

**МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ПОШУКУ
ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ
З МОНОТОННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ**

Пархоменко В.Г.

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: vladislav.parkhomenko1@nure.ua

The problem of constructing two-sided approximations to a unique radial-symmetric positive solution of the first boundary-value problem for an equation $-\Delta u = f(u)$ in the radius R sphere is considered. The efficiency of the method is confirmed by computational experiments for $f(u) = \sqrt{u}$.

Проблема математичного моделювання процесів, що протікають у нелінійних середовищах, призводить до необхідності аналізу нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\Delta u = f(u) \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$u > 0 \text{ у } \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

де Ω – вимірна за Жорданом область з $\mathbb{R}^3$, $f(u)$ неперервна і додатна для всіх $u > 0$ функція.

Якщо Ω – сфера радіуса R у $\mathbb{R}^3$, то можна поставити задачу відшукування розв'язку задачі (1) – (3), який має радіальну симетрію, тобто розв'язку, залежного лише від $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Це призводить до наступної задачі для визначення $u = u(r)$:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = f(u), \quad 0 < r < R, \quad (4)$$

$$u(r) > 0, \quad 0 < r < R, \quad (5)$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u(R) = 0. \quad (6)$$

Задача (4) – (6) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(r) = \int_0^R K(r, s) f(u(s)) ds, \quad (7)$$

$$\text{де } K(r, s) = \begin{cases} s - \frac{s^2}{R}, & 0 \leq r \leq s, \\ \frac{s^2}{r} - \frac{s^2}{R}, & s < r \leq R. \end{cases}$$

Рівняння (7) розглядатимемо як нелінійне операторне рівняння у бана-

ховому просторі $C[0, R]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на $[0, R]$ неперервних функцій [1, 2]. Неперервний і додатний на $[0, R]$ розв'язок рівняння (7) приймемо за узагальнений розв'язок крайової задачі (4) – (6).

Оператор $(Tu)(r) = \int_0^R K(r, s)f(u(s))ds$ має наступні властивості:

а) є додатним оператором;

б) є u_0 -додатним оператором, де $u_0(r) = \frac{R^2 - r^2}{6}$;

в) є монотонним оператором, якщо функція $f(u)$ монотонна за u ;

г) є угнутим і навіть u_0 -угнутим оператором, де $u_0(r) = \frac{R^2 - r^2}{6}$, якщо $f(\tau u) > \tau f(u)$ для будь-якого додатного числа u при будь-якому $\tau \in (0, 1)$.

Для монотонного оператора T умовами $Tv_0 \geq v_0$, $Tw_0 \leq w_0$ виділімо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, де $v_0(r) = \alpha u_0(r)$, $w_0(r) = \beta u_0(r)$, $0 \leq \alpha < \beta$, і сформуємо два ітераційні процеси

$$\begin{aligned} v^{(n+1)}(r) &= \int_0^R K(r, s)f(v^{(n)}(s))ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ w^{(n+1)}(r) &= \int_0^R K(r, s)f(w^{(n)}(s))ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ v^{(0)}(r) &= v_0(r), \quad w^{(0)}(r) = w_0(r). \end{aligned}$$

Послідовність $\{v^{(n)}(x)\}$ не спадає за конусом K_+ , послідовність $\{w^{(n)}(x)\}$ не зростає за конусом K_+ . Оскільки конус K_+ є нормальним, а оператор T є цілком неперервним, то обидві побудовані ітераційні послідовності збігаються у нормі простору $C[0, R]$ до єдиного додатного розв'язку u^* крайової задачі (4) – (6) і має місце ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(0)} = w_0.$$

За наближений розв'язок крайової задачі крайової задачі (4) – (6) на n -й ітерації обираємо функцію $u^{(n)}(r) = \frac{v^{(n)}(r) + w^{(n)}(r)}{2}$. При цьому похибка

наближення оцінюється нерівністю $\|u^{(n)} - u^*\|_{C[0, R]} \leq \frac{1}{2} \max_{r \in [0, R]} (w^{(n)}(r) - v^{(n)}(r))$.

Обчислювальний експеримент проведено для $f(u) = \sqrt{u}$.

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

2. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.