

УДК 519.62

А.Г. Каграманян¹, Г.Г. Четвериков², В.В. Шляхов³¹ ХНУ, г. Харьков, Украина^{2,3} ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, chetvergg@gmail.com

МУЛЬТИАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НОСИТЕЛЯ. СООБЩЕНИЕ 2

Рассматриваются линейные предикаты, заданные на конусе гильбертового пространства. Получены необходимые и достаточные условия их существования. Работа посвящена изучению условий, при которых бинарные и тернарные отношения на классах эквивалентностей индуцируют алгебраическую структуру в виде линейного пространства. Показана специфика этих условий в сравнении для случая полного линейного пространства.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА, ДИСКРЕТНАЯ СИСТЕМА, КОНУС, ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО, ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО, ПРЕДИКАТ

Введение

Бинарные отношения или предикаты, которые изучаются в данной работе, в некоторых ситуациях задаются не на декартовом квадрате какого-либо множества, а на его части. Ограничения, возникающие при этом диктуются физическими условиями и характером исследуемого объекта. В случае сенсорных систем, в частности при изучении органа зрения человека, входной сигнал — это функция яркости в зависимости от длины волны, т.е. с положительными значениями. Естественно это множество не все, а часть линейного пространства.

Очень часто множество входных сигналов исследуемого объекта представляет собой некоторую алгебраическую структуру [1, 2]. Объясняется это тем, что, как правило, между элементами этого множества существуют определенные связи, которые можно интерпретировать как алгебраические операции. Как уже говорилось выше, правильное распознавание соответствующей структуры во многом определяет адекватность математической модели в целом. В рамках компараторной идентификации это распознавание должно вестись на языке экспериментально проверяемых свойств отношений или предикатов. Не останавливаясь на экспериментальной части, что выходит за рамки данной статьи, дадим теоретическое решение данной задачи для такой алгебраической структуры, как линейное пространство над некоторым полем. Подобная структура широко распространена на практике. Областью определения операторов, которые исследуются в данной работе, является линейное пространство.

1. Постановка задачи

Во многих практических задачах, решение которых связано с применением компараторной идентификации возникает ситуация, когда множество входных сигналов не является линейным или

гильбертовым пространством, а составляет какую-либо его часть или подмножество. Исследование, проведенные в работах [3–6], показывают, что наибольший интерес представляют три следующих варианта множества входных сигналов: конус K линейного пространства, выпуклое тело V и множество с непустой внутренностью Ω . Цель этой работы — изучить возможность компараторной идентификации линейных операторов на конусе линейного пространства.

В дальнейшем будем считать, что заданы предикаты на подмножествах линейного нормированного пространства L над полем действительных чисел R .

Сначала рассмотрим случай положительного конуса K и на его примере поговорим об особенностях, которые здесь возникают (они характерны и для других вариантов).

2. Линейные предикаты на конусе линейного пространства

Пусть предикат $E(x, y)$ задан на декартовом квадрате положительного конуса $K \subset L, R > 0$. Необходимо найти характеристические свойства, обеспечивающие его представимость в линейном виде. На первый взгляд может показаться, что это задача полностью совпадает с той, которая решалась в полном пространстве. Однако это не так. Сужение области определения предиката $E(x, y)$ приводит к ряду принципиальных отличий, которые не позволяют автоматически перенести условие полного линейного пространства. Сейчас мы это покажем.

Рассмотрим свойство n -мерности. Оно гласит следующее: существует набор векторов $\{e_i\}_{i=1}^n = L$ (в данном случае нам придется формулировать принадлежащий K), такой, что для любого $x \in K$ найдется единственный набор чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$, для которого

$$E(x, \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i) = 1.$$

Однако здесь сразу возникает замечание, которого не было ранее. Необходимо как-то регламентировать этот набор чисел с тем, чтобы обеспечить принадлежность к положительному конусу

K линейной комбинацией $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i$. Это можно сделать, добавив, скажем, условие, что числа $\{\alpha_i(x) > 0\}_{i=1}^n$ (последнее влечет за собой трудность в доказательстве необходимости, так как придется доказывать положительность решения системы линейных уравнений) или каким-либо другим способом. Отсюда следует, что условие n -мерности требует изменения.

Непрерывность в некоторых случаях тоже нельзя сохранить. Например, в пространствах $L_2[a, b]$ любая окрестность точки положительного конуса содержит «проколы», т.е. точки, ему не принадлежащие.

В целом ограничение на множестве входных сигналов заставляет постоянно следить за принадлежностью аргументов предикатов области его определения. Это обстоятельство вносит принципиальные изменения в формулировки аксиом и накладывает целый ряд технических трудностей в доказательство. Таким образом, возникает необходимость подробного рассмотрения отдельных типов ограничений.

Как уже говорилось выше, начнем рассмотрение с положительного конуса K пространства $\langle L, R \rangle$. Допустим, на нем задан линейный предикат

$$E(x, y) = D(F[x], F[y]), \quad (1)$$

где D — предикат равенства на

$$R^n \times R^n, F[x] = (f_1(x), \dots, f_n(x)), [f_i]_{i=1}^n$$

— линейно независимые функционалы над $\langle L, R \rangle$.

Предположим сначала, что $\dim L$ конечно, но $\dim L > n$. Изучим некоторые свойства линейного предиката. Зафиксируем систему линейно независимых векторов $\{e_i\}_{i=1}^n \in K$ и для произвольного $x \in K$ составим систему линейных уравнений относительно неизвестных $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ вида

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) f_k(e_i), k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Матрица этой системы, равная $A = (f_k(e_i))_{k,i=1}$ имеет определитель, равный нулю, если строки или столбцы ее линейно независимы, т.е. найдется набор чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ для которых

$$f_k(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = 0, k = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0.$$

Это может происходить только в том случае, когда для функционала $f_1, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker } f_1$. Однако подобной ситуации всегда можно избежать. $\text{Ker } f_1$ представляет собой гиперплоскость пространства $\langle L, R \rangle$, а $\zeta(\{e_i\}_{i=1}^n)$ — подпространство размерности n . Всегда можно сделать выбор $\{e_i\}_{i=1}^n$ таким образом, чтобы $\text{Ker } f_1 \cap \zeta(\{e_i\}_{i=1}^n) = \emptyset$. При таком выборе $\det A \neq 0$ и система (2) будет иметь единственное решение. Это решение будет характеризоваться единственным подмножеством индексов $1, 2, \dots, n$, обозначим его $I(x)$, для которого $\alpha_i(x) \leq 0$, если $i \in I(x)$ и $\alpha_i(x) > 0$, если $i \notin I(x)$. Обозначим

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x) & \text{при } i \notin I(x), \\ -\alpha_i(x) & \text{при } i \in I(x). \end{cases} \quad (3)$$

Тогда система (2) с учетом линейности $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ может быть переписана в виде

$$f_k(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i) = f_k(x + \sum_{i \notin I(x)} a_i(x) e_i), k = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Заметим, что $a_i(x) \geq 0$ при любом i , поэтому

$$x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i, \sum_{i \notin I(x)} a_i(x) e_i \in K.$$

Это означает, что для линейного предиката вида (1), заданного на $K \times K$, равенства (4) эквивалентны равенству

$$E(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i, \sum_{i \notin I(x)} a_i(x) e_i) = 1. \quad (5)$$

Таким образом, мы установили аналог свойства n -мерности для линейного предиката, заданного на положительном конусе. Сформулируем его.

Будем говорить, что предикат $E(x, y)$ обладает свойством n -мерности, если существует система линейно независимых векторов $\{e_i\}_{i=1}^n \in K$ такая, что для любого $x \in K$ найдется единственный набор чисел $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ и единственное подмножество $I(x) \subset \{1, \dots, n\}$, для которых $a_i(x) \geq 0$, при $i \in I(x)$, $a_i(x) > 0$, при $i \notin I(x)$ и имеет место равенство (5).

Сформулируем еще набор свойств, которому удовлетворяет предикат $E(x, y)$ и в справедливости которых легко убедиться непосредственной проверкой.

Однородность. Если $E(x, y) = 1$, то для любого $\lambda > 0$ $E(\lambda x, \lambda y) = 1$.

Аддитивность. Для произвольных $x, y, x', y' \in K$ из равенств $E(x, y) = 1, E(x', y')$ вытекают равенства $E(x + x', y + y') = 1, E(x + y', y + x') = 1$.

Полуаддитивность. Для произвольных $x, y, z \in K$ из равенства $E(x + z, y + z) = 1$ вытекает $E(x, y) = 1$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему об условиях существования линейных предикатов на положительном конусе.

Теорема 1. Для того, чтобы предикат $E(x, y)$, заданный на $K \times K$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами n -мерности, однородности, аддитивности и полуаддитивности.

Доказательство. Фактически необходимость сформулированных выше условий уже доказана. Остановимся на достаточности.

Допустим, предикат $E(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда из n -мерности и аддитивности при произвольных $x, y \in K$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 E(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x)e_i, \sum_{i \in I(x)} a_i(x)e_i) &= 1, \\
 E(y + \sum_{i \in I(y)} a_i(y)e_i, \sum_{i \in I(y)} a_i(y)e_i) &= 1, \\
 E(x + y + \sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (a_i(x)e_i + a_i(y)e_i) + \\
 + \sum_{i \in I(x) \setminus I(y)} a_i(x)e_i + \sum_{i \in I(y) \setminus I(x)} a_i(y)e_i, \\
 \sum_{i \in I(x) \setminus I(y)} (a_i(x) + a_i(y))e_i + \sum_{i \in I(y) \setminus I(x)} a_i(y)e_i + \\
 + \sum_{i \in I(y) \setminus I(x)} a_i(x)e_i) &= 1,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где через $\bar{I}(x)$ мы обозначили множество индексов, равное $\{1, \dots, n\} \setminus I(x)$, и использовали равенство

$$I(x) \setminus I(y) = \bar{I}(y) \setminus \bar{I}(x).$$

Введем теперь следующие множества:

$$N_1 = \{i \in I(x) \setminus I(y) : a_i(x) \geq a_i(y)\},$$

$$N_2 = \{i \in I(x) \setminus I(y) : a_i(x) < a_i(y)\},$$

$$N_3 = \{i \in I(y) \setminus I(x) : a_i(y) \geq a_i(x)\},$$

$$N_4 = \{i \in I(y) \setminus I(x) : a_i(y) < a_i(x)\}$$

и воспользуемся полуаддитивностью. Тогда равенство (6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 E\left(x + y + \sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (a_i(x)e_i + a_i(y)e_i) + \sum_{i \in N_1} (a_i(x) - a_i(y))e_i + \right. \\
 + \sum_{i \in N_3} (a_i(y) - a_i(x))e_i, \sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (a_i(x) + a_i(y))e_i + \sum_{i \in N_2} (a_i(y) - \\
 \left. - a_i(x))e_i + \sum_{i \in N_4} (a_i(x) - a_i(y))e_i\right) = 1. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Заметим, что множество $I(x) \cap I(y)$, $\bar{I}(y) \cap \bar{I}(x)$, $\{N_i\}_{i=1}^4$, не пересекающиеся и в объединении дают все множество индексов. В этом случае из n -мерности и равенства (7) вытекает

$$I(x + y) = (I(x) \cap I(y)) \cup N_1 \cup N_3,$$

$$a_i(x + y) = \begin{cases} a_i(x) + a_i(y), i \in I(x) \cap I(y) \\ a_i(x) - a_i(y), i \in N_1 \\ a_i(y) - a_i(x), i \in N_2 \\ a_i(x) + a_i(y), i \in \bar{I}(x) \cap \bar{I}(y) \\ a_i(x) - a_i(y), i \in N_4 \\ a_i(y) - a_i(x), i \in N_3. \end{cases}$$

Так как из (3) вытекает

$$a_i(x) = \begin{cases} a_i(x), i \in \bar{I}(x) \\ -a_i(x), i \in I(x), \end{cases}$$

то, если рассмотреть $a_i(x + y)$, получим

$$a_i(x + y) = a_i(x) + a_i(y). \tag{8}$$

Действительно, пусть $i \in I(x) \cap I(y)$, тогда $i \in I(x + y)$ и $a_i(x + y) = a_i(x) + a_i(y) = a_i(x) - a_i(y) = a_i(x) + a_i(y)$. Допустим, $i \in N_1$, значит, $i \in I(x + y)$ и $a_i(x + y) = -a_i(x) + a_i(y) = a_i(y) - a_i(x) = a_i(x) + a_i(y)$, так как $i \in I(x) \setminus I(y)$ в силу определения N_1 и т.д. Рассмотрев все шесть случаев, легко убедиться, что при любом индексе i выполняется равенство (8) для произвольных $x, y \in K$. Таким образом, функционалы $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ аддитивны. Покажем их однородность для $\lambda > 0$.

Действительно для произвольного $x \in K$ и $\lambda > 0$ из n -мерности и однородности следует

$$E(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x)e_i, \sum_{i \in I(x)} a_i(x)e_i) = 1,$$

$$E(\lambda x + \sum_{i \in I(x)} \lambda a_i(x)e_i, \sum_{i \in I(x)} \lambda a_i(x)e_i) = 1. \tag{9}$$

Последнее равенство означает, что $I(x) = I(\lambda x)$ и $a_i(\lambda x) = \lambda a_i(x)$, $i = \bar{1}, n$. Следовательно,

$$\lambda a_i(x) = a_i(\lambda x), i = \bar{1}, n, \lambda > 0.$$

Поскольку положительный конус в линейном пространстве воспроизводящий, то функционалы $a_i(x)$ могут быть продолжены до линейных на всем пространстве $\langle L, R \rangle$.

Докажем теперь одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Если предикат $E(x, y)$ обладает перечисленными в теореме свойствами, то он рефлексивен, симметричен, транзитивен.

Действительно, для любого $x \in K$ из n -мерности и аддитивности вытекает

$$E(x + \sum_{i \in I(x)} \lambda_i(x)e_i, \sum_{i \in I(x)} a_i(x)e_i) = 1,$$

$$E(x + \sum_{i=1}^n a_i(x)e_i, x + \sum_{i=1}^n a_i(x)e_i) = 1,$$

учитывая полуаддитивность, имеем $E(x, x) = 1$.

Далее, если $E(x, y) = 1$ и из рефлексивности

$E(y, y) = 1$, то при помощи аддитивности и полуаддитивности получим $E(2y, x + y) = 1$ и $E(y, x) = 1$.

Теперь допустим $E(x, y) = 1$, $E(y, z) = 1$, тогда ясно, что $E(x + y, y + z) = 1$ и $E(x, z) = 1$. Утверждение доказано.

Пусть $E(x, y) = 1$. Используя свойства теоремы и доказанное утверждение, нетрудно убедиться в правильности следующей цепочки равенств:

$$E(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i, y + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i) = 1, \quad (10)$$

$$E(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i, \sum_{i \in \bar{I}(x)} a_i(x) e_i) = 1, \quad (11)$$

$$E(y + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i, \sum_{i \in \bar{I}(x)} a_i(x) e_i) = 1. \quad (12)$$

Из единственности $I(x)$ и набора чисел $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ имеем $I(x) = I(y)$ и $a_i(x) = a_i(y)$, что означает $E(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(y), \quad i = 1, n, \quad (13)$$

поскольку цепочку равенств (10)–(13) можно провести и в обратном порядке. Все это означает, что предикат $E(x, y)$ представим в виде

$$E(x, y) = D(\alpha(x), \alpha(y)),$$

где $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$.

Таким образом, для того чтобы он был линейным, осталось показать, что набор линейных функционалов $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ — линейно независим. Действительно, в противном случае можно считать,

без ограничения общности, что $\alpha_1(x) = \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i(x)$.

Однако из рефлексивности предиката $E(x, y)$, примененной к вектору e_1 , получим $E(e_1, e_1) = 1$. Следовательно, из n -мерности вытекает, что $\alpha_1(e_1) = 1, \alpha_2(e_1) = \dots = \alpha_n(e_1) = 0$. Тогда из предположения линейной зависимости функционалов $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ вытекает, что $1 = 0$. Противоречие. Следовательно, функционалы $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ линейно независимы, а предикат $E(x, y)$ линеен. Теорема доказана.

В доказанной теореме мы под линейностью оператора F понимаем его аддитивность и однородность. Когда $\dim L < \infty$, этого действительно достаточно. В противном случае однородность необходимо заменить на непрерывность. Однако в случае положительного конуса, как уже отмечалось ранее, возникают определенные сложности. Можно было бы, убрав однородность, сформулировать, что функционалы $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ непрерывны. Но вся трудность в том, что эти функционалы возникают в свойстве n -мерности и значит определены только на элементах положительного конуса. Любая же окрестность произвольного элемента x , принадлежащего пространству, например, типа

$L_2[a, b]$, содержит точки, не принадлежащие положительному конусу. Следовательно, для наших функционалов в классическом смысле не может быть сформулировано свойство непрерывности. Однако эту трудность для пространства $L_2[a, b]$, часто встречающегося на практике, можно преодолеть. Более того, в этом случае может быть усилен результат теоремы 1, а именно: при выполнении ее условий система, соответствующая линейному предикату, описывается набором положительных функционалов, то $f_i(x) > 0 \forall x \in K$ в равенстве (2).

Итак, допустим, что $\langle L, R \rangle = L_2[a, b]$. Без ограничения общности его можно считать $L_2[0, 1]$.

Утверждение 2. Пусть на положительном конусе K задан аддитивный функционал $f(x)$, удовлетворяющий свойству

$$\sup_{x \in K \cap S} |f(x)| < \infty,$$

где $S = \{x \in L_2[0, 1] : \|x\| \leq 1\}$ — единичная сфера, тогда его можно однозначно продолжить до линейного функционала на всем пространстве $L_2[0, 1]$. Предположим,

$$x_1(\tau) = \begin{cases} y(\tau) + c, & y(\tau) > 0 \\ c, & y(\tau) \leq 0, \end{cases}$$

$$x_2(\tau) = \begin{cases} -y(\tau) + c, & y(\tau) \leq 0 \\ c, & y(\tau) > 0, \end{cases}$$

где $c > 0$ — произвольная постоянная. Тогда $x_1, x_2 \in K$ и $y = x_1 - x_2$.

Положим $f(y) = f(x_1) - f(x_2)$. Это определение корректно, так как если $y = x_1 - x_2 = x'_1 - x'_2$, то $x_1 + x'_2 = x_1 + x'_2$. Оба элемента $x_1 + x'_2$ и $x_1 + x'_2$ принадлежат положительному конусу K , на котором функционал аддитивен, значит $f(x_1) + f(x'_2) = f(x'_1) + f(x_2)$ или $f(x_1) - f(x'_2) = f(x'_1) - f(x_2)$. Последнее равенство означает корректность определения. То, что построенное продолжение однозначно — очевидно.

Теперь возьмем любой элемент $y \in S$. Его можно представить в виде $y = x_1 - x_2$, где $x_1, x_2 \in K \cap S$. Для этого нужно соответствующим образом подобрать постоянную C . Рассмотрим $|f(y)|$, тогда $|f(y)| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1)| + |f(x_2)| < \infty$.

$$\text{Отсюда } \sup_{y \in S} |f(y)| < \infty.$$

Значит, продолженный функционал $f(y)$ ограничен, следовательно, непрерывен, а непрерывный аддитивный функционал на $L_2[0, 1]$ является линейным. Утверждение доказано.

Свойства, сформулированные в утверждении 2 для функционала $f(x)$, заданного на положительном конусе K , будем называть непрерывностью. Нетрудно видеть, что если дан линейный предикат

на $K \times K$, то функционалы $\{a_i\}_{i=1}^n$ и $\{a_i\}_{i=1}^n$ непрерывны в этом смысле.

Более того, теорема 1 остается справедливой, если в ее формулировке изменить свойство одномерности на непрерывность.

Таким образом, получен набор характеристических свойств линейных предикатов на $K \subset L_2[0,1]$.

Для обоснования положительности $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ докажем следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ — система линейных линейно независимых функционалов, заданных из K и удовлетворяющих свойствам: для любого $x \in K$ существует номер k такой, что $\alpha_k(x) > 0$. Тогда найдется невырожденная n -мерная матрица A , которая переводит данную систему в систему $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^n$, т.е. $\beta(x) = A\alpha(x)$, для которой $\beta_i(x) > 0$ при любых i и $x \in K$ или ядра $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^n \in K$.

Доказательство. Обозначим через $L = \zeta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ линейная оболочка. Предположим $L \cap K = \emptyset$, тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств в линейном пространстве (L и K таковыми являются) существует ненулевой линейный функционал $h(x)$ и число C такие, что $h(x) \geq C$ при $x \in K$ и $h(x) \leq C$ при $x \in L$.

Причем C не может быть меньше нуля, иначе бы функционал $h(x)$ нельзя было бы отдельно ограничить снизу на положительном конусе K . С другой стороны, так как любой линейный функционал на K может быть сколь угодно мал, то C не может быть и строго больше нуля. Значит $C = 0$. Более того, $h(x) > 0$ при $x \in K$, поскольку при существовании $x_0 \in K$, для которого $h(x_0) = 0$ нашелся бы элемент $x_1 \in K$ такой, что $h(x_1) < 0$. В итоге получаем, что $h \in K$ и в то же время $a_i(h) \leq 0$ при любом i . Это противоречит условию утверждения. Следовательно, $L \cap K \neq \emptyset$.

Возьмем элемент $e \in L \cap K$. Так как K — открытое множество, то e входит в K с какой-то окрестностью, поэтому для любого a_i найдется $\varepsilon_i > 0$ такое, что $\beta_i = \varepsilon_i \alpha_i + e \in K$. В силу линейной независимости системы $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ можно подобрать ε_i таким, что система $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^n$ тоже будет линейно независимой. С другой стороны, $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^n \in L \cap K$, т.е. существует невырожденная матрица A , для которой $\beta(x) = A\alpha(x)$. Утверждение доказано.

Справедлива следующая цепочка равенств

$$E(x, y) = D(\alpha(x), \alpha(y)) = D(A\alpha(x), A\alpha(y)) =$$

$$= D(\beta(x), \beta(y)), x, y \in K \subset L_2[0,1],$$

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)), \beta(x) = (\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)).$$

Переобозначив

$$F[x] = (f_1(x), \dots, f_n(x)), f_i(x) = \beta_i(x),$$

получим $E(x, y) = D(F[x], F[y])$.

В итоге нами получена теорема.

Теорема 2. Предикат $E(x, y)$, заданный на $K \subset L_2[0,1]$, линеен с положительными функционалами $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ тогда и только тогда, когда он обладает свойствами аддитивности, полуаддитивности, n -мерности и непрерывности.

Для завершения исследования покажем, что этот набор условий независим.

Утверждение 4. Условия аддитивности, полуаддитивности, n -мерности и непрерывности независимы.

Доказательство. Как и ранее, мы приведем примеры предикатов, обладающих всеми перечисленными свойствами, кроме одного. Относительно n -мерности и непрерывности можно взять соответствующие примеры из работы [3].

Полуаддитивность. Пусть

$$E(x, y) = D(\alpha(x), \alpha'(y)),$$

где $x, y \in K, \alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ набор линейных линейно независимых функционалов в $L_2[0,1]$ с ядрами, принадлежащими K и $\alpha_1(1) - \alpha_n(1) \neq 0$, а

$$\alpha'(y) = (\alpha_n(y), \alpha_2(y), \dots, \alpha_{n-1}(y), \alpha_1(y)).$$

Тогда если $E(x, y) = 1$ и $E(x', y') = 1$, то

$$\alpha_1(x) = \alpha_n(y), \alpha_k(x) = \alpha_k(y), k = 2, \dots, n-1, \alpha_n(x) = \alpha_1(y),$$

$$\alpha_1(x') = \alpha_n(y'), \alpha_k(x') = \alpha_k(y'), k = 2, \dots, n-1, \alpha_n(x') = \alpha_1(y').$$

Отсюда

$$\alpha_1(x + x') = \alpha_n(y + y'),$$

$$\alpha_k(x + x') = \alpha_k(y + y'), k = 2, \dots, n-1,$$

$$\alpha_n(x + x') = \alpha_1(y + y'),$$

$$\alpha_1(x + y') = \alpha_n(y + x'),$$

$$\alpha_k(x + y') = \alpha_k(y + x'), k = 2, \dots, n-1,$$

$$\alpha_n(x + y') = \alpha_{11}(y + x'),$$

т.е. $E(x + x', y + y') = E(x + y', y + x') = 1$. Таким образом, аддитивностью этот предикат обладает. В справедливости для него n -мерности и непрерывности можно убедиться непосредственно.

Однако свойству полуаддитивности построенный нами предикат не удовлетворяет. Действительно, допустим $C_1, C_2 = \text{const} > 0$ такие, что $E(C_1, C_2) = 1$. Выберем произвольное число λ на интервале $(0, \min(C_1, C_2))$ и положим $x = C_1 - \lambda, y = C_2 - \lambda, z = \lambda$. Тогда $x, y, z \in K$ и $E(x + z, y + z) = 1$,

Однако

$$\alpha_1(x) - \alpha_n(y) = \alpha_1(C_1) - \alpha_1(\lambda) - \alpha_n(C_2) + \alpha_n(\lambda) = \lambda(\alpha_n(1) - \alpha_1(1)) \neq 0$$

т.е. $E(x, y) = 0$.

Аддитивность. Положим

$$E(x, y) = D(\alpha'(x), \alpha(y)),$$

где $x, y \in K$, а

$$\alpha'(x) = (\alpha_1(x) + 1, \dots, \alpha_n(x)), \alpha(y) = (\alpha_1(y), \dots, \alpha_n(y)).$$

Этот предикат полуаддитивен, так как если $E(x+z, y+z)=1$, то $\alpha_1(x+z)+1=\alpha_1(y+z)$ или $\alpha_1(x)+1=\alpha_1(y)$, т.е. $E(x, y)=1$.

Он также очевидным образом непрерывен и n -мерен, однако аддитивности нет, поскольку не аддитивен функционал $\alpha_1(x)+1$. Утверждение доказано.

Выводы

Рассмотрен наиболее распространенный случай ограничения множества входных сигналов в виде конуса линейного пространства. Показано, что подобное сужение приводит к ряду принципиальных отличий, которые не позволяют автоматически перенести условия существования линейных предикатов и свести всё к обычной ситуации. Найдены новые характеристические свойства, обеспечивающие существование линейных предикатов при данном ограничении.

Список литературы:

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
2. Четвериков Г.Г., Дударь З.В., Вечирская И.Д. Дискретные структуры. — Харьков: НУРЭ, 2015. — 322 с.
3. Машталир В.П., Шляхов В.В., Яковлев С.В. Групповые структуры на фактор-множествах в задачах классификации // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — №4. — С. 27–42.
4. Герасин С.Н., Шляхов В.В. О внешней и внутренней согласованности произвольных n -арных отношений // Доп. НАН Украины. — 2006. — №1. — С. 77–82.
5. Бондаренко Н.Ф., Машталир В.П., Шляхов В.В. Мультигруппы, индуцируемые произвольным отношением // Доп. НАН Украины. — 2012. — № 4. — С. 39–42.
6. Каграманян А.Г., Машталир В.П., Шляхов В.В. Условия существования тернарной мультисистемы с единым носителем // Вісник національного університету. — Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. — 2011. — № 960, Вип. 16. — Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна. — С. 148–158.

Поступила в редколлегию 24.11.2016