УДК 519.6

В. П. Машталир, В. В. Шляхов

ИНДУЦИРОВАННАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ ОТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ГРАНУЛЯЦИИ ИНФОРМАЦИИ

1. Введение

Развитие методов совместной регистрации, обработки и интерпретации в конкретной предметной области разнородных (количественных, качественных, недостаточно определенных, избыточных и т. п.) данных — пожалуй, единственный в настоящее время путь к созданию эффективных систем продукции знаний. В 1997 Л. А. Заде выделил три базовых компонента, лежащих в основе когнитивных подходов: грануляцию, организацию и причинно-следственные отношения. Он так характеризовал их: «Granulation involves decomposition of whole into parts, organization involves integration of parts into whole, and causation involves association of causes and effects» [1]. Первая составляющая (грануляция) — фактически построение разбиений (реже — покрытий) входной информации. Гранулы — группировки данных, получаемые с точки зрения их неразличимости или сходства, огрубляют или, напротив, детализируют с желаемой точностью представление информации [2]. При этом основной интерес представляют внутренние, внешние и контекстные свойства выделяемых множеств. Вторую составляющую можно трактовать как структуризацию классов эквивалентности (или в наиболее общем случае — толерантности), имеющую целью получить целостное представление о всей совокупности данных на различных стратах и их семействах [3]. Наконец, третья составляющая — некоторая продукция знаний, базирующаяся или на заданных правилах вывода, или на функциональных соотношениях вход-выход, или на выявлении внутренних неочевидных сущностных связей [4].

Методы теории грануляции (в оригинале — Granular Computing, далее будем говорить GrC-парадигма или просто GrC) — суть междисциплинарных исследований, до настоящего времени активно развивающихся в информационных системах (прежде всего на основе аппроксимационных множеств — rough sets [2, 5]), вычислительном интеллекте [6], базах данных с контекстным поиском [7], а также интервальном анализе, универсальном шкалировании, кластерных методах и т. д. [3, 4, 8–10]. Следует подчеркнуть, что до настоящего времени не дано даже достаточно строгое определение GrC-парадигмы. Основные идеи, подходы и принципы привлечены в GrC из различных отраслей знаний, поэтому, с одной стороны, не является неожиданностью, что ряд исследований представляют собой лишь перевод известных положений в сферу GrC, с другой — терминология и аксиоматика GrC-парадигмы находятся лишь в состоянии становления. Таким образом, насущной является проблема обобщений, быть может, метаматематических, что создаст предпосылки для конструктивного развития данного направления.

В качестве одного из возможных «языков» GrC-парадигмы можно указать мультиалгебраические системы [11], позволяющие для различных математических структур синтезировать и идентифицировать алгебры, модели и алгебраические системы с носителями, объединяющими семейства множеств различной природы, а в конечном итоге — оперировать гранулами (классами эквивалентности), не различая отдельных представителей классов. Цель данной работы — развитие и обобщение результатов [12, 13] в плане исследования индуцированной согласованности отношений и операций, определяющих мультиалгебраические системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим внутренние эквивалентности, индуцируемые произвольными отношениями. Пусть n-арное отношение $E(x_1,..., x_n)$ задано на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, где A_i — произвольные множества. Зафиксируем k-е место (плечо) среди аргументов отношения E. Если для отношения E для каких-либо x_k и x'_k имеет место тождество

$$E(x_1,..., x_k, x_{k+1},..., x_n) \equiv E(x_1,..., x'_k, x_{k+1},..., x_n), \quad (1)$$

то очевидно, что элементы x_k и x'_k неразличимы с точки зрения этого отношения. Следовательно, можно считать, что элементы x_k и x'_k находятся в отношении эквивалентности P_k^E (здесь и далее отношения эквивалентности будем представлять предикатами, принимающими значение «1» на элементах одного фактора и «0» в противном случае), порожденном отношением E на k-м месте

$$P_k^E(x_k, x'_k) = 1 \Leftrightarrow E(x_1,..., x'_k, x_{k+1},..., x_n) \equiv \equiv E(x_1,..., x'_k, x_{k+1},..., x_n) \quad (2)$$

на декартовом квадрате $A_k \times A_k$. Отношение P_k^E есть эквивалентность, поскольку выполнение свойств рефлективности, симметричности и транзитивности очевидно. Таким образом, на каждом A_k задается разбиение, порожденное отношением E. *Задача* работы — поиск условий, при которых произвольные n-арные отношения порождают отношения на классах эквивалентностей, обеспечивающих анализ в рамках GrC-парадигмы.

3. Генезис мультиотношений

Допустим, для каких-либо номеров k и l из набора $\{1, 2, ..., n\}$ имеет место $A_k = A_l$. Тогда области определений эквивалентностей P_k^E и P_l^E совпадают и можно говорить о сравнении этих отношений, в том числе и их равенстве. На языке отношения E сравнение выглядит так:

$$\text{если } E(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) \equiv E(x_1,\dots,x'_k,\dots,x_n), \text{ то}$$
$$E(x_1,\dots,x_{l-1},x_k,x_{l+1},\dots,x_n) \equiv$$
$$\equiv E(x_1,\dots,x_{l-1},x_k,x_{l+1},\dots,x_n), \qquad (3)$$

т. е. эквивалентность P_k^E реализует более детальное разбиение множества $A_k = A_l$, чем отношение P_l^E. При этом важно понимать, что условие (3) должно выполняться для любых элементов $x_k, x'_k \in A_k$, а не для некоторых пар (в противном случае разбиения будут различны).

Если условие (3) имеет место для любых пар, то P_k^E как отношение, реализующее более детальное разбиение, чем отношение P_l^E, можно считать вложенным и обозначить $P_k^E \subseteq P_l^E$. Если же условие (3) выполняется в обоих направлениях и для любых пар, то эквивалентности P_k^E и P_l^E совпадают. Таким образом, номера мест k и l образуют множество $\{1, 2, \dots, n\}$, на котором исходным отношением E индуцируется функция F, принимающая четыре значения (например, $\{-1, 0, 1, 2\}$)

$$F(k,l) = \begin{cases} -1, \text{ если } A_k = A_l \text{ и } P_k^E \subseteq P_l^E; \\ 0, \text{ если } A_k \neq A_l \text{ или } P_k^E \nsim P_l^E; \\ 1, \text{ если } A_k = A_l \text{ и } P_k^E = P_l^E; \\ 2, \text{ если } A_k = A_l \text{ и } P_k^E \supseteq P_l^E, \end{cases} \qquad (4)$$

где «$\nsim$» означает несравнимость отношений. Зависимость (4) можно представить утверждением 1.

Утверждение 1. Если множества A_k, A_l не равны, то $F(k, l) = 0$, если же $A_k = A_l$, то значение $F(k, l)$ зависит от вида выполнения условия (3): если (3) имеет место в обе стороны, причем для любой пары элементов множества $A_k = A_l$, то $F(k, l) = 1$; если условие (3) выполняется непосредственно, то $F(k, l) = -1$; если же оно выполняется в обратную сторону, то $F(k, l) = 2$; наконец, если условие (3) нарушается, то $F(k, l) = 0$.

Доказательство. Действительно, при условии $A_k \neq A_l$, согласно определению, $F(k, l) = 0$. Если $A_k = A_l$ и для любых двух аргументов $x_k, x'_k \in A_k = A_l$ имеет место условие (3), то из (2) следует, что как только $P_k^E(x_k, x'_k) = 1$, следует и выполнение отношения $P_l^E(x_k, x'_k) = 1$. Это означает, что разбиение, соответствующее эквивалентности P_k^E, более детальное, чем разбиение, соответствующее эквивалентности P_l^E, т. е. $P_k^E \subseteq P_l^E$, и по определению получаем, что $F(k, l) = -1$. Выполнение условия (3) в обратном направлении влечет за собой противоположное вложение эквивалентностей $P_k^E \supseteq P_l^E$, значит, $F(k, l) = 2$. Наконец, если условие (3) выполняется в обе стороны, то в этом случае эквивалентности (и разбиения) совпадают, значит, $F(k, l) = 1$. Утверждение доказано.

Заметим, что если $F(k, l) = 1$, то места k и l для отношения E не отличаются: на этих местах исходным отношением индуцируется одно и то же разбиение, а следовательно, одни и те же эквивалентности, что в дальнейшем будет представлять наибольший интерес.

Определение 1. Произвольное n-арное отношение E, заданное на $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, будем называть внутренне (k, l)-согласованным тогда и только тогда, когда $A_k = A_l$ и $P_k^E = P_l^E$.

Отметим, что с точки зрения определения 1 исходное (произвольное) n-арное отношение E порождает эквивалентность V_E на $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$

$$V_E(k,l) = 1 \Leftrightarrow A_k = A_l \text{ и } P_k^E = P_l^E, \qquad (5)$$

т. е. $V_E(k, l) = 1$ тогда и только тогда, когда отношение E внутренне (k, l)-согласовано (проверка рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения V_E не составляет труда). Если это отношение представить в виде матрицы, которую в дальнейшем мы будем называть матрицей внутренней согласованности и обозначать $J(E)$, то она, естественно, будет состоять из 0 и 1, будет симметрична и на главной диагонали всегда содержать 1. В частных случаях, когда $J(E)$ — единичная матрица, то внутренняя согласованность отсутствует, когда же она состоит только из единиц, то все носители совпадают: $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ и $P_1^E = P_2^E = \dots = P_n^E = P^E$, т. е. отношение E задано на A^n и порождает на A^2 одну и ту же эквивалентность P^E, классы которой для E неразличимы.

Если вычеркиванием одних и тех же строк и столбцов в $J(E)$ удается выделить $(r \times r)$-подматрицу, состоящую из одних 1, то можно говорить о внутренней $(k_1, \dots, k_r)$-согласованности отношения E в том смысле, что $A_{k_1} = \dots = A_{k_r}$ и $P_{k_1}^E = P_{k_2}^E = \dots = P_{k_r}^E$. Путем перенумерации переменных исходного отношения матрицу внутренней согласованности $J(E)$ всегда можно привести к блочно-диагональному виду

$$J^*(E) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 & \dots & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \dots & 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r_2 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r_p \end{matrix}, \qquad (6)$$

где $r_1 + \dots + r_p = n$.

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = \dots = A_{r_1} = B_1; \\ A_{r_1+1} = A_{r_1+2} = \dots = A_{r_1+r_2} = B_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n-r_p+1} = \dots = A_n = B_p \\ P_1^E = \dots = P_{r_1}^E = L_1^E; \\ P_{r_1+1}^E = \dots = P_{r_1+r_2}^E = L_2^E; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{n-r_p+1}^E = \dots = P_n^E = L_p^E \end{cases} \qquad (7)$$

и отношение E по сути определено на $B_p^{r_1} \times ... \times B_p^{r_p}$ и порождает p различных эквивалентностей L_i^E, заданных на $B_i \times ... \times B_i$, $i = 1, 2, ..., p$. Следует заметить, что это возможно, когда исходное отношение инвариантно относительно произвольной подстановки из n элементов.

Отношение V_E и, соответственно, матрица согласованности несут в себе далеко не всю информацию об исходном отношении E, и главное — о тех эквивалентностях или разбиениях, которые оно индуцирует, что нетрудно увидеть из анализа (4). По сути, эквивалентность V_E не учитывает «детализацию» и вложенность разбиений, которые индуцирует отношение E. Главное, что оно позволяет, — это сравнивать носители на различных плечах сравнения. Однако на практике — в частности, при грануляции информации — вложенность разбиений может играть принципиальную роль. В качестве типичных примеров следует указать кластеризацию данных, сегментацию изображений. Достижение оптимальной в определенном смысле детализации создает предпосылки для правильной и полной автоматической интерпретации. Учитывая это, введем $(n \times n)$-матрицу общей внутренней согласованности $F(E)$, элементы которой $f_{kl} = F(k, l)$ также определяются равенством (4). Как и матрица внутренней согласованности $J(E)$, она будет содержать 0 и 1 на тех же местах, но с некоторым изменением. Когда в равенстве (4) будут выполняться условия (2) и (3), то 0 и 1 сохранятся, если же будет иметь место условие (1), то будет стоять -1, а при условии (4), соответственно, 2. При этом матрица $F(E)$, в определенном смысле, является симметрической. Относительно главной диагонали симметрия для 0 и 1 остается обычной, а вот для -1 и 2 она будет такой: симметрично -1 будет стоять 2 и наоборот.

Многообразие ситуаций, возникающих с произвольными отношениями и индуцируемыми ими эквивалентностями, рассмотренными случаями, конечно же, не исчерпывается. Например, можно говорить о двух произвольных отношениях E_1, заданном на $A_1 \times ... \times A_n$, и E_2, заданном на произведении $C_1 \times ... \times C_m$, где A_i и C_j ($i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$) — наборы произвольных множеств. Допустим, для двух номеров i и j имеет место $A_i = C_j$, тогда, как и ранее, можно говорить о совпадении или вложении эквивалентностей $P_i^{E_1}$, $P_j^{E_2}$. На языке E_1 и E_2 это означает, что для произвольных элементов $x_i, x_i' \in A_i = C_j$ выполняется условие

$$\begin{aligned} E_1(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \equiv E_2(x_1, ..., x_i', ..., x_n) \Leftrightarrow \\ E_1(y_1, ..., y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, ..., y_m) \equiv \\ \equiv E_2(y_1, ..., y_{j-1}, x_i', y_{j+1}, ..., y_m). \qquad (8) \end{aligned}$$

Если имеет место (8), то эквивалентности совпадают, т. е. $P_i^{E_1} = P_j^{E_2}$ и можно говорить о (i, j)-согласованности отношений E_1, E_2. Если же условие (8) выполняется в одну сторону, например слева направо, то разбиение, соответствующее эквивалентности $P_i^{E_1}$, более детальное, чем разбиение, соответствующее эквивалентности $P_j^{E_2}$, т. е. $P_i^{E_1} \subseteq P_j^{E_2}$ и наоборот. Аналогично может быть введено отношение V_{E_1, E_2} на произведении $\{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$ и матрица согласованности $J(E_1, E_2)$ размером $n \times m$, которая состоит из 0 и 1 и обладает свойством: на (i, j) месте стоит 1 тогда и только тогда, когда имеет место (i, j)-согласованность отношений E_1 и E_2.

Заметим, что матрицу согласованности двух отношений формально можно всегда считать квадратной. Действительно, пусть для определенности $n < m$, тогда прямое произведение $A_1 \times ... \times A_n$ можно дополнить до размерности m прямым произведением пустых множеств, т. е. $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times \underbrace{\varnothing \times ... \times \varnothing}_{m-n}$.

Матрица согласованности в этом случае будет иметь вид

$$J(E_1, E_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} . \\ . \end{array}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} . \\ . \\ . \end{array}}\right\} m-n \end{array} \qquad (9)$$

Допустим, задан набор произвольных отношений $E_1, E_2, ..., E_q$, каждое из которых имеет свою арность и задано на своем декартовом произведении множеств. Тогда может быть найдена максимальная арность, допустим N, и могут быть построены все матрицы согласованности $J(E_\alpha, E_\beta)$ размера $N \times N$, количество которых будет равно C_q^2, где C_q^2 — число сочетаний по 2 из q различных элементов. В этих матрицах и в матрицах $J(E_\alpha)$ заложена вся информация: какие отношения и на каких местах индуцируют одни и те же разбиения или неразличимые с точки зрения данного набора отношений классы. Ранее уже отмечалось, что матрицы согласованности не учитывают детализации разбиений или вложенность индуцируемых произвольными отношениями эквивалентностей. В связи с этим может быть введена функция $L(i, j)$ для пары различных отношений аналогичной функции $F(k, l)$, определяемой (4):

$$L(i, j) = \begin{cases} -1, \text{если } A_k = C_j \text{ и } P_i^{E_1} \subseteq P_j^{E_2}; \\ 0, \text{если } A_i \neq C_j \text{ или } P_i^{E_1} \neq P_j^{E_2}; \\ 1, \text{если } A_i = C_j \text{ и } P_i^{E_1} = P_j^{E_2}; \\ 2, \text{если } A_i = C_j \text{ и } P_i^{E_1} \supseteq P_j^{E_2}. \end{cases} \qquad (10)$$

Как и выше, может быть введена матрица $L(E_1, E_2)$, на (i, j) месте которой будут стоять элементы $l_{ij} = L(i, j)$. Следует отметить, что если переставить аргументы в матрице L, т. е. рассмотреть матрицу $L(E_1, E_2)$, то между ними ни в каком смысле симметрии наблюдаться не будет: на месте (i, j) может наблюдаться любое значение из множества $\{-1, 0, 1, 2\}$. Для матриц согласованности $J(E_1, E_2)$ при перестановке аргументов симметрия в обычном смысле тоже не наблюдается.

Таким образом, произвольное n-арное отношение индуцирует новое n-арное отношение со своим носителем, являющимся произведением классов эквивалентностей, иногда полностью совпадающим с первоначальным, если матрица согласованности единична, или существенно меняющим и носитель, и само отношение. Приведем простой, но достаточно наглядный пример.

Зафиксируем число $p \in \mathbb{N}$ и введем тернарное отношение $E(n_1, n_2, n_3)$ по формуле

$$E(n_1, n_2, n_3) = \\ = \begin{cases} 1, \textit{если } \operatorname{res}(n_1 + n_2; p) = \operatorname{res}(n_3; p); \\ 0, \textit{если } \operatorname{res}(n_1 + n_2; p) \neq \operatorname{res}(n_3; p); \end{cases} \quad (11)$$

где $\operatorname{res}(a; b)$ $\mathbb{N}$ $a - \lfloor a/b \rfloor \times b$ — остаток от целочисленного деления. Если зафиксировать $k = 1$ и рассмотреть эквивалентность P_1^E вида

$$P_1^E(n_1, n_1') = 1 \Leftrightarrow E(n_1, n_2, n_3) \equiv E(n_1', n_2, n_3),$$

то она разбивает множество натуральных чисел на классы вычетов по модулю p: $(n_1 + n_2) \equiv n_3 (\operatorname{mod} p)$. Действительно, если у n_1 и n_2 остатки при делении на число p совпадают, то справедлива цепочка равенств для любых n_2 и n_3

$$\operatorname{res}(n_1 + n_2; p) = \operatorname{res}(ps_1 + r_1 + ps_2 + r_2; p) = \\ \operatorname{res}(r_1 + r_2; p) = \operatorname{res}(ps_1' + r_1 + ps_2 + r_2; p) = \\ \operatorname{res}(n_1' + n_2; p),$$

откуда следует $E(n_1, n_2, n_3) \equiv E(n_1', n_2, n_3)$ (здесь подразумевалось, что $n_1 = ps_1 + r_1$, $n_1' = ps_1' + r_1$, $n_2 = ps_2 + r_2$, а $s_1, s_1', s_2 \in \mathbb{N}$). Обратное утверждение тоже справедливо: если $E(n_1, n_2, n_3) \equiv E(n_1', n_2, n_3)$, то остатки при делении на p у n_1 и n_1' должны быть равны. В противном случае, когда $n_1 = ps_1 + r_1$, $n_1' = ps_1' + r_1$ и $r_1 = r_1'$, при $n_2 = 0$, а $n_3 = r_1$ будем иметь цепочку равенств

$$\operatorname{res}(n_1 + n_2; p) = \operatorname{res}(ps_1 + r_1; p) = \\ = \operatorname{res}(r_1; p) = \operatorname{res}(n_3; p),$$

т. е. $E(n_1, 0, r_1) = 1$ с одной стороны. С другой стороны,

$$\operatorname{res}(n_1' + n_2; p) = \operatorname{res}(ps_1' + r_1; p) = \\ = \operatorname{res}(r_1'; p) = \operatorname{res}(n_3; p).$$

Поскольку $r_1', r_1 \leq p$ и $r_1' \neq r_1$, то $E(n_1', 0, r_1) = 1$, что противоречит исходной предпосылке. Из соотношений (11) следует, что $P_1^E = P_2^E = P_3^E$, а матрица внутренней согласованности $J(E)$ и матрица, учитывающая сравнения эквивалентностей $F(E)$, в данном случае имеют вид

$$J(E) = F(E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим ряд важных обстоятельств. Во-первых, если носителем исходного отношения было множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, то индуцируемая исходным отношением эквивалентность существенно изменила его, трансформировав в конечное множество $P = \{0, 1, ..., p-1\}$. На новом носителе образовалось новое отношение, которое в дальнейшем будем называть мультиотношением (точное определение дадим позднее) и обозначать E_m. Это отношение осталось тернарным, но заданном не как исходное на $\mathbb{N}^3$, а на P^3. Во-вторых, мультиотношение E_m приобрело новое свойство, которое можно представить бинарной операцией по следующим правилам

$$r_1 \oplus r_2 = r_3 \Leftrightarrow E_m(r_1, r_2, r_3) = 1 \Leftrightarrow E(n_1, n_2, n_3) = 1,$$

где $\oplus$ — операция сложения по модулю p, а переменные — $n_i = ps_i + r_i$, $i = 1, 2, ..., p$, $r_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$. Наконец, если следовать терминологии алгебраических систем [12], тройка $\langle A, F, S \rangle$, где A — произвольное множество (носитель), F — набор отношений и S — набор операций на данном носителе (т. е. в зависимости от арности на нем или на его декартовых степенях), является алгебраической системой. При этом: если $S = \varnothing$, то система называется моделью, если $F = \varnothing$ — алгеброй. Тогда в нашем случае, изначально имея модель $\langle \mathbb{N}, E, \varnothing \rangle$, в силу естественной эквивалентности, заложенной «природой» в отношение E, а не привнесенной «извне» (как это, как правило, происходит при рассмотрении процессов факторизации в традиционных алгебраических структурах), мы перешли к алгебре $\langle P, \varnothing, \oplus \rangle$, носителем которых стали классы эквивалентностей, образующие известную алгебраическую структуру — циклическую абелеву группу порядка p.

Надо понимать, что носитель исходного отношения может представлять собой одно множество, а порожденное им мультиотношение, т.е. отношение на индуцированных классах эквивалентности или толерантности, в качестве носителя может иметь декартово произведение различных множеств. Рассмотрим еще один пример, когда тернарное отношение E с прежним носителем — множеством натуральных чисел — задано равенством

$$E(n_1, n_2, n_3) = \\ = \begin{cases} 1, \textit{если } \operatorname{res}(n_1 + n_2; p) = \operatorname{res}(n_3; p); \\ 0, \textit{если } \operatorname{res}(n_1 + n_2; p) \neq \operatorname{res}(n_3; p); \end{cases} \quad (12)$$

где $p_1 \neq p_2$. В этом случае нетрудно заметить, что $P_1^E = P_2^E \neq P_3^E$, т. е. носитель мультиотношения E_m является декартовым произведением множеств $A \times B$, где $A = \{0, 1, ..., p_1 - 1\}$, $B = \{0, 1, ..., p_2 - 1\}$. Как тернарное отношение E_m задано на $A^2 \times B$ и представляет собой операцию из A^2 в B (но не групповую, как выше). Матрица внутренней согласованности $J(E)$ будет иметь вид

$$J(E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уместно отметить, что при определенных p_1 и p_2 не просто возникает неравенство эквивалентностей и соответственно разбиений, но меняются и степень детализации разбиений, и вложенность эквивалентностей. Например, если $p_1 = 4$, а $p_2 = 2$, то $P_1^E = P_2^E \subseteq P_3^E$, т. к. классы множества $\mathbb{N}$ разбиваются на четыре класса, соответствующие остаткам $A = \{0, 1, 2, 3\}$ за счет эквивалентности $P_1^E = P_2^E$. Эквивалентность P_3^E разбивает это же множество на два класса: четные и нечетные числа, т. е. $B = \{0, 1\}$. При этом классы $\{0, 2\}$ входят в множество четных чисел (условно говоря, в класс «0» множества B), соответственно классы $\{1, 3\}$ входят в множество нечетных чисел (в класс «1» множества B). Следовательно, матрица $F(E)$ (вложенности разбиений) будет иметь вид

$$F(E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В рассмотренных примерах исходное отношение E индуцировало мультиотношение, а точнее мультиоперацию, т. е. операцию на классах эквивалентностей. Может сложиться впечатление, что подобная ситуация наблюдается всегда, однако это далеко не так. Приведем пример. Рассмотрим бинарное отношение E, определенное табл. 1.

Таблица 1

		A		B	C					
		a_1	a_2	b_1	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
Π_I	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
	2	0	0	1	1	1	1	1	1	1
Π_{II}	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	4	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	5	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Отношение E задано на декартовом произведении множеств $\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a_1, a_2, b_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$. Нетрудно убедиться, что две эквивалентности P_1^E и P_2^E, индуцируемые исходным отношением, разбивают первое множество $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ на два класса $\Pi_I = \{1, 2\}$ и $\Pi_{II} = \{3, 4, 5\}$, тогда как второе множество $A_2 = \{a_1, a_2, b_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ разбивается на три класса $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$. При этом мультиотношение E_m уже задано на декартовом произведении индуцированных классов эквивалентностей $\{\Pi_I, \Pi_{II}\} \times \{A, B, C\}$ (табл. 2).

Таблица 2

	A	B	C
Π_I	0	1	1
Π_{II}	1	1	0

Заметим, что любая n-арная операция может быть представлена в виде $(n+1)$-арного отношения, когда на $(n+1)$-м месте в этом отношении стоит единственный элемент носителя. Результат операции, как правило, не выводится за рамки носителя, которому принадлежат аргументы (это характерно для общепринятых алгебраических структур [13]). Однако во многих прикладных задачах (в частности, при факторизации множеств произвольной природы в некоторых признаковых пространствах) под n-арной операцией фактически понимают однозначное отображение аргументов. В данном случае мультиотношение может быть представлено даже в виде двух отображений из $\{\Pi_I, \Pi_{II}\}$ в $\{A, B, C\}$ и наоборот, которые могут быть представлены в явном виде. Если их обозначить F_{E_m} и $F_{E_m}^{-1}$, то $F_{E_m}(\Pi_I) = \{A, B\}$, $F_{E_m}(\Pi_{II}) = \{A, B\}$ и $F_{E_m}^{-1}(B) = \{1, 2\}$, $F_{E_m}^{-1}(C) = 1$. И в том и в другом варианте никакой однозначности не наблюдается, поэтому говорить об индуцируемости какой-либо операции на классах эквивалентности, а точнее мультиоперации, как в предыдущих двух примерах, мы не можем. Здесь исходное отношение индуцирует в явном виде лишь бинарное мультиотношение.

Как следует из приведенных выше примеров, модель, содержащая одно отношение, может приводить на классах эквивалентностей к различным алгебраическим системам: и к мультимоделям, и к мультиалгебрам. Однако при оперировании одним исходным отношением мы в состоянии прийти только к одному из вышеперечисленных вариантов, т. е. к полноценной алгебраической системе, содержащей и отношения, и операции, мы перейти не сможем. Следует отметить, что в произвольной алгебраической системе, представляющей абстрактную информационную систему (и в традиционных структурах, таких как полугруппа, группа, кольцо, поле, различные типы линейных пространств и т. д.), носитель один и тот же для включенных в систему отношений и операций. Это утверждение, по нашему мнению, надо трактовать в следующем смысле. Если рассматривать любое линейное пространство над каким-либо полем (допустим, векторное над полем действительных чисел), то носителем этой системы можно считать множество векторов или декартово произведение множества векторов и поля действительных чисел (что, на наш взгляд, логичнее). При этом операцию сложения векторов, казалось бы, не задействующую элементов поля, следует представлять как линейную комбинацию элементов носителя с единичными коэффициентами. Таким образом, важным становится вопрос: когда два произвольных отношения формируют один носитель? Точнее говоря, этот вопрос будет интересен с точки зрения мультиотношений, индуцируемых исходными отношениями. Здесь уместно обратить внимание на матрицу $J(E)$, определяемую равенством (6), и на равенства (7). Если произвольное n-арное отношение порождает p различных эквивалентностей $(p \le n)$ $L_1^E, \ldots, L_p^E$, то носителем является $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_p$, где L_i^E задано на $B_i \times B_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Если обозначить множество классов эквивалентностей, формирующееся на множестве B_i за счет эквивалентностей L_i^E, через B_i / L_i^E, $i = 1, 2, \ldots, p$, то ясно, что мультиотношение E_m будет иметь в качестве носителя декартово произведение смежных классов $B_1 / L_1^E \times B_2 / L_2^E \times \ldots \times B_p / L_p^E$.

Приведем, наконец, точное определение мультиотношений.

Определение 2. Отношение E_m, индуцированное произвольным n-арным отношением E, с носителем $B_i / L_i^E \times B_i / L_i^E$ в виде декартова произведения смежных классов, порождаемых «внутренними» эквивалентностями L_i^E, назовем мультиотношением.

4. Условие равенства носителей мультиотношений

Теперь становится очевидным, что, по крайней мере, для совпадения носителей двух различных мультиотношений E_{1m} и E_{2m}, индуцируемых отношениями E_1 и E_2, количества единичных блоков матрицы внутренней согласованности p_1 матрицы $J(E_1)$ и p_2 матрицы $J(E_2)$ должны совпадать. Рассмотрим далее матрицу согласованности двух отношений $J(E_1, E_2)$ размером $n \times m$, (i, j)-й элемент (обозначим его через l_{ij}) которой определяется условием (8) или равенством

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } A_i = C_j \text{ и } P_i^{E_1} = P_j^{E_2} \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{13}$$

где E_1 задано на $A_1 \times \ldots \times A_n$, а E_2 — на $C_1 \times \ldots \times C_m$. Допустим, эта матрица, состоящая из 0 и 1, путем перестановок строк и столбцов может быть приведена к виду

$$J^*(E_1, E_2) =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_i & \beta_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 \ldots \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 \ldots \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & 0 & 1 \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\right\} \alpha_1 \\ \left.\right\} \alpha_2 \\ \left.\right\} \alpha_i \\ \left.\right\} \alpha_s \end{array} \end{array} \tag{14}$$

Матрица (14) задает бинарное отношение V_{E_1, E_2} на множестве $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$.

Следует заметить, что в общем случае это бинарное отношение может быть произвольным, поскольку нет никаких ограничений на отношения E_1 и E_2. Поэтому в отличие от матриц внутренней согласованности, которые фактически задают отношения эквивалентностей и для которых блочно-диагональный вид достигается всегда, о матрицах $J(E_1, E_2)$ этого сказать нельзя. Например, к блочному виду не приводится матрица

$$J(E_1, E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В то же время все иначе, если это отношение является дифункциональным. Напомним, что бинарное отношение дифункционально [14], если для любых $i, i_1, j, j_1 \in \{1, 2, \ldots, \max(n, m)\}$ справедлива импликация

$$V_{E_1, E_2}(i, j_1) = 1, \; V_{E_1, E_2}(i_1, j_1) = 1,$$

$$V_{E_1, E_2}(i_1, j) = 1 \Rightarrow V_{E_1, E_2}(i, j) = 1.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть X и Y — произвольные конечные множества мощности n и m соответственно. Тогда для любого бинарного отношения R на $X \times Y$ матрица $G(R)$ этого отношения путем перестановок строк и столбцов (фактически — перенумерацией элементов множеств X и Y) приводится к блочно-диагональному виду $G^*(R)$ с размерностями блоков $(\alpha_i \times \beta_i)$, $i = 1, \ldots, s$,

$$G^*(R) =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 \ldots & \beta_i & \beta_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & & \vdots & & & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\right\} \alpha_1 \\ \left.\right\} \alpha_2 \\ \vdots \\ \left.\right\} \alpha_s \end{array} \end{array} \tag{15}$$

лишь при условии, что отношение R дифункционально.

Доказательство. Предварительно дадим интерпретацию свойства дифункциональности при матричном представлении отношений. Заметим, что любое бинарное отношение — это равносильное представление многозначного отображения $f : X \to Y$, где образом любого $x \in X$ является некоторое подмножество $f(x) \in Y$, а прообразом любого $y \in Y$ является некоторое подмножество $f^{-1}(y) \in X$. В общем случае могут найтись элементы $x \in X$ и $y \in Y$, не имеющие образа и прообраза соответственно; их можно сгруппировать в подмножества $X_\varnothing$ и $Y_\varnothing$ (рис. 1).

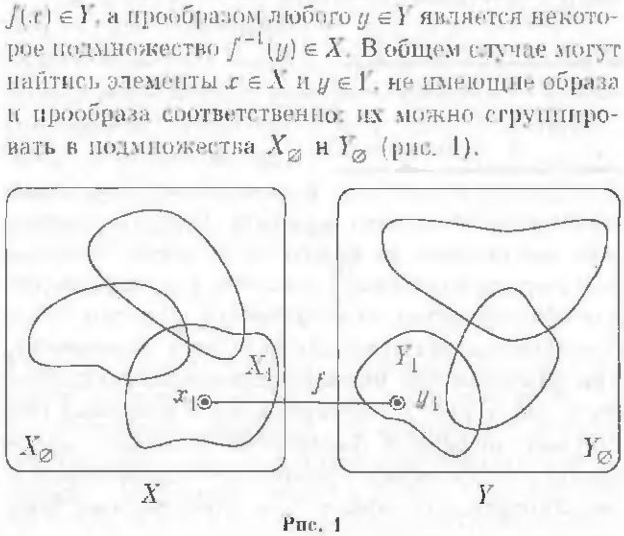

Рис. 1

На рис. 1 образом смежного класса $X_1 \in X$ есть смежный класс $Y_1 \in Y$ при наличии элементов $x_1 \in X$ и $y_1 \in Y$, связанных равенством $f(x_1)=y_1$, т. е. исходным отношением. При этом смежные классы как во множестве образов Y, так и во множестве образов X могут пересекаться, а их число может быть различно. Однако, если отношение дифункционально, различные смежные классы не пересекаются [14], и отображение f осуществляет между ними взаимно однозначное соответствие. Вообще говоря, дифункциональные отношения — это отношения, порожденные взаимно однозначными соответствиями между системами попарно не пересекающихся подмножеств X и Y. В случае, когда множества X и Y конечны, число смежных классов образов и прообразов одинаково, и отображение f может быть схематично представлено в виде рис. 2.

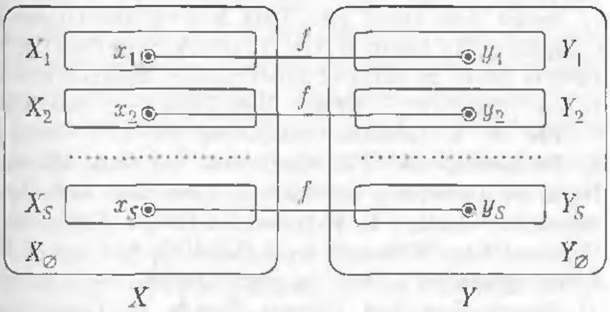

Рис. 2

Следует подчеркнуть, что $\alpha_1=\operatorname{card}X_1$, ..., $\alpha_s=\operatorname{card}X_s$, $\beta_1=\operatorname{card}Y_1$, ..., $\beta_s=\operatorname{card}Y_s$ и $\operatorname{card}X=\alpha_1+\ldots+\alpha_s+X_\varnothing=n$, $\operatorname{card}Y=\beta_1+\ldots+\beta_s+Y_\varnothing=m$. Итак, в случае дифункциональности, если в i-й строке матрицы $G(R)$ встречаются две 1 (допустим, в столбцах j и j_1) и в одном из этих столбцов находится еще одна 1 (допустим, в j-столбце и строке i_1), то 1 появится и в j_1-столбце в той же строке i_1. Это свойство выполняется и для строк. Сформулируем это свойство как свойство «четырехугольника». Если в вершинах четырехугольника

$$G(R)=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&A&\dots&B&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&C&\dots&D&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{pmatrix} \\ \qquad\; j \qquad\quad j_1 \end{array} \begin{matrix} \\ i \\ \\ i_1 \\ \\ \end{matrix}$$

на любых трех местах появляется 1, то она появится и на месте, соответствующем четвертой вершине. Действительно, пусть i-й строке соответствует элемент x_i, i_1-й строке — элемент x_{i_1}, j-столбцу — элемент y_j и, наконец, j_1-столбцу отвечает элемент y_{j_1}, тогда если в трех вершинах, например A, B, C, стоит 1, то $R(x_i, y_j)=R(x_i, y_{j_1})=R(x_{i_1}, y_j)=1$. Из дифункциональности отношения R непосредственно следует $R(x_{i_1}, b_{j_1})=1$, что соответствует вершине D. Очевидно, что это свойство инвариантно относительно перестановок индексов (выбора вершин). Теперь можно перейти к доказательству утверждения.

Докажем необходимость. Допустим, отношение R дифункционально (оно путем соответствующей нумерации элементов множества X и Y и их классов смежности реализует отображение f). Нетрудно понять, что матрица этого отображения будет иметь вид (15). Действительно, если некоторый блок имеет хотя бы одну «соседнюю» 1 (сверху, снизу, слева, справа), то в силу свойства «четырехугольника», 1 должна появиться на всей «границе» блока в соответствующей строке или столбце. Поясним это утверждение. Выделим блок под номером k в матрице $G^*(R)$ и допустим, что в i-й строке под этим блоком появилась 1. Схематично трансформации можно представить цепочкой импликаций

$$G^*(R)=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \overbrace{\begin{pmatrix}1&1&\dots&1&\dots&1\\1&1&\dots&1&\dots&1\\ &&&&&\\1&1&\dots&1&\dots&1\end{pmatrix}}^{\beta_k} & \dots \\ \dots & \qquad\quad 1 & \dots \\ \dots & & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \}\alpha_k \\ i \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G^*(R)=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \overbrace{\begin{pmatrix}1&1&\dots&1&\dots&1\\1&1&\dots&1&\dots&1\\ &&&&&\\1&1&\dots&1&\dots&1\end{pmatrix}}^{\beta_k} & \dots \\ \dots & 1\;1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \}\alpha_k \\ i \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G^*(R)=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \overbrace{\begin{pmatrix}1&1&\dots&1&\dots&1\\1&1&\dots&1&\dots&1\\ &&&&&\\1&1&\dots&1&\dots&1\end{pmatrix}}^{\beta_k} & \dots \\ \dots & 1\;1\;\dots\;1\;\dots\;1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \}\alpha_k \\ i \\ \\ \end{matrix}$$

Применение свойства «четырехугольника» β_k-1 раз (столько же раз, если 1 появилась над блоком, и α_k-1 раз, если она расположена слева или справа от k-го блока) означает расширение блока или, что равносильно, расширение смежного класса образов или прообразов, а это невозможно. Таким образом, полученное противоречие доказывает, что из дифункциональности следует вид (15) матрицы $G^*(R)$. Достаточность проверяется непосредственно. Утверждение доказано.

Предположим теперь, что заданы два отношения E_1 и E_2, для которых матрица согласованности $J(E_1, E_2)$ приводится к виду (15). Допустим, что она еще не содержит нулевых строк и столбцов. Тогда нетрудно понять, что каждому блоку под номером k в области определения отношения E_1 соответствует декартово произведение $A_k^{\alpha_k}$, а в области определения E_2 декартово произведение $A_k^{\beta_k}$ в силу определения $J(E_1, E_2)$. При этом разбиения, индуцируемые E_1 и E_2 на множестве A_k, совпадают. Таким образом, для мультиотношений E_{1m} и E_{2m} каждому блоку соответствует один и тот же носитель, а так как и количество блоков и число ненулевых строк (столбцов) одно и то же, то нет фактически «лишних» или различных множеств среди носителей E_1 и E_2, т. е. у мультиотношений формируется один носитель. В обратном случае, когда у мультиотошений E_{1m} и E_{2m} носители совпадают, вид (15) для матрицы $G^*(R)$ без нулевых строк и столбцов устанавливается непосредственной проверкой. Теперь можно сформулировать теорему.

Теорема (о равенстве носителей мультиотношений). Два произвольных отношения — n-арное E_1 и m-арное E_2 — индуцируют два мультиотношения E_{1m} и E_{2m} с совпадающим носителем тогда и только тогда, когда матрица согласованности этих отношений $J(E_1, E_2)$ путем перестановок строк (столбцов) приводится к блочному виду (15) без нулевых строк и столбцов, что равносильно условию: отношение V_{E_1,E_2}, соответствующее матрице $J(E_1, E_2)$, является дифункциональным.

Доказательство необходимого и достаточного условия приведено непосредственно перед формулировкой теоремы, а их эквивалентность условию дифункциональности отношения V_{E_1,E_2} очевидно следует из утверждения 2.

5. Результаты и перспективы исследований

Грануляция информации позволяет представлять нечто «целое» семействами классов, каждый из которых, в свою очередь, является множеством элементов, неразличимых с точки зрения внутренних (сущностных), внешних (структурных) или контекстных (предметно-ориентированных) свойств. Более того, сами гранулы могут содержать в себе множества вложенных гранул. Возникающие иерархии (частичный порядок на гранулах, индуцированных различными свойствами) часто могут интерпретироваться как индуктивные («снизу вверх») и дедуктивные («сверху вниз») методы вывода. В работе впервые установлены условия, при которых отношения на отдельных уровнях продуцируют новые отношения, не различающие элементы гранул, на более высоких стратах. Таким образом, синтезированы предпосылки для получения ответов на вопросы: что разделяет уровни иерархии, что объединяет эти уровни и как они взаимодействуют? В этом плане важное значение приобретает «множественное» сравнение, т. е. возможность сопоставлять фактор-множества. Иначе говоря, поиск метрик на разбиениях, в том числе вложенных, представляет определенную перспективу не только для мультиалгебраических систем, но и других подходов в рамках GrC-парадигмы.

Список литературы: 1. *Zadeh L. A.* Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic // Fuzzy Sets Systems.– 1997.– Vol. 19.– P. 111–127. 2. *Pal S. K., Shankar B. U., Mitra P.* Granular computing, rough entropy and object extraction // Pattern Recognition Letters.– 2005.– Vol. 26.– P. 2509–2517. 3. *Yao Y. Y.* Perspectives of granular computing // Proceedings of 2005 IEEE International Conference on Granular Computing.– 2005.– Vol. 1.– P. 85–90. 4. *Yao J. T., Yao Y. Y.* Induction of classification rules by granular computing // Rough Sets and Current Trends in Computing / J. J. Alpigini, J. F. Peters, A. Skowron, N. Zhong (Eds.). Lecture Notes in Artifical Intelligence.– Spinger-Verlag Berlin Heidelberg.– 2002.– Vol. 2475.– P. 331–338. 5. *Yao Y. Y.* Information granulation and rough set approximation // International Journal of Intelligent Systems.– 2001.– Vol. 16, No. 1.– P. 87–104. 6. *Doherty P., Lukaszewicz W., Szalas A.* Information granules for intelligent knowledge structures // Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing / G. Wang, Q. Liu, Y. Yao, A. Skowron (Eds.). Lecture Notes in Artifical Intelligence.– Spinger-Verlag Berlin Heidelberg.– 2003.– Vol. 2639.– P. 405–412. 7. *Yao Y. Y.* Granular computing for data mining // Proceedings of SPIE Conference on Data Mining, Intrusion Detection, Information Assurance and Data Networks Security / B. V. Dasarathy (Ed.).– Kissimmee, Florida, USA.– 2006.– P. 1–12 (624105). 8. *Yager R. R.* Using granular objects in multi-source data fusion // Rough Sets and Current Trends in Computing / J. J. Alpigini, J. F. Peters, A. Skowron, N. Zhong (Eds.). Lecture Notes in Artifical Intelligebce.– Spinger-Verlag Berlin Heidelberg.– 2002.– Vol. 2475.– P. 324–330. 9. *Lin T. Y.* Granular computing (Structures, Representations, and Applications) // Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing / G. Wang, Q. Liu, Y. Yao, A. Skowron (Eds.). Lecture Notes in Artifical Intelligence.– Spinger-Verlag Berlin Heidelberg.– 2003.– Vol. 2639.– P. 16–24. 10. *Bargiela A., Pedrycz W.* Granular computing: an introduction.– Boston, Kluwer Academic Publishers, The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science.–2002.– Vol. 717.– 478 p. 11. *Машталир В. П., Шляхов В. В.* Свойства мультиалгебраических систем в задачах компаративного распознавания // Кибернетика и системный анализ.– 2003.– № 6.– С. 12–32. 12. *Луганский А. М., Машталир В. П., Путятина А. Е., Шляхов В.В.* О согласованности отношений в информационных системах // Радиоэлектроника и информатика.– 2004.– № 4.– С. 118–120. 13. *Машталир В. П., Шляхов В. В.* Необходимые и достаточные условия индуцирования мультиалгебраических систем n-арными отношениями // Интеллектуальные системы принятия решений и прикладные аспекты информационных технологий: М-лы междунар. конф.– Херсон: ХМИ.– 2006.– Т. 1.– С. 136–140. 14. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.– М.: Наука, 1970.– 392 с.

Поступила в редколлегию 07.06.2006