

МОДИФИКАЦИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ЛЕСЛИ НА СЛУЧАЙ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РОЖДАЕМОСТИ

БАЛАКИРЕВА А.Г.

Анализируется неоднородная модель Лесли с отрицательными коэффициентами рождаемости. Изучается и прогнозируется возрастная динамика профессорско-преподавательского состава в рамках конкретного ВУЗа на основе данной модели.

1. Введение

Прогнозирование и расчет численности популяции с учетом ее возрастного распределения представляет собой актуальную и труднорешаемую задачу. Одной из ее модификаций является прогнозирование возрастной структуры однородной профессиональной группы в рамках конкретного предприятия или отрасли в целом. Рассмотрим подход к решению такого класса задач с использованием структурной модели распределения по возрастам. Формализм данного подхода базируется на известной в популяционной динамике модели Лесли [1].

Цель данной работы: показать возможность применения неоднородной модели Лесли на случай отрицательных коэффициентов рождаемости для прогнозирования развития динамики популяций.

Задача данной работы – рассчитать возрастную динамику профессорско-преподавательского состава в рамках конкретного ВУЗа.

2. Построение модели динамики популяции с учетом возрастного состава (модель Лесли)

Для построения модели Лесли необходимо популяцию разбить на конечное число возрастных классов (например, n возрастных классов) одинокой длительности, а численность всех классов регулировать в дискретном времени с равномерным шагом (например, 1 год) [2].

При названных предположениях и условии, что ресурсы питания не ограничены, можно сделать вывод,

что в каждый фиксированный момент времени (например, t_0) популяцию можно охарактеризовать с помощью вектор-столбца

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \dots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix},$$

где $x_i(t_j)$ – численность i -й возрастной группы в момент времени t_j , $i = 1, \dots, n$.

Вектор $X(t_1)$, характеризующий популяцию в следующий момент времени, например, через год, связан с вектором $X(t_0)$ через матрицу перехода L :

$$X(t_1) = L X(t_0).$$

Таким образом, зная структуру матрицы L и начальное состояние популяции (вектор-столбец $X(t_0)$), можно прогнозировать состояние популяции в любой наперед заданный момент времени [3]:

$$X(t_1) = L X(t_0),$$

$$X(t_2) = L X(t_1) = LL X(t_0) = L^2 X(t_0),$$

.....

$$X(t_n) = L X(t_{n-1}) = \dots = L^n X(t_0). \quad (1)$$

Матрица Лесли L имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где α_i – возрастные коэффициенты рождаемости, характеризующие число особей, родившихся от соответствующих групп; β_i – коэффициенты выживания, равные вероятности перехода из возрастной группы i в $i+1$ группу к следующему моменту времени (при-

чем $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i$ может быть больше 1).

Матрица L определяет линейный оператор в n -мерном евклидовом пространстве, который мы также будем называть оператором Лесли [4]. Поскольку величины $x_i(t)$ имеют смысл численностей, они неотрицательны, и нас будет интересовать действие оператора Лесли в положительном октанте P^n n -мерного пространства. Так как все элементы матрицы неотрицательны (в этом случае сама матрица называется неотрицательной), то ясно, что любой вектор положительного октанта не выводится оператором Лесли за его пределы, т.е. траектория $X(t_j)$ ($j=1,2,\dots$) остается в P^n . Все дальнейшие свойства модели Лесли вытекают из неотрицательности матрицы L и ее специальной структуры.

Асимптотическое поведение решений уравнения (1) существенно связано со спектральными свойствами матрицы L , основные из которых устанавливаются известной теоремой Перрона — Фробениуса [5].

Определение. Неоднородной моделью Лесли называется модель вида

$$X(t_{j+1}) = L^{(j)} X(t_0), \quad L^{(j)} = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_j, \quad j=1,2,\dots,$$

где L_j — матрица Лесли j -го шага.

Динамика неоднородной модели изучена очень слабо (будучи во многом схожа с динамикой модели (1), имеет и некоторые отличия). В то же время эта модель несомненно реалистичнее.

3. Спектральные свойства оператора Лесли

Следуя работе [6] рассмотрим понятие — индекс импримитивности матрицы Лесли.

Неразложимая матрица L с неотрицательными элементами называется примитивной, если она несёт в точности одно характеристическое число с максимальным модулем. Если матрица имеет $h > 1$ характеристических чисел с максимальным модулем, то она называется импримитивной. Число h называется индексом импримитивности матрицы L . Можно показать, что индекс импримитивности [6] матрицы Лесли равен наибольшему общему делителю номеров тех возрастных групп, рождаемость в которых отлична от нуля. В частности, для примитивности матрицы Лесли достаточно, чтобы $\alpha_1 > 0$, либо чтобы рождаемость имела место в каких-нибудь двух последовательных группах, т.е. существовало такое j , что $\alpha_j \neq 0$ и $\alpha_{j+1} \neq 0$.

Учитывая сказанное выше, можно отметить некоторые свойства матрицы Лесли.

1. Характеристический многочлен матрицы L равен

$$\Delta_n(\mu) = |\mu I - L| = \mu^n - \alpha_1 \mu^{n-1} - \sum_{s=2}^n \alpha_s \mu^{n-s} \prod_{t=1}^{s-1} \beta_t,$$

что легко доказывается методом математической индукции.

2. Характеристическое уравнение $\Delta_n(\mu) = 0$ обладает единственным положительным корнем μ_1 таким, что

$$|\mu| \leq \mu_1, \quad (3)$$

где μ — любое другое собственное значение матрицы L . Числу μ_1 отвечает положительный собственный вектор X^1 матрицы L .

Утверждение 2 свойства прямо следует из теоремы о неотрицательных матрицах [5] и теоремы Декарта [7].

3. Знак равенства в (3) имеет место в том исключительном случае, когда лишь один из коэффициентов рождаемости отличен от нуля:

$$\alpha_k > 0, \alpha_j = 0 \text{ для } j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n.$$

4. Величина μ_1 определяет асимптотическое поведение популяции. Численность популяции неограниченно возрастает при $\mu_1 > 1$ и асимптотически стремится к нулю при $\mu_1 < 1$. При $\mu_1 = 1$ имеет место соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} X(t_j) = c X^1,$$

где

$$X^1 = \left[\frac{\mu_1^{n-1}}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n-1}}, \frac{\mu_1^{n-2}}{\beta_2 \dots \beta_{n-1}}, \dots, \frac{\mu_1}{\beta_{n-1}}, 1 \right]'$$

— положительный собственный вектор матрицы L , определяемый с точностью до множителя.

Индикатором свойства 4 для неразложимой матрицы Лесли вида (4) служит величина [8]

$$R = \alpha_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_1 \dots \beta_{i-1},$$

которая может интерпретироваться как репродуктивный потенциал популяции (обобщенный параметр скорости воспроизводства), т.е. если $R > 1$, то $\mu_1 > 1$ (популяция экспоненциально растет), если $R < 1$, то $\mu_1 < 1$ (экспоненциально убывает), если $R = 1$, то $\mu_1 = 1$ (стремится к предельному распределению).

4. Модификация модели Лесли на случай отрицательных коэффициентов рождаемости

В работах [4,6,8] рассматривалась только модель Лесли с неотрицательными коэффициентами. Обоснованием такому выбору, помимо понятных математических преимуществ, было то, что как вероятности дожития, так и коэффициенты рождаемости по своей сути не могут быть отрицательными. Однако уже в наиболее ранних работах по моделям воспроизводства населения [1,10] отмечалась актуальность разработки моделей с, вообще говоря, неположительными коэффициентами первой строки матрицы Лесли. Отрицательными коэффициентами, в частности, обладают модели воспроизводства биологических популяций с «антирепродуктивным» поведением особей не-

которых возрастных групп (уничтожение яиц и молодых особей и т.д.). К этому же способна привести конкуренция за ресурсы между новорожденными и представителями других возрастных групп. В связи с этим актуален вопрос о том, сохраняется ли свойство эргодичности, верное для моделей Лесли с неотрицательными коэффициентами, в более широком классе моделей воспроизводства демографического потенциала.

На этот вопрос отвечает следующая теорема [9].

Теорема (О круге неустойчивости модели воспроизводства демографического потенциала). Пусть заданы возрастная структура демографических потенциалов и числа живущих. Тогда существует круг $\Lambda = \{\mu : |\mu| \leq \mu_{\min}\}$, такой, что режим воспроизводства с указанными выше показателями обладает свойством эргодичности тогда и только тогда, когда истинный коэффициент воспроизводства не принадлежит этому кругу.

Указанный круг будем называть кругом неустойчивости, а его радиус – радиусом неустойчивости.

Замечание 1. Из теоремы следует важный вывод – какова бы ни была структура демографического потенциала, при определенных величинах истинного коэффициента воспроизводства свойство эргодичности будет наблюдаться. В частности, свойством эргодичности могут обладать модели с отрицательными элементами в первой строке матрицы воспроизводства и даже отрицательными значениями демографических потенциалов.

Замечание 2. Из теоремы следует, что если при некотором значении истинного коэффициента воспроизводства модель обладает свойством эргодичности, то она обладает этим свойством и при всех больших по модулю коэффициентах воспроизводства.

5. Изучение возрастной динамики преподавательского состава ВУЗа. Численный эксперимент

Рассмотрим прогноз динамики численности и распределения по возрастам профессорско-преподавательского состава по данным одного из вузов Харькова. Стандартная, так называемая «сжатая», возрастная структура профессорско-преподавательского состава формируется статистикой в виде 5 возрастных категорий. В таблице приведены численности N каждой возрастной категории по годам и процент, который составляет данная возрастная категория по отношению к общей численности.

Составим матрицы перехода L_j , такие что

$$X(t_{j+1}) = L_j X(t_j) \quad (L_j \text{ } (5 \times 5)). \quad (4)$$

Для этого необходимо в матрице вида (2) определить коэффициенты рождаемости и выживаемости. Коэффициенты выживаемости возможно получить путем

непосредственного решения уравнения (4), используя данные из таблицы.

Структура профессорско-преподавательского состава

Категории		2004		2005		2007		2008	
		N	%	N	%	N	%	N	%
1	<40	322	38	242	38	236	36	273	40
2	40;49	117	14	88	14	95	15	90	14
3	50;59	234	27	163	26	160	25	156	24
4	60;65	88	10	68	11	79	12	69	11
5	65>	93	11	68	11	79	12	69	11
Итого		854		629		649		657	

Что же касается коэффициентов рождаемости, то необходимо сделать дополнительные предположения. Пусть каждый год численность профессорско-преподавательского состава увеличивается на десять человек. Поскольку коэффициенты рождаемости α_i интерпретируются как средняя плодовитость особей i -й возрастной группы, можно предположить, что $\alpha_1, \alpha_5 = 0$, и $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 3$. Опираясь на исходные данные, получаем, что α_4 являются отрицательными. Это условие интерпретируется как уход некоторых членов профессорско-преподавательского состава из вуза. Из сказанного следует, что матрицы L_j имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & -\alpha_4^j & 0 \\ \beta_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4^j & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Мы будем рассматривать только репродуктивные классы. Для этого необходимо изменить вид приведенной матрицы (избавимся от последнего нулевого столбца). А пострепродуктивные классы вычислим как показано в пункте 2.

Таким образом, учитывая сказанное и исходные данные, получаем две матрицы:

– матрица L_1 вида (5) с коэффициентами $\alpha_4 = 15$, $\beta_1 = 0.27$, $\beta_2 = 1.39$, $\beta_3 = 0.29$;

– матрица L_2 вида (5) с коэффициентами $\alpha_4 = 11$, $\beta_1 = 0.381$, $\beta_2 = 1.64$, $\beta_3 = 0.43$.

Матрицы L_1 и L_2 отвечают переходам 2005-2006 и 2007-2008 годов соответственно. За начальное распределение по возрастам возьмем вектор $X(t_0) = [322, 117, 234, 88, 93]^T$.

Данные матрицы имеют коэффициенты воспроизводства μ_i , которые не попадают в круг стабилизации. Отсюда следует, что популяция с заданным режимом воспроизводства обладает свойством эргодичности.

Применяя неоднородную модель Лесли с заданным начальным распределением, получаем, что, начиная с $n=30$ для общей численности, выполняется условие

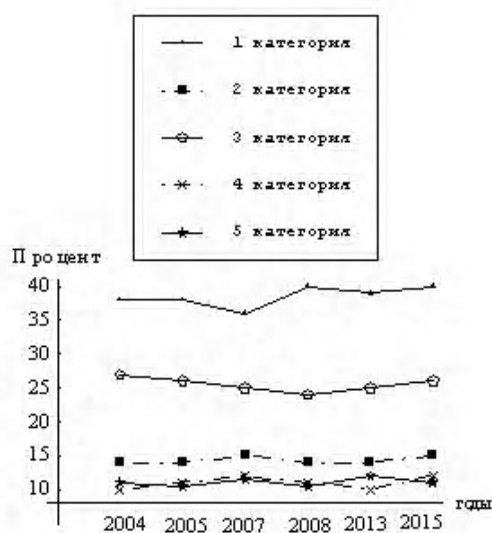
стабилизации следующего вида: $X(t_{j+1}) = \mu_1 X(t_j)$, $j = 20, \dots$, где $\mu_1 = 1.64$ является наибольшим собственным значением матрицы L_2 .

После стабилизации процентное соотношение возрастных категорий имеет вид: первая категория – 39%, вторая – 14%, третья – 22%, четвертая – 12%, пятая – 13%.

Поскольку наибольшее собственное число больше единицы, наша модель является открытой. В связи с этим будем рассматривать не общую численность профессорско-преподавательского состава, а отношение данной численности к степени наибольшего собственного значения матрицы L_2 :

$$L^{(j)} X(t_0) / \mu_1^k, \text{ где } j = 1, 2, \dots$$

На рисунке приведена динамика возрастной структуры профессорско-преподавательского состава до 2015 года.



Изменения долей возрастных категорий с течением времени

На данном рисунке был выбран масштаб от 10 до 40, поскольку процентное соотношение возрастных категорий находится в этом диапазоне.

Прогнозные модельные данные в целом сохраняют общую тенденцию к увеличению доли сотрудников старше 50 лет, что говорит о том, что тенденция к «старению» возрастного состава ВУЗа сохраняется. Было определено, что необходимо увеличить первые две возрастные категории хотя бы на 23% с соответствующим уменьшением остальных возрастных категорий для изменения данной тенденции.

6. Выводы

Научная новизна заключается в том, что впервые была рассмотрена неоднородная модель Лесли на случай отрицательных коэффициентов рождаемости. Это позволяет учесть в модели не только рождаемость, но и смертность особей, находящихся в прегенеративном периоде, что делает модель более реалистичной. Наличие отрицательных коэффициентов принципиально меняет методику исследования динамики модели Лесли путем рассмотрения отвечающей ей области локализации главного собственного значения (круг инстабильности).

Практическая значимость: данная модель позволяет прогнозировать изменения численности популяции и ее возрастную структуру с учетом как рождаемости, так и смертности в каждой из возрастных групп. В частности, используя реальные статистические данные, охватывающие несколько ВУЗов города Харькова, был осуществлен прогноз динамики возрастного изменения профессорско-преподавательского состава. Прогнозные данные достаточно хорошо коррелируют с реальными.

Литература: 1. *Leslie P.H.* On the use of matrices in certain population mathematics // *Biometrika*. 1945. V.33, N3. P.183-212. 2. *Зубер И.Е., Колкер Ю.И., Полуэктов Р.А.* Управление численностью и возрастным составом популяций // *Проблемы кибернетики*. Вып.25. С.129-138. 3. *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.* Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Изд. МГУ, 1993. 301 с. 4. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с. 5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 548 с. 6. *Логофет Д.О., Белова И.Н.* Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2007. Т. 13. Вып. 4. С.145-164. 7. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 433 с. 8. *Клочкова И.Н.* Обобщение теоремы о репродуктивном потенциале для матрицы Логофета // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика*, 2004. №3. 8 с. 9. *Эдеев Д.М.* Взаимосвязь между спектральными свойствами матрицы Лесли и возрастной структурой демографического потенциала // *Электронный журнал «ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ»*, 2002. С.804-813. 10. *Chapman R.N.* The causes of fluctuations of populations of insects // *Proc. Hawaii Ent.-So8*, no.2, 1933. P. 279-292.

Поступила в редколлегию 22.02.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Герасин С.Н.

Балакирева Александра Геннадиевна, аспирантка кафедры экономической кибернетики ХНУРЭ. Научные интересы: матричные модели популяционной динамики. Увлечения и хобби: театр и спорт. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, e-mail: balakireva-al@mail.ru, тел: (0572)40-93-72 (раб.).