УДК519.21

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА К СИММЕТРИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛАМ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

ДИКАРЕВ В.А.

Исследуется применимость метода Ритца для вычисления спектров несамосопряженных краевых задач, отвечающих распределенным системам с потерями. Установлено, что для симметричных функционалов метод Ритца в случае вещественных координатных функций можно свести к методу Галеркина. Приводятся необходимые сведения из функционального анализа. Формулируются и доказываются критерии сходимости и расходимости метода Ритца.

1. Симметричные функционалы. Сведение метода Ритца к методу Галёркина

Функционал $F(u,\lambda)$ (вообще говоря, нелинейный по u), зависящий от комплексного параметра λ, называется аналитическим в области G, если при любом фиксированном значении u $F(u,\lambda)$ есть аналитическая функция λ, $\lambda \in G$.

В дальнейшем рассматриваются симметричные функционалы, аналитически зависящие от параметра (спектральный параметр), определенные на линейных пространствах функций.

Функционал $\Phi(u,v;\lambda)$ называется симметричным, если для любых u, v из его области определения D_Φ

$$\Phi(u,v;\lambda) = \Phi(v,u;\lambda)$$

и $\Phi(u,v)$ билинеен (т.е. линеен по u и по v).

Пусть $\Phi(u,v)$ – билинейный функционал, $u \in H_1$, $v \in H_2$, H_1 и H_2 – гильбертовы пространства. Будем говорить, что функционал $\Phi(u,v)$ ограничен (в H_1 и H_2), если существует $c > 0$, такое, что для любых u и v

$$\left|\Phi(u,v)\right| < c\left\|u\right\|_{H_1} \cdot \left\|v\right\|_{H_2} .$$

Здесь $\left\|\cdot\right\|_{H_k}$ ($k = 1,2$) – норма в пространстве H_k.

Всякому ограниченному билинейному функционалу Φ, определенному на произвольном гильбертовом пространстве H, можно сопоставить определенный на всем H, ограниченный линейный оператор A, определив его посредством равенства

$$\Phi(u,\overline{v}) = (Au,v)_H ,$$

верного для всех u, v из H. Символ $(\cdot,\cdot)_H$ обозначает скалярное произведение в H.

Целью работы является: исследование применимости метода Ритца к вычислению спектров несопряжённых краевых задач в теории дифракции; выяснение условий, при выполнении которых метод Ритца можно свести к методу Галёркина.

Задача работы состоит в выяснении условий, при выполнении которых метод Ритца применим. Приведены также условия, при выполнении которых метод Ритца может привести к неверным результатам.

Рассмотрим функционал $F(u)$, заданный на линейном многообразии M. Возьмем его первую вариацию δF. Функция $u_0 \in M$ называется стационарной функцией функционала $F(u)$, если $\delta F(u_0) = 0$ при любой $\delta u_0 \in M$. Пусть теперь задана некоторая краевая задача. Функционал $F(u)$ называется стационарным для этой краевой задачи, если стационарные функции функционала совпадают с решениями данной краевой задачи.

Пусть $\Phi(u,v;\lambda)$ – ограниченный симметричный функционал. Будем искать стационарную функцию u формы $\Phi(u,u;\lambda)$ методом Ритца. Приближение u_n для u ищем в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k ,$$

где $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ – базис некоторого подпространства $E_n \subset H$. Для дальнейшего существенно предположение $E_n = \overline{E}_n$. Последнее означает, что если $f \in E_n$, то и $\overline{f} \in E_n$. Черта над функцией обозначает, как обычно, операцию комплексного сопряжения.

Как известно, метод Ритца требует, чтобы величина $\Phi(u_n, u_n; \lambda)$ была стационарна при $u_n \in E_n$. Приравнивая нулю вариацию $\delta\Phi(u_n, u_n; \lambda)$, получаем уравнение

$$\delta\Phi(u_n, u_n; \lambda) = \Phi(u_n, \delta u_n; \lambda) + \Phi(\delta u_n, u_n; \lambda) = 0,$$

где δu_n – любая функция из E_n. Полагая здесь $\delta u_n = \varphi_k$ ($k = \overline{1, m}$) и учитывая симметрию функционала $\Phi(u, v; \lambda)$, имеем

$$\Phi(u_n, \varphi_k; \lambda) = 0.$$

Полученное равенство можно записать так:

$$(A(\lambda)u_n, \overline{\varphi}_k) = 0;\ k = 1, ..., m;\ u_n \in E_n. \quad (1)$$

Здесь $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ – базис в E_n; $A(\lambda)$ – оператор-функция, порождаемая функционалом $\Phi(u, v; \lambda)$. Из (1) следует, что функцию u_n можно получить, решая уравнение

$$A(\lambda)u = 0 \quad (2)$$

методом Галёркина.

Таким образом, для симметричных функционалов метод Ритца с помощью указанной выше схемы можно свести к методу Галёркина.

2. Достаточные условия сходимости метода Ритца

Обоснуем один признак сходимости метода Ритца для симметричных функционалов. При этом будем использовать установленное в п.2 сведение метода Ритца к методу Галёркина. Для формулировки признака введём некоторые обозначения и определения.

2.1. Класс изучаемых функционалов. Доказательство дискретности их спектров

Рассмотрим последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных подпространств из H. Спектры уравнений (1), (2) обозначим, соответственно, через Ω_n и Ω. (Спектром однородного уравнения, содержащего параметр λ, называется множество значений λ, при которых это уравнение имеет нетривиальные решения.) Спектром функционала будем называть спектр порождаемой им оператор-функции. Рассмотрим произвольный компакт K комплексной плоскости λ, содержащий конечное число точек из Ω. Будем говорить, что спектры Ω_n сходятся к спектру Ω, если части спектров $\Omega_n \cap K$ сходятся, с учетом их кратности, к части спектра $\Omega \cap K$.

Сформулируем теперь один критерий применимости метода Ритца к симметричным функционалам $\Phi(u, v; \lambda)$. Допустим, что исследуемый функционал представим в виде

$$\Phi(u, v; \lambda) = \Phi_0(u, v; \lambda) + \Phi_1(u, v; \lambda), \quad (3)$$

где функционалы Φ_0, Φ_1 (а значит и Φ) ограничены на H и удовлетворяют следующим условиям:

1. $\Phi_0(u, v; \lambda)$ и $\Phi_1(u, v; \lambda)$ – голоморфны по λ в некоторой области G комплексной плоскости λ.

2. При любом $\lambda \in G$ оператор $A_1(\lambda)$, порождаемый функционалом Φ_1, компактен (вполне непрерывен). Такие функционалы будем называть компактными.

3. Существует такое $\sigma = \sigma(\lambda) > 0$, что для любого $\lambda \in G$

$$|\Phi_0(u, \overline{u}; \lambda)| \geq \sigma \|u\|_H^2 \quad (4)$$

для всех $u \in H$, $\|\cdot\|$ – норма в H.

4. Существует такое $\lambda_0 \in G$, что оператор $A(\lambda_0)$, порождаемый формой $\Phi(u, v; \lambda_0)$, обратим.

Покажем, что если функционал $\Phi(u, v; \lambda)$ удовлетворяет условиям 1-4, то его спектр дискретный в G, т.е. точки сгущения спектра могут лежать лишь на границе области G. Воспользуемся следующим предложением из [1, с.39].

Пусть $T(\lambda)$ – голоморфная в области G оператор-функция, такая, что при любом λ из G оператор $T(\lambda)$ компактен.

Тогда для всех точек $\lambda \in G$, за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, число $d(\lambda)$ линейно-независимых решений уравнения

$$\varphi - T(\lambda)\varphi = 0$$

имеет постоянное значение:

$$d(\lambda) = n;$$

в упомянутых изолированных точках $d(\lambda) > n$.

В частности, если хотя бы в одной точке $d(\lambda) = 0$, то для всех $\lambda \in G$, за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, оператор $I - T(\lambda)$ (I – единичный оператор) имеет ограниченный обратный.

Чтобы проверить с помощью этого предложения дискретность спектра функционала $\Phi(u, v; \lambda)$, сопоставим функционалам $\Phi(u, v; \lambda)$, $\Phi_0(u, v; \lambda)$, $\Phi_1(u, v; \lambda)$ оператор-функции $A(\lambda)$, $A_0(\lambda)$, $A_1(\lambda)$ соответственно. Очевидно, что $A(\lambda) = A_0(\lambda) + A_1(\lambda)$.

Из условия 1 вытекает [2, с.459] голоморфность в G оператор-функций $A(\lambda)$, $A_0(\lambda)$, $A_1(\lambda)$. Из условия 3 следует обратимость при всех $\lambda \in G$ оператора $A_0(\lambda)$. Поэтому оператор-функцию $A(\lambda)$ можно представить в виде

$$A(\lambda) = (I - T(\lambda))A_0(\lambda) ,$$

где $T(\lambda) = -A_1(\lambda)A_0^{-1}(\lambda)$. В силу условия 2 при любом $\lambda \in G$ оператор $T(\lambda)$ компактен. Кроме того, оператор-функция $T(\lambda)$ голоморфна в G. Из цитированного предложения и условия 4 следует дискретность спектра оператора $I - T(\lambda)$, а значит, в силу обратимости в G оператор-функции $A_0(\lambda)$ дискретность спектра функционала $\Phi(u, v; \lambda)$.

2.2. Формулировка критерия. Доказательство дискретности спектров аппроксимативных уравнений Ритца

Последовательность конечномерных подпространств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ из H называется предельно плотной в H, если любой элемент $f \in H$ можно, при достаточно больших n, сколь угодно близко аппроксимировать соответствующими элементами u_n из E_n. Последнее означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - f_n\|_H = 0 .$$

Предложение 1. *Пусть функционал* $\Phi(u, v; \lambda)$ *удовлетворяет условиям 1-4 и* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– любая последовательность, предельно плотная в* H*, такая, что* $E_n = \bar{E}_n$. *Тогда:*

1) *при достаточно больших* n *спектры* Ω_n *дискретны;*

2) *спектры* Ω_n *сходятся к спектру* Ω.

Таким образом, если имеют место условия 1-4, то при вычислении спектра функционала $\Phi(u, v; \lambda)$ может быть использован метод Ритца.

Доказательство 1. Докажем первую часть сформулированного предложения. Пусть по-прежнему $A(\lambda)$, $A_0(\lambda)$, $A_1(\lambda)$ – оператор-функции, порождаемые функционалами Φ, Φ_0, Φ_1, и λ_0 – такая точка из G, что оператор $A(\lambda_0)$ обратим. Перепишем (4) в виде

$$|(A_0(\lambda)u, u)| \ge \sigma\|u\|_H^2 . \quad (5)$$

Известно [3, с.114], что числовой образ линейного оператора является выпуклым множеством. (Числовым образом оператора A называется множество всех комплексных чисел, являющихся значениями квадратичной формы (Af, f), где f принимает все значения из гильбертова пространства H, такие, что $\|f\| = 1$). Отсюда и из (5) следует, что существует такое число α, $|\alpha| = 1$, что

$$\mathrm{Re}(\alpha A_0(\lambda_0)u, u) \ge \sigma\|u\|_H^2 .$$

В этом случае оператор $\alpha A_0(\lambda_0)$ можно записать так:

$$\alpha A_0(\lambda_0) = B + iC , \quad (6)$$

где C – самосопряженный, а B – положительно определенный оператор:

$$(Bu, u) \ge \sigma\|u\|_H^2 .$$

Обозначим через P_n ортопроектор на E_n. Известно [4, с.92], что если оператор $A_0(\lambda_0)$ можно представить в виде (6), то уравнение

$$P_n A_0(\lambda_0) P_n x = y$$

для любого $y \in E_n$, начиная с некоторого n_0, однозначно разрешимо. Это свойство оператора $A_0(\lambda_0)$ сохраняется при возмущении его любым вполне непрерывным оператором (см. теорему 3.1 из [4, с.94]).. Таким образом, уравнение

$$P_n A(\lambda_0) P_n x = y$$

(для любого $y \in E_n$), начиная с некоторого n_0, также однозначно разрешимо. Отсюда следует, что определитель $f_n(\lambda_0)$ матрицы

$$\left\| A(\lambda_0)\varphi_i, \varphi_j \right\| = \left\| P_n A(\lambda_0) P_n \varphi_i, \varphi_j \right\| ,$$

где $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$ – базис в E_n, отличен от нуля при $n > n_0$. Но определитель $f_n(\lambda)$ является аналитической функцией в области G. Значит, множество его нулей дискретно в G. Последнее означает, что при достаточно больших n спектры Ω_n дискретны в G.

2.3. Доказательство вспомогательных предложений

Доказательство 2. Перейдем к доказательству второй части предложения 1. Оно распадается на несколько частей.

Введем одно понятие, необходимое для дальнейшего. Пусть H – гильбертово пространство, H_1 и H_2 – подпространства из H и P_1, P_2 – соответствующие им ортопроекторы. Положим $P^{(1)} = I - P_1$ и $P^{(2)} = I - P_2$. Раствором $\Theta(H_1, H_2)$ подпространств H_1 и H_2 называется [5, с. 199] число

$$\Theta(H_1, H_2) = \max\{ \sup_{\substack{x\in H_1,\\ \|x\|=1}} \left\| P^{(2)}x \right\| , \sup_{\substack{x\in H_2,\\ \|x\|=1}} \left\| P^{(1)}x \right\| \} . \quad (7)$$

Лемма 1. *Пусть линейный оператор* B*, определенный на гильбертовом пространстве* H*, для всех* $u \in H$ *удовлетворяет условию*

$$|(Bu, u)| \ge \delta\|u\|_H^2 , \quad (8)$$

где $\delta > 0$ *и* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольная последовательность подпространств из* H. *Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Theta(BE_n, E_n) = q < 1 .$$

Доказательство. Оценим

$$\sup_{\substack{x\in H_1,\\ \|x\|=1}} \rho(x, BE_n) .$$

Здесь $\rho(x, BE_n)$ – расстояние от x до подпространства BE_n. Любой элемент $x \in E_n$ можно представить в виде

$$x = \alpha Bx + y,$$

где $y \perp Bx$. Очевидно, что $\alpha = \dfrac{(x, Bx)}{\|Bx\|^2}$.

Отсюда имеем

$$\|y\| = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{|(x, Bx)|^2}{\|Bx\|^2}}.$$

Но в силу (8) и неравенства $\|Bx\| \le \|B\| \cdot \|x\|$, где $\|B\|$ – норма оператора B,

$$\frac{|(x, Bx)|^2}{\|Bx\|^2} \ge \frac{\delta^2 \|x\|^4}{\|Bx\|^2} \ge \frac{\delta^2 \|x\|^2}{\|B\|^2}.$$

Используя последнее неравенство и полагая $\|x\| = 1$, получаем оценку

$$\|y\| \le \sqrt{1 - \delta^2 \|B\|^{-2}}.$$

Но $\rho(x, BE_n) \le \rho(x, \alpha Bx) = \|y\|$. Поэтому

$$\sup_{\substack{x \in E_n, \\ \|x\|=1}} \rho(x, BE_n) \le \sqrt{1 - \delta^2 \|B\|^{-2}}. \qquad (9)$$

Оценим теперь $\sup\limits_{\substack{x \in E_n, \\ \|Bx\|=1}} \rho(Bx, E_n)$. Запишем Bx в виде $Bx = \beta x + z$, где $z \perp x$, $\beta = \dfrac{(Bx, x)}{\|x\|^2}$.

Учитывая это, имеем при $\|Bx\| = 1$

$$\|z\| = \sqrt{1 - |(Bx, x)|^2 \|x\|^{-2}}.$$

Но в силу (8)

$$|(Bx, x)|^2 \|x\|^{-2} \ge \delta^2 \|x\|^2. \qquad (10)$$

Кроме того, $\|Bx\| \le \|B\| \cdot \|x\|$, что при $\|Bx\| = 1$ дает $\|x\| \ge \|B\|^{-1}$. Используя это неравенство, получаем из (10)

$$|(Bx, x)|^2 \|x\|^{-2} \ge \delta^2 \|B\|^{-2}.$$

Отсюда получаем $\|z\| \le \sqrt{1 - \delta^2 \|B\|^{-2}}$.

Последнее неравенство приводит к оценке

$$\sup_{\substack{x \in E_n, \\ \|Bx\|=1}} \rho(Bx, E_n) \le \sqrt{1 - \delta^2 \|B\|^{-2}}. \qquad (11)$$

Утверждение леммы 1 вытекает теперь из (9) и (11).

Лемма 2. (Эта лемма является операторным аналогом известной в теории функций комплексного переменного теоремы Монтеля). *Пусть последовательность аналитических по* λ *в области* G *оператор-функций* $\varphi_n(\lambda)$ *сходится по норме при любом* $\lambda \in G$ *к аналитической в* G *оператор-функции* $\varphi(\lambda)$. *Пусть, кроме того, на произвольном компакте* $K \subset G$ *последовательность норм* $\|\varphi_n(\lambda)\|$ *равномерно ограничена:* $\|\varphi_n(\lambda)\| < c$ *для всех* n *и всех* $\lambda \in K$. *Тогда на любом компакте из* G *последовательность* $\|\varphi_n(\lambda) - \varphi(\lambda)\|$ *сходится к нулю равномерно.*

Доказательство. Пусть L – произвольная замкнутая кривая из G, содержащая компакт K строго внутри. Из аналитичности в области G оператор-функций $\varphi_n(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ вытекает справедливость представления

$$\varphi(z) - \varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\lambda) - \varphi_n(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$$

для любой точки z из K. Отсюда получаем, что

$$\|\varphi(\lambda) - \varphi_n(\lambda)\| \le \frac{1}{2\pi} \max_{\substack{\lambda \in L, \\ z \in K}} |\lambda - z|^{-1} \int_L \|\varphi(\lambda) - \varphi_n(\lambda)\| |d\lambda|.$$

Утверждение леммы 2 следует теперь из равенства

$$\lim_{n \to \infty} \int_L \|\varphi(\lambda) - \varphi_n(\lambda)\| |d\lambda| = 0.$$

Переход к пределу под знаком интеграла здесь возможен в силу равномерной ограниченности последовательности $\|\varphi(\lambda) - \varphi_n(\lambda)\|$ и теоремы Лебега.

2.4. Доказательство сходимости спектров в методе Ритца

Рассмотрим уравнение

$$P_n(A_0(\lambda) + A_1(\lambda))x = P_n f,$$

где $x \in E_n$, а f – произвольная функция из H. Перепишем его так:

$$P_n(I - T(\lambda))y_n = P_n f. \qquad (12)$$

Здесь по-прежнему

$$T(\lambda) - A_1(\lambda) A_0^{-1}(\lambda);$$

$$y_n = A_0(\lambda)x \in F_n; \quad F_n = A_0(\lambda)E_n.$$

Из леммы 1 следует, что для всех n

$$\Theta(E_n, F_n) \le q < 1. \qquad (13)$$

Пусть $\tilde{P}_n$ – сужение оператора P_n на подпространство F_n. Из (13) следует, что оператор $\tilde{P}_n$ допускает обращение (см., например, [6, с. 117]). Обозначим через $\tilde{P}_n^{-1}$ оператор, обратный к $\tilde{P}_n$. Из (13) и [5, с.231] вытекает, что

$$\left\|\tilde{P}_n^{-1}\right\| = \frac{1}{\sqrt{1-[\Theta(E_n, F_n)]^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} .$$

Положим $\overline{P}_n = \tilde{P}_n^{-1} P_n$. Оператор $\overline{P}_n$ есть проектор, отображающий H на F_n.

Действительно, $\left\|\overline{P}_n\right\| \le \left\|\tilde{P}_n^{-1}\right\| \cdot \left\|P_n\right\|$ и

$$\overline{P}_n^2 = \tilde{P}_n^{-1} P_n \tilde{P}_n^{-1} P_n = \tilde{P}_n^{-1} P_n = \overline{P}_n ,$$

так как $P_n \tilde{P}_n^{-1}$ есть единичный оператор, действующий в E_n.

Лемма 3. $\overline{P}_n(\lambda)$ *есть аналитическая по* λ *в области* G *оператор-функция.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i\}_{i-1}^m$ – базис в E_n и $\psi_i(\lambda) = A_0(\lambda)$. Векторы $\psi_i(\lambda)$ аналитичны по λ в G. Поскольку отображение $\tilde{P}_n : F_n \to E_n$ взаимно-однозначно, векторы $\tilde{P}_n \psi_i(\lambda) = P_n \psi_i(\lambda)$ линейно-независимы и, значит, образуют базис в E_n. Зафиксируем $f \in H$ и положим $h = P_n f \in E_n$. Тогда

$$h = \sum_{k=1}^{m} c_k(\lambda) P_n \psi_k(\lambda) .$$

Покажем, что функции $c_k(\lambda)$ аналитичны. Для этого возьмем дифференциал в последнем равенстве. Имеем

$$-\sum_{k=1}^{m} c_k(\lambda) \delta P_n \psi_k(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \delta c_k(\lambda) P_n \psi_k(\lambda) ,$$

т.е. величины $\delta c_k(\lambda)$ являются коэффициентами разложения левой части по $\psi_k(\lambda)$. Выражая дифференциалы $\delta\psi_k(\lambda)$ через производные по комплексному переменному λ, имеем

$$-\sum_{k=1}^{m} c_k(\lambda) P_n \psi_k'(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \frac{dc_k(\lambda)}{d\lambda} P_n \psi_k(\lambda) .$$

Таким образом, функции $c_k(\lambda)$ аналитичны, а значит, аналитичен и вектор

$$\overline{P}_n f = \tilde{P}_n^{-1} h = \sum_{k=1}^{m} c_k(\lambda) \tilde{P}_n^{-1} P_n \varphi_k(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} c_k(\lambda) \psi_k(\lambda) ,$$

что и требовалось проверить.

Перепишем (12) так:

$$\overline{P}_n (I - T(\lambda)) y_n = \overline{P}_n f . \qquad (14)$$

Рассмотрим уравнение

$$(I - \overline{P}_n T(\lambda) \overline{P}_n) y = g , \; y, g \in H . \qquad (15)$$

Пусть

$$y = z + \omega , \qquad (16)$$

где $z \in \operatorname{Im}\overline{P}_n$, $\omega \in \operatorname{Ker}\overline{P}_n$. Перепишем (15) в виде

$$\omega + z - \overline{P}_n T(\lambda) \overline{P}_n z = \overline{P}_n g + (I - \overline{P}_n) g . \qquad (17)$$

Здесь

$$z - \overline{P}_n T(\lambda) \overline{P}_n z \in \operatorname{Im}\overline{P}_n ,$$
$$\overline{P}_n g \in \operatorname{Im}\overline{P}_n , \; (I - \overline{P}_n) g \in \operatorname{Ker}\overline{P}_n . \qquad (18)$$

Из (17), (18) и единственности представления произвольного вектора y в виде (16) следует

$$\overline{P}_n (I - T(\lambda)) z = \overline{P}_n g .$$

Таким образом, разрешимость уравнения (15) эквивалентна разрешимости аппроксимативного уравнения (14).

Изучим (15). Проверим, что последовательность

$$\left\| T(\lambda) - \overline{P}_n T(\lambda) \overline{P}_n \right\| \to 0$$

на любом компакте $K \subset G$. Положим $P^{(n)} = I - \overline{P}_n$. Тогда

$$\overline{P}_n T \overline{P}_n = (I - P^{(n)}) T (I - P^{(n)}) =$$
$$= T - P^{(n)} T - T P^{(n)} + P^{(n)} T P^{(n)} \to T$$

при $n \to \infty$ для любого фиксированного $\lambda \in G$, так как $P^{(n)} \to 0$ сильно, а оператор $T(\lambda)$ вполне непрерывен и, значит, операторы $P^{(n)}T$, $TP^{(n)}$, $P^{(n)}TP^{(n)}$ при $n \to \infty$ сходятся к нулю по норме. Отсюда и из леммы 2 следует, что слагаемые $P^{(n)}T$, $TP^{(n)}$, $P^{(n)}TP^{(n)}$ стремятся к нулю равномерно на K. Таким образом, последовательность $\left\| T(\lambda) - \overline{P}_n T(\lambda) \overline{P}_n \right\|$ сходится к нулю равномерно на K.

Теперь нам потребуется следствие из теоремы В.М. Ени [7].

Пусть последовательность голоморфных в области G оператор-функций $A_n(\lambda)$ сходится равномерно на любом компакте $K \subset G$ к оператор-функции $A(\lambda)$ и при любом $\lambda \in G$ операторы $A(\lambda)$, $A_n(\lambda)$ вполне непрерывны. Тогда последовательность спектров оператор-функций $I + A_n(\lambda)$ сходится к спектру оператор-функции $I + A(\lambda)$.

Применим следствие из теоремы В. М. Ени к оператор-функциям

$$I - \overline{P}_n(\lambda) T(\lambda) \overline{P}_n(\lambda) , \quad I - T(\lambda) .$$

Учитывая, что спектры оператор-функций $A(\lambda)$ и $I - T(\lambda)$ совпадают, получим, что спектры Ω_n сходятся к спектру Ω. Предложение 1 доказано.

3. Условия расходимости метода Ритца

Опишем теперь один класс функционалов, отыскание собственных значений которых по методу Ритца может привести к неверному результату.

Пусть по-прежнему $\Phi(u,v;\lambda)$ – симметричный функционал и при некотором значении $\lambda=\lambda_0$ форма $\Phi(u,\bar{u};\lambda)$ вещественна, а область определения D_Φ функционала удовлетворяет условию $D_\Phi=\bar{D}_\Phi$. Это равенство означает, что если $f\in D_\Phi$, то и $\bar{f}\in D_\Phi$. Предположим также, что существуют гильбертово пространство H и бесконечномерные линейные многообразия F_1, F_2 из D_Φ такие, что: D_Φ всюду плотно в H, функционал $\Phi(u,v;\lambda)$ в H ограничен и $\Phi(u,\bar{u};\lambda)\le 0$, если u принимает значения из F_1, и $\Phi(u,\bar{u};\lambda)\ge 0$, если u принимает значения из F_2.

Предложение 2. *Пусть $\Phi(u,v;\lambda_0)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Тогда существует предельно плотная последовательность конечномерных подпространств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ из D_Φ, удовлетворяющая условиям*

$$E_n\subset E_{n+1},\ E_n=\bar{E}_n\ \ (n=1,2,\ldots),$$

такая, что при всех n уравнения

$$(A(\lambda_0)u_n,\bar{\varphi}_k)=0,\ k=1,\ldots,m,\ n=1,2,\ldots;$$

$\{\varphi_k\}_{k=1}^{m}$ *базис в E_n, имеют нетривиальные решения.*

Таким образом, в указанной ситуации λ_0 является точкой спектров Ω_n аппроксимативных уравнений (1). Может однако случиться, что λ_0 не является точкой спектра функционала $\Phi(u,v;\lambda)$ (см., например, функционалы из (7)).

Доказательство. Пусть A – оператор, порождаемый билинейной формой $\Phi(u,v;\lambda_0)$. Так как при всех u из H форма $\Phi(u,\bar{u};\lambda_0)$ вещественна, то оператор A самосопряженный. Чтобы доказать предложение 2, достаточно проверить, что существует последовательность конечномерных подпространств

$$\{E_n\}_{n=1}^{\infty},\ E_n=\bar{E}_n,\ E_n\subset E_{n+1},\ (n=1,2,\ldots),$$

предельно плотная в H и такая, что при $n=1,2,\ldots$ оператор $P_{E_n}AP_{E_n}$ имеет нуль своим собственным значением. Здесь P_{E_n} – ортопроектор в H на E_n.

Будем строить последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ по индукции. Обозначим через G_1, G_2 замыкание множеств $H\cap F_1$, $H\cap F_2$ соответственно. Зафиксируем последовательность векторов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полную в H и такую, что $x_n=\bar{x}_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Положим E_1 равным одномерному подпространству, натянутому на x_1. Пусть подпространство E_n уже построено. Будем строить подпространство E_{n+1}.

Выберем в G_1 такой вектор f_1, что $f_1=\bar{f}_1$

$$f_1\perp(E_n\dotplus x_{n+1}),\ Af_1\perp(E_n\dotplus x_{n+1}). \qquad (19)$$

Здесь через $E_n\dotplus x_{n+1}$ обозначена прямая сумма подпространства E_n и одномерного пространства, натянутого на x_{n+1}. Чтобы выполнялось условие

$$Af_1\perp(E_n\dotplus x_{n+1}),$$

f_1 достаточно, в силу самосопряженности оператора A, выбрать так, чтобы

$$f_1\perp A(E_n\dotplus x_{n+1}).$$

Аналогично в G_2 возьмем такой вектор f_2, что $f_2=\bar{f}_2$,

$$f_2\perp A(E_n\dotplus x_{n+1}),\ Af_2\perp(E_n\dotplus x_{n+1}). \qquad (20)$$

Покажем, что в подпространстве, натянутом на векторы f_1 и f_2, существует вектор y_0, $y_0\ne 0$, такой, что $(Ay_0,y_0)=0$. Это очевидно, если выполнено одно из равенств

$$(Af_1,f_1)=0,\ (Af_2,f_2)=0.$$

Если же

$$(Af_1,f_1)<0,\ (Af_2,f_2)>0, \qquad (21)$$

то положим

$$y_t=\frac{tf_1+(1-t)f_2}{\|tf_1+(1-t)f_2\|},\ 0\le t\le 1.$$

Здесь $\|tf_1+(1-t)f_2\|\ne 0$, так как f_1 и f_2, очевидно, не коллинеарны. Если t пробегает все значения из отрезка $[0,1]$, то величина (Ay_t,y_t) изменяется на некотором отрезке вещественной оси, содержащем точку 0. Это следует из (21). Значит, существует число $t_0\in[0,1]$, такое, что $(Ay_{t_0},y_{t_0})=0$, т.е. $Ay_{t_0}\perp y_{t_0}$.

Положим $E_{n+1}=E_n\dotplus x_{n+1}\dotplus y_{t_0}$. Отметим, что в силу (19) и (20)

$$y_{t_0}\perp E_n\dotplus x_{n+1}. \qquad (22)$$

Из (19) и (20) следует также, что

$$Ay_{t_0}\perp E_{n+1}.$$

Кроме того, $y_{t_0}=\bar{y}_{t_0}$, так как $f_1=\bar{f}_1$, $f_2=\bar{f}_2$, $E_n=\bar{E}_n$. Из (22) вытекает, что

$$P_{E_{n+1}}AP_{E_{n+1}}y_{t_0}=P_{E_{n+1}}Ay_{t_0}=0.$$

Это значит, что 0 является собственным значением оператора $P_{E_{n+1}}AP_{E_{n+1}}$, что и требовалось проверить. Таким образом, если выполняются условия (21), то предложение 2 доказано.

Отметим, что векторы f_1 и f_2 можно взять из F_1 и F_2. Действительно, рассмотрим ортогональное дополнение в G_1 к подпространствам

$$E_n \dotplus x_{n+1}, \ A(E \dotplus x_n).$$

Обозначим его через L – подпространством конечной размерности в G_1.

Известно [8, с.46] следующее предложение. Если L – подпространство конечной коразмерности в гильбертовом пространстве G_1, а F_1 – всюду плотное линейное многообразие в G_1, то пересечение $L \cap F_1$ плотно в L. Поэтому пересечение $L \cap F_1$ непусто и f_1 можно взять из $L \cap F_1$.

4. Заключение

Научная новизна. Обоснована применимость метода Ритца к классу функционалов, отвечающих несамосопряженным задачам в теории дифракции. Указаны условия, при которых такое применение законно. Описан класс функционалов, применение метода Ритца к которым может привести к неверному результату. В некоторые функционалы спектральный параметр входит нелинейно.

Практическая значимость исследования состоит в разработке критериев сходимости и расходимости метода Ритца для симметричных функционалов в теории дифракции. Для симметричных квадратичных функционалов доказано, что если координатные функции, используемые в методе Ритца, вещественные, то вопрос о сходимости метода Ритца можно свести к исследованию метода Галеркина. Получен критерий применимости метода Ритца для одного класса симметричных функционалов. Доказано, что спектры таких функционалов дискретны и могут быть вычислены методом Ритца по любой полной последовательности вещественных базисных функций.

Литература: 1. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов. М.: Наука, 1965. 448 с. **2.** *Като Д.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с. **3.** *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. 351 с. **4.** *Гохберг И.Ц., Фельдман И.А.* Уравнение в свёртках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с. **5.** *Краснопольский М.А.* и др. Приближённое решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455с. **6.** *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 544 с. **7.** *Ени В.М.* Об устойчивости корневого числа аналитической оператор-функции и о возмущениях её характеристических чисел и собственных векторов. Докл. АН СССР, 1967. Т. 173. №6. С. 1251-1254. **8.** *Глазман И.М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. С. 46-57.

Поступила в редколлегию 12.09.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Дикарев Вадим Анатолиевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел. 343-57-03.