*Материалы XVII Международного молодежного форума «**Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке**» (Харьков, ХНУРЭ, 22 – 24 апреля 2013). – Т. 7.*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ И ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Артюх А.В.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. прикладной математики,
тел. +380577021436, E-mail: ant_artjukh@mail.ru

The given work is devoted to the problem of the nonstationary plane parallel heat-conductive flow of viscous incompressible fluid modeling. The problem solution method is based on using R-function and Galerkin methods with the help of stream function. Numerical solutions are obtained.

В работе рассматриваются нестационарные плоскопараллельные конвекционные течения вязкой теплопроводной жидкости под действием силы тяжести в конечных односвязных областях. Течение описывается в терминах «функции тока» $\psi(x,y,t)$ и «температура» $T(x,y,t)$. Функция тока связана с вектором скоростей $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$ жидкости соотношениями:

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Математическая модель в безразмерных переменных имеет вид:

$$\mathsf{Sh}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\right)=\Delta^2\psi-\mathsf{Gr}\frac{\partial T}{\partial x},\tag{1}$$

$$\mathsf{Sh}\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mathsf{Pr}}\Delta T,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0,\tag{2}$$

$$\psi\big|_{t=0}=0,\ \psi\big|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega}=0,\tag{3}$$

$$T\big|_{t=0}=T_0(x,y),\ T\big|_{\partial\Omega}=\tilde{h}(s,t),\ s\in\partial\Omega.\tag{4}$$

Здесь T – безразмерная температура, Sh – число Струхаля, Gr – число Грасгофа, Pr – число Прандтля, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области $\Omega\subset R^2$, $\tilde{h}$ – заданный температурный режим на границе, $T_0(x,y)$ – начальная температура.

Для решения задачи (1) – (4) построен итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}(x,y,t)$ и $T^{(0)}(x,y,t)$ выбрано решение линейной задачи

$$\mathsf{Sh}\frac{\partial\Delta\psi^{(0)}}{\partial t}=\Delta^2\psi^{(0)}-\mathsf{Gr}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x},$$

$$\mathsf{Sh}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}=\frac{1}{\mathsf{Pr}}\Delta T^{(0)},\ (x,y)\in\Omega,\ t>0,$$

$$\psi^{(0)}\Big|_{t=0}=0,\ \psi^{(0)}\Big|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega}=0,$$

$$T^{(0)}\Big|_{t=0}=T_0(x,y),\ T^{(0)}\Big|_{\partial\Omega}=\tilde{h}(s,t),\ s\in\partial\Omega.$$

Итерационный процесс имеет вид:

$$\Delta^2\psi^{(k+1)}-\mathsf{Gr}\frac{\partial T^{(k+1)}}{\partial x}+\mathsf{Sh}\frac{\partial(-\Delta\psi^{(k+1)})}{\partial t}=\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi^{(k)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi^{(k)}}{\partial y},\qquad(5)$$

$$\mathsf{Sh}\frac{\partial T^{(k+1)}}{\partial t}-\frac{1}{\mathsf{Pr}}\Delta T^{(k+1)}=\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial x}\frac{\partial T^{(k)}}{\partial y}-\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial y}\frac{\partial T^{(k)}}{\partial x},\ (x,y)\in\Omega,\ t>0,\qquad(6)$$

$$\psi^{(k+1)}\Big|_{t=0}=0,\ \psi^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial\psi^{(k+1)}}{\partial\mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega}=0,\qquad(7)$$

$$T^{(k+1)}\Big|_{t=0}=T_0(x,y),\ T^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega}=\tilde{h}(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ k=0,1,2,\ldots.\qquad(8)$$

В соответствии с методом R-функций академика НАН Украины В.Л. Рвачева общая структура решения задачи (5) – (8) имеет вид

$$\psi^{(k+1)}=\omega^2\Phi^{(k+1)},\qquad(9)$$

$$T^{(k+1)}=h+\omega\Upsilon^{(k+1)},\qquad(10)$$

где h – продолжение функции $\tilde{h}$ внутрь области Ω; $\omega(x,y)$ – функция, удовлетворяющая условиям: 1) $\omega(x,y)=0$ на $\partial\Omega$; 2) $\omega(x,y)>0$ в Ω; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=-1$ на $\partial\Omega$, Φ и Υ – неопределенные компоненты структуры. Если граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых (без точек возврата), каждая из которых допускает задание с помощью элементарной функции, то такая функция $\omega(x,y)$ является элементарной и может быть построена согласно методу R-функций [1].

Для аппроксимации неопределенных компонент структуры (9), (10) воспользуемся методом Галеркина для нестационарных задач [2].

Был проведен вычислительный эксперимент для различных областей Ω, различного числа координатных функций и чисел Струхаля, Грасгофа и Прандтля. Численные результаты хорошо согласуются с результатами других авторов и результатами физических экспериментов.

Список источников.

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.