УДК 519.7

# О РЕЛЯЦИОННЫХ СЕТЯХ

**М. Ф. Бондаренко[1], Н. П. Кругликова[2], И. А. Лещинская[3], Н. Е. Русакова[4], Ю. П. Шабанов-Кушнаренко[5]**

[1-5] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

В статье рассматривается алгебра предикатов и алгебра предикатных операций как математический фундамент для создания реляционных сетей. Рассматриваются также линейные логические операторы, являющиеся основным решающим средством в реляционных сетях. Реляционные сети рекомендуются на роль универсального решателя высокопроизводительных мозгоподобных ЭВМ.

АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ, АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ, ЛИНЕЙНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, КВАНТОРНАЯ АЛГЕБРА, РЕЛЯЦИОННАЯ СЕТЬ

## Введение

Предикаты являются основным математическим инструментом, предназначенным для формального описания объектов бионики интеллекта. Язык алгебры предикатов представляет собой универсальное средство формального описания любых механизмов интеллекта человека и машин. Разработчики, проектирующие средства искусственного интеллекта используют алгебру предикатов для начального формального описания моделей. Следующим этапом является алгебра предикатных операций, на которой выражаются любые действия над отношениями. Отношения выражают свойства предметов и связи между ними. Они представляют собой универсальное средство формального описания любых объектов. За две с половиной тысячи лет науке не удалось обнаружить в мире ни одного объекта, о котором можно было бы с уверенностью сказать, что он, в принципе, не поддается формальному описанию с помощью отношений.

Целью данной статьи является использование алгебры предикатов и алгебры предикатных операций для создания реляционных сетей и рассмотрение линейных логических операторов как решающего средства в реляционных сетях.

## 1. Предметы и предикаты

Введем какое-нибудь непустое конечное множество $U=\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ различных элементов $a_1, a_2, ..., a_k$. Символом $k$ обозначено число всех элементов множества $U$. Элементы множества $U$ называются *предметами*. Множество $U$ называется *универсумом предметов*. Кроме того, введем непустое конечное множество $V=\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ различных предметных переменных $x_1, x_2, ..., x_m$. Символом $m$ обозначено число всех предметных переменных. Множество $V$ называется *универсумом предметных переменных*. Каждой переменной $x_i$ $(i=\overline{1, m})$ соответствует свое непустое множество $A_i$ всех ее возможных значений. Оно называется *областью значений* переменной $x_i$. Таким образом, $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$. Множества $A_1, A_2, ..., A_m$ можно выбирать произвольно, но лишь из числа подмножеств универсума $U$, так что $A_1, A_2, ..., A_m \subseteq U$. Если принять $x_1=a_1, x_2=a_2, ..., x_m=a_m$, то при этом образуется *набор* $(a_1, a_2, ..., a_m)$ предметов $a_1, a_2, ..., a_m$, которые находятся на *местах* $x_1, x_2, ..., x_m$. Элементы $a_1, a_2, ..., a_m$ называются *первым, вторым,* $m$*-ым компонентами набора* $(a_1, a_2, ..., a_m)$.

Образуем множество $A$ всех возможных наборов $(a_1, a_2, ..., a_m)$, составленных из предметов $x_1=a_1$, $x_2=a_2, ..., x_m=a_m$ $(a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_m \in A_m)$. Оно называется *декартовым произведением* множеств $A_1, A_2, ..., A_m$ и записывается в виде $A=A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$. Множество $A$ называется предметным пространством *типа* $(A_1, A_2, ..., A_m)$. Число $m$ называется *размерностью* пространства $A$. Множества $A_1, A_2, ..., A_m$ называются *координатными осями* пространства $A$. Введем логическую переменную $\xi=\{0, 1\}$. Элементы 0 и 1 множества $\{0,1\}$ называются *логическими*. Предикатом типа $(A_1, A_2, ..., A_m)$ называется любая функция $P(x_1, x_2, ..., x_m)=\xi$, отображающая множество $A=A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ в множество $\{0,1\}$. Образуем множество $M$ всех предикатов типа $(A_1, A_2, ..., A_m)$. *Алгеброй предикатов* над $M$ называется любая алгебра, носителем которой является множество всех предикатов на $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$. Рассмотрим пример предиката. Пусть $A_1=\{1, 2, 3, 4\}$, $A_2=\{3, 4, 5, 6\}$. Предикат типа $(A_1, A_2)$ задаем табл. 1:

| | $x_2$ $A_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $A_1$ 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$P(x_1, x_2)$

*Дизъюнкцией* $\xi \vee \eta$, *конъюнкцией* $\xi \wedge \eta = \xi \cdot \eta = \xi\eta$ и *отрицанием* $\neg\xi=\overline{\xi}$ логических элементов $\xi, \eta \in \{0, 1\}$ называются операции: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$; $0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$; $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$. Операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$ называются *булевыми*. *Дизъюнкцией* $P \vee Q$, *конъюнкцией* $P \wedge Q$ и *отрицанием* $\neg P$ предикатов $P,\ Q \in M$ называются операции:

$$(P \vee Q)(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m) =$$
$$= P(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m) \vee Q(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m)\ ;$$
$$(P \wedge Q)(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m) =$$
$$= P(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m) \wedge Q(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m)\ ;$$
$$(\neg P)(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m) = \neg(P(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m))\ .$$

Приводим примеры булевых операций над предикатами:

**Таблица 2**

$P(x_1, x_2)$:

| $x_1 \backslash x_2$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$Q(x_1, x_2)$:

| $x_1 \backslash x_2$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$(P \vee Q)(x_1, x_2)$:

| $x_1 \backslash x_2$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$(P \wedge Q)(x_1, x_2)$:

| $x_1 \backslash x_2$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$(\neg P)(x_1, x_2)$:

| $x_1 \backslash x_2$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 1 |

($x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$.)

Булевы операции можно выполнять только над однотипными предикатами.

## 2. Алгебры предикатов

*Булевой алгеброй предикатов* над $M$ называется любая алгебра предикатов над $M$, базис операций которой образован из операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов. Основные законы булевой алгебры предикатов: *идемпотентности* $P \vee P = P$, $P \wedge P = P$; *коммутативности* $P \vee Q = Q \vee P$, $P \wedge Q = Q \wedge P$; *ассоциативности* $(P \vee Q) \vee R = = P \vee (Q \vee R)$, $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$; *дистрибутивности* $(P \vee Q)R = P\,R \vee Q\,R$, $PQ \vee R = (P \vee R)(Q \vee R)$; *элиминации* $P \vee PQ = Q$, $P(P \vee Q) = P$; *свертывания* $P \vee Q\bar{Q} = P$, $P(Q \vee \bar{Q}) = P$; *двойного отрицания* $\bar{\bar{P}} = P$; *де Моргана* $\overline{P \vee Q} = \bar{P}\bar{Q}$, $\overline{PQ} = \bar{P} \vee \bar{Q}$. Основные законы верны для всех $P,\ Q \in M$. *Тождественно ложным* называется предикат 0, который равен $0(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_m) = 0$ при любых $x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \ldots,\ x_m \in A_m$. *Тождественно истинным* называется предикат 1, который равен $1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$ при любых $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2,\ \ldots,\ x_m \in A_m$. *Предикатом узнавания предмета* $a \in A_i$ $(i = \overline{1,\, m})$ по переменной $x_i$ называется предикат $x_i^{\,a}$ из $M$, равный

$$x_i^{\,a} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i = a, \\ 0, \text{ если } x_i \neq a. \end{cases}$$

*Канонической алгеброй предикатов* над $M$ называется булева алгебра предикатов, базис элементов которой образован из предикатов 0, 1 и всех предикатов узнавания предмета $x_i^{\,a}$ $(i = \overline{1,\, m},\ a \in A_i)$.

Свойства базисных элементов канонической алгебры предикатов описываются следующими *законами*: *исключенного третьего* $P \vee \bar{P} = 1$, *противоречия* $P\,\bar{P} = 0$; *сохранения* 0 *и* 1 $P \wedge 0 = 0$, $P \vee 1 = 1$; *исключения* 0 *и* 1 $P \vee 0 = P$, $P \wedge 1 = P$; *отрицания*

$$\overline{x_i^{\,a_j}} = x_i^{\,a_1} \vee x_i^{\,a_2} \vee \ldots \vee x_i^{\,a_{j-1}} \vee x_i^{\,a_{j+1}} \vee \ldots \vee x_i^{\,a_{ki}}$$
$$(i = \overline{1,\, m},\ A_i = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_j,\, \ldots,\, a_k\});$$

*истинности* $x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \ldots \vee x_i^{a_k} = 1$; *ложности,* если $a \neq b$, то $x_i^{\,a} x_i^{\,b} = 0$.

*Дизъюнктивно-конъюнктивной алгеброй предикатов* над $M$ называется такая алгебра предикатов над $M$, базис операций которой образован из операций дизъюнкции и конъюнкции, а базис элементов – из предикатов 0,1 и всех предикатов узнавания предмета $x_i^{\,a}$ $(i = \overline{1, m},\, a \in A_i)$. При любых $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_m$ дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов полна. На языке дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов каждый предикат типа $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_m$ выражается в виде:

$$P(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m) =$$
$$= \bigvee_{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A} P(a_1, a_2, \ldots, a_m)\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{\,a_m}\ . \qquad (1)$$

Произведения вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{\,a_m}$ называются *конституэнтами единицы* предиката $P$. Формула, стоящая в правой части равенства (1), называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *СДНФ*) предиката $P$.

В качестве примера приведем СДНФ предиката, заданного табл. 3.

**Таблица 3**

Предикат $P(x_1,\, x_2,\, x_3)$

| $x_1 \backslash x_2x_3$ | *a a* | a b | *a c* | *b a* | *b b* | *b c* | *c a* | *c b* | *c c* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *b* | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *c* | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$$P(x_1,\, x_2,\, x_3) = x_1^{\,a} x_2^{\,a} x_3^{\,b} \vee x_1^{\,a} x_2^{\,a} x_3^{\,c} \vee$$
$$\vee x_1^{\,a} x_2^{\,b} x_3^{\,b} \vee x_1^{\,b} x_2^{\,a} x_3^{\,b} \vee x_1^{\,b} x_2^{\,a} x_3^{\,c} \vee x_1^{\,b} x_2^{\,b} x_3^{\,a} \vee \qquad (2)$$
$$\vee x_1^{\,b} x_2^{\,b} x_3^{\,b} \vee x_1^{\,c} x_2^{\,b} x_3^{\,b} \vee x_1^{\,c} x_2^{\,c} x_3^{\,c}\ .$$

По СДНФ предиката можно легко отыскать множество всех решений уравнения

$$P(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m) = 1\ . \qquad (3)$$

Каждой конституэнте единицы $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{\,a_m}$ предиката $P$ соответствует свое решение $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m)$, обращающее уравнение (3) в тождество

$$P(a_1, a_2, ..., a_m) = 1 .$$

Множество всех корней уравнения (3) называется *отношением* $P$ *, соответствующим предикату* $P$ . Предикату (2) соответствует отношение:

$$P = \{(a, a, b), (a, a, c), (a, b, b), (b, a, b), (b, a, c), (b, b, a), (b, b, b), (c, b, b), (c, c, c)\}.$$

### 3. Линейные логические операторы

Отношения, задаваемые бинарными предикатами, называются *соответствиями*. Пусть $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ . Зададим какое-нибудь соответствие уравнением $K(x_1, x_2) = 1$ дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов. Например $A_1 = A_2 = \{a, b, c\}$ ,

$$K(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a .$$

Соответствие $K$ определяем уравнением:

$$x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a = 1 . \qquad (4)$$

Если $r \in A_1, s \in A_2$ и $K(r, s) = 1$ , то предмет $s$ называется *образом предмета* $r$ , а предмет $r$ *— прообразом предмета* $s$ *относительно соответствия* $K$ . Например, положим $x_1 = a, x_2 = c$ . Тогда $x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee \vee x_1^b x_2^a = a^a c^b \vee a^a c^c \vee a^b c^a = 1 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 = 1$ , а значит, предмет $c$ является образом предмета $a$ относительно соответствия (4). Аналогично находим, что для соответствия (4) предмет $a$ не является прообразом предмета $a$ , поскольку в этом случае

$$r = a, s = a \text{ и } K(r, s) = x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a = a^a a^b \vee \vee a^a c^c \vee a^b a^a = 1 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 = 0 .$$

Совокупность $Q$ всех предметов $s \in A_2$ , удовлетворяющих уравнению $K(r, s) = 1$ , где $r \in A_1$ , называется *полным образом предмета* $r$ относительно соответствия $K$ . Полный образ $Q$ предмета $r$ может быть вычислен по формуле:

$$\exists x_1 \in A_1 (x_1^r \cdot K(x_1, x_2)) = Q(x_2) . \qquad (5)$$

Здесь $Q(x_2)$ — предикат, соответствующий множеству $Q$ . Приводим пример отыскания полного образа $Q$ предмета $r = a$ для соответствия (4):

$$Q(x_2) = \exists x_1 \in \{a, b, c\}(x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a)) = = a^a (a^a x_2^b \vee a^a x_2^c \vee a^b x_2^a) \vee b^a (b^a x_2^b \vee b^a x_2^c \vee b^b x_2^a) \vee \vee c^a (c^a x_2^b \vee c^a x_2^c \vee c^b x_2^a) = x_2^b \vee x_2^c .$$

Таким образом, $Q = \{b, c\}$ . Этот же результат можно получить и по иной формуле:

$$\forall x_1 \in A_1 (x_1^r \supset K(x_1, x_2)) = Q(x_2) . \qquad (6)$$

Приводим пример решения той же задачи по формуле (6):

$$Q(x_2) = \forall x_1 \in \{a, b, c\}(x_1^a \supset (x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a)) = = (a^a \supset a^a x_2^b \vee a^a x_2^c \vee a^b x_2^a)(b^a \supset b^a x_2^b \vee b^a x_2^c \vee b^b x_2^a) \cdot \cdot (c^a \supset c^a x_2^b \vee c^a x_2^c \vee c^b x_2^a) = x_2^b \vee x_2^c .$$

Совокупность $P$ всех предметов $r \in A_1$ , удовлетворяющих уравнению $K(r, s) = 1$ , где $s \in A_2$ , называется *полным прообразом предмета* $s$ относительно соответствия $K$ . Полный прообраз $P$ предмета $s$ может быть вычислен по формуле

$$\exists x_2 \in A_2 (x_2^s \cdot K(x_1, x_2)) = P(x_1) \qquad (7)$$

или по формуле

$$\forall x_2 \in A_2 (x_2^s \supset K(x_1, x_2)) = P(x_1) . \qquad (8)$$

*Максимальным образом множества* $P \subseteq A_1$ относительно соответствия $K(r, s) = 1$ называется множество $Q_{\max} \subseteq A_2$ , представляющее собой объединение образов всех предметов $r \in P$ . Он вычисляется по формуле:

$$\exists x_1 \in A_1 (P(x_1) \cdot K(x_1, x_2)) = Q_{\max}(x_2) . \qquad (9)$$

Минимальным образом множества $P \subseteq A_1$ относительно соответствия $K(r, s) = 1$ называется множество $Q_{\min} \subseteq A_2$ , представляющее собой пересечение образов всех предметов $r \in P$ . Он вычисляется по формуле:

$$\forall x_1 \in A_1 (P(x_1) \supset K(x_1, x_2)) = Q_{\min}(x_2) . \qquad (10)$$

Преобразование $\mathcal{F}(P) = Q_{\max}$ вида (9) обладает *аддитивностью:*

$$\mathcal{F}(P_1 \vee P_2) = \mathcal{F}(P_1) \vee \mathcal{F}(P_2)$$

*относительно операции дизъюнкции* и *однородностью*

$$\mathcal{F}(\alpha P) = \alpha \mathcal{F}(P)$$

*относительно операции конъюнкции,* $\alpha \in \{0, 1\}$ . Оно называется *линейным логическим оператором первого рода.*

Преобразование $\Upsilon(P) = Q_{\min}$ вида (10) обладает *аддитивностью* $\Upsilon(P_1 \wedge P_2) = \Upsilon(P_1) \wedge \Upsilon(P_2)$ *относительно операции конъюнкции* и *однородностью* $\Upsilon(\alpha \vee P) = \alpha \vee \Upsilon(P)$ *относительно операции дизъюнкции.* Оно называется *линейным логическим оператором* второго рода. Можно доказать, что любой линейный логический оператор первого рода выражается в виде (9), а второго — в виде (10) при подходящем выборе предиката $K(x_1, x_2)$ , который называется *ядром линейного логического оператора.*

Существует глубокая аналогия между числовой и логической математикой. На языке числовой математики записываются законы внешнего (объективного мира), а на языке логической — внутреннего (субъективного) мира человека. Эта аналогия, в частности, проявляется в существовании линейных операторов как в логической, так и в числовой математике. Числовые линейные операторы имеют вид интегральных преобразований числовых функций. Согласно теореме Радона, интегральное преобразование имеет следующий общий вид:

$$\int_{A_1} P(x_1) K(x_1, x_2) dx_1 = Q(x_2) . \qquad (11)$$

Здесь $K(x_1,x_2)$ – ядро линейного интегрального преобразования; $P(x_1)$ – входная функция интегрального преобразования; $Q(x_2)$ – выходная. Знаку $\int$ числового суммирования в выражении (11) соответствует знак $\exists$ логического суммирования в выражении (9). Числовым функциям $K(x_1,x_2)$, $P(x_1)$, $Q(x_2)$ из выражения (11) соответствуют предикаты $K(x_1,x_2)$, $P(x_1)$, $Q_{\max}(x_2)$, фигурирующие в выражении (9). Правда, аналог выражения (10) в числовой математике обычно не используется, но его легко получить с помощью операции потенцирования, переводящей сумму в произведение. Логическим аналогом операции потенцирования служит отрицание, преобразующее квантор существования в квантор общности. Интегральные операторы – это основной вид преобразований, наблюдаемых во внешнем (физическом) мире. Подобно этому, линейные логические операторы играют определяющую роль во внутреннем (психологическом) мире человека. Именно они описывают основные действия реляционной сети, реализующей процессы мышления в живой природе и в технике.

Линейные логические операторы можно наглядно изображать при помощи *двудольных графов*. Возьмем, к примеру, следующее ядро линейного логического оператора:

$$K(x_1,x_2) = x_1^1(x_2^a \vee x_2^b) \vee x_1^2 x_2^d \vee \vee x_1^3 x_2^c \vee x_1^4(x_2^d \vee x_2^e) \qquad (12)$$

Ему соответствует двудольный граф, изображенный на рис.1.

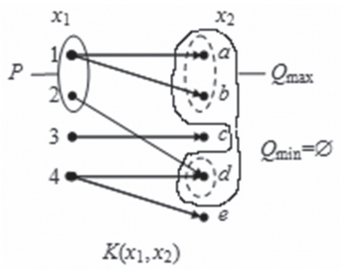


Рис. 1

Образуем линейный логический оператор первого рода с ядром (12) и подадим на его вход множество $P = \{1, 2\}$, изображенное на рис.1 в виде овала. Из точек этого множества вправо простираются стрелки, оканчивающиеся элементами $a$, $b$, $d$, образующими максимальный образ $Q_{\max}$ множества $P$. Полным образом элемента 1 служит множество $\{a, b\}$, элемента 2 – множество $\{d\}$. Эти множества не пересекаются. Поэтому выходным сигналом $Q_{\min}$ линейного логического оператора второго рода будет пустое множество. Если поменять в двудольном графе направление всех стрелок на обратные, получаем *дуальный граф* с тем же ядром $K(x_1,x_2)$. Дуальному графу соответствуют линейный логический оператор первого рода

$$\exists x_2 \in A_2(Q(x_2)K(x_1,x_2)) = P_{\max}(x_1) \qquad (13)$$

и второго рода

$$\forall x \in A_2(Q(x_2) \supset K(x_1,x_2)) = P_{\min}(x_2), \qquad (14)$$

называемые *дуальными* по отношению к операторам (9) и (10). Важно отметить, что дуальные логические операторы далеко не всегда возвращают исходное множество к первоначальному виду. Так, например, множество $Q_{\max} = Q$, формируемое оператором (9) (рис. 1), возвращается дуальным оператором (13) в виде более широкого множества $P_{\max}$, чем исходное множество $P$ (рис.2).

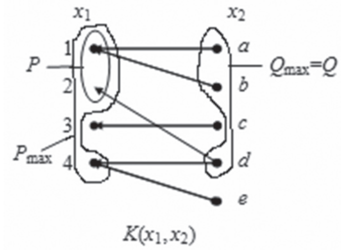


Рис. 2

**4. Кванторная алгебра**

Линейные логические операторы представляют собой операции над переменными предикатами. Они входят составной частью в более обширную систему, называемую *алгеброй предикатных операций*. Алгебра предикатов служит формальным средством для записи мыслей, алгебра же предикатных операций, будучи материализована в виде решающего устройства, может служить средством искусственного воспроизведения процесса мышления. Ниже описывается наиболее важная разновидность алгебры предикатных операций – *кванторная алгебра*.

Пусть $U$ – какой-нибудь универсум предметов; $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ – предметное пространство на $U$; $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq U$; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – предметные переменные пространства $A$; $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m$. Обозначим буквой $M$ множество всех предикатов типа $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$. Это множество называется *универсумом предикатов* типа $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$. Множество $M^n$ называется *предикатным пространством* размерности $n$. Символами $X_1, X_2, \ldots, X_n$ обозначены предикатные переменные пространства $M^n$. Предикатное пространство $M^n$ образовано из всех возможных *наборов* $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ *предикатов* $X_1 = P_1, X_2 = P_2, \ldots, X_n = P_n$. *Предикатной операцией* над $M^n$ называется каждая функция $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = Y$, которая отображает предикатное пространство $M^n$ в множество $M$.

Образуем множество $R$ всех предикатных операций над $M^n$. *Алгеброй предикатных операций* над $R$ называется любая алгебра с носителем $R$. *Дизъюнкцией*, *конъюнкцией* и *отрицанием предикатных операций* $F$ и $G$ называются операции $F \vee G$, $F \wedge G$ и $\overline{F}$, значения которых определяются правилами:

$$(F\vee G)(X_1,X_2,...,X_n)=F(X_1,X_2,...,X_n)\vee G(X_1,X_2,...,X_n);$$
$$(F\wedge G)(X_1,X_2,...,X_n)=F(X_1,X_2,...,X_n)\wedge G(X_1,X_2,...,X_n);$$
$$\overline{F}(X_1,X_2,...,X_n)=\overline{F(X_1,X_2,...,X_n)}$$

для всех $F$, $G$, $F\vee G$, $F\wedge G$, $\overline{F}\in R$. *Включением* $F\subseteq G$ *предикатных операций* $F$, $G\in R$ называется отношение

$$F\subseteq G\Leftrightarrow F\vee G=G.$$

*Булевой алгеброй предикатных операций* над $R$ называется каждая алгебра предикатных операций над $R$ с базисом операций $F\vee G$, $F\wedge G$, $\overline{F}$, где $F$, $G$, $F\vee G$, $F\wedge G$, $\overline{F}\in R$.

*Тождественной предикатной операцией* по переменной $X_j$ $(j=\overline{1,n})$ называется любая предикатная операция, имеющая значения

$$F(X_1,X_2,...,X_j,...,X_n)=X_j$$

при любых значениях переменных $X_1,X_2,...,X_j,...,X_n\in M$. Каждой предикатной переменной $X_j\in M$ соответствует своя тождественная предикатная операция $X_j\in R$. Всего существует $n$ различных тождественных предикатных операций. *Кванторной алгеброй* называется булева алгебра предикатных операций, которая имеет базис операций $F\vee G$, $F\wedge G$, $\overline{F}$, $\exists x_i\in A_i(F)$, $\forall x_i\in A_i(F)$ $(i=\overline{1,m})$ и базис элементов $X_j\in R$ $(j=\overline{1,n})$, и $x_i^a\in M$ $(i=\overline{1,m}$, $a\in A_i)$. Каждая кванторная алгебра полна. Один из кванторов можно исключить из базиса кванторной алгебры без потери ею свойства полноты. Каждый из этих кванторов выражается через другой по формулам:

$$\exists x_i\in A_i(F)=\neg\forall x_i\in A_i(\neg F);$$
$$\forall x_i\in A_i(F)=\neg\exists x_i\in A_i(\neg F).$$

После такого исключения кванторная алгебра становится несократимой. Для большего удобства пользования кванторной алгеброй ее базис консервативно расширяют операциями *импликации* $F\supset G$, *равнозначности* $F\sim G$, *замены* $x_i/x_j(F)$, *перестановки* $x_i|x_j(F)$ и *подстановки* $x_i/a(F)$ $(i,j=\overline{1,m}$, $a\in A_i)$, а также *предикатом равенства* $D(x_i,x_j)$, где $i,j=\overline{1,m}$, $x_i,x_j\in A_i\cap A_j$.

## 5. Реляционная сеть

Что такое мышление и вообще – сознательная деятельность человека? Мы предлагаем следующий ответ: это – протекающая во времени деятельность некоторой материальной системы. Весьма вероятно, что в роли этой системы (или хотя бы какой-то ее части) выступает мозг человека. Что же эта система делает? На этот вопрос предлагается такой ответ: она решает какие-то уравнения. Мышление – это процесс решения уравнений, в роли же найденных решений, т.е. продукции деятельности системы, выступают сформированные ею мысли. Если мы обратимся к внешнему миру, то обнаружим, что все в нем происходит по законам природы, которые имеют вид уравнений. Любой физический процесс с математической точки зрения есть процесс решения этих уравнений. Например, траектории движения планет Солнечной системы – не что иное, как результат решения уравнений небесной механики. Какие же уравнения решает мыслящая (сознающая) система? По нашему мнению это – уравнения алгебры предикатов. Они обладают предельной общностью, поскольку способны выражать любые отношения. За две с половиной тысячи лет развития науки и техники никому еще не удалось обнаружить объект, о котором можно было бы с уверенностью сказать, что его невозможно описать на языке отношений. Каким же инструментом мыслящая система решает уравнения алгебры предикатов? Им может быть только механизм, материализующий алгебру предикатных операций, поскольку именно эта алгебра, и никакая иная, способна формально описывать любые действия над произвольными отношениями. Механизм, решающий уравнения алгебры предикатов, называется нами *реляционной сетью*. Такое название мотивировано тем, что, во-первых, мозг человека реализует нейронную сеть; во-вторых, с психологической точки зрения механизм мышления представляется как ассоциативная сеть; в-третьих, с математической точки зрения механизм мышления предстает как устройство для обработки отношений (по англ. relation). Реляционная сеть состоит из *полюсов* и *ветвей*, соединяющих полюсы. Каждому полюсу соответствует своя предметная переменная $x_i$ с областью определения $A_i$ $(i=\overline{1,m})$. Пара полюсов $x_i$ и $x_j$, соединенных ветвью $K(x_i,x_j)$, реализует линейный логический оператор первого рода

$$\exists x_i\in A_i(P_i(x_i)K_{ij}(x_i,x_j))=Q_{j\max}(x_j) \tag{15}$$

или второго рода

$$\forall x_i\in A_i(P_i(x_i)\supset K_{ij}(x_i,x_j))=Q_{j\min}(x_j). \tag{16}$$

Сеть называется *первого рода*, если в ней действуют лишь операторы первого рода. Аналогично определяются сети *второго рода*. Если в сети используются операторы обоих видов, сеть называется *комбинированной*. Сеть отыскивает решение уравнения

$$K(x_1,x_2,...,x_m)=1 \tag{17}$$

при ограничениях, накладываемых на области изменения переменных $x_i$ $(i=\overline{1,m})$ $x_i\in P_i$, где $P_i\subseteq A_i$. Если решение уравнения отыскивается при более сложном ограничении

$$L(x_1,x_2,...,x_m)=1,$$

тогда сеть достраивается таким образом, чтобы она соответствовала уравнению $K'=1$, где $K'=K\wedge L$. Построению сети, реализующей предикат $K$, предшествует *бинаризация* предиката $K$, т.е. представление его в виде

$$K(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\bigwedge_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{m} K_{ij}(x_i,x_j)\,, \qquad (18)$$

которая может производиться различными способами.

## Выводы

Решение уравнения (17) сетью осуществляется по тактам. В течение каждого такта одновременно срабатывают все линейные логические операторы сети. В сети первого рода после каждого такта осуществляется пересечение всех множеств $Q_{j\,\max}$, сходящихся со всех сторон к каждому из полюсов $x_j$. В сети второго рода множества $Q_{j\,\min}$, наоборот, объединяются. Сеть первого рода может формировать лишние решения, а второго – может не найти некоторые из действительных решений. В процессе решения уравнения (17) с увеличением номера такта работы сети множества $Q_{j\,\max}$ и $Q_{j\,\min}$ сближаются, причем всегда $Q_{j\,\min}\leq Q_{j\,\max}$. На некотором такте сближение множеств $Q_{j\,\min}$ и $Q_{j\,\max}$ прекращается. Если это достигается одновременно на всех полюсах, то на этом процесс решения уравнения (17) заканчивается. Если при всех $j=\overline{1,m}$ оказывается, что $Q_{j\,\min}=Q_{j\,\max}$, то это означает, что сеть нашла все решения, не пропустив ни одного, и не причислила к решению ни одного ошибочного. Если же такое равенство не достигнуто в конце работы сети, это значит, что сеть сработала не вполне эффективно. Этот признак может быть использован при оценке степени доброкачественности метода синтеза сети, в частности – метода бинаризации предиката $K$ (17). Важно отметить, что существуют такие методы синтеза сети, которые обеспечивают ее безупречную работу при решении любого уравнения вида (17).

**Список литературы:** 1. *Бондаренко, М.Ф.* Теория интеллекта [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Изд-во «СМИТ», 2007. – 576 с. 2. *Бондаренко, М. Ф.* О мозгоподобных ЭВМ [Текст] / М. Ф. Бондаренко, З. В. Дударь, И. А. Ефимова, В. А. Лещинский, С. Ю. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика научн.-техн. журнал. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 2004. – № 2. – С. 89–105.

***Поступила в редколлегию 11.05.2010.***

УДК 519.7

**Про реляційні мережі** / М.Ф. Бондаренко, Н.П. Круглікова, І.О. Лещинська, Н.Є. Русакова, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 3 (74). – С. 8–13.

У статті розглядається алгебри предикатів та предикатних операцій як математичний фундамент для синтезу реляційних мереж.

Бібліогр.: 2 найм.

UDC 519.7

**About relational networks** / M.F. Bondarenko, N.P. Kruglikova, I.O. Leshchynska, N.E. Rusakova, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 3 (74). – P. 8–13.

Algebra of predicates, algebra of predicate operations and linear boolean operators which are a basic decision mean in relyacionnykh networks, is examined in the article.

Ref.: 2 items.