – Киев: Техніка, 1985. – 223 с. **5.** *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов / Ю.П. Лукашин – М.: Финансы и статистика, 2003. – 414 с. **6.** *Бідюк П.І.* Методи прогнозування / П.І. Бідюк, О.С. Меняйленко, О.В. Половцев. – Т. 1. – Луганськ: Альма-матер, 2008. – 301 с. **7.** *Бідюк П.І.* Методи прогнозування / П.І. Бідюк, О.С. Меняйленко, О.В. Половцев. – Т. 2. – Луганськ: Альма-матер, 2008. – 305 с. **8.** *Masters T.* Neural, Novel & Hybrid Algorithms for Time Series Prediction / T. Masters – N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1995. – 514 p. **9.** *Pham D.T.* Neural Networks for Identification, Prediction and Control / D.T. Pham, X.. Liu – London: Springer – Verlag, 1995. – 238 p. **10.** *Zirilli J.S.* Financial Prediction Using Neural Networks. / J.S. Zirilli – London: Int. Thomson Computer Press, 1997. – 136 p. **11.** *Kingdom S.* Intelligent Systems and Financial Forecasting / S. Kingdom – Berlin: Springer – Verlag, 1997. – 227 p. **12.** *Mandic D.P.* Recurrent Neural Networks for Prediction / D.P. Mandic, J.A. Chambers – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2001. – 285 p. **13.** *Чебышев П.Л.* Об интерполировании. Избранные труды / П.Л. Чебышев. – М.: Физматгиз, 1965. – 661 с. **14**. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука. – 408 с. **15.** *Карлин С.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден. – М.: Наука. – 568 с. **16.** *Семесенко М.П.* Методы обработки и анализа измерений в научных исследованиях / М.П. Семесенко. – К.: Выща школа, 1983. – 240 с. **17.** *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для использования / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

Поступила в редколлегию 29.05.2013

УДК 004.67

Адаптивне прогнозування часових рядів при нерівновіддалених спостереженнях / О.В. Мантула // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2013. – № 2 (81). – С. 53-56.

В даній роботі запропоновано підхід до вирішення задачі прогнозування коротких часових рядів з нерівновіддаленими спостереженнями за допомогою адаптивної моделі, заснованої на системі поліномів Чебишева, а також алгоритму ідентифікації на ковзному вікні. Завдяки цьому можливо обробляти суттєво нестаціонарні процеси, що мають як нерегулярні тренди, так і раптові стрибки, не корегуючи при цьому в процесі налаштування параметрів моделі структуру поліномів.

Запропонований підхід є простим з точки зору чисельної реалізації, дозволяє суттєво зменшити час на обробку даних і виконання операції.

Бібліогр.: 17 найм.

UDK 004.67

An adaptive forecasting of time series with irregular observations / O.V. Mantula // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2013. – № 2 (81). – P. 53-56.

An approach to solving problems of time series forecasting with irregular observations using adaptive model which bases on a system of Chebyshev polynomials and the identification algorithm on a sliding window. This approach allows to analyze significantly non-stationary processes, which contain irregular trends and sudden changes. The structure of the polynomials in the configuration process of the model parameters can not be corrected.

The proposed method is simple in terms of computational implementation and also can significantly reduce the processing time and operation of prediction

Ref.: 17 items.