

ДВОБІЧНІ ПОСЛІДОВНІ НАБЛИЖЕННЯ У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ, ЯКА МОДЕЛЮЄ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНУ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНУ СИСТЕМУ

Кончаковська О.С.

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua

Nonlinear boundary value problem that is a mathematical model of simple electrostatic microelectromechanical system is considered. For numerical analysis of the problem was used method of two-sided successive approximations. Obtained approximate solution of the problem and numerically investigated dependence the norm of solution by the parameters. Computational experiment conducted for two types of function that characterizes the ratio dielectric properties in the system.

Мікроелектромеханічні системи поєднують електронні та механічні компоненти мікронних розмірів, і використовуються при виробництві акселерометрів, оптичних перемикачів, мікронасосів тощо. Принцип роботи мікроелектромеханічної системи (МЕМС) з електростатичним типом активації полягає у взаємодії двох мембран, які під дією напруги можуть злипатися. При дослідженні таких систем необхідно визначити максимальний прогин мембрани для функціонування її в стійкому стані.

Однією з задач, яка виникає при математичному моделюванні електростатичних МЕМС, є:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} \quad \text{у} \quad \Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (1)$$

$$0 < u < 1 \quad \text{у} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де $f(\mathbf{x})$ – співвідношення відносної діелектричної проникності середовища до діелектричної проникності мембрани, $0 < f(\mathbf{x}) \leq 1$, $\lambda > 0$ – квадрат фіксованої електричної напруги, Δ – оператор Лапласа, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Забезпечення стабільної конфігурації МЕМС за допомогою діелектричних властивостей компонентів пристрою базується на спеціальному підборі функції $f(\mathbf{x})$, яку у джерелах [2] пропонують обирати у виді:

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\alpha, \quad (3)$$

$$f(\mathbf{x}) = e^{\alpha(|\mathbf{x}|^2 - 1)}. \quad (4)$$

Тоді крайовій задачі (1), (2) можна поставити у відповідність нелінійне операторне рівняння $u = Tu$ з

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{s})G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s},$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ для одиничного кола, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$.

Використовуючи методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах для операторного рівняння $u = Tu$, яке розглядається на конусі K невід’ємних у $C(\bar{\Omega})$ функцій, побудуємо послідовні наближення

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

За допомогою яких сформуємо два ітераційні процеси, які починаються з функцій $v_0 = 0$ і $w_0 = \beta = \text{const} \in (0, 1)$ відповідно та двобічно збігаються до точного розв’язку крайової задачі (1), (2).

Нерівність $v_0 \leq v_1$ завжди виконується, тому нерівність $w_1 \leq w_0$ буде виконано, якщо

$$\beta \in (0, 1), \quad \lambda M \leq \beta(1 - \beta)^2, \quad \text{де } M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} f(\mathbf{s}) G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

З огляду на монотонність оператора T дістанемо ітераційні процеси, які двобічно збігаються до єдиного додатного розв’язку задачі (1), (2) [1]:

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

У таблицях 1, 2 представлено значення норм наближеного розв’язку в залежності від параметрів α та λ , де $\lambda_{\max}$ – граничне значення для якого можна побудувати двобічний ітераційний процес. Зауважимо, що зі зростанням параметра α збільшується значення $\lambda_{\max}$, а норма відповідного розв’язку зменшується.

Таблиця 1 – Значення норми наближеного розв’язку для (3)

α	0	1	2	3	4	5
$\lambda_{\max}$	0,59259	1,33333	2,37037	3,70370	5,33333	7,25926
$\ u\ _C$	0,20774	0,20745	0,20708	0,20664	0,20613	0,20554
ε	$0,82 \cdot 10^{-4}$	$0,79 \cdot 10^{-4}$	$0,76 \cdot 10^{-4}$	$0,73 \cdot 10^{-4}$	$0,69 \cdot 10^{-4}$	$0,65 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 2 – Значення норми наближеного розв’язку для (4)

α	0	1	2	3	4	5
$\lambda_{\max}$	0,59259	1,22227	2,37723	4,32400	7,32524	11,57259
$\ u\ _C$	0,20774	0,20540	0,20332	0,20169	0,20058	0,19984
ε	$0,82 \cdot 10^{-4}$	$0,59 \cdot 10^{-4}$	$0,44 \cdot 10^{-4}$	$0,34 \cdot 10^{-4}$	$0,29 \cdot 10^{-4}$	$0,26 \cdot 10^{-4}$

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

2. Guo Y., Pan Z., Ward M.J. Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2005. – Vol. 66. – № 1. – P. 309 – 338.