ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ҐРУНТІ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Подгорний О.Р.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: alex.aminuts@gmail.com

The problem of calculating the porous media flow in piecewise-homogeneous soil is considered. For its numerical analysis it is proposed to use the R-functions method. shows the results of a computational experiment for a test problem.

Течії рідини в пористому середовищі (фільтраційні течії) широко розповсюджені у природі. До розгляду таких течій приходять при дослідженні процесів зрошення чи осушення, втікання морської води в прісну, обтікання гідротехнічних споруд тощо. При цьому область фільтрації може мати складну геометричну форму, що призводить до втрати точності при чисельному розв’язанні відповідних задач математичної фізики. Отже, розробка нових та модифікація існуючих методів чисельного аналізу фільтраційних течій є актуальною науковою задачею.

Розглянемо задачу стаціонарної безнапірної фільтрації у кусково-однорідному ґрунті. Вважатимемо, що фільтрація відбувається в площині, що паралельна до координатної площини xOy, і позначимо через Ω розрахункову область.

Для кусково-однорідного ґрунту коефіцієнт фільтрації задамо у вигляді $\kappa(x,y)=\begin{cases}\kappa_1, & (x,y)\in\Omega_1,\\ \kappa_2, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}$ де $\bar\Omega=\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2$, $\operatorname{int}\Omega_1\cap\operatorname{int}\Omega_2=\varnothing$, і $\partial\Omega_{12}$ є лінією розділу двох ґрунтів.

Аналіз плоских течій зручно проводити за допомогою функції течії, яка вводиться за формулами $v_x=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$.

Якщо теоретичне дослідження фільтрації базується на основі закону Дарсі [2], то для функції течії $\psi(x,y)=\begin{cases}\psi_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ \psi_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}$ можна отримати рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0,\quad (x,y)\in\Omega. \tag{1}$$

Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω складається з чотирьох ділянок: $\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3\cup\partial\Omega_4$. На $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_4$ ґрунт межує з областями вільної рідини (наприклад, це дно водойми), а $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_3$ відповідають непроникним поверхням (гранітна основа або бетонна гідротехнічна споруда) (рис. 1). Тоді рівняння (1) слід доповнити такими крайовими умовами:

$$\psi\big|_{\partial\Omega_1} = 0,\ \psi\big|_{\partial\Omega_3} = Q,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_2} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_4} = 0, \qquad (2)$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$.

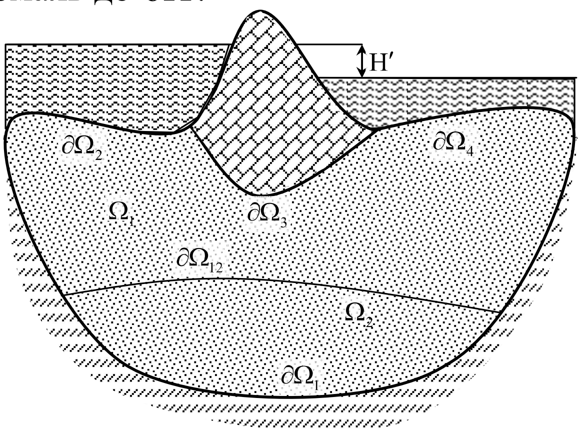

Рис. 1. Область фільтрації Ω

Величина Q є невідомою сталою, що задає повни витрати рідини. Для її визначення слід використати інтегральним співвідношенням

$$\int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} ds = -H', \qquad (3)$$

де H' – діючий напір.

Крім того, слід поставити умови спряження на лінії $\partial\Omega_{12}$ розділу двох ґрунтів. Ці умови мають вигляд:

$$\psi_1\big|_{\partial\Omega_{12}} = \psi_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\quad \kappa_1\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}} = \kappa_2\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}, \qquad (4)$$

де $\mathbf{n}$ – нормаль до $\partial\Omega_{12}$.

Для розв’язання задачі (1) – (4) пропонується використати структурний метод R-функцій, що дає можливість точно і повно врахувати геометричну та аналітичну інформацію, яка міститься у постановці задачі [1]. Відповідно до цього методу, побудовано повну структуру розв’язку, що лінійно містить невідому константу Q і задовольняє всім крайовим умовам (2) і (4). Для апроксимації невизначеної компоненти структури пропонується застосувати варіаційний метод Рітца з подальшим визначенням Q зі співвідношення (3).

Список використаних джерел:

1. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006. – 416 с.

2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.