53:08:530.1

Физические модели анализа результатов измерений

Ю. П. МАЧЕХИН[1]

Рассмотрены условия применимости модели классического детерминизма для анали-за и представления процесса измерения. Показано, что получаемые в процессе измерений результаты можно исследовать с позиций как классического детерминизма, тогда целе-сообразно использовать понятие погрешности, так и физически оправданного детерми-низма. Изучение режимов динамического хаоса в детерминированных системах и измере-ние их параметров возможно только при использовании понятия неопределенности.

Ключевые слова: *погрешность, неопределенность, классический детерминизм, ди-намический хаос.*

The applicability conditions of classical determinism model for analysis and overview of measu-rement process are considered. It is shown, that the results gained during the measurement pro-cess, can be investigated both as from the positions of classical determinism, then it is advisable to use the concept of an error, and so from the position of physically justified determinism, when it is advisable to use the concept of measurement uncertainty, and the study of dynamic chaos regimes in deterministic systems and measurements of their parameters are possible only with the use of the concept of an uncertainty.

Key words: *error, uncertainty, classical determinism, dynamic chaos.*

Дискуссия о применимости Руководства по выражению пределенности измерения [1] в широкой метрологичес- практике [2—5] подтолкнула не только к сравнительно-анализу понятий и областей применения неопределен-ти и погрешности, но и к анализу исходных физических и ематических положений, на основе которых формирует-еория измерений [6] и ее часть, связанная с обработкой льтатов измерений [7].

Одним из ключевых моментов в этой дискуссии стал ана- применимости некоторых понятий, например, понятия нного значения измеряемой величины, которое явля- основой для определения погрешности измерения. В е время в Руководстве при обсуждении неопределенно- измерений избегают использования этого понятия. В связи с этим, ниже обсуждается, что представляет собой измеряемая величина, что ожидается получить в процессе измерений и в чем физическое отличие понятий неопределенности и погрешности измеряемой величины.

Если следовать определению, что истинное значение — это результат бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений [8], то можно полагать, что математическая операция предельного перехода имеет не только абстрактный математический смысл, но и может быть физически реализована. То, что это не так, следует из невозможности осуществить предельный переход в реальном физическом процессе измерений (хотя бы в силу конечного времени, отведенного на измерение). С другой стороны, при реальных измерениях истинное значение заменяется действительным и тогда теория погрешности строится с учетом не истинного, а действительного значения [9]. Другими словами, теория изме-

---

[1] Национальный научный центр «Институт метрологии», Ук-а.

рений, построенная на предельных переходах (когда количество измерений стремится к бесконечности), базируется на понятиях, составляющих основу классического детерминизма, при которых знание начальных условий состояния определяет знание поведения этой системы в любой момент времени (даже если оно стремится к бесконечности).

В рамках классического детерминизма естественно, что физические явления или эффекты определяются как результаты предельных переходов. Поэтому теория измерений, построенная на классическом детерминизме, когда оценка значения физической величины вычисляется при помощи предельного перехода, позволяет получить строгий с математической точки зрения, но парадоксальный с физической точки зрения результат. Например, результат вычисления дисперсии при бесконечном количестве измерений равен нулю, однако в реальных измерительных экспериментах такой предел никогда не достигается. Следует обратить внимание на то, что даже для эталонов, как наиболее исследованных средств измерений, устанавливается среднее квадратическое отклонение не равным нулю, следовательно, предельный переход в этом случае также не используется.

В [10] было выдвинуто положение, что для решения задачи предсказания поведения динамической системы в реальных физических экспериментах необходима не классическая математика, построенная на базе классического детерминизма, а интервальная математика, позволяющая оперировать с величинами, имеющими конечную область возможных значений физических величин. Интервальная математика пока не разработана, поэтому для реальных экспериментов стали применяться модели, когда физические величины и начальные условия представляются не точкой, а областью, в которой возможно вероятностное описание ожидаемого значения физической величины. А это значит, что используемые модели построены на вероятностном подходе представления физических величин и начальных условий при описании детерминированных систем. Таким образом, точечное представление значения физической величины заменяется интервальным, и, следовательно, можно ввести понятие неопределенности значения физической величины. Физическая величина в этом случае не может быть представлена одним фиксированным значением, а только областью значений, которые могут быть приписаны этой физической величине. Из этого следует, что еще до того, как осуществляется реальный измерительный процесс, уже имеется неопределенность знания значения физической величины, которая не зависит от процесса измерения. Математический аппарат, использующий функцию плотности распределения вероятности (pdf) [7] для описания исходных величин в уравнении измерений, фактически осуществляет переход к вероятностному описанию физических величин, что отличается от описания физических величин в рамках классического детерминизма.

В настоящей работе представлены результаты анализа влияния различных физических моделей процесса измерений на выбор оценки качества измерений.

Классический детерминизм в теории измерений. Чтобы уточнить принципиальные отличия физических моделей понятий неопределенности и погрешности, необходимо обратиться к основным, базовым физическим положениям, на которых построена теория измерений. Нет необходимости доказывать, что основу всех измерительных процессов составляют только детерминированные процессы (отметим сразу, что для проводимого анализа на данном этапе случайным влиянием окружающей среды можно пренебречь).

Анализ детерминированных процессов построен на основных постулатах детерминизма, присущих классической физике, на которых построена вся метрология [9]. В соответствии с одним из них детерминизм позволяет установить однозначную связь между начальными условиями и состоянием этой системы через время t (даже если $t \to \infty$). Точность определения состояния системы в произвольный момент времени однозначно связана с точностью задания начальных условий. Следовательно, в общем случае физические объекты считаются различными, если разницу в значениях физических величин можно обнаружить в $(n + 1)$-м знаке после запятой, даже если $n \to \infty$. В этом случае точность определения значения физической величины зависит только от точности задания начальных условий измерительного эксперимента. Последовательно уточнив начальные условия и, тем самым, повысив точность измерения, можно достичь абсолютного значения физической величины. В рамках классического детерминизма определение физической величины осуществляется только через предельный переход, поэтому в теории измерений было введено понятие истинного значения, которое является результатом предельного перехода. Так как истинное значение служит базовым понятием при построении теории погрешности измерений, можно утверждать, что классический детерминизм является теоретической базой погрешности измерений.

Измеряемая величина: условия ее существования и определения. Вопрос об измеряемой величине в известных методах анализа результатов измерений решается тривиально. В [1] отмечено, что «...руководство... рассматривает выражение неопределенности измерения *хорошо определенной физической величины, характеризуемой единственным значением*». При этом измеряемая величина может быть либо константой, либо величиной, изменяющейся по детерминированному закону.

В соответствии с разъяснением измеряемая физическая величина имеет численное значение, точность которого не ограничена. Однако уже на этапе построения уравнения измерений для определения численного значения этой измеряемой физической величины всегда происходит ограничение точности, поскольку отсутствует принципиальная возможность в одном уравнении учесть все физические эффекты, влияющие на результат определения значения физической величины. Математическая модель, адекватно описывающая уравнение измерения физической величины, как правило, не ограничивает точность, а используемые приближенные математические методы вычисления значения физической величины вносят дополнительную погрешность в определение этого значения.

Решение уравнения измерения представляет собой результат математической операции, поэтому может быть получена любая точность решения и она зависит от точности математических операций и пределов. С существованием предела связывают понятие истинного значения, которое может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений [8]. Понятно, что подобная ситуация в физическом эксперименте не реализуема в принципе, так как не учитывает реальные условия измерительного эксперимента. Истинное значение невозможно определить абсолютно правильно, поскольку истинное значение в том определении, которое есть, — это не физическая реальность, а математический образ или предел, к которому может стремиться результат измерений. Сопоставление или сравнение истинного значения и результата измерений некорректно, ибо сравниваются математические и физические понятия, и по этой причине понятие погрешности подвергается критике в документах по неопределенности. Реальное истинное значение может быть получено при условии, что под истинным значением будет пониматься решение уравнения измерений в реальных физических условиях, которые накладывают требование конечной точности. Независимо от наличия внешних шумов, изменяющих измеряемую величину, истинное значение может быть известно только с конечной точностью. Таким образом, опираясь только на основные физические закономерности, мы подошли к утверждению, что истинное значение физической величины может быть известно только с определенной точностью.

Если рассмотреть более общий случай, когда физическая система находится в динамическом режиме и ее параметры изменяются во времени, то появляется возможность регистрировать нерегулярное поведение в отличие от детерминированного (такие системы подробно были рассмотрены в [11]). Наличие режима нерегулярного поведения приводит к ситуации, когда измеряемого значения не существует в общепринятом понимании, а есть область значений, внутри которой может изменяться значение физической величины. Здесь следует отметить, что обычно схема измерений построена таким образом, что направлена на изучение стабильных состояний и процессов и на основании разработанных для этих случаев методов построена теория погрешности, а сейчас — и теория неопределенности. Однако все более расширяющиеся области измерений в производственных процессах, медицине связаны с анализом периодических процессов с целью подготовки измерительной информации для оперативного контроля состояния динамической системы. Следовательно, требуется определять значения физических величин в динамических системах даже тогда, когда их поведение нерегулярно.

Физически оправданный детерминизм в теории измерений. Изучая проблемы физической постановки задач в рамках классического детерминизма, Борн [10] ввел понятие физически оправданного детерминизма и показал, что решение самой простой детерминированной задачи необходимо осуществлять при начальных условиях, заданных в вероятностной форме. Именно такая постановка задачи соответствует реальным физическим ситуациям.

Опираясь на развитие классического детерминизма в направлении применения вероятностного описания значений физических величин для реальной оценки состояния физических систем, можно построить теорию анализа результатов измерений, отличную от существующей теории погрешности измерений. Поскольку уже на этапе описания реальной физической ситуации измерительного процесса применение принципов детерминизма наталкивалось на невозможность их реализации в полном объеме, в практике измерений применялась упрощенная модель детерминизма. Однако качественно эта модель не меняла подхода к процессу измерений и анализу их результатов. В итоге теория погрешности развивалась, но принципиальные базовые понятия не изменялись. Поэтому с установлением понятия неопределенности результатов измерений появилась возможность пересмотреть физические основания и теории погрешности измерений.

Применение физически осмысленного детерминизма в теории измерений связано с тем, что любое физическое состояние может быть известно с малой, но всегда конечной неточностью. В связи с этим исходные данные как для прямых измерений, так и для косвенных должны задаваться не числом, а вероятностным распределением. Развитие понятия неопределенности в измерениях связано с использованием вероятностного описания всех параметров в уравнении измерений, что математически описывается pdf-функцией [7].

Таким образом, неопределенность результата измерений существует всегда, даже при отсутствии случайного воздействия окружающей среды на измерительный процесс, поскольку существует неопределенность в задании начальных условий для детерминированного уравнения измерений. И в этом смысле неопределенность результата измерений можно рассматривать как развитие теории погрешности измерений, которая позволяет более полно учитывать реальные физические ситуации измерительных процедур.

Как дополнительное подтверждение необходимости использования понятия неопределенности при анализе результатов измерений можно рассматривать возможность существования в детерминированных динамических системах нерегулярного, стохастического движения. Такое поведение приводит к невозможности точно оценить параметры системы, поскольку таких значений нет.

Случайность и стохастичность в детерминированных системах. При анализе условий возникновения неопределенности результата измерений был сделан вывод, что исходные параметры в уравнении измерений необходимо представлять в вероятностном виде, однако механизм случайного поведения физических величин не рассматривался в предположении, что он может быть связан либо с влиянием окружающей среды, либо значения этих параметров определены, в свою очередь, с некоторой неопределенностью.

Каким бы ни представлялся источник неопределенности параметров исследуемой системы, задача изучения этой системы рассматривается как детерминированная со случайными начальными условиями. Детерминированное решение, основанное на случайных начальных условиях, имеет разброс, обусловленный характером решения этого детерминированного уравнения при разных начальных условиях.

Принципиально новым в проведении измерений в динамических системах является существование в нелинейных динамических системах автоколебательного режима «динамического хаоса». Отметим, что динамический хаос — это одна из форм развития синергетических эффектов [12]. Наличие таких режимов обусловливает случайное изменение значений физических величин в таких системах и, как следствие, необходимость учитывать при проведении измерений конечный интервал их случайных вариаций.

Не вдаваясь в детальный анализ причин возникновения таких режимов, отметим, что при фиксированных начальных условиях решение детерминированной задачи имеет случайный разброс, превышающий точность задания начальных условий. Следовательно, характер поведения исследуемой системы вносит неопределенность в оценку ее параметров. Поскольку развитие динамического хаоса формирует функцию плотности распределения, свойственную данной системе, анализ результатов измерений необходимо осуществлять после проверки реализованного случайного процесса на эргодичность. Применение вероятностных методов для анализа физических величин и результатов их измерений возможно при условии, что изучаемые статистические процессы являются эргодическими.

Эргодичность случайных процессов. Математическое описание эргодичности случайного процесса может основываться на разных характеристиках. Основная из них, представляющая интерес для теории измерений, — эквивалентность усреднения во времени случайного процесса и усреднения по ансамблю всех возможных состояний, реализуемых случайным процессом при времени наблюдения за системой $t \to \infty$. Для метрологии эргодичность случайных вариаций измеренных значений физической величины является наиболее удовлетворительным, если не единственным обоснованием применения как временного усреднения, так и усреднения по вероятностному закону распределения возможных состояний.

Среднее во времени любой функции $f(t)$ определяется как

$$\bar{f} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau),$$

где N — количество наблюдений; τ — время между наблюдениями.

Среднее по ансамблю возможных реализаций

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) P(z) dz,$$

где $P(z)$ — плотность вероятности.

Эргодичность процесса f означает, что

$$\langle f \rangle = \bar{f}. \quad (1)$$

Эргодический процесс при временном усреднении теряет случайный характер и стремится к некоторой постоянной, равной среднему статистическому значению. Это обстоятельство значительно упрощает измерение статистических средних, поскольку вместо громоздкого массового опыта, состоящего в усреднении по большому количеству реализаций случайного процесса, в случае его эргодичности оказывается достаточным усреднение одной, но достаточно длинной временной реализации результатов измерений.

При бесконечно длительном наблюдении за системой, когда она успевает побывать в каждой точке пространства состояний, решение уравнения (1) представляет собой постоянную величину, не зависящую от времени и равную наиболее вероятному значению, которое можно рассматривать как истинное. Реальный процесс измерений ограничен во времени, и, соответственно, (1) выполняется приближенно. В этом случае решение уравнения представляет не истинное, а действительное значение величины f.

Таким образом, эргодичность дает возможность применять статистические методы анализа результатов измерений, но она не позволяет решить задачу определения точного значения физической величины, поскольку существует остаточная неопределенность.

Влияние характера и характеристик поведения нелинейных динамических систем на результат измерения. Анализ, проведенный в предыдущей части статьи, подводит к выводу, что неопределенность значения физической величины может стать основным понятием составляющей теории измерений.

Важным моментом в становлении и развитии понятия неопределенности измерений стала модель приближенного вероятностного описания значения физической величины. Как правило, механизм вероятностного поведения физической величины не оговаривается, поскольку предполагается, что существует только один такой механизм — это случайное воздействие окружающей среды. Кроме того, в начале статьи была сделана оговорка, что рассматриваемый вопрос касается динамически стабильных систем. А если они стабильны в целом, но существуют локально неустойчивые режимы? В одном случае это системы, находящиеся в переходном режиме, и для них отсутствует постановка измерительной задачи, пока они не перейдут в стабильное состояние. В другом случае постановка измерительной задачи связана с изучением режима «динамического хаоса» в нелинейной динамической системе автоколебательного характера. Такой случай представляет целую область синергетики [13] и рассматривает возможность и условия развития нерегулярных нестабильных режимов в динамических системах.

Остановимся на двух основных причинах развития стохастических режимов на примере математической модели нелинейной динамической системы (НДС).

Первая — это неустойчивость решения (траектории системы в фазовом пространстве экспоненциально «разбегаются») [14]. Это свойство, присущее самой НДС без внешних шумов, играет определяющую роль в формировании у динамических систем таких качеств, как непредсказуемость и случайность поведения. На неустойчивость, как на причину непредсказуемости и случайности в НДС, указывал еще Пуанкаре в [15] и с более развитой аргументацией — Крылов в [16]. События, совершающиеся в результате неустойчивых движений, оказываются случайными и поэтому непредсказуемыми. Для неустойчивой системы характерен процесс нарастания малых возмущений во времени. В линейной системе неустойчивость приводит к нарастающему движению, которое в фазовом пространстве имеет образ траектории, уходящей в бесконечность. В нелинейных системах всегда есть механизм нелинейного ограничения нарастания малых возмущений. Если к тому же система не только нелинейная, но и автоколебательная (диссипативная), а значит, имеет притягивающую область, называемую аттрактором, то в силу свойств такой системы ее движение приводит к сжатию фазового объема во времени, и изображающие траектории будут стремиться в некоторую ограниченную притягивающую область, т. е. в аттрактор [17], расположенный в конечной области фазового пространства. Нелинейность в системе и неустойчивость могут сложным образом взаимодействовать друг с другом. Это может привести к локальной неустойчивости в одной части фазового объема и к устойчивым траекториям в другой области. Неустойчивая траектория, «раскручиваясь», испытывает нелинейное ограничение, которое возвращает ее внутрь аттрактора. Множество таких траекторий, которые составляют притягивающее множество, называется странным аттрактором. Не будем приводить здесь детального описания математических свойств странных аттракторов, поскольку для решения поставленной задачи принципиальным являются физические особенности этих объектов и какое они оказывают влияние на формирование динамического хаоса.

Вторая причина развития стохастического режима — это чувствительность к начальным условиям, которая проявляется в следующем эффекте. Каждому значению начальных условий НДС в соответствии с теоремой единственности решения (задача Коши) соответствует одно единственное решение. Если решается дифференциальное уравнение, описывающее поведение НДС, то должна выполняться теорема единственности решения. Задача Коши имеет единственное решение, которое определяется только начальными условиями и, следовательно, в этом смысле вполне предсказуемое. В силу наличия в НДС неустойчивости, а точнее локальной неустойчивости, это решение может носить сложный нерегулярный, запутанный характер, но как решение Коши оно все равно остается предсказуемым. Если теперь решать ту же задачу, но с незначительно измененными начальными условиями, то решение будет совсем другим из-за механизма локальной неустойчивости. И каким это решение будет, зависит только от того, какие начальные условия будут использованы. В этом и заключается свойство чувствительности НДС к начальным условиям: малые отклонения начальных условий в начальный момент могут приводить к большим отклонениям в состоянии системы через время t. Здесь встает вопрос, что понимать под точностью задания начальных условий, если существует такая чувствительность к ним.

В то же время, если подойти к проблеме обработки результатов измерений как к анализу свойств множества, заданного в топологическом пространстве, то можно воспользоваться аппаратом теории множеств. Во множестве результатов измерений в НДС зафиксированы относительные отклонения полученных значений, которые могут формировать определенную структуру. Например, в структуре множества результатов измерений в НДС может наблюдаться свойство самоподобия или масштабной инвариантности (скейлинга). Масштабная инвариантность, как правило, описывает соотношение между пространственным или временным масштабом наблюдения и отклонением наблюдаемого параметра. Кроме того, масштабная инвариантность может быть как детерминированной, так и статистической, т. е. она определяется по статистически усредненным характеристикам объектов или процессов. Эти свойства могут позволить получить некую оценку, характеризующую качество измерений. Следовательно, появляется возможность использовать не статистические методы для оценки качества результатов измерений, а методы анализа свойств множеств в топологическом пространстве.

Основным теоретическим положением, на котором будут строиться дальнейшие рассуждения и выводы, является специфика множества результатов измерений, заключающаяся в том, что эти множества являются хаусдорфовыми [18]. Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если для каждой пары различных точек x_1 и $x_2 \in X$ существуют такие открытые множества U_1 и U_2, что $x_1 \in U_1$ и $x_2 \in U_2$, для которых $U_1 \cap U_2 = 0$. Из этого определения следует, что если элементы множества отделимы друг от друга непересекающимися окрестностями, то они составляют хаусдорфово множество, для которого существует своя хаусдорфова метрика.

Как правило, окончательным результатом измерений является определение или оценка множества, к которому стремится или может стремиться первоначально полученное множество результатов измерений. Применительно к задаче, решаемой в данной статье, это означает, что по полученному экспериментально множеству необходимо определить последовательности множеств и их сходимость к множеству со стабильной структурой, которое называется, в общем случае, фракталом [19]. Поскольку фрактал представляет собой компактное множество, диаметр этого множества характеризует неопределенность результата измерения. Введение понятия фрактала в исследовательскую практику приводит к необходимости использовать размерность множества в качестве количественного параметра. Хаусдорфова размерность множества не обязательно должна совпадать с размерностью самого пространства и может иметь дробное значение.

Из этого следует, что если размерность множества равна топологической, то поведение системы подчиняется детерминированным динамическим закономерностям. Множество результатов измерений в такой системе имеет предел, который описывается конкретной величиной (или числом). Поскольку множество результатов измерений, как было показано выше, является хаусдорфовым, а значит, размерность может быть дробной, предельное множество, к которому оно стремится, является фракталом.

Выводы. Рассмотренные физические модели описания процесса измерения физической величины позволяют сформулировать условия применения таких понятий, как погрешность и неопределенность, и уточнить, в каких случаях целесообразно использовать погрешность, а в каких неопределенность.

В основе условий использования погрешности лежит модель классического детерминизма. В рамках этой модели значение физической величины представляет собой результат предельного перехода при бесконечном увеличении количества и качества измерений. В то же время, применение на практике погрешности как оценки качества измерений не связано с реализацией предельных переходов. В практике оценки погрешности измерений развитие уже давно пошло по пути решения измерительных задач в пределах физически осмысленного детерминизма и использования вероятностных оценок.

Физическая модель применения неопределенности при оценке качества измерений построена на адаптированной к реальным физическим условиям форме классического детерминизма и формулируется как модель физически осмысленного детерминизма. Поскольку физические модели как в случае применения неопределенности, так и в случае использования погрешности опираются на физически осмысленный детерминизм, по этой причине математический аппарат и результаты его применения в обоих случаях дают очень близкие результаты. Главное здесь то, что при любой постановке измерительной задачи используется только приближенная форма описания процесса измерения. Следовательно, используемое при анализе результатов измерений условие эргодичности всегда рассматривается в приближенном варианте.

Существенно новое в физической постановке измерительных задач заключается в том, что бывают ситуации, когда поведение динамических детерминированных систем может быть стохастическим. В этом случае появляется неопределенность результата измерения, связанная с отсутствием фиксированного значения измеряемой физической величины. Это значит, что есть не одно значение, которое необходимо измерить, а существует область возможных значений физической величины, которую и можно трактовать как неопределенность значения физической величины. Как показано выше, при этом пределом, к которому может стремиться результат измерений, является множество конечного размера, возможно обладающее свойствами фрактала, т. е. результат измерений будет иметь некоторую «размытость», а следовательно, оценку качества измерения надо рассматривать только с позиции неопределенности. Пример со стохастичностью поведения динамической системы может быть нетривиальным, но характерным для понимания возникновения неопределенности в измерительной задаче. В этом смысле, неопределенность следует рассматривать как следующий этап развития теории оценки качества измерения и погрешности в условиях более реальной постановки измерительной задачи, в том числе и для динамических систем со сложным поведением.

Литература

1. **Руководство** по выражению неопределенности измерения / Пер. с англ. — СПб: ВНИИМ, 1999.
2. **Кузнецов В. П.** // Измерительная техника. — 2003. — № 8. — С. 21.
3. **Слаев В. А., Чуновкина А. Г.** // Измерительная техника. — 2003. — № 9. — С. 20.
4. **Дойников А. С.** // Законодательная и прикладная метрология. — 2002. — № 5. — С. 46.
5. **Голубев Э. А.** // Измерительная техника. — 2003. — № 10. — С. 7.
6. **Арутюнов П. А.** // Измерительная техника. — 2002. — № 11. — С. 15.
7. **Вёгер В.** // Измерительная техника. — 2003. — № 9. — С. 3.
8. **РМГ 29—99.** ГСИ. Метрология. Основные термины и определения.
9. **Маликов М. Ф.** Основы метрологии. — М., 1949.
10. **Борн М.** // Успехи физических наук. — 1959. — Т. 49. — № 2. — С. 13.
11. **Лоренц Э.** Детерминированное неопределенное течение. Странные аттракторы. — М.: Мир, 1981. — С. 88.
12. **Николис Г., Пригожин И.** Познание сложного. — М.: Мир, 1990.
13. **Шустер Г.** Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.
14. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
15. **Poincare H.** Calcul des Probabilites. — Paris: Cantier-Villard, 1912.
16. **Крылов Н. С.** Работы по обоснованию статистической физики. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
17. **Лихтенберг А., Либерман М.** Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
18. **Мачехин Ю. П.** // Метрологія та вимірювальна техніка (Метрологія — 99): Наук. праці II міжнар. наук.-техн. конф. У 2-х т. Т. 1. — Харків: ХДНДІМ, 1999. — С. 38.
19. **Кроновер Ричард М.** Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Постмаркер, 2000.

Дата одобрения 14.03.2005 г.