УДК 519.714 : 621.391

*И.А. КУЛИК, Е.М. СКОРДИНА, С.В. КОСТЕЛЬ*

# ГЕНЕРИРОВАНИЕ КОДОВ-СОЧЕТАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ИУС

Предлагаются математические модели процессов перечисления и генерирования кодов-сочетаний на основе разработанных биномиальных отображений. Приведено теоретическое обоснование взаимооднозначности множеств кодов-сочетаний, биномиальных чисел и соответствующих им номеров, а также операций перехода между ними. Рассматривается связь характеристик предлагаемых моделей перечисления и генерирования кодов-сочетаний с параметрами информационных задач ИУС.

## 1. Введение

Во многих информационно-управляющих системах (ИУС) достаточно большие объемы информации составляют данные, представленные последовательностями, сумма элементов которых не превосходит или равна некоторой величине, т.е. кодами-сочетаниями. Генерирование таких последовательностей и приписывание им номеров позволяет проводить не только их эффективное кодирование, но и существенно облегчить решение задач целочисленного программирования, в которых генерирование или перечисление допустимого множества векторов является довольно трудной задачей.

Информационные задачи, распространенные в ИУС, в том числе комбинаторных, возможно решать более эффективно, используя коды-сочетания и предлагаемые в этой работе способы их получения. К ним относятся задачи сбора, коммутации, хранения и передачи данных, адаптации параметров и принятия оптимальных управленческих решений. Более того, одни и те же ограничения соответствуют одновременно и монотонным числовым последовательностям, и комбинаторным сочетаниям, тем самым расширяя область возможного эффективного применения кодов-сочетаний на задачи вычислительной обработки данных [1, 2].

Но эффективному применению кодов-сочетаний в ИУС препятствует отсутствие регулярных методов их перечисления и генерирования, которые бы учитывали не только ограничения на элементы рассматриваемых кодов, но и их структурные свойства и числовые характеристики. Последнее особенно важно с точки зрения применения кодов-сочетаний в ИУС, где в процессе контроля и принятия управленческих решений важное место занимают методы вычислительной обработки данных.

В работах [3, 4] отражается общий подход к генерированию комбинаторных конфигураций, к числу которых относятся и сочетания, представленный общими комбинаторными схемами: методом решета и методом поиска с возвращением. Но данные методы не учитывают влияния ограничений на структуру множеств кодов-сочетаний, что приводит к достаточно большим временным и стоимостным затратам при практической их реализации.

В монографии [1] предлагаются системы нумерации и денумерации для сочетаний. В них более полно учитываются специфические ограничения на элементы сочетаний, но без рассмотрения их структурных свойств, без выделения из сочетаний структурных чисел, наделяющих рассматриваемые коды числовыми характеристиками.

Приведенное ниже исследование основывается на установленном в работе [5] положении, что в структуре комбинаторных объектов можно обнаружить соответствующие им структурные числа. В частности, для кодов-сочетаний такими структурными числами являются биномиальные числа.

*Цель* предлагаемой работы – снижение временных и стоимостных затрат при выполнении характерных для ИУС информационных задач: хранениея и передача данных, оптимизация процессов обработки информации и принятие управленческих решений.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие *задачи*:

– выделить в структуре кодов-сочетаний двоичные биномиальные числа;

– разработать математические модели процессов перечисления и генерирования кодов-сочетаний с использованием двоичных биномиальных чисел.

Поставленные задачи следует рассматривать с точки зрения комбинаторного кодирования кодов-сочетаний ввиду следующего обоснования.

1. Коды-сочетания представляют собой последовательности, на значения весовых характеристик и расположение элементов которых накладываются ограничения. Вследствие этого операциям кодирования и декодирования кодов-сочетаний придается комбинаторный характер [1, 6].

2. Комбинаторный подход к представлению кодов-сочетаний подразумевает учет их специфических особенностей, что позволит избежать громоздких в плане вычислительных и временных затрат общих схем для их получения [3, 4].

3. Комбинаторные ИУС достаточно широко распространены и разрабатываемые по сути комбинаторные модели и методы генерирования и перечисления кодов-сочетаний должны органично войти в математическое и алгоритмическое обеспечение таких информационных систем [1, 7].

## 2. Предварительные сведения

Комбинаторное решение сформулированных в работе задач представляет собой разработку методов комбинаторного кодирования множества $Y$ кодов-сочетаний, имеющих заданное ограничение $R_Y$. Это означает установление взаимно-однозначного отображения $f: Y \to F$ между последовательностями $Y_j \in Y$ и элементами множества $F = \{0,1,...,|Y|-1\}$ целых неотрицательных чисел $F_j \in F$. В рамках комбинаторного кодирования рассматриваются три задачи: подсчета, перечисления и генерирования [1, 8].

В работе [5] предложен универсальный подход для решения такого типа задач на основе специализированных структурных систем счисления, когда под данный тип комбинаторных конфигураций подбирается соответствующая им структурная система счисления и порождаемые ее структурные числа. В качестве структурных чисел для построения моделей процессов генерирования и перечисления кодов-сочетаний предлагается применять биномиальные числа.

Биномиальные числа генерируются биномиальными системами счисления, которые относятся к классу структурных позиционных систем [5, 9]. Особенностью таких систем счисления является то, что в них введены ограничения, которые вес цифр ставят в зависимость не только от их позиции в структурном (биномиальном) числе, но и от значений предшествующих им цифр. В качестве весов цифр в биномиальных числах используются биномиальные коэффициенты.

Двоичные биномиальные числа $X_j = (x_1 x_2 ... x_i ... x_r)$ генерируются двоичной биномиальной системой счисления, обладающей числовой функцией вида:

$$F_j = \sum_{i=1}^{r} x_i C_{n-i}^{k-q_i}, \qquad (1)$$

и системами ограничений для образования множества $X$ чисел $X_j$, $X_j \in X$, $j = \overline{0, N-1}$:

$$\begin{cases} q = k \\ x_r = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} l = n - k \\ x_r = 0 \end{cases}, \qquad (2)$$

где n и k – целочисленные параметры двоичной биномиальной системы счисления; $r$ – количество разрядов биномиального числа, $r < n$; $x_i$ – биномиальная двоичная цифра $x_i \in \{0,1\}$; $q$ – число единиц в биномиальном числе; $q_i$ – сумма единичных $x_i$, начиная с первого разряда числа до $(i-1)$-го включительно:

$$q_i = \sum_{t=1}^{i-1} x_t, \qquad (3)$$

здесь $q_1 = 0$, $q_i \le k$; $N = C_n^k$ – количество двоичных биномиальных чисел $X_j$.

### 3. Связь решаемых задач с параметрами ИУС

В рамках временных и стоимостных характеристик реализации задач ИУС, связанных с кодами-сочетаниями, можно выделить составляющие, отвечающие за генерирование, перечисление и обработку рассматриваемых кодов:

$$T = \tau_{ксч} + T_{ксч},\ V = \nu_{ксч} + V_{ксч},$$

где $T$ и $V$ – время и объем аппаратно-программных затрат для решения типовой информационной задачи соответственно; $\tau_{ксч}$ и $\nu_{ксч}$ – время и объем аппаратно-программных затрат соответственно, требуемых на генерирование, перечисление и обработку кодов-сочетаний; $T_{ксч}$ и $V_{ксч}$ – время и объем аппаратно-программных затрат для решения заданной задачи, но с использованием кодов-сочетаний. Следовательно, в целях увеличения производительности ИУС необходимо и возможно минимизировать переменные $\tau_{ксч}$ и $\nu_{ксч}$ на основе предлагаемых новых математических моделей и алгоритмов, разрабатываемых на базе комбинаторного подхода к представлению кодов-сочетаний через биномиальные числа:

$$T_{min} = \min \tau_{ксч} + T_{ксч},\ V_{min} = \min \nu_{ксч} + V_{ксч}.$$

В качестве примера ИУС, в которой задействованы коды-сочетания, можно привести систему контроля ошибок на основе $t$-SEC/AUDE кодов, где $t$ – минимальное граничное полурасстояние (half-distance) между двумя произвольными кодовыми комбинациями. Данная система, с одной стороны, обнаруживает все асимметричные ошибки, которые характерны для работы электронных устройств, а с другой – обнаруживает и исправляет все однократные симметричные ошибки, которые возникают в основном при передаче по каналам связи. Для формирования $t$-SEC/AUDE кодов широко используются коды-сочетания как с одним весом, так и с двумя [10].

Аналогично увеличение производительности при разрабатываемом подходе будет наблюдаться и для ИУС распределения частот передачи в сетях радиосвязи, в том числе мобильной связи стандарта GSM. Для формирования списков распределения частот радиопередатчикам также эффективно можно использовать коды-сочетания [11].

### 4. Модели процессов генерирования и перечисления кодов-сочетаний

Использование биномиальных чисел в процессах генерирования и перечисления кодов-сочетаний обосновывается тем, что структуры кодов-сочетаний и биномиальных чисел аналогичны, и приемы, применяемые для получения их множеств, являются во многом сходными. Суть предлагаемого подхода заключается в том, что коды-сочетания наделяются числовыми характеристиками, например количественным эквивалентом соответствующих им биномиальных чисел, порождаемых биномиальными системами счисления. В результате возможно не только ускорение процессов генерирования и перечисления кодов-сочетаний, но и расширение возможностей по их преобразованию. В частности, весьма заметно упрощается получение кодов-сочетаний не только в систематическом, но и в случайном порядке.

Для решения задачи по повышению производительности ИУС, применяющих коды-сочетания, предлагается использовать биномиальные отображения.

**Определение.** Отображение $f : X \to Y$ называется биномиальным, если его область определения $X$ или область $Y$ значений составляют биномиальные числа.

Определив соответствие $G \subseteq X \times Y$, $(X_j, Y_j) \in G$, между множествами $X$ двоичных биномиальных чисел и $Y$ кодов-сочетаний, тем самым задачи пересчета и генерирования кодов-сочетаний $Y_j$ сведем к аналогичным задачам, но уже для биномиальных чисел $X_j$. Обратно, построив соответствие $Z \subseteq X \times Y$, $(Y_j, X_j) \in Z$, решение задачи перечисления кодов-сочетаний $Y_j$ будем основывать на результатах решения этой же задачи, но для двоичных биномиальных чисел $X_j$. С учетом существования числовой функции (1) и систем ограничений (2) для биномиальных чисел $X_j$, которые являются числообразующими, решение таких задач на основе предложенного подхода потребует заметно меньшего объема вычислительных и временных затрат. Очевидно, с точки зрения однозначности

кодирования и декодирования кодов-сочетаний соответствия $G$ и $Z$ должно быть функциональными и определять прямую $\varphi$ и обратную $\varphi^{-1}$ функции перехода от биномиальных чисел $X_j$ к кодам-сочетаниям $Y_j$ и обратно от $Y_j$ к $X_j$. В свою очередь, нахождение функций $Y_j = \varphi\left(X_j\right)$ и $X_j = \varphi^{-1}\left(Y_j\right)$ означает построение биективных биномиальных отображений $\varphi : X \to Y$ и $\varphi^{-1} : Y \to X$.

Таким образом, математическими моделями исследуемых процессов являются соотношения, представляющие собой следующие сложные функции:

1) перечисление кодов-сочетаний $Y_j$ с заданным ограничением $R_Y$ в целях получения их номеров $F_j$:

$$F_j = f\left(Y_j\left[R_Y\right]\right) = \psi\left(\varphi^{-1}\left(Y_j\left[R_Y\right]\right)\right); \quad (4)$$

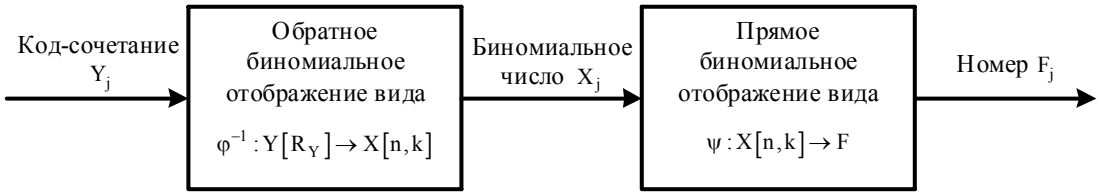
2) генерирование кодов-сочетаний $Y_j$ с заданным ограничением $R_Y$ на основе соответствующих номеров $F_j$:

$$Y_j\left[R_Y\right] = f^{-1}\left(F_j\right) = \varphi\left(\psi^{-1}\left(F_j\right)\right); \quad (5)$$

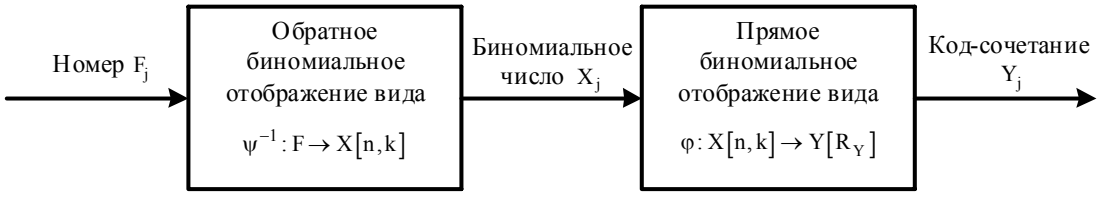
где $\psi : X \to F$ и $\psi^{-1} : F \to X$ – биективные прямое и обратное отображения множества $X$ биномиальных чисел $X_j$ на множество $F$ номеров $F_j$ и обратно $F$ на $X$ соответственно.

Следует отметить, что отображения $\psi$ и $\psi^{-1}$ могут быть реализованы с использованием числовой функции (1) и систем ограничений (2) [5, 9].

В графическом виде модели процессов перечисления и генерирования кодов-сочетаний $Y_j \in Y\left[R_Y\right]$ представлены на рисунке.




а




б

Модели процессов: а – перечисления; б – генерирования кодов-сочетаний

От задач перечисления и генерирования кодов-сочетаний общего вида перейдем к частному случаю, когда требуется получение отдельного вида сочетаний – квазиравновесных комбинаций $Y_j = \left(y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1}\right)$ с весовым распределением количества единиц $k-1$, $k$, где $1 \le k \le n-1$. При этом ограничение $R_Y$ будет иметь вид вектора, состоящего из двух компонентов $k-1$ и $k$:

$$R_Y = \left(k-1, k\right), \; k = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \; .$$

Прямое и обратное биномиальные отображения $\varphi : X\left[n,k\right] \to Y\left[\left(k-1,k\right)\right]$ и $\varphi^{-1} : Y\left[\left(k-1,k\right)\right] \to X\left[n,k\right]$ для квазиравновесных кодов-сочетаний $Y_j = \left(y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1}\right)$ и двоичных биномиальных чисел $X_j = \left(x_1 x_2 ... x_i ... x_r\right)$ длины $\min\left(k, n-k\right) \le r \le n-1$ с пара-

метрами $n$ и $k$ обосновываются теоремами 1 и 2, доказательства которых приведены в работах [12, 13]. В отличие от [12, 13] формулирование данных теорем выполняется в более формализованном виде.

Условимся, что $Y_j^{y_{n-1}=0}$ и $Y_j^{y_{n-1}=1}$ – квазиравновесные комбинации, последние разряды которых $y_{n-1}=0$ и $y_{n-1}=1$ соответственно. Подобные обозначения аналогично вводятся и для биномиальных чисел $X_j$. Кроме того, обозначим операцию конкатенации кодов как "$++$", а операцию рассоединения в виде "$--$".

**Теорема 1.** О прямом биномиальном отображении $\varphi$ квазиравновесных комбинаций.

*Если* $q=k$ *и* $x_r=1$, *то* $Y_j^{y_{n-1}=0}=X_j^{x_r=1}++(00...0)=(y_1y_2...y_i...y_{n-2}0)$.

*Если* $l=n-k$ *и* $x_r=0$, *то* $Y_j^{y_{n-1}=1}=X_j^{x_r=0}++(11...1)=(y_1y_2...y_i...y_{n-2}1)$.

*В остальных случаях*

$$Y_j^{y_{n-1}=0}=X_j^{x_{n-1}=0}=(y_1y_2...y_i...y_{n-2}0) \text{ и } Y_j^{y_{n-1}=1}=X_j^{x_{n-1}=1}=(y_1y_2...y_i...y_{n-2}1),$$

*где* $j=\overline{0,C_n^k-1}$, *а* $q$ *и* $l$ – *количество двоичных единиц и нулей в* $X_j$ *соответственно.*

**Теорема 2.** Об обратном биномиальном отображении $\varphi^{-1}$ квазиравновесных комбинаций.

*Если* $q=k$ *и* $y_{n-1}=0$, *то* $X_j^{x_r=1}=Y_j^{y_{n-1}=0}--(00...0)=(x_1x_2...x_i...x_{r-1}1)$.

*Если* $q=k-1$ *и* $y_{n-1}=1$, *то* $X_j^{x_r=0}=Y_j^{y_{n-1}=1}--(11...1)=(x_1x_2...x_i...x_{r-1}0)$.

*В остальных случаях*

$$X_j^{x_{n-1}=0}=Y_j^{y_{n-1}=0}=(x_1x_2...x_i...x_{n-2}0) \text{ и } X_j^{x_{n-1}=1}=Y_j^{y_{n-1}=1}=(x_1x_2...x_i...x_{n-2}1),$$

*где* $j=\overline{0,C_n^k-1}$, *а* $q$ *и* $l$ – *количества двоичных единиц и нулей в* $Y_j$ *соответственно.*

**Пример 1.** Пусть 01000 и 1011 двоичные биномиальные числа с параметрами $n=7$ и $k=3$. Необходимо определить соответствующие им квазиравновесные комбинации с ограничением $R_Y=(2,3)$.

Решение. Для 01000 имеем $l=n-k=7-3=4$ и $x_{r=5}=0$. Тогда согласно теореме 1 исходное биномиальное число дополняем справа единицей до общего количества разрядов $n-1=6$: 010001. Для 1011 имеем $q=k=3$ и $x_{r=4}=1$. Тогда согласно теореме 1 исходное биномиальное число дополняем справа двумя нулями до общего количества разрядов $n-1=6$: 101100. В результате получаем квазиравновесные комбинации с ограничением $R_Y=(2,3)$: 010001 и 101100.

**Пример 2.** Пусть 010101 и 110100 квазиравновесные комбинации с ограничением $R_Y=(2,3)$. Необходимо определить соответствующие им двоичные биномиальные числа с параметрами $n=7$ и $k=3$.

Решение. Для 010101 имеем $q=k=3$ и $y_{n-1=6}=1$. Тогда согласно теореме 2 данная исходная комбинация остается без изменений. Для 110100 имеем $q=k=3$ и $y_{n-1=6}=0$. Тогда согласно теореме 2 у исходной комбинации отбрасываем серию нулей до появления единицы: 1101. В результате получаем двоичные биномиальные числа с параметрами $n=7$ и $k=3$: 010101 и 1101.

Как демонстрируют соотношения (1) и (2), для перечисления и генерирования кодов-сочетаний с ограничением $R_Y=(k-1,k)$ помимо построенных отображений $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ должны использоваться биективные биномиальные отображения вида $\psi: X\to F$ и $\psi^{-1}: F\to Y$, которые в свою очередь представляют собой нахождение десятичных (в двоичном представлении) и биномиальных количественных эквивалентов. Чтобы обосно-

вать совместное применение отображений $\psi$ и $\varphi^{-1}$ для реализации функции $F_j = f\left(Y_j\right)$ и отображений $\varphi$ и $\psi^{-1}$ для реализации функции $Y_j = f^{-1}\left(F_j\right)$, необходимо привести и доказать объединяющие теоремы о возможности и однозначности отображения $f: Y \to F$, т.е. теорему о перечислении, и отображения $f^{-1}: F \to Y$, т.е. теорему о генерировании.

**Теорема 3.** О перечислении кодов-сочетаний с ограничением $\mathbf{R_Y = (k-1,k)}$ (квазиравновесных кодов).

*Всякой последовательности* $Y_j \in Y\left[(k-1,k)\right]$, $Y_j = (y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-1})$, $y_i \in \{0,1\}$, *удовлетворяющей ограничению* $R_Y = (k-1,k)$, *можно поставить в соответствие число* $F_j \in F = \{0,1,2,...\}$ *с помощью отображений:*

*1) отображения* $\varphi^{-1}: Y\left[(k-1,k)\right] \to X[n,k]$ *последовательности* $Y_j$ *на биномиальное число* $X_j \in X[n,k]$, $X_j = (x_1 x_2 ... x_i ... x_r)$, $x_i \in \{0,1\}$;

*2) отображения* $\psi: X[n,k] \to F$ *биномиального числа* $X_j$ *на номер* $F_j$ *в соответствии с числовой функцией:*

$$F_j = \sum_{i=1}^{r} x_i \rho_i, \tag{6}$$

*где* $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$, $j = \overline{0, C_n^k - 1}$.

Доказательство. Обоснованием $\varphi^{-1}: Y\left[(k-1,k)\right] \to X[n,k]$ есть теорема 2. Для доказательства существования $\psi: X[n,k] \to F$, реализуемого функцией (6), произведем последовательное деление номера $F_j$ с остатком. На каждом очередном шаге будем делить остаток $\tau_{i-1}$ на $\rho_i$, получая частное $\delta_i$ и остаток $\tau_i$:

$F_j = \delta_1 \rho_1 + \tau_1$, $\tau_1 = \delta_2 \rho_2 + \tau_2, \ldots, \tau_{i-1} = \delta_i \rho_i + \tau_i, \ldots, \tau_{r-2} = \delta_{r-1} \rho_{r-1} + \tau_{r-1}$, $\tau_{r-1} = \delta_r \rho_r + \tau_r$, где $i = \overline{1,r}$, а $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$ представляет собой весовой коэффициент i-го шага деления. Общее количество $X_j$ с параметрами $n$ и $k$ есть $N = C_n^k$, т.е. значение числа $F_j$ лежит в диапазоне $0 \le F_j < C_n^k$. Тогда, если $F_j = \delta_1 \rho_1 + \tau_1$, то при $i = 1$ получаем $\rho_1 = C_{n-1}^{k-q_1}$ и $F_j = \delta_1 C_{n-1}^{k-q_1} + \tau_1$. Но известным является выражение $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Таким образом, с одной стороны

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \tag{7}$$

а с другой –

$$F_j = \delta_1 C_{n-1}^{k-q_1} + \tau_1. \tag{8}$$

Сравнивая (7), (8) и учитывая $F_j < C_n^k$, приходим к выводу, что $0 \le \delta_1 \le 1$, $q_1 = 0$ и $\tau_1 < C_{n-1}^{k-1}$.

Далее, производим деление остатка $\tau_1$ на весовой коэффициент $\rho_2$ при $i = 2$, т.е. $\tau_1 = \delta_2 \rho_2 + \tau_2$. При $i = 2$ имеем $\rho_2 = C_{n-2}^{k-q_2}$. Преобразовывая (7) и (8) уже в виде

$$C_{n-1}^{k-1} = C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}, \ \tau_1 = \delta_2 C_{n-2}^{k-q_2} + \tau_2,$$

делаем вывод, что $0 \le \delta_2 \le 1$, $q_2 = 1$ и $\tau_2 < C_{n-2}^{k-2}$.

На i-м шаге деления остатка $\tau_{i-1}$ выражения для суммы биномиальных коэффициентов и деления $(i-1)$-го остатка будут иметь вид:

$$C_{n-i+1}^{k-i+1} = C_{n-i}^{k-i+1} + C_{n-i}^{k-i}, \ \tau_{i-1} = \delta_i C_{n-i}^{k-q_i} + \tau_i,$$

на основании чего можно заключить, что при $\tau_{i-1} < C_{n-i+1}^{k-i+1}$ имеем $0 \le \delta_i \le 1$, $q_i = i-1$ и $\tau_i < C_{n-i}^{k-i}$.

На $i = r - 1$ шаге имеем $\tau_{r-2} < C_{n-r+2}^{k-r+2}$, биномиальный коэффициент уже вида $C_{n-r+2}^{k-r+2}$ разбиваем согласно свойству суммирования чисел сочетаний и осуществляем деление остатка $\tau_{r-2}$ на весовой коэффициент $\rho_1$:

$$C_{n-r+2}^{k-r+2} = C_{n-r+1}^{k-r+2} + C_{n-r+1}^{k-r+1},\ \tau_{r-2} = \delta_{r-1} C_{n-r+1}^{k-q_{r-1}} + \tau_{r-1}.$$

Исходя из приведенных выражений для шага $i = r - 1$, при $\tau_{r-2} < C_{n-r+2}^{k-r+2}$ получаем $0 \le \delta_{r-1} \le 1$, $q_{r-1} = r - 2$ и $\tau_{r-1} < C_{n-r+1}^{k-r+1}$.

На последнем шаге $i = r$ аналогично формируя выражения суммы биномиальных коэффициентов и деления остатка, получаем

$$C_{n-r+1}^{k-r+1} = C_{n-r}^{k-r+1} + C_{n-r}^{k-r},\ \tau_{r-1} = \delta_r C_{n-r}^{k-q_r} + \tau_r.$$

На основании приведенных равенств можно заключить, что при $\tau_{r-1} < C_{n-r+1}^{k-r+1}$ имеем $0 \le \delta_r \le 1, q_r = r - 1$ и $\tau_r < C_{n-r}^{k-r}$.

Рассмотрим неравенство для последнего остатка $\tau_r < C_{n-r}^{k-r}$. Переменная k представляет собой максимальное количество включений весовых коэффициентов вида $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$ в число $F_j$. Очевидно, если $r$ – количество этапов деления исходного числа $F_j$, то $r = k$. Отсюда, $\tau_r < C_{n-r}^{k-r} = C_{n-r}^{k-k} = C_{n-r}^{0} = 1$, а значит $\tau_r = 0$.

Выполнив последовательную подстановку выражений для $\tau_i$ в равенства для $\tau_{i-1}$, получим представление требуемого вида:

$$F_j = \delta_1 C_{n-1}^{k} + \delta_2 C_{n-2}^{k-q_2} + \ldots + \delta_i C_{n-i}^{k-q_i} + \ldots + \delta_{r-1} C_{n-r+1}^{k-q_{r-1}} + \delta_r C_{n-r}^{k-q_r} = \sum_{i=1}^{r} \delta_i C_{n-i}^{k-q_i},$$

где $0 \le \delta_i \le 1, q_i$ – сумма $\delta_i$ от первого до $(i-1)$-го шага включительно, т.е. $q_i = \sum_{t=1}^{i-1} \delta_t$. Таким образом, в результате приравнивания $\delta_i = x_i$ существование разложения (6) доказано.

Докажем теперь единственность разложения (6). Пусть при неизменных параметрах n и k номеру $F_j$ соответствуют два биномиальных числа $X'_j = (x'_1 x'_2 \ldots x'_i \ldots x'_{r'})$ и $X''_j = (x''_1 x''_2 \ldots x''_i \ldots x''_{r''})$, которые имеют разложения (6):

$$F_j = F' = \sum_{i=1}^{r'} x'_i C_{n-i}^{k-q'_i} \quad \text{и} \quad F_j = F'' = \sum_{i=1}^{r''} x''_i C_{n-i}^{k-q''_i}, \tag{9}$$

причем $0 \le x'_i \le 1$ и $0 \le x''_i \le 1$.

Биномиальные числа $X'_j$ и $X''_j$ можно разбить на общие $X'^{g}_j$, $X''^{g}_j$ и собственные $X'^{s}_j$, $X''^{s}_j$ части [5, 9]. При этом для соответствующих номеров $F'$ и $F''$, вычисленных согласно (9), должны выполняться равенства $F' = \tilde{X}'^{g}_j + \tilde{X}'^{s}_j$ и $F'' = \tilde{X}''^{g}_j + \tilde{X}''^{s}_j$, где знаком "~" обозначены количественные эквиваленты общих и собственных кодовых частей чисел $X'_j$ и $X''_j$. Очевидно, для общих частей $\tilde{X}''^{g}_j = \tilde{X}'^{g}_j$. Тогда $F'' - F' = \tilde{X}''^{s}_j - \tilde{X}'^{s}_j$ и с учетом нашего предположения эта разность должна быть равной нулю.

Предположим, что собственные части $X''^{s}_j$ и $X'^{s}_j$ отличаются друг от друга максимальным образом, имеют противоположные значения соответствующих разрядов, начиная со старших. Пусть $X''^{s}_j = (100\ldots0)$ и $X'^{s}_j = (011\ldots1)$. Но согласно [5, 9] для такого случая $F'' - F' = \tilde{X}''^{s}_j - \tilde{X}'^{s}_j = 1$, т.е. $F'' \ne F'$. Из [5, 9] также следует, что $X'^{s}_j = (011\ldots1)$ достигает своего максимального значения. Поэтому появление одного или нескольких нулей вместо единиц в $X'^{s}_j = (011\ldots1)$ изменит величину $\tilde{X}'^{s}_j$ в меньшую сторону и соответственно разность $F'' - F'$ станет еще больше единицы.

Появление одной или нескольких единиц вместо нулей в $X_j''^s = (100...0)$ приведет к увеличению $\tilde{X}_j''^s$ и соответственно к увеличению разности $F'' - F'$, которая станет также больше единицы.

Одновременное нахождение нулей и единиц в старших разрядах в кодовых частях $X_j''$ и $X_j'$ запрещено, поскольку они тогда будут относиться к общей части разложений $F''$ и $F'$. Других вариантов построения собственных частей $X_j''^s$ и $X_j'^s$ с тем, чтобы добиться равенства нулю разности $F'' - F'$, нет.

В результате при любых возможных значениях цифр в разрядах собственных частей $X_j'^s$ и $X_j''^s$ будет наблюдаться неравенство $\tilde{X}_j''^s \neq \tilde{X}_j'^s$ и, следовательно, $F'' \neq F'$. Тогда при неизменных параметрах $n$ и $k$ номеру $F_j$ не могут соответствовать два разных биномиальных числа $X_j' = (x_1' x_2' ... x_i' ... x_{r'}')$ и $X_j'' = (x_1'' x_2'' ... x_i'' ... x_{r''}'')$, т.е. $x_i' = x_i''$, $r' = r''$ и отсюда $X_j'' = X_j'$. Так как $X_j'' = X_j' = X_j$, то можно заключить, что разложение (6) является единственным для номера $F_j$. Теорема 3 доказана.

Если в теореме 3 вместо отображения $\varphi^{-1} : Y[(k-1,k)] \to X[n,k]$ включить отображение вида $\phi^{-1} : Y[(k)] \to X[n,k]$ для кодов-сочетаний с ограничением $R_Y = (k)$, то получим теорему о перечислении равновесных кодов, причем суть доказательства второго этапа отображений останется прежней.

**Теорема 4.** О генерировании кодов-сочетаний с ограничением $\mathbf{R_Y = (k-1,k)}$ (квазиравновесных кодов).

*Обратное преобразование номера* $F_j \in F = \{0,1,2,...\}$ *в последовательность* $Y_j \in Y[(k-1,k)]$, $Y_j = (y_1 y_2 ... y_i ... y_{n-l})$, $y_i \in \{0,1\}$, *удовлетворяющую ограничению* $R_Y = (k-1,k)$, *осуществляется с помощью отображений:*

*1) отображения* $\psi^{-1} : F \to X[n,k]$ *номера* $F_j$ *на биномиальное число* $X_j \in X[n,k]$, $X_j = (x_1 x_2 ... x_i ... x_r)$, $x_i \in \{0,1\}$ *в соответствии с рекуррентным соотношением:*

$$x_i = \operatorname{sign}\left(\operatorname{sign}\left(F(i) - \rho_i\right) + 1\right), \tag{10}$$

*где* $F(1) = F_j$, $F(i) = F(i-1) - x_i \rho_i$, $\rho_i = C_{n-i}^{k-q_i}$;

*2) отображения* $\varphi : X[n,k] \to Y[(k-1,k)]$ *биномиального числа* $X_j$ *на искомую последовательность* $Y_j$.

В целом доказательство теоремы 4 проводится аналогичным способом, как это делается в теореме 3, учитывая, что обоснованием второго этапа генерирования кодов-сочетаний с ограничением $R_Y = (k-1,k)$ служит теорема 1.

**5. Выводы**

*Научная новизна и практическая значимость.* В данной работе заложены математические основы перечисления и генерирования кодов-сочетаний на основе биномиальных отображений, позволяющие строить математические модели указанных информационных процессов для ИУС. На базе разработанных моделей перечисления и генерирования возможна более эффективная реализация различных информационных задач ИУС, например, помехоустойчивой передачи и контроля ошибок аппаратуры, коммутации сообщений и каналов передачи, оптимизации процессов обработки данных. Используя то, что в структуре множеств кодов-сочетаний обнаружены биномиальные числа, также достаточно эффективно можно решать задачи вычислительной обработки данных ИУС, представленных рассматриваемыми комбинациями. В результате применения построенных моделей в ИУС затраты как временные, так и аппаратно-программные на выполнение информационных задач, использующих коды-сочетания, будут уменьшаться, что и соответствует сформулированной цели данной работы.

*Перспективой* будущих исследований в представленном направлении является дальнейшее развитие полученных математических моделей в целях охвата более широкого класса кодов-сочетаний, удовлетворяющих различного рода ограничениям, а также разработка прикладных алгоритмов для решения конкретных задач ИУС.

**Список литературы: 1.** *Амелькин В.А.* Методы нумерационного кодирования. Новосибирск: Наука, 1986. 155 с. **2.** *Крюков А.Б.* Кодирование дискретных монотонных функций. В кн.: Аппаратура для космических исследований. М.: Наука, 1973. с. 10-15. **3.** *Рейнгольд Э.*, *Нивергельд Ю.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980. 476 с. **4.** *Kreher*, *D.*, *Stinson*, *D.* Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration and Search. CRC Press, 1999. 329 p. **5.** *Борисенко А.А.* Биномиальный счет. Теория и практика: Монография. Сумы: ИТД "Университетская книга", 2004. 170 с. **6.** *Cover, T.* Enumerative Source Encoding / IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-19, No. 1. Jan. 1973. pp. 73-77. **7.** *Кувырков П.П.*, *Темников Ф.Е.* Комбинаторные системы. М.: Энергия, 1975. 152 с. **8.** *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975. 317 с. **9.** *Борисенко А.А.*, *Кулик И.А.* Биномиальное кодирование: Монография. Сумы: Изд-во СумГУ, 2010. 206 с. **10.** *Kohzuki K.*, *Tokiwa K.*, *Tanaka H.* A Class of Single Error Correcting Constant Weight Codes / Electronics and Communications in Japan, Part 3. 1997.Vol. 80, No. 7. P. 55-64. **11.** *Smith, D. et al.* Application of Coding Theory to the Design of Frequency Hopping Lists. Technical Report UG-M-02-1, University of Glamorgan, Wales, UK, 2002. 148 p. **12.** *Кулик И.А.*, *Скордина Е.М.*, *Костель С.В.* Формирование квазиравновесных кодов на основе двоичных биномиальных чисел / Вісник СумДУ. 2010. № 1. С. 134-142. **13.** *Кулик И.А., Скордина Е.М.* Биномиальные преобразования квазиравновесных кодов / Вісник СумДУ. 2010. № 3. С. 178-186.

*Поступила в редколлегию 04.06.2011*

**Кулик Игорь Анатольевич**, канд. техн. наук, докторант кафедры электроники и компьютерной техники Сумского государственного университета. Научные интересы: разработка специальных систем кодирования и на их основе устройств сжатия и передачи информации. Адрес: Украина, 40007, Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2, тел. (0542) 33-55-39. e-mail: kulyk@ekt.sumdu.edu.ua.

**Скордина Елена Михайловна**, аспирантка кафедры электроники и компьютерной техники Сумского государственного университета. Научные интересы: адаптивные системы передачи данных, комбинаторное кодирование. Адрес: Украина, 40007, Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2, тел. (0542) 33-55-39. e-mail: e.skordina@ekt.sumdu.edu.ua.

**Костель Сергей Викторович**, ассистент кафедры электроники и компьютерной техники Сумского государственного университета. Научные интересы: адаптивные системы сжатия информации, комбинаторное кодирование. Адрес: Украина, 40007, Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2, тел. (0542) 33-55-39. e-mail: eikt@ukr.net.