

Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001. 960с.

Поступила в редколлегию 11.04.2007

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Лагно В.И.

**Роскладка Андрей Анатольевич**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования и социальной информатики Полтавского университета потребительской кооперации Украины. Научные интересы: комбинаторная оптимизация в условиях неопределенности. Увлечения, хобби: музыка, хоровое пение.

Адрес: Украина, 36040, Полтава, пер. Хоткевича, 4, кв. 48. Тел. 8-097-71-34-654, раб. (8-05322) 509-204, дом. (8-05322) 3-71-79. E-mail: roskladka@gmail.com.

**Емец Александра Олеговна**, ассистент кафедры информационно-вычислительных систем Полтавского университета потребительской кооперации Украины. Научные интересы: комбинаторная оптимизация. Увлечения, хобби: туризм. Адрес: Украина, 36003, Полтава, а/я 1671. Тел. 8-066-50-60-860, раб. (8-05322) 2-16-71, дом. (8-05322) 7-97-18. E-mail: slemets@e-mail.pl.ua.

УДК519.21

## ПРОЦЕСС ФОРМИРОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАСС В ОБЪЁМЕ АКТИВНОЙ ЖИДКОСТИ

*ВОВК А.В.*

Рассматривается процесс обработки порошковой массы с заданным распределением её частиц по размерам. Предполагается, что обработка смеси производится при воздействии возмущений – импульсов, подобранных специальным образом. Эти возмущения подбираются так, чтобы дисперсные характеристики порошковой массы совпадали или незначительно отличались от заданных. Производится вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс формирования смеси. Предлагается способ расщепления этой системы на системы меньших порядков.

### 1. Введение и постановка задачи

#### Процесс формирования активной смеси

Рассмотрим процесс измельчения твёрдых частиц в целях получения порошковых масс с заданными дисперсными характеристиками. Обрабатываемая смесь находится в объёме  $V$ , заполненном активной жидкостью. Характеристики действующих на смесь импульсов зависят от времени и их положения в объёме  $V$ . Многократные возмущения всех частей  $V$ , согласованные между собой определённым образом, приводят к изменению свойств смеси во всём объёме. Малым возмущениям соответствуют малые изменения дисперсных характеристик смеси. Объём  $V$  представляет собой резервуар, разделённый на  $n$  частей, ФУ объёмы  $V_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) которых приблизительно равны. Границы объёмов  $V_i$  таковы, что смесь, находящаяся в каждом из них, во время возмущений, перемещается в соседние с  $V_i$  объёмы.

Возмущениям подвергаются все объёмы  $V_i$ , но характеристики возмущений (степень их воздействия на смесь) в разных  $V_i$ , вообще говоря, различны. В каждом  $V_i$  эти характеристики являются функциями точки  $M \in V_i$ . Указанные различия обусловлены стремлением сформировать в каждом  $V_i$  смесь, распределение компонент которой по своим дисперсным свойствам отличалось бы от распределений в  $V_j \neq V_i$ .

Каждой точке  $M \in V$  ставится в соответствие её окрестность  $O(M)$ , удовлетворяющая следующим условиям: объёмы  $O(M)$  на несколько порядков меньше объёмов из (1) (см. ниже); число частиц в  $O(M)$  достаточно велико.

Возмущения, действующие на смесь, подобраны так, что при многократном их повторении в различных частях  $V$  будет получена смесь с заданным предельным распределением частиц по размерам. Характеристики этого распределения  $U(M)$  являются функциями точки  $M$  (точнее функцией  $O(M)$  – окрестности, в которой действовало возмущение).

Скорости изменения характеристик активной смеси, происходящие под действием возмущений, неодинаковы во всех  $V_i$ . Процесс обработки смеси в каждом  $V_i$  производится следующим образом. Объём  $V_i$  разбивается на  $n_i$  объёмов

$$V_{i,1}, V_{i,2}, \dots, V_{i,n_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

В каждом из них искомая функция  $U(M, t)$ , описывающая процесс формирования компонент, заменяется её усреднением (средним значением) по каждому объёму  $V_r$  ( $1 \leq r \leq n_i$ ) из (1). При этом параметр  $t$  (время) предполагается фиксированным. Считаем, что величины объёмов из (1) приблизительно одинаковы. Смесь, содержащаяся в них, подвергается возмущениям, вообще говоря, в разные моменты времени. Точность аппроксимации функции  $U(M, t)$  её средними значениями по объёмам (1) возрастает с ростом  $n_i$ .

Целью работы является исследование процессов формирования порошковой массы в объёме, отдельные части которого подвергаются возмущениям с разными характеристиками. Это приводит к задаче об установлении связей между возмущениями, характеристики которых в разных частях объёма не одинаковы, и дисперсными характеристиками порошковой массы.

### 2. Исследование порошковой массы

Периодически фиксируются дисперсные характеристики обрабатываемой порошковой массы в каждом объёме  $V_i$ . С этой целью в  $V_i$  через специальные трубки, оканчивающиеся на дне объёма  $V_i$ , вдувается

воздух. При его движении вверх находящиеся в  $V_i$  частицы перемещаются и происходит их упорядочение по размерам. Это упорядочение таково, что диаметры частиц возрастают с глубиной: крупные частицы оседают на дно; частицы меньших диаметров располагаются выше.

Применяя указанный способ, можно периодически отслеживать изменение распределения частиц по их размерам и вносить соответствующие изменения в процесс их обработки, если это распределение в одном из  $V_i$  на какой-то стадии обработки не совпадает с заданным.

Рассмотрим модельный пример. Пусть в одинаковых объёмах  $V_1, V_2, V_3$ , изолированных друг от друга, находятся частицы кварца. До начала обработки частиц, находящихся в этих объёмах, их дисперсные характеристики были одинаковы.

В табл. 1 приведено начальное распределение частиц кварца по размерам.

Таблица 1

| Размеры частиц (см) | 0,1-0,2 | 0,21-0,3 | 0,31-0,4 | 0,41-0,5 |
|---------------------|---------|----------|----------|----------|
| Содержание частиц   | 25%     | 30%      | 35%      | 10%      |

Обработка смесей, содержащихся в каждом объёме, проводилась в течение 5 мин. Энергозатраты на каждое отдельно взятое возмущение подбираются так, чтобы после его реализации распределение частиц во всех объёмах было близко к наперёд заданному. Возмущения реализуются следующим образом. Конденсаторы, линейные размеры которых малы в сравнении с размерами объёмов  $V_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), содержащих обрабатываемую смесь, многократно перемещаются внутри них. При подаче напряжения на обкладки конденсатора происходит разряд, с помощью которого измельчаются частицы, находящиеся в пространстве между обкладками. Напряжение, которое подавалось на обкладки конденсаторов, изменялось в пределах от 0 до 75 В.

Графики амплитуд возмущений, в зависимости от времени, для каждого из этих объёмов приведены на рис. 1-3.

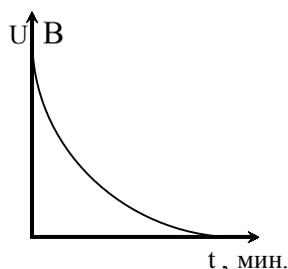


Рис. 1. Объём  $V_1$

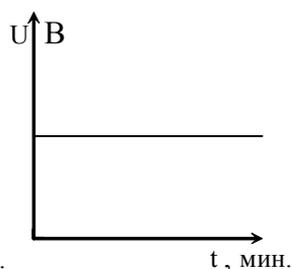


Рис. 2. Объём  $V_2$

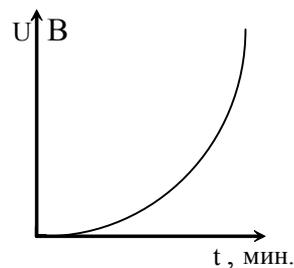


Рис. 3. Объём  $V_3$

После прекращения процесса возмущений смеси было произведено продувание исследуемых объёмов воздухом.

В табл. 2 приведены распределения частиц порошковой массы, полученные после её обработки.

Таблица 2

| Объёмы  | Размеры частиц в мкм |          |           |          |           |
|---|----------------------|----------|-----------|----------|-----------|
|   | 0,01-0,05            | 0,06-0,1 | 0,11-0,15 | 0,16-0,2 | 0,21-0,25 |
| Процентное содержание частиц в порошковой массе |                      |          |           |          |           |
| $V_1$   | 55                   | 19       | 13        | 8        | 5         |
| $V_2$   | 18                   | 22       | 24        | 15       | 21        |
| $V_3$   | 2                    | 18       | 19        | 29       | 32        |

Из табл. 2 видно, что наиболее оптимальным способом обработки активной смеси в целях получения однородной порошковой массы является тот, в котором сильные возмущения (возмущения с большими амплитудами) производятся в начальные моменты времени.

### 3. Расщепление системы уравнений, описывающей процесс формирования смеси

Вывод системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс формирования порошковой массы, производится по схеме, предложенной в [1]. Эта система уравнений имеет вид

$$\frac{d\bar{W}_i(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{W}_i(t)}{\partial t} \times A_i(t) \bar{W}_i(t) + O(\epsilon) + O(\epsilon^2). \quad (2)$$

Здесь матрица  $A_i(t)$  порядка  $n_i \times n_i$  имеет вид

$$A_i(t) = \left| \frac{\partial y_\alpha(t)}{\partial y_\beta(t)} \right|; \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n_i.$$

Слагаемое  $O(\epsilon)$  учитывает массу смеси, которая перемещается за пределы объёма  $V_i$ . Слагаемое  $O(\epsilon^2)$  учитывает миграцию частиц из объёма  $V_i$  в объёмы, которые с  $V_i$  не граничат.

Рассмотрим задачу о расщеплении полученной выше системы дифференциальных уравнений на подсистемы меньших порядков.

Расщепляемая система имеет вид

$$\epsilon^h Y' = A(t, \epsilon) Y. \quad (3)$$

Здесь  $Y$  – невырожденная  $(n \times n)$ -матрица, её столбцами являются решения системы (5),  $h > 0$  – целое число.

Выпишем систему дифференциальных уравнений с учётом указанных выше слагаемых, имеющих порядки  $O(\varepsilon)$  и  $O(\varepsilon^2)$ :

$$A(t, \varepsilon) = A_0(t) + A_1(t)\varepsilon + A_2(t)\varepsilon^2 + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \quad (4)$$

Все исследуемые далее функции и матрицы предполагаются аналитическими по переменной  $t$ .

Пусть в точке  $t_0$  исследуемого промежутка  $[a, b]$  невозможно разделить собственные значения матрицы  $A_0(t)$  на группы, не имеющие общих элементов. Предположим, что в этом случае существует малая  $\delta$  – окрестность точки  $t_0$  такая, что собственные значения из разных групп не будут совпадать на промежутках  $[a, t_0 - \delta]$ ,  $[t_0 + \delta, b]$ .

Рассмотрим исходную систему (3) на промежутке  $[a, t_0 - \delta]$ .

Пусть  $Y = T(t)Y^*$ , тогда:

$$\tilde{A}(t, \varepsilon) = T^{-1}(t)A(t, \varepsilon)T(t) - \varepsilon^h T^{-1}(t)T'(t).$$

Если собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A_r(0)$  можно разбить на три группы (анализ исследуемой системы для случая разбиения собственных значений на число групп  $> 3$  проводится аналогично)  $\lambda_{r1}, \dots, \lambda_{rk}, \lambda_{r(k+1)}, \dots, \lambda_{r(k+l)}, \lambda_{r(k+l+1)}, \dots, \lambda_m$  так, чтобы собственные значения из разных групп не совпадали, то существует трёхдиагональная матрица  $T(t)$ :

$$T(t) = \begin{pmatrix} I & T_{12}(t) & 0 \\ T_{21}(t) & I & T_{23}(t) \\ 0 & T_{32}(t) & I \end{pmatrix},$$

с помощью которой матрицу  $A_r(t)$

$$A_r(t) = \begin{pmatrix} A_r^{11}(t) & A_r^{12}(t) & A_r^{13}(t) \\ A_r^{21}(t) & A_r^{22}(t) & A_r^{23}(t) \\ A_r^{31}(t) & A_r^{32}(t) & A_r^{33}(t) \end{pmatrix}$$

можно привести к блочно-диагональному виду

$$\tilde{A}_r(t) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_r^{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_r^{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_r^{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $r = 0, 1, 2$ ,  $\tilde{A}_r^{11}(t)$ ,  $\tilde{A}_r^{22}(t)$ ,  $\tilde{A}_r^{33}(t)$  – квадратные матрицы порядков  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ; собственные значения матриц  $\tilde{A}_r^{11}(0)$ ,  $\tilde{A}_r^{22}(0)$ ,  $\tilde{A}_r^{33}(0)$  не совпадают в некоторой окрестности нуля.

Элементы матрицы  $T(t)$  можем найти решая систему линейных алгебраических уравнений.

Обозначим  $Y = P(t, \varepsilon)Z$  при условии, что  $\det P_0(t) \neq 0$ .

Уравнение (3) относительно новой неизвестной можно записать так:

$$\varepsilon^h P'(t, \varepsilon)Z + \varepsilon^h P(t, \varepsilon)Z' = \tilde{A}(t, \varepsilon)P(t, \varepsilon)Z.$$

Здесь

$$B(t, \varepsilon) = P^{-1}(t, \varepsilon)\tilde{A}(t, \varepsilon)P(t, \varepsilon) - \varepsilon^h P^{-1}(t, \varepsilon)P'(t, \varepsilon).$$

Таким образом, система (1) преобразована к виду:

$$\varepsilon^h Z' = B(t, \varepsilon)Z. \quad (5)$$

Тогда получим

$$\varepsilon^h P'(t, \varepsilon) = \tilde{A}(t, \varepsilon)P(t, \varepsilon) - P(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon). \quad (6)$$

Матрицы функций  $P(t, \varepsilon)$  и  $B(t, \varepsilon)$  представим в виде

$$P(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)\varepsilon^r, \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r(t)\varepsilon^r. \quad (7)$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем:

$$\tilde{A}_0(t)P_0(t) - P_0(t)B_0(t) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_0(t)P_r(t) - P_r(t)B_0(t) = \\ & = \sum_{s=0}^{r-1} [P_s(t)B_{r-s}(t) - \tilde{A}_{r-s}(t)P_s(t)] + P_{r-h}'(t). \end{aligned} \quad (9)$$

В (9)  $r > 0$ ; последний член при  $r < h$  опускаем.

Считаем, что  $B_0(t) = \tilde{A}_0(t)$ ,  $P_0(t) = I$ . Тогда имеем:

$$\tilde{A}_0(t)P_r(t) - P_r(t)\tilde{A}_0(t) = B_r(t) - H_r(t), \quad r > 0. \quad (10)$$

Здесь  $H_r(t)$  зависит только от  $P_j(t)$ ,  $B_j(t)$  и  $P_j'(t)$  с номерами  $j < r$ .

Из (10) находим

$$H_r(t) = \begin{pmatrix} H_r^{11}(t) & H_r^{12}(t) & H_r^{13}(t) \\ H_r^{21}(t) & H_r^{22}(t) & H_r^{23}(t) \\ H_r^{31}(t) & H_r^{32}(t) & H_r^{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Уравнения (10) можно последовательно разрешить при помощи матриц  $P_r(t)$ ,  $B_r(t)$ , которые имеют вид

$$P_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & P_r^{12}(t) & 0 \\ P_r^{21}(t) & 0 & P_r^{23}(t) \\ 0 & P_r^{32}(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$B_r(t) = \begin{pmatrix} B_r^{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & B_r^{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & B_r^{33}(t) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Матрица  $P_r(t)$  в (11) является трёхдиагональной.

Установлено, что замена

$$Y = \left( \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) \varepsilon^r \right) Z$$

переводит уравнение (3) в дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h Z' = \left( \sum_{r=0}^{\infty} B_r(t) \varepsilon^r \right) Z.$$

Матрица  $B_r(t)$  этой системы имеет блочно-диагональный вид (12).

Таким образом, исходная система, состоящая из  $n$  уравнений, может быть расщеплена на три подсистемы меньших порядков:  $k$ ,  $l$ ,  $m$ .

Аналогичные преобразования могут быть проведены и на промежутке  $[t_0 + \delta, b]$ .

При достаточно малом  $\delta$  решения исследуемой системы можно заменить их линейными комбинациями.

#### 4. Заключение

Научная новизна состоит в следующем. Рассмотрен процесс формирования активной смеси, в которой происходит образование порошковой массы. Описан случай, когда смесь из объёма  $V_i$  перемещается в граничащие с  $V_i$  объёмы и в объёмы, с которыми  $V_i$  напрямую не граничит.

Проведен сравнительный анализ порошковых масс, которые были получены под воздействием различных возмущений.

Описана система дифференциальных уравнений, описывающих процесс формирования смеси. Установлено, что её можно расщепить на системы меньших порядков.

*Практическая ценность* работы заключается в том, что полученные результаты позволяют производить общий анализ процессов, происходящих при формировании порошковых масс. Это даёт возможность предсказать эволюцию таких процессов при условии, что их основные характеристики известны.

**Литература:** 1. Гора Н.Н. Уравнения процесса формирования многокомпонентных смесей // АСУ и приборы автоматики. 2006. Вып. 133. 2. Грановский М.Г., Лавров И.С., Смирнов О.В. Электрообработка жидкостей. Л.: Химия. 1976. 216с. 3. Ходаков Г.С. Физика измельчения. М.: Наука, 1972. 307с. 4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 5. Sibuya Y. Sur un systeme des equations differentielles ordinaires lineaires a coefficients periodiques et contenant des parameters, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, (1), 7 (1954). P. 229-2414. 6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т.6: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736с.

Поступила в редколлегию 04.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

**Вовк Александр Владимирович**, стажёр-исследователь кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61100, Харьков, пр. Маршала Жукова, 45, кв. 16, тел. 716-16-88.

УДК 004.942:621.6:622.691

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В ЛИНЕЙНЫХ УЧАСТКАХ МАГИСТРАЛЬНЫХ ГАЗОПРОВОДОВ

*ТЕВЯШЕВ А.Д., ГУСАРОВА И.Г., КАМИНСКАЯ А.В.*

Проводится сравнительный анализ двух конечно-разностных схем аппроксимации математической модели для моделирования нестационарных неизотермических режимов транспорта природного газа в многониточных линейных участках магистральных газопроводов. Результаты моделирования позволяют выбрать схему, отвечающую требованиям как по точности получаемых решений, так и по затратам машинного времени их получения.

### 1. Введение

Современные методы исследования, проектирования и создания сложных систем неразрывно связаны с разработкой, реализацией на ПЭВМ и изучением их моделей. Исследование динамических свойств и характеристик таких систем часто проводится на их моделях, представленных системами дифференциаль-

ных уравнений в частных производных, в общем случае нелинейных. Лишь для сравнительно немногих систем дифференциальных уравнений решения могут быть найдены аналитически. В тех же случаях, когда аналитическое решение не может быть найдено, на помощь приходят приближенные численные методы. Существует достаточно большое количество методов численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, разной степени сложности и разной степени точности. Наиболее эффективными являются численные методы интегрирования таких систем, основанные на применении неявных конечно-разностных схем, позволяющих проводить расчеты с крупными шагами как по временной, так и по пространственной переменным разностной сетки.

Однако не вызывает никаких сомнений, что разные задачи предъявляют разные требования к сеткам. Но лишь в отдельных случаях эти требования удается четко сформулировать. В остальных же случаях приходится сравнивать сетки на тестах. Зачастую удачный выбор параметров сетки повышает точность не менее, чем усовершенствование разностной схемы.