

ИЗБЫТОЧНЫЙ БАЗИС ДЛЯ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА. ВЫБОР И РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРОГАСТРОГРАММЫ

В.В. ЖУРАВЕЛЬ

В данной статье дается описание проведенных исследований по избыточным базисам. Исследования были направлены на выбор базиса, который можно применять в частотно-временном анализе конкретного сигнала, а именно электрогастрограммы.

In this paper a description of carried out investigation on overcomplete bases is given. The investigation were connected with selection of basis which may be applied in the case of time-frequency analysis of a specific signal, namely, an electrogastrogram.

ВВЕДЕНИЕ

Электрогастрограмма (ЭГГ) — это сигнал электрической активности желудка, полученный неинвазивным путем и отражающий моторно-эвакуаторную функцию желудка. Информация ЭГГ содержится в доминирующей частоте, а также в изменении этой доминирующей частоты во времени [1].

Применение классических методов частотно-временного анализа (ЧВА) [2, 3] оказывается неудовлетворительным из-за либо низкого частотно-временного разрешения (ЧВР), либо наличия так называемых кросс-составляющих [4]. Использование методов ЧВА, которые основываются на избыточных базисах (ИЗБ) [5–8], позволяет повысить ЧВР без появления кросс-составляющих [4].

Для ЧВА на основе ИЗБ нужно решить две задачи: 1) выбрать метод разложения сигнала в ИЗБ; 2) выбрать ИЗБ.

Решить первую задачу — это значит выбрать метод разложения, удовлетворяющий по качеству получаемого разложения, а именно по разреженности разложения и высокой разрешающей способности. На этапе решения этой задачи конкретный ИЗБ не играет значительной роли, важнее качество метода разложения.

Решить вторую задачу — значит выбрать ИЗБ, разложение сигнала в котором можно обоснованно интерпретировать как частотно-временное разложение. Решению этой второй задачи и посвящена настоящая работа.

В статье материал организован следующим образом: сначала рассматриваются свойства сигнала ЭГГ, затем приводятся возможные базисные функции и анализируются возможные варианты реализации ИЗБ с использованием выбранных базисных функций. В конце приводится алгоритм построения предложенного базиса, а также приводятся результаты сравнения нескольких методов ЧВА.

1. СВОЙСТВА СИГНАЛА ЭГГ

Обычно представляют интерес свойства ЭГГ с точки зрения спектрального анализа.

Частота желудочных колебаний регистрируемых ЭГГ может находиться в диапазоне от 1 до 8 периодов в минуту (п/мин) или, другими словами, от 0.0167 до 0.13 Гц. Частоту дискретизации выбираем равной 1 Гц. Таким образом, сигнал может находиться в пределах 22.3 % частотной полосы.

Применение обычного спектрального анализа затруднено тем, что при этом будет утрачена информация о динамике частоты сокращений желудка во времени (другими словами, утратится информация о стабильности/нестабильности динамики сокращений желудка как генератора колебаний). Благодаря применению методов ЧВА информация о динамике частоты не утрачивается.

2. ВЫБОР БАЗИСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для того чтобы ИЗБ можно было применять для ЧВА, элементы базиса должны быть локализованы по времени и частоте. На рис. 1 показан базисный элемент на частотно-временной плоскости (ЧВП). Величина ΔF определяет разрешение по частоте, а величина Δt определяет разрешение по времени. Необходимо, чтобы как ΔF , так и Δt были минимальны. Это ограничивает класс функций, которые можно использовать в качестве базисных элементов.

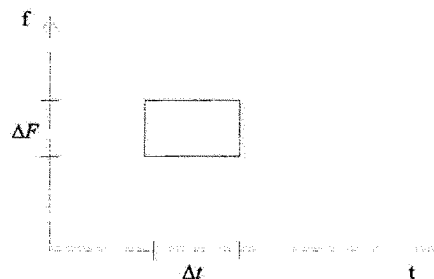


Рис. 1. Базисный элемент на частотно-временной плоскости

Гармоническое колебание, взвешенное оконной функцией некоторой длины w , а также некоторые классы вейвлет функций достаточно хорошо локализованы в пространстве время-частота.

Вейвлет преобразования (непрерывные и дискретные) набирают все большую популярность. В общем случае возможно использование непрерывного вейвлет преобразования в качестве ЧВП. Наилучшие результаты дает использование комплексных вейвлетов, в частности, вейвлета Морле [9]. Однако, используя вейвлеты, получаем разложение в координатах время-скейл, а не время-частота, как требуется (см. рис. 2, а и б). Для перехода к нужным координатам необходимо применять дополнительные преобразования. После преобразования получаем координаты, изображенные на рис. 2, в. Кроме того, вейвлеты имеют особенность неравномерного разрешения (рис. 2, б и в) (на высоких частотах разрешение по частоте низкое, а по времени высокое, на низких частотах наоборот — разрешение по времени низкое, а по частоте высокое), что не всегда удобно при интерпретации полученного ЧВП. Последнее свойство вейвлетов при ЧВА рассматривается как достоинство [5, 10, 11], что очевидно не для всякого сигнала (например, для ЭГГ).

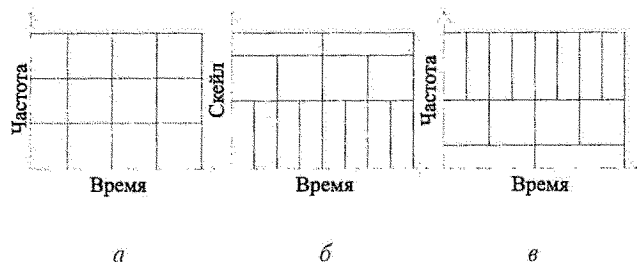


Рис. 2. Частотно-временное разрешение для различных ЧВА

В рассматриваемом случае диапазон, в котором может находиться интересующая нас динамика, равен, приблизительно, четверти частотного диапазона, как отмечалось выше. Поэтому различие разрешения может привести к меньшей информативности ЧВА (сглаженность временной динамики будет различна для ЭГГ на 1 п/мин и 8 п/мин).

С учетом сказанного, в качестве базисного элемента будут использоваться гармоники.

3. СТРУКТУРА БАЗИСА

Итак, строим ИЗБ на основе гармонических функций, т. е. основываемся на базисе Фурье. Локализация по времени достигается за счет применения оконной функции $h(t)$ длиной w отсчетов.

Базис Фурье состоит из гармонических элементов, которые можно проиндексировать по $\gamma = (\omega, v)$, где $\omega \in [0, 2\pi]$ — циклическая частота, а $v \in \{0, 1\}$ — начальная фаза, соответствующая синусу или косинусу:

$$\phi_{(\omega, 0)} = \cos(\omega t), \quad \phi_{(\omega, 1)} = \sin(\omega t).$$

При этом индекс γ охватывает множество косинусов с частотами

$$\omega_k = 2\pi k/n; \quad k = 0, \dots, n/2,$$

и синусов — с частотами

$$\omega_k = 2\pi k/n; \quad k = 1, \dots, n/2 - 1.$$

Данный базис ортогональный и содержит n элементов. Сигнал, который подвергается разложению в этом базисе, содержит также n отсчетов. Количество определяемых частот равно $n/2 + 1$.

Для того чтобы получить ИЗБ на основе базиса Фурье, необходимо уменьшить шаг по частоте. Пусть l это целое число большее единицы, тогда получаем набор косинусных элементов с частотами

$$\omega_k = 2\pi k/(l \cdot n); \quad k = 0, \dots, l \cdot n/2,$$

и набор синусных элементов с частотами

$$\omega_k = 2\pi k/(l \cdot n); \quad k = 1, \dots, l \cdot n/2 - 1.$$

Величина l определяет степень избыточности базиса. Теперь базис содержит $l \cdot n$ элементов. Сигнал содержит n отсчетов. Количество определяемых частот равно $l \cdot n/2 + 1$.

4. СПОСОБЫ РЕАЛИЗАЦИИ БАЗИСА

Выше приведена структура ИЗБ на основе Фурье базиса. Для окончательной реализации базиса необходимо учесть локализацию по времени. Это можно сделать двумя способами. Формально назовем первый способ созданием глобального базиса, а второй — созданием локального базиса. Каждый из способов имеет как достоинства, так и недостатки.

4.1. Глобальный базис

Базис строится, исходя из длины сигнала.

Пусть имеется сигнал длиной L отсчетов. Базисные элементы будут иметь длину также равную L отсчетам. Количество базисных элементов будет определяться степенью избыточности, разрешением по времени, а также смещением по времени различных элементов относительно друг друга.

Например, для сигнала длиной 1024 отсчета, локализации по времени, равной 64 отсчета, сдвига на 1 отсчет и избыточности, равной 2, количество элементов в базисе будет равно $64 \times 2 \times 1024$.

Достоинства данного способа:

- Такой базис является не просто избыточным, а сверхизбыточным. Возможна глобальная оптимизация, при выборе разложения, по всему сигналу. Так, если базис имеет структуру, указанную в п. 3, и, кроме того, в нем есть полный Фурье базис, то можно ожидать, что стационарные в частотном отношении составляющие сигнала будут разрешены с высокой степенью за счет базиса Фурье. Нестационарные составляющие будут разрешаться за счет остальной части базиса.

Недостатки при этом способе следующие:

- Требуется огромный объем памяти для хранения базиса. Так, для базиса из вышеприведенного примера потребуется $1024 \times 128 \times 1024 \times d$ байт памя-

ти. Здесь d — размер машинного представления числа в байтах. Даже для чисел с одинарной точностью ($d = 4$ байтам) потребуется 512 Мб. При выполнении разложения такой объем данных невозможно хранить в ОЗУ (обычного ПК). А раз так, то будет постоянный обмен между ОЗУ и жестким диском, что катастрофически снизит скорость анализа.

- Для анализа необходимо иметь полностью записанный сигнал. Т. е. пока не запишем все 1024 отсчета, анализ не может быть запущен.

- Как результат первого недостатка размер сигнала, который физически возможно проанализировать, ограничен достаточно небольшой величиной (несколько тысяч отсчетов). Сигнал большей длины будет необходимо разбивать на несколько коротких частей.

4.2. Локальный базис

Этот базис строится, исходя из требований частотно-временной локализации.

Например, при использовании окна в 64 отсчета и избыточности равной 2, можно сформировать базис, состоящий из 128 элементов. Длина элементов равна 64 отсчетам. Для получения ЧВП, при этом, используем spectrogrammный подход. То есть берем первые 64 отсчета сигнала и находим их разложение в ИЗБ. Далее берем следующие 64 отсчета со сдвигом, равным некоторой величине, и снова находим разложение. Так продолжаем до тех пор, пока не достигнем конца сигнала.

Достоинства данного базиса:

- Размер базиса не зависит от размеров анализируемого сигнала.
- Объем занимаемой базисом памяти невелик. Для приведенного примера он составит $128 \times 64 \times d$, то есть, 32 Кб при одинарной точности и 64 Кб при двойной.

- Возможна (по крайней мере, теоретически) обработка в реальном масштабе времени.

Недостатки заключаются в том, что:

- Локальность базиса, т. е. ограниченность базисных элементов длиной окна, а не длиной сигнала, не позволяет проводить глобальную оптимизацию найденного разложения.

В реальных условиях для реализации базиса надо использовать второй способ, так как его достоинства значительно превышают недостатки. Этот способ описывается в следующем пункте.

5. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ БАЗИСА

Опишем алгоритм формирования ИЗБ по способу из подп. 4.2.

Входными данными является избыточность базиса l и длина базисного элемента (другими словами локализация по времени) n .

Выходными данными является матрица избыточного базиса размерности $n \times (l \cdot n)$ элементов. Здесь $l \cdot n$ количество базисных элементов.

Используем обозначения M_{ij} , $i \in [1, l \cdot n]$, $j \in [1, n]$ матрица ИЗБ, индекс i — номер базисного элемента, индекс j — отсчет базисного элемента.

После расчета базис необходимо пронормировать к второй норме.

```
int i = 1;
/* первый базисный элемент */
Mij = 1 при j ∈ [1, n];
i = i + 1;

for (int k ∈ [1,  $\frac{l \cdot n}{2} - 1$ ]) {

     $\omega_k = \frac{2\pi k}{l \cdot n}$ ;

    Mij = cos( $\omega_k \cdot (j - 1)$ ) при j ∈ [1, n];
    i = i + 1;

    Mij = sin( $\omega_k \cdot (j - 1)$ ) при j ∈ [1, n];
    i = i + 1;

}
/* последний базисный элемент */
Mij = cos( $\pi \cdot (j - 1)$ ) при j ∈ [1, n];
```

6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данном пункте проанализируем сигнал несколькими методами с целью сравнения качества получаемого разложения при использовании ИЗБ.

В качестве сигнала используем модель со следующими характеристиками: доминирующая частота равна 0.05 Гц, период колебаний меняется по случайному закону в пределах нескольких процентов от доминирующей частоты. Сигнал зашумлен белым шумом. Эта модель является приближением к ЭГГ.

Сигнал проанализирован следующими методами: мгновенная частота (производная фазы аналитического сигнала) (рис. 3); спектрограмма (квадрат кратковременного преобразования Фурье) (рис. 4);

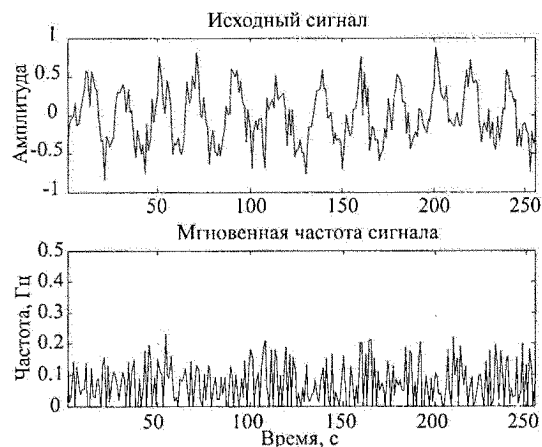


Рис. 3. Исходный сигнал и его мгновенная частота

преобразование Вигнера (рис. 5); преобразование, использующее предложенный ИЗБ (рис. 6). Преобразование, использующее ИЗБ, с технической стороны представляет собой метод поиска базиса [8, 12].

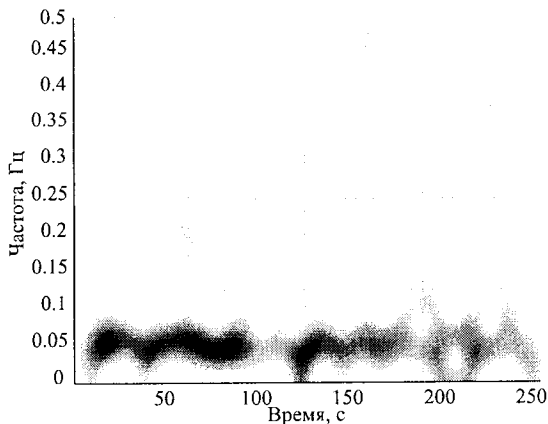


Рис. 4. Спектрограмма сигнала

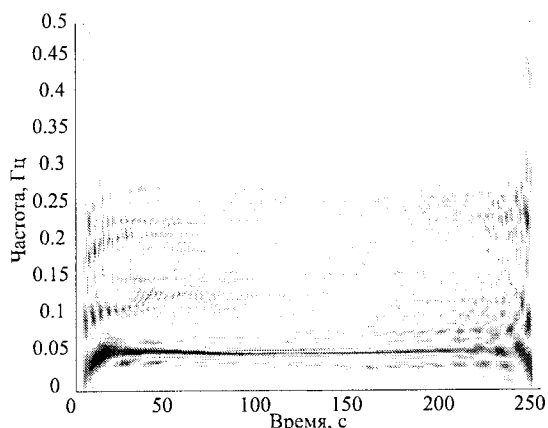


Рис. 5. Преобразование Вигнера

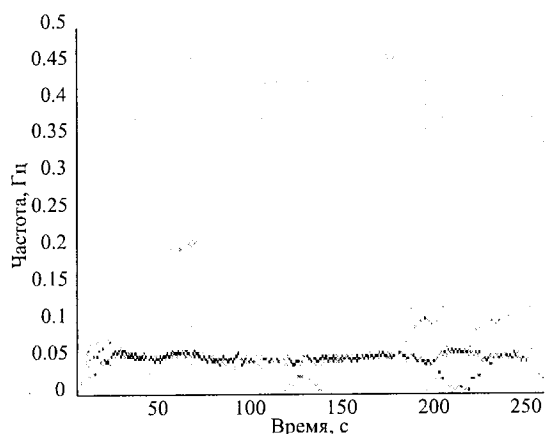


Рис. 6. Преобразование, использующее ИЗБ

Использовался ИЗБ со степенью избыточности равной 8, окно равнялось 32 отсчетам. Такое же окно использовалось для нахождения спектрограммы.

Из приведенных результатов видно, что частотно-временное разрешение полученного ИЗБ дости-

гает ЧВР преобразования Вигнера, при этом кросс-термы отсутствуют.

ВЫВОДЫ

1. В статье были рассмотрены возможные базисные элементы для ИЗБ. На основе свойств анализируемого сигнала (а именно ЭГГ) были выбраны гармонические функции, взвешенные окном.

2. Рассмотрены два способа реализации базиса: глобальный и локальный ИЗБ. Приведены их достоинства и недостатки.

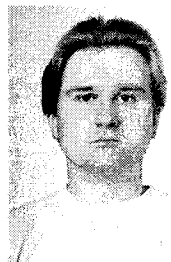
3. Приведен алгоритм для расчета локального базиса. Базис, рассчитанный таким образом, применен при сравнении различных методов ЧВА. В качестве метода ЧВА, использующего ИЗБ, используется метод поиска базиса.

4. Предложенный базис позволяет получить высокое ЧВР без возникновения кросс-составляющих.

5. В статье решена задача выбора ИЗБ для применения в ЧВА.

Литература. 1. Jie Liang, MS and J.D.Z. Chen, PhD. What can be measured from Surface Electrogastrography. Computer simulations. Digestive Diseases and Sciences, Vol. 42 No. 7 (July 1997) 2. The transforms and applications handbook / edited by Alexander D. Poularikas. — 2nd ed. 1999. 3. Hlawatsch, F., and Boudreaux-Bartels, G. F., «Linear and Quadratic Time-Frequency Representations», IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 9, (4), Apr 1992. 4. Z.S.Wang, Z.He, J.D.Z. Chen "Optimized Overcomplete Signal Representation and its Application to Time-Frequency Analysis of Electrogastrogram", Ann. Biomed. Eng. Vol. 26, pp 859-869, 1998. 5. I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992. 6. S. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. IEEE Trans. on Signal Processing, Dec 1993. 7. R.R. Coifman and M.V. Wickerhauser. Entropy-based algorithms for best-basis selection. IEEE Transaction on Information Theory, vol. 38, pp. 713-718, 1992 8. S.S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. SIAM Journal of Scientific Computing, 20(1):33-61, 1998. 9. Кривошеев В.И., Пронихин В.В. Частотно-временной анализ сигналов на основе непрерывного вейвлетного преобразования: Труды научной конференции по радиофизике, ННГУ, 2001. — 153 с. 10. J.C. Gostwami, A. K. Chan, Fundamentals of Wavelets. 11. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. — М.: Мир, 2001. 12. Журавель В.В., Лагутин М.Ф., Кузин А.И. Частотно-временной анализ сигналов с использованием избыточных базисов и нейронной сети, решающей задачу минимизации // Радиоэлектроника и информатика. — 2002. — № 4. — С. 7-10.

Поступила в редколлегию 16.03.2005



Журавель Владимир Владимирович, аспирант кафедры РЭУ ХНУРЭ. Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, анализ нестационарных процессов.