

УДК 519.7:007.52; 519.711.3



І.Д. Вечірська, І.Е. Гончаров, С.І. Шепілов

ХНУРЕ, м. Харків, Україна, ira_se@list.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ ЛОГІКИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ ЯК КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНОЇ ЛОГІКИ

В статті досліджено логіку скінченних предикатів як одну з композиційно-номінативних логік. Проведено аналіз предикатних алгебр та алгебр предикатних операцій, що входять до складу логіки скінченних предикатів, а також їх застосувань. Досліджено лінійні логічні перетворення та модифікований добуток морфізмів предикатної категорії.

АЛГЕБРА, ВІДНОШЕННЯ, ЛІНІЙНЕ ЛОГІЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ЛОГІКА, МОДИФІКОВАНИЙ ДОБУТОК, МОРФІЗМ, ПРЕДИКАТ, ПРЕДМЕТНА ОБЛАСТЬ

Вступ

Швидкі темпи розвитку інформаційних технологій зумовлюють розширення сфери застосування математичної логіки. Моделі та методи математичної логіки все глибше проникають в інформатику, прикладну лінгвістику, обчислювальну математику. Апарат математичної логіки є основою моделювання різноманітних предметних областей, дозволяє знаходити знання, визначати та обґрунтовувати їх істинність. Проте класична логіка має ряд обмежень, які заважають застосовувати її для моделювання та програмування різноманітних об'єктів і процесів. Серед таких завад на шляху моделювання відзначимо перевантаження синтаксичними та формальними аспектами і недостатнє вивчення семантичних, смислових аспектів. Насправді для розробки інформаційних систем використовуються набагато потужніші класи функцій, ніж скінченні предикати класичної логіки. Крім того, недостатньо враховується частковість інформації про предметну область (неповне задання області визначення), її структурованість [1].

У цій роботі запропоновано підхід до вирішення деяких із зазначених проблем, заснований на основних поняттях, методах та засобах логіки скінченних предикатів (ЛСП), що ґрунтується на законах традиційної логіки та отримано внаслідок розширення поняття предиката до функції, що відображає багатозначну множину в двозначну. Таким чином, побудовано перехід від багатозначної логіки, яка дозволяє достатньо повно описувати об'єкти реального світу до двозначної логіки, що лежить в основі сучасних інформаційних систем [2]. За рахунок цієї властивості ЛСП можна віднести до класу композиційно-номінативних логік.

Принцип композиційності забезпечується базаторівневою структурою ЛСП, що включає в себе не лише АСП (алгебру скінченних предикатів), а й АПО (алгебру предикатних операцій), частковим випадком якої є предикатна теорія категорій. Тобто тут йдеться про зведення логічних зв'язок та кванторів до дій над предикатами.

Номінативний підхід передбачає здатність називати предмети, їх ознаки, характеристики, дії

тощо. В ЛСП це вміння реалізовує предикат пізнання предметів, (який, власне, і забезпечує перехід від багатозначної логіки до двозначної).

Отже, метою роботи є розвиток засобів логіки скінченних предикатів, як побудованої за допомогою композиційно-номінативного підходу, на основі лінійних логічних перетворень. А також дослідження модифікованого добутку морфізмів предикатної теорії категорій як переходу від часткових операцій над предикатом до всюди визначених операцій.

1. Структура логіки скінченних предикатів

У цьому розділі розкриємо поняття предиката пізнання предметів, а також уведемо поняття алгебр предикатів та предикатних операцій на різних рівнях ієрархії в залежності від вибору базисних елементів та базисних операцій, зазначивши взаємозв'язок між ними (рис. 1).

Отже, будь-яка функція $P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \xi$, (де ξ є логічною змінною), що відображає множину U^m в множину $\Sigma = \{0, 1\}$, називається m -місцевим предикатом, який задано на множині U^m . Таким чином, можна сказати, що U^m є областю визначення предиката P . Елементи 0 (хибність) та 1 (істинність), як і в традиційній логіці, будемо називати логічними елементами.

Скінченність чи нескінченність предиката P залежить, звичайно, від того якою відповідно є область визначення (скінченною чи нескінченною).

Нехай далі предикат P має вигляд $P(x) = x^a$. Предикат пізнання предмету визначимо наступним правилом:

$$x^a = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = a \\ 0, & \text{якщо } x \neq a. \end{cases}$$

Алгеброю предикатів на множині M назвемо будь-яку алгебру, носієм якої являється множина M усіх предикатів на U^m .

Булевою алгеброю предикатів на множині M назвемо будь-яку алгебру предикатів на множині M , базис операцій якої складається з операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення предикатів.

Канонічною алгеброю предикатів на множині M назвемо булеву алгебру предикатів, базис елементів якої складається з предикатів $0, 1$ та предикатів пізнання предмету x_i^a ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$). Основними законами канонічної алгебри предикатів являються основні закони булевої алгебри предикатів разом з основними законами для предикатів $0, 1$, і для предикатів пізнання предмету.

Таким чином, при переході від однієї алгебри до іншої ми йдемо шляхом конкретизації. Узагальнене поняття алгебри предикатів зводимо до більш конкретного, виділивши базисні операції над предикатами. А далі, виділивши в булевій алгебрі ще й базисні предикати, отримуємо канонічну алгебру предикатів.

Введення предиката пізнання предмету відіграє важливу роль при структуризації ЛСП. Його унікальність дозволяє трактувати x_i^a як ім'я предиката (тоді предикату пізнання предмету відповідає одноелементна множина), а також як операцію над предикатом $P(x) = x^a$, який приймає значення 1 або 0.

Крім того, в канонічній алгебрі предикатів 0 та 1 можна вважати скалярами, а предикати – векторами. В такому випадку отримаємо теорію логічного простору [3].

Логічним простором називається непуста множина векторів M над полем скалярів G , де для скалярів і векторів виконуються відповідно закони ідемпотентності, комутативності, асоціативності,

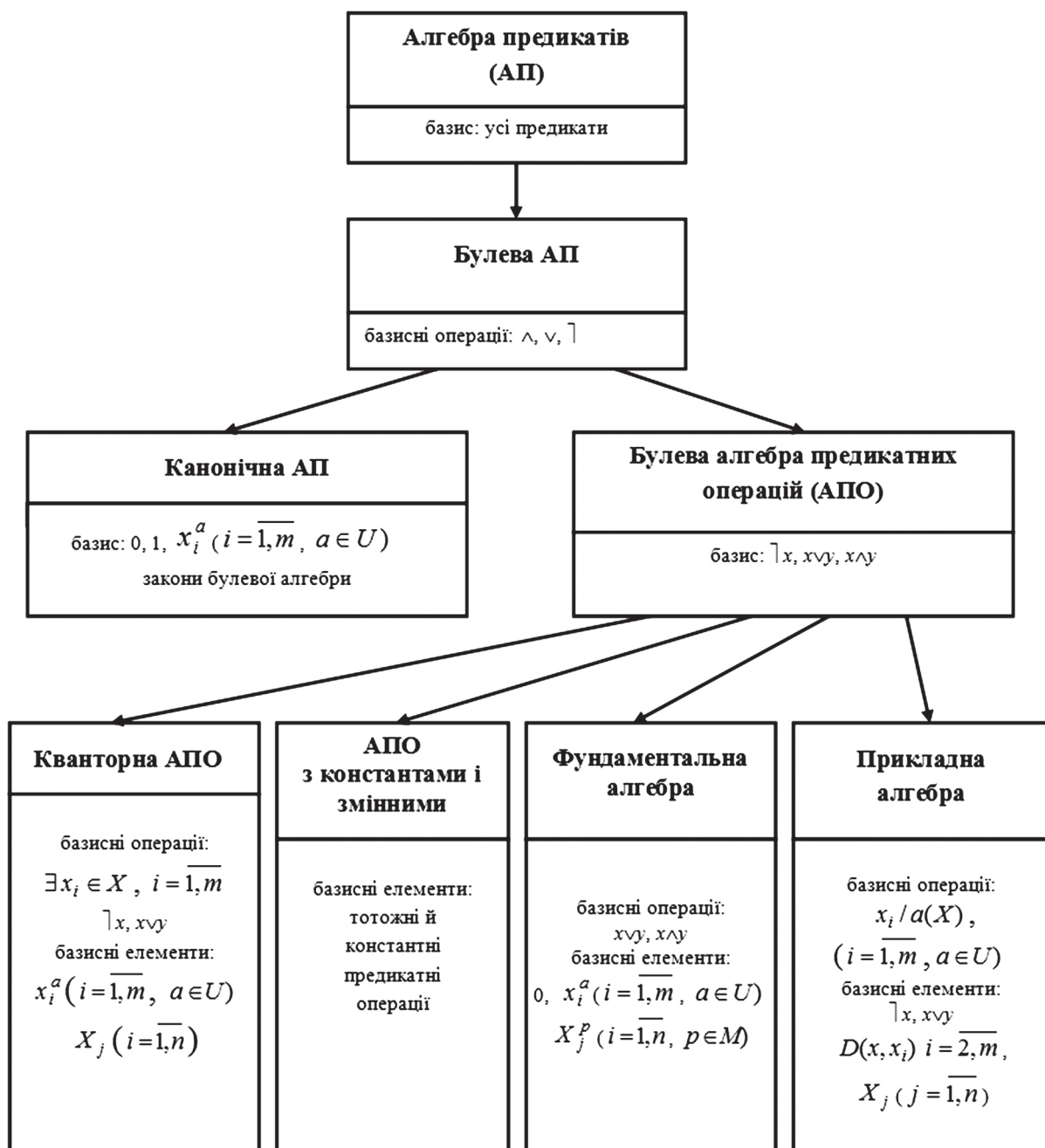


Рис. 1. Структура логіки скінченних предикатів

нуля та одиниці, а зв'язок між скалярами та векторами описують за допомогою законів лівої та правої дистрибутивності (відносно відповідно диз'юнкції скалярів та диз'юнкції векторів) та законів нуля та одиниці.

Логічна алгебра подібна до лінійної алгебри [4]. Аналогія є як в загальній архітектурі цих теорій, так і в багатьох конкретних властивостях алгебр. Логічна алгебра охоплює лише невелику частину механізму природної мови, але ця частина являється фундаментальною, тобто її засоби дозволяють формалізувати основні природномовні процеси, такі як словозміна, словотворення і т.д. Подібно до цього лінійна алгебра охоплює своєю аксіоматичною теорією здавалось би невелику частину сучасної математики, проте на базі лінійної алгебри будуються також зовсім «нелінійні» розділи, такі як вчення про тензори, проективні перетворення [5], про полілінійні оператори [4], інші.

Такі математичні структури, що побудовано на базі логічної алгебри, також виходять далеко за кордони самої алгебри. Таким чином логічна алгебра стає фундаментом всієї логічної математики. Зокрема, логічна алгебра є основою для вивчення будь-яких ЛСП.

Далі розглянемо інші варіації ЛСП, відштовхуючись від поняття алгебри предикатних операцій.

Нехай U — універсум теорії T ; $x_1, x_2, \dots, x_m$ — предметні змінні теорії T ; M — множина усіх предикатів $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на просторі U^m . Множину M назвемо універсумом предикатів. Змінні $x_1, x_2, \dots, x_m$, визначені на множині M , назвемо предикатними змінними. Їх значеннями служать предикати, що задано на просторі U^m . Множину M^n назвемо предикатним простором розмірності n .

Елементи множини M^n називаються предикатними векторами. Будь-яка функція $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = y$, яка відображає множину M^n в множину M : $F: M^n \rightarrow M$, називається предикатною операцією. Далі побудуємо множину R усіх предикатних операцій.

Алгеброю предикатних операцій (АПО) на множині R називається будь-яка алгебра, яку задано на носії R .

Булевою алгеброю предикатних операцій називається будь-яка алгебра предикатних операцій з базисом операцій, що складається з заперечення $\neg X$, диз'юнкції $X \vee Y$ та кон'юнкції $X \wedge Y$ довільних предикатних операцій X і Y .

Значеннями змінних X і Y служать конкретні предикатні операції $F, G, \dots$, X і Y — це змінні предикатні операції. Базисні операції булевої алгебри предикатних операцій не являються предикатними операціями, вони представляють собою операції над предикатними операціями. Таким

чином отримуємо наступний поверх двошарової структури.

Так наведене нами визначення булевої алгебри є досить широким, оскільки в ньому однозначно не визначено базисні елементи. Тому можливі різні варіанти булевих алгебр, серед яких має місце і булева алгебра, базисними елементами якої є предикатні операції.

Алгеброю предикатних операцій з константами та змінними називається булева алгебра предикатних операцій, у якій базисними елементами є найрізноманітніші тотожні й константні предикатні операції. Тотожні предикатні операції називаються змінними алгебри предикатних операцій. Константні предикатні операції називаються константами цієї алгебри.

Фундаментальною алгеброю називається алгебра предикатних операцій, у якій базисними операціями служать диз'юнкція $X \vee Y$ та кон'юнкція $X \wedge Y$ найрізноманітніших предикатних операцій X і Y , а базисними елементами — предикат 0 та найрізноманітніші предикати пізнання предмету x_i^a ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$) та предикати пізнання предиката X_j^P ($j = \overline{1, n}$, $P \in M$).

Фундаментальна алгебра має більш економний базис, ніж диз'юнктивно-кон'юнктивна алгебра предикатних операцій, проте це теж повна алгебра. Алгебру предикатних операцій можна розглядати як алгебру предикатів, у яких змінні операції X_j задано на своїх областях.

Прикладною алгеброю називається алгебра предикатних операцій з базисом операцій, що побудовано із підстановок $x_i/a(X)$ ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$), а також операції заперечення $\neg X$ і диз'юнкції $X \vee Y$ довільних предикатних операцій X і Y , та базисом елементів, який складається з предиката рівності $D(x_1, x_i)$ ($i = \overline{2, m}$) та предикатних змінних X_j ($j = \overline{1, n}$).

Уведення в алгебрі нової операції підстановки дозволило дуже скоротити в базисі кількість константних операцій. Проте збільшилась кількість предикатних операцій алгебри.

Кванторною алгеброю називається алгебра предикатних операцій з базисом операцій, що складається з квантора існування $\exists x_i X$ ($i = \overline{1, m}$), заперечення $\neg X$ і диз'юнкції $X \vee Y$ довільних предикатних операцій X і Y , та базисом елементів, який складається з предиката пізнання предмету x_i^a ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$) та предикатних змінних X_j ($j = \overline{1, n}$).

Перехід від алгебри предикатів до алгебри предикатних операцій дозволяє зберегти властивості предикатних операцій. Ці властивості зберігаються на всіх рівнях ієрархії. Завдяки такому підходу логічна алгебра здатна охопити величезну кількість логіко-математичних структур.

2. Обчислення лінійних логічних перетворень з різними типами подання предметної області

АСП пішла традиційним шляхом, трактуючи предикати як скінченно-арні відображення. Проте введено поняття лінійних логічних перетворень дає можливість описувати предикати, коли відомо їх значення не на всій предметній області [6].

Метод обчислення лінійного логічного перетворення можна розбити на дві фази. Спочатку розглянемо твердження про загальний вигляд лінійного логічного перетворення на випадок k змінних.

Узагальнення твердження про загальний вигляд лінійного логічного перетворення на випадок k змінних. Для того, щоб функція

$$F : L_{A_{n_1} \times A_{n_2} \times \dots \times A_{n_k}} \rightarrow P_{I_{A_l}},$$

$$\text{де } L_{A_{n_1} \times A_{n_2} \times \dots \times A_{n_k}} = (P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_k})_{A_{n_1} \times A_{n_2} \times \dots \times A_{n_k}},$$

була лінійним логічним перетворенням, необхідно та достатньо, щоб вона мала вигляд:

$$[F(L)](x_l) = \bigvee_{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k} \in S} (K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, x_l) \wedge P_{n_1}(x_{n_1}) P_{n_2}(x_{n_2}) \dots P_{n_k}(x_{n_k}))$$

для будь-якого $x_l \in A_l$, де $K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, x_l)$ задано на $A_{n_1} \times A_{n_2} \times \dots \times A_{n_k} \times A_l$, $S = A_{n_1} \times A_{n_2} \times \dots \times A_{n_k}$.

Звідси, лінійне логічне перетворення для випадку k змінних обчислюється як кон'юнкція ядра лінійного логічного перетворення, який залежить від k змінних, та k одномісних предикатів, що визначають область визначення перетворення.

Таким чином, на першій фазі необхідно визначити спосіб подання області визначення ядра лінійного логічного перетворення та вхідного вектора.

Далі проведемо дослідження правил обчислення лінійного логічного перетворення з $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ в x_l :

$$[F(L)](x_l) = \exists x_{n_1} \in A_{n_1} \dots \exists x_{n_{k-1}} \in A_{n_{k-1}} \exists x_{n_k} \in A_{n_k} (K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) P_{n_1}(x_{n_1}) \dots P_{n_{k-1}}(x_{n_{k-1}}) P_{n_k}(x_{n_k})),$$

$$\text{де } A_{n_1} = A_{n_2} = \dots = A_{n_{k-1}} = A_{n_k} = U.$$

В цьому випадку для обчислення достатньо лише виконати операцію перенесення квантора через предикат, не залежний від змінної, що стоїть під знаком квантора.

$$[F(L)](x_l) = \exists x_{n_k} \in A_{n_k} (P_{n_k}(x_{n_k}) (\exists x_{n_{k-1}} \in A_{n_{k-1}} (P_{n_{k-1}}(x_{n_{k-1}}) \dots (\exists x_{n_1} \in A_{n_1} K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) P_{n_1}(x_{n_1}))))),$$

$$\text{де } A_{n_1} = A_{n_2} = \dots = A_{n_{k-1}} = A_{n_k} = U.$$

Ми розглянули простий випадок, коли усі змінні в перетворенні визначено на універсумі. Якщо область визначення задати по іншому, то зміниться й сам метод обчислення лінійного

логічного перетворення з $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ в x_l , де задану область визначення виражають у вигляді $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k} \in F(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ наступною формулою:

$$[F'(L)](x_l) = \bigvee_{\substack{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k} \in \\ \in F(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k})}} K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}, x_l) \wedge P_{n_1}(x_{n_1}) P_{n_2}(x_{n_2}) \dots P_{n_{k-1}}(x_{n_{k-1}}) P_{n_k}(x_{n_k}).$$

Проведемо елементарні перетворення, використовуючи основні правила ЛСП, та отримаємо правила обчислення у вигляді:

$$\begin{aligned} [F'(L)](x_l) &= \exists x_{n_1} \in U \exists x_{n_2} \in U \dots \exists x_{n_{k-1}} \in U \exists x_{n_k} \in U \\ &(F(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k})) (K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}, x_l) \wedge \\ &\wedge P_{n_1}(x_{n_1}) P_{n_2}(x_{n_2}) \wedge \dots \wedge P_{n_{k-1}}(x_{n_{k-1}}) P_{n_k}(x_{n_k})) = \\ &= \exists x_{n_k} \in U (P_{n_k}(x_{n_k}) (\exists x_{n_{k-1}} \in U (P_{n_{k-1}}(x_{n_{k-1}}) \wedge \dots \wedge \\ &\wedge (\exists x_{n_1} \in U (F(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k})) \wedge \\ &K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}, x_l) P_{n_1}(x_{n_1})))))). \end{aligned}$$

Варто також розглянути випадок, коли кожну з заданих змінних визначає відповідна функція

$$x_{n_1} \in F_{n_1}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k});$$

$$x_{n_2} \in F_{n_2}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k});$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n_{k-1}} \in F_{n_{k-1}}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k});$$

$$x_{n_k} \in F_{n_k}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}).$$

В цьому випадку виразимо лінійне логічне перетворення у вигляді:

$$\begin{aligned} [F''(L)](x_l) &= \bigvee_{\substack{x_{n_1} \in F_{n_1}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \\ x_{n_2} \in F_{n_2}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \\ \dots \dots \dots \\ x_{n_{k-1}} \in F_{n_{k-1}}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \\ x_{n_k} \in F_{n_k}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k})}} K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \wedge \\ &\wedge P_{n_1}(x_{n_1}) P_{n_2}(x_{n_2}) \dots P_{n_{k-1}}(x_{n_{k-1}}) P_{n_k}(x_{n_k}) \end{aligned}$$

Виконаємо елементарні перетворення, отримаємо формулу для обчислення у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} [F''(L)](x_l) &= (\exists x_{n_k} \in U F_{n_k}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \vee \\ &\vee \exists x_{n_{k-1}} \in U F_{n_{k-1}}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k})) \wedge \\ &\wedge (K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) P_{n_1}(x_{n_1}) P_{n_2}(x_{n_2}) \dots \wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \wedge P_{n_{k-1}}(x_{n_{k-1}}) \wedge P_{n_k}(x_{n_k}) = \exists x_{n_k} \in U(P_{n_k}(x_{n_k}) \wedge \\
& \wedge (\exists x_{n_{k-1}} \in U(P_{n_{k-1}}(x_{n_{k-1}}) \dots \\
& \dots (\exists x_{n_1} \in U(K(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \wedge \\
& \wedge (F_{n_1}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \vee F_{n_2}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \vee \\
& \vee \dots \vee F_{n_{k-1}}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \vee \\
& \wedge F_{n_k}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, x_{n_k})) P_{n_1}(x_{n_1}))) \vee \dots \vee P_{n_k}(x_{n_k})).
\end{aligned}$$

Дослідження дій над лінійними логічними перетвореннями дозволяє вивчити не лише обчислення в залежності від типу подання предметної області, а й знаходити степінь лінійного логічного перетворення у випадку, коли не визначено всю предметну область. Нехай лінійне логічне перетворення запишемо наступним виразом: $Q(y) = \exists x \in M(K(x, y) \wedge P(x))$, де предикат $K(x, y)$ визначено на декартовому добутку $M \times N$, тобто описує зв'язок між елементами множини M та відповідними елементами множини N . Не зважаючи на те, що предикат $P(x)$ описує не всю предметну область M , степінь лінійного перетворення в ЛСП можна обчислити за скінченну кількість кроків. Причому цю кількість буде обмежено розмірністю множини M , а критерієм знаходження степені лінійного логічного перетворення є повторення однакового результату на двох кроках поспіль [7].

Цікавими є також дослідження предикату, що задано не на всій предметній області з точки зору теорії категорій.

3. Проблема формального визначення модифікованого добутку предикатної категорії

Розглянемо визначення модифікованого добутку морфізмів $f: A \rightarrow B$ та $g: C \rightarrow D$ в категорії $Pred$ [8]:

$$K_h(x, z) = \exists y \in B \cap C (K_f(x, y) \wedge K_g(y, z)). \quad (1)$$

Вираз (1) потрібно відкорегувати, оскільки предикат $K_f(x, y)$ задано на $A \times B$, а $K_g(y, z)$ — на $C \times D$, але отримуємо протиріччя $B \neq C$. Тобто змінна y задається одночасно і на множині B , і на множині C . Щоб не було плутанини, поставимо у відповідність множині B свою змінну u , а множині C — змінну v . Тоді предикат $K_f(x, u)$ задано на $A \times B$, а $K_g(v, z)$ — на $C \times D$. Саме ці предикати і будемо вважати ядрами морфізмів f і g . Необхідно також, щоб змінну u було задано на довільній множині. Нехай ця множина матиме ім'я S .

Очевидно, що при підстановці ядер морфізмів f і g (тобто предикатів $K_f(x, u)$ та $K_g(v, z)$) в вираз (1) одночасно виконуються дві операції заміни змінних:

$$u/y(K_f(x, u)) = K_f(x, y), \quad (2)$$

$$v/y(K_g(v, z)) = K_g(y, z), \quad (3)$$

де предикат $K_f(x, y)$ задано на $A \times S$, а предикат $K_g(y, z)$ — на $S \times D$. Користуючись виразом (1) така заміна

змінних виконується ніби за кулісами, але при цьому допускається помилка — змінну u визначено одночасно на двох областях. Для того, щоб діяти послідовно, необхідно підставити ядра морфізмів f і g в формулу (1), а для цього доводиться використовувати операцію заміни змінних. Звідси виникає задача: необхідно в категорії $Pred$ з двома довільними морфізмами $f: A \rightarrow B$ та $g: C \rightarrow D$ однозначно визначити морфізм $h: A \rightarrow D$. Тобто необхідно отримати коректну формулу модифікованого добутку морфізмів.

Корегування формули знаходження модифікованого добутку морфізмів засобами алгебри предикатних операцій. Враховуючи перетворення (2) та (3), вираз (1) має вигляд:

$$K_h(x, z) = \exists y \in B \cap C (u/y(K_f(x, u)) \wedge v/y(K_g(v, z))). \quad (1^*)$$

Далі необхідно визначити структуру множини S , тобто на якій саме області задано змінну u .

Припустимо, що $S = B \cap C$. Це означає, що предикат $K_f(x, u)$ задано на $A \times (B \cap C)$, а предикат $K_g(y, z)$ — на $(B \cap C) \times D$. Тепер потрібно звернути увагу на наступний дуже важливий аспект. Справа в тому, що $K_f(x, u) \neq K_f(x, y)$ хоча б тому, що області прибуття цих предикатів відрізняються та $K_g(v, z) \neq K_g(y, z)$ хоча б тому, що області відправлення цих предикатів різні. Оскільки предикати $K_f(x, u)$ на $A \times B$ та $K_g(v, z)$ на $C \times D$ являються ядрами морфізмів $f: A \rightarrow B$ та $g: C \rightarrow D$, то відмінні від них предикати $K_f(x, y)$ на $A \times (B \cap C)$ та $K_g(y, z)$ на $(B \cap C) \times D$ будемо вважати ядрами морфізмів $f': A \rightarrow B \cap C$ та $g*: B \cap C \rightarrow D$. Таким чином ми перейменували предикати $K_f(x, u)$ і $K_g(y, z)$ на $K_{f'}(x, y)$ і $K_{g*}(y, z)$ відповідно, щоб підкреслити, що отримані морфізми відрізняються від вихідних. Звідси внаслідок перейменування предикатна операція (2) матиме вигляд:

$$u/y(K_f(x, u)) = K_{f'}(x, y); \quad (4)$$

а предикатна операція (3) матиме вигляд:

$$v/y(K_g(v, z)) = K_{g*}(y, z). \quad (5)$$

Обміркуємо особливості операцій заміни змінних, що наведено в виразах (4) і (5). Це нестандартні операції заміни змінних, оскільки в даному випадку разом зі змінними змінюються і області їх визначення, а, отже, і самі предикати, якщо ми включаємо в поняття предиката область його визначення. Тому ці операції потребують додаткового формального визначення [8]. Наведемо далі пояснювальні приклади.

Для випадку коли $S = B \cap C$ область визначення допоміжної змінної u отримуємо шляхом звуження області визначення кожної з вихідних змінних — u та v . Очевидно, що при $u = v$ значення предикатів $K_{f'}(x, y)$ і $K_f(x, u)$ співпадають для будь-яких x . Також співпадають значення предикатів $K_{g*}(y, z)$ і $K_g(v, z)$ для будь-яких x при $u = v$. Оскільки область визначення допоміжної змінної u звужується, то і формули предикатів $K_{f'}(x, y)$ і $K_{g*}(y, z)$ можуть скорочуватись. Розглянемо приклад. Нехай вихідними

даними $\epsilon A=\{a, b, c, d\}$; $B=\{1, 2, 3, 4\}$; $C=\{2, 3, 4, 5\}$; $D=\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Тоді $B \cap C = \{2, 3, 4\}$. Змінну y задано на $B \cap C$.

$K_f(x, u) = x^a u^1 \vee x^b (u^1 \vee u^2) \vee x^c (u^2 \vee u^3 \vee u^4)$ – задано на $A \times B$.

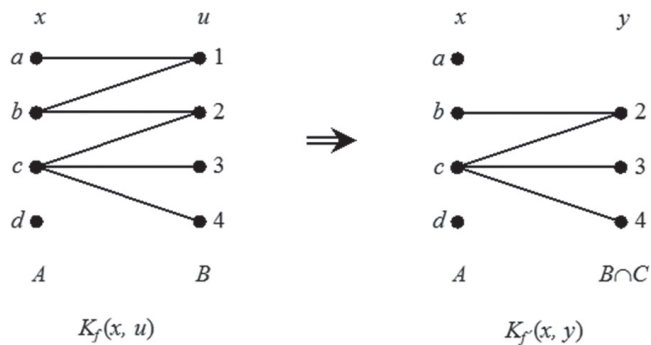


Рис. 2

Тоді $u/y(K_f(x, u)) = x^b y^2 \vee x^c (y^2 \vee y^3 \vee y^4) = K_{f'}(x, y)$ – задано на $A \times (B \cap C)$.

Далі $K_g(v, z) = (v^2 \vee v^3) z^6 \vee v^3 (z^7 \vee z^9) \vee v^5 z^8$ – задано на $C \times D$.

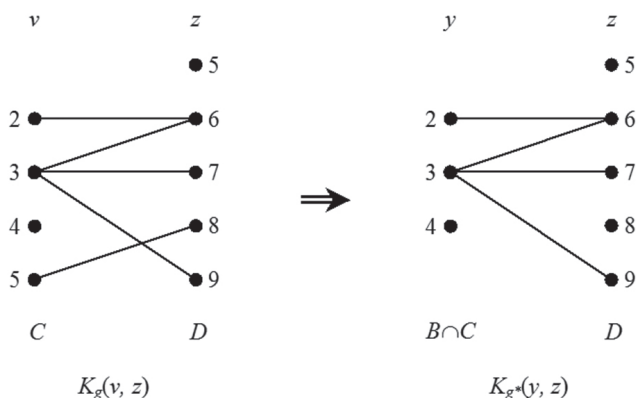


Рис. 3

Тоді $v/y(K_g(v, z)) = (y^2 \vee y^3) z^6 \vee y^3 (z^7 \vee z^9) = K_{g^*}(y, z)$ – задано на $(B \cap C) \times D$.

Операція заміни змінної може бути теж морфізмом, але у деякій іншій алгебро-логічній інтерпретації.

Враховуючи (4) і (5), формулу (1*) можна записати у вигляді:

$$K_h(x, z) = \exists y \in B \cap C (K_{f'}(x, y) \wedge K_{g^*}(y, z)).$$

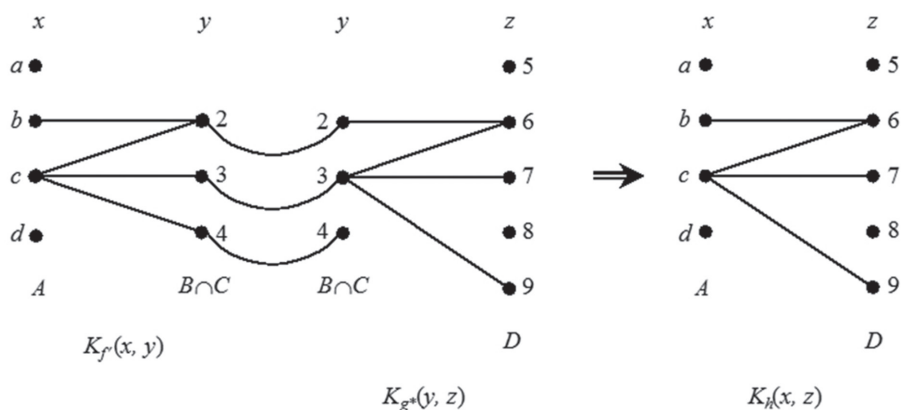


Рис. 4

Підставляємо $K_{f'}(x, y)$ та $K_{g^*}(y, z)$ в останню формулу:

$$K_h(x, z) = \exists y \in \{2, 3, 4\} ((x^b y^2 \vee x^c (y^2 \vee y^3 \vee y^4)) \wedge ((y^2 \vee y^3) z^6 \vee y^3 (z^7 \vee z^9))) = (x^b \vee x^c) z^6 \vee x^c (z^7 \vee z^9).$$

Звідси, результатом є $K_h(x, z)$ на $A \times D$.

Проте при виконанні операції добутку морфізмів формули $K_f(x, y)$ та $K_g(y, z)$ мали початковий вигляд і не скорочувались. Для подальшого дослідження розглянемо другий спосіб вибору області визначення змінної y , – коли $S = B \cup C$.

У випадку з вихідними предикатами – $K_f(x, u)$ на $A \times B$ і $K_g(v, z)$ на $C \times D$ – при підстановці їх в формулу (1*) будуть виконуватись наступні перетворення:

$$u/y(K_f(x, u)) = K_{f''}(x, y), \quad (6)$$

$$v/y(K_g(v, z)) = K_{g^{**}}(y, z), \quad (7)$$

де предикат $K_{f''}(x, y)$ визначено вже на $A \times (B \cup C)$, а предикат $K_{g^{**}}(y, z)$ – на $(B \cup C) \times D$. Таким чином, $f'' : A \rightarrow B \cup C$ та $g^{**} : B \cup C \rightarrow D$.

Для випадку коли $S = B \cup C$, область визначення допоміжної змінної y отримаємо шляхом розширення області визначення кожної з вихідних змінних – u та v . Але тепер при заміні змінних формули нових та вихідних предикатів відрізнятимуться тільки іменами змінних, самі ж їх формули не зміняться.

За прикладом знову звернемося до вихідних даних:

$A=\{a, b, c, d\}$; $B=\{1, 2, 3, 4\}$; $C=\{2, 3, 4, 5\}$, $D=\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Тоді $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Змінну y задано на $B \cup C$. $K_f(x, u) = x^a u^1 \vee x^b (u^1 \vee u^2) \vee x^c (u^2 \vee u^3 \vee u^4)$ – задано на $A \times B$.

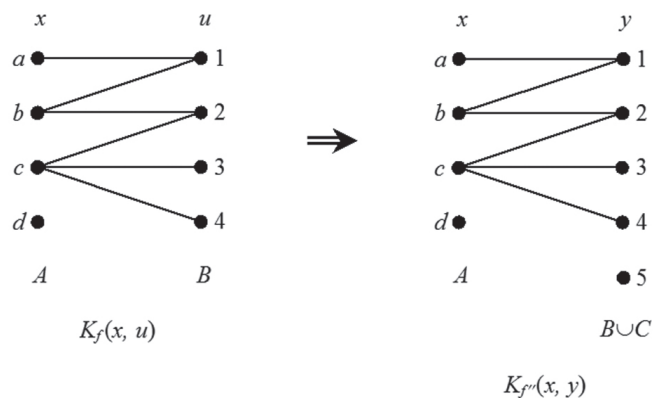


Рис. 5

Тоді $u/y(K_f(x, u)) = x^a y^1 \vee x^b (y^1 \vee y^2) \vee x^c (y^2 \vee y^3 \vee y^4) = K_{f''}(x, y)$ – задано на $A \times (B \cup C)$.

$K_g(v, z) = (v^2 \vee v^3) z^6 \vee v^3 (z^7 \vee z^9) \vee v^5 z^8$ – задано на $C \times D$.

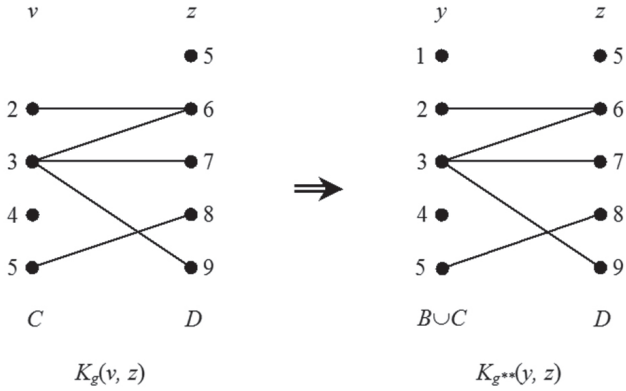


Рис. 6

Тоді $v/y(K_g(v, z)) = (y^2 \vee y^3) z^6 \vee y^3 (z^7 \vee z^9) \vee y^5 z^8 = K_{g**}(y, z)$ – задано на $(B \cup C) \times D$.

Отже, формули не змінилися. Проте якщо змінилися області визначення предикатів, то це вже різні предикати. Формула (1*) має вигляд:

$$K_h(x, z) = \exists y \in B \cap C (K_{f''}(x, y) \wedge K_{g**}(y, z)). \quad (1^{**})$$

Перевіримо результат, враховуючи, що $B \cap C = \{2, 3, 4\}$:

$$K_h(x, z) = \exists y \in \{2, 3, 4\} ((x^a y^1 \vee x^b (y^1 \vee y^2) \vee x^c (y^2 \vee y^3 \vee y^4)) \wedge ((y^2 \vee y^3) z^6 \vee y^3 (z^7 \vee z^9) \vee y^5 z^8)) = (x^b \vee x^c) z^6 \vee x^c (z^7 \vee z^9).$$

Звідси результат – $K_h(x, z)$ на $A \times D$ – знову не змінився в порівнянні зі звичайним добутком морфізмів.

Таким чином нам вдалося розширити області визначення вихідних предикатів $K_f(x, u)$ та $K_g(v, z)$, в результаті чого формули предикатів $K_f(x, y)$ та $K_g(y, z)$ не змінилися.

Є ще одна особливість модифікованого добутку морфізмів. Оскільки $f'': A \rightarrow B \cup C$ і $g'': B \cup C \rightarrow D$, то формула звичайного добутку в категорії *Pred* повинна мати вигляд

$$K_h(x, z) = \exists y \in B \cup C (K_{f''}(x, y) \wedge K_{g''}(y, z)). \quad (1^{***})$$

Бачимо, що ця формула відрізняється від формули (1**) тим, що в ній квантор існування беруть

по області $B \cup C$. Але це знову не впливає на результат. Таким чином вирази (1**) та (1***) тотожні.

Отже, при підстановці ядер морфізмів в формулу (1) ми одночасно виконуємо дві операції заміни змінної. Ці операції особливі, оскільки змінюють область визначення змінної. Слід також відзначити, що у цьому випадку змінюється і сам предикат. Отже, насправді операція добутку морфізмів виконується не для вихідних предикатів, а інших, дуже схожих. Але не дивлячись на те, що звичайний та модифікований добуток морфізмів – це різні поняття, не можна казати, що теорія категорій забороняє існування модифікованого добутку. Саме предикатна інтерпретація теорії категорій *Pred* привела нас до того, що поруч зі звичайним добутком морфізмів існує також і модифікований. Або інакше: поряд з частковою операцією добутку морфізмів в категорії *Pred* існує і всюди визначена операція.

Висновки

Таким чином, було проведено дослідження логіки скінченних предикатів як композиційно-номінативної логіки. Проведено аналіз структури логіки скінченних предикатів, яка забезпечує принцип композиційності. Оскільки особливістю композиційно-номінативних логік є опис часткових операцій, то значну увагу приділено опису лінійних логічних перетворень з різними способами подання предметної області, та дослідженню правил їх обчислення.

Крім того, досліджено часткову операцію добутку морфізмів з точки зору предикатної теорії категорій. Задача зводилась до того, щоб показати, що знаходження модифікованого добутку морфізмів виконується в два етапи. Спочатку за допомогою заміни змінних від довільних вихідних морфізмів ми переходимо до послідовних (для яких знаходять вже звичайний добуток), а потім уже для цих послідовних морфізмів виконується звичайна для теорії категорій операція добутку морфізмів.

Отже, ЛСП відкриває новий погляд на такі проблеми класичної логіки як частковість операцій та

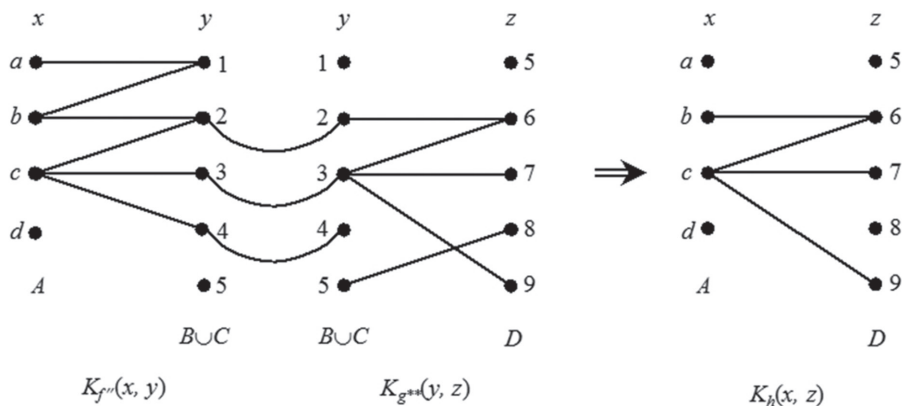


Рис. 7

недостатню структурованість інформації про предметну область. Алгебри ЛСП дозволяють налаштуватися на відповідну предметну область в залежності від вибору базисних елементів та базисних операцій алгебри. А дослідження понять предикату на області, лінійного логічного перетворення та модифікованого добутку морфізмів предикатної категорії допомагає уникнути деяких проблем з частково заданими операціями. Подальшими задачами у цьому напрямку є перевірка на тотальність, правильність виведення в ЛСП та дослідження методів доведення теорем класичної логіки в ЛСП.

Список літератури: 1. Шкільняк С.С. Математична логіка; основи теорії алгоритмів: навч. посіб. / С.С. Шкільняк. — К.: ДП «Вид. дім «Персонал»», 2009. — 280 с. 2. Бондаренко М.Ф. Шабанов-Кушнарєнко Ю.П. Мозгоподібні структури: справочне посіб. Том перший. — К.: Наукова думка, 2011. — 460 с. 3. Вечирская И.Д., Четвериков Г.Г. Формальное описание логического пространства // Искусственный интеллект. — Донецк: Институт проблем искусственного интеллекта. — 2008. — № 3 — С. 781–789. 4. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с. 5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971. — 272 с. 6. Вечирская И.Д., Иванюков А.А. О вычислении линейных логических преобразований // Вестник НТУ «ХПИ». — 2005. — № 18 — С. 29–32. 7. Вечірська І.Д. Аналіз методу побудови та принципів роботи реляційної мережі як багаторівневої структури паралельної дії // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. — 2013. № 2 (81). — С. 15–21. 8. Дударь З.В., Иванюков А.А., Вечирская И.Д., Лещинский В.А. О категорном

анализе алгебры предикатов // Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. — Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. — № 20. — С. 38–42.

Поступила до редколегії 10.09.2014

УДК 519.7:007.52; 519.711.3

Исследование логики конечных предикатов как композиционно-номинативной логики / И.Д. Вечирская, И.Э. Гончаров, С.И. Шепилов // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. — 2014. — № 2 (83). — С. 53–60.

Проанализирована структура логики конечных предикатов, которая обеспечивает принцип композиционности. Основное внимание уделено описанию линейных логических преобразований с разными способами задания предметной области, а также исследованию правил их вычисления. Исследована частичная операция произведения морфизмов с точки зрения предикатной теории категорий.

Рис.: 7. Библиогр.: 8 назв.

UDC 519.7:007.52; 519.711.3

Research of finite predicate logic as a nominative compositional logic / I.D. Vechirska, I.E. Goncharov, S.I. Shepilov // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. — 2014. — № 2 (83). — P. 53–60.

The structure of finite predicate logic which provides the principle of compositionality has been analyzed. The main attention has been paid to the description of linear logical transformations with different methods of specifying the subject area, as well as research of the rules for their calculation. The partial operation of the product morphisms in terms of the predicate category theory has been analyzed.

Fig.: 7. Ref.: 8 items.