

МЕТОД R-ФУНКЦІЙ У ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ

Подгорний О.Р.

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: alex.aminuts@gmail.com

The article represents basic boundary-value problems for the stream function of a flow through porous media. For the test boundary-value problems of the stationary filtration in homogeneous and piecewise homogeneous soils theory, the solution structure is developed (in accordance with the R-function method). The Ritz method is used to approximate the indeterminate components of structural formulas.

Задачі фільтрації описують широкий клас фізичних процесів та явищ, що відбуваються в навколишньому середовищі. Успішне моделювання таких процесів забезпечує якісне вирішення народногосподарських проблем меліоративного характеру, водопостачання, видобутку нафти та газу тощо. Задача математичного моделювання фільтраційних течій приводять до крайових задач для рівнянь у частинних похідних. Точні розв'язки таких задач можна отримати, у деяких поодиноких випадках, завдяки використанню методів теорії функцій комплексної змінної. Більш універсальними є чисельні методи: метод сіток, метод скінченних елементів, метод мажорантних областей, метод суматорних подань, метод фіктивних областей тощо. Кожен з цих методів має свої переваги та недоліки. Основним недоліком існуючих наближених методів є те, що при їх реалізації у геометрично складних областях межа області апроксимується, наприклад, вписаною ламаною, тобто відбувається втрата точності у врахуванні геометричної інформації у чисельному алгоритмі.

Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу фільтраційних течій є актуальною науковою задачею.

Побудова математичних моделей теорії фільтрації засновані на використанні емпіричного закону Дарсі, який означає, що втрати напору при фільтрації пропорційні швидкості фільтрації [2].

У роботі розглядається плоска задача стаціонарної безнапірної фільтрації у однорідному ізотропному недеформованому ґрунті (фільтрація відбувається в площині, яка є паралельною до координатної площини xOy). Завдяки введенню функції течії за формулами

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

від вихідної системи рівнянь, що описує рух рідини у пористому середовищі, можна перейти до рівняння для функції течії

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0. \quad (1)$$

Лінії рівня $\psi = \text{const}$ функції течії ψ називаються лініями течії. Вони мають властивість, що вектор швидкості фільтрації у будь-якій точці області фільтрації направлений за дотичною до лінії течії, що проходить через цю точку.

Для отримання повної математичної моделі для рівняння (1) треба поставити крайові умови, виходячи зі змісту фізичних процесів на межу області фільтрації.

На ділянках межі області фільтрації, які є непроникними поверхнями, повинна обертатися на нуль нормальна складова швидкості (умова непротікання): $v_n = 0$. Прикладами таких ділянок межі служать поверхні бетонних основ гідроспоруд або межі піску та глини.

З закону Дарсі випливає, що на таких ділянках межі $\psi = \text{const}$, тобто вони є лініями течії.

Деякі ділянки межі області фільтрації можуть граничити з областями вільної рідини. Такими ділянками межі є, наприклад, дно водойми, через яке рідина може просочуватися з водойми у ґрунт і, навпаки, через яке ґрунтові води можуть проникати у водойму. У цьому випадку на цих ділянках межі повинна обертатися на нуль дотична складова швидкості: $v_s = 0$.

З закону Дарсі випливає, що на таких ділянках межі $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0$, де $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної ділянки межі.

Найбільш точно і повно врахувати геометричну та аналітичну інформацію, яка міститься у постановці задачі математичної фізики, дозволяє структурний метод R-функцій [1, 3].

Для розв'язання тестової задачі фільтрації пропонується використати метод R-функцій. Відповідно до цього метода побудовано повну структуру розв'язку, для апроксимації невизначеної компоненти якої пропонується застосувати варіаційний метод Рітца. Завдяки цьому точно враховується геометрія області та крайові умови задачі, а наближений розв'язок має аналітичний вигляд, що спрощує його подальше використання для розрахунку характеристик фільтраційної течії.

1. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006. 416 с.

2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.