УДК 621.372.413

ПОСТРОЕНИЕ МОДОВОГО БАЗИСА ДЛЯ РЕЗОНАТОРА СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

ТРЕТЬЯКОВ О.А., ЧУМАЧЕНКО С.В.

Рассмотрена граничная электродинамическая задача для уравнений Максвелла в объеме сложной геометрической формы. Искомое электромагнитное поле представлено в виде разложения по элементам модового базиса с коэффициентами, зависящими от времени.

1. Введение

Предлагается общая схема решения системы уравнений Максвелла для внутренней граничной задачи электродинамики об электромагнитном поле в объемном цилиндрическом резонаторе сложной формы [2]. Ограничивающая поверхность полагается односвязной, идеально проводящей и достаточно гладкой.

Известный метод частичных областей позволяет свести поставленную задачу к отысканию решения бесконечной однородной системы линейных алгебраических уравнений относительно собственных частот рассматриваемого резонатора. Метод эволюционных уравнений [2-4] дает возможность провести исследования собственных частот (в данном случае электрического типа колебаний) и соответствующих им электромагнитных полей. При ненулевых собственных числах $k_n = 0$ задача сводится к хорошо изученной в электродинамике граничной задаче на собственные значения для лапласиана. Нулевому собственному числу $k_0 = 0$ отвечают два подпространства «градиентных» собственных векторов, для которых производящими функциями являются решения скалярных задач на собственные значения Дирихле и Неймана. Найденные векторы образуют базис в пространстве решений поставленной задачи.

Электродинамические параметры среды ε, μ, σ участвуют на заключительном этапе нашего рассмотрения, когда следует определить коэффициенты разложения электромагнитного поля по модовому базису [3]. Здесь материальные параметры могут быть константами (в случае однородной среды без временной дисперсии) или функциями координат (для неоднородных сред без дисперсии). Возможная на практике зависимость ε, μ, σ от времени (что физически соответствует нестационарности среды) существенно усложняет уравнения Максвелла для комплексных амплитуд поля, делая их труднодоступными для решения даже при использовании приближенных, линеаризованных материальных уравнений. Поэтому в классической электродинамике ограничиваются лишь рассмотрением полей в линейных стационарных средах. Однако метод эволюционных уравнений позволяет избежать указанных ограничений [5].

2. Постановка задачи

Рассмотрим граничную электродинамическую задачу для уравнения Гельмгольца в цилиндрическом резонаторе с коаксиальным выступом длины l_1 и закрепленным на нем диском радиуса d. Объем изучаемой резонансной системы состоит из трех частичных областей (см. рисунок), которые в дальнейшем могут заполняться диэлектриками.

Резонатор с настроечным элементом сложной формы

Требуется определить собственные частоты колебаний электрического типа рассматриваемого резонатора и соответствующие им собственные поля. Необходимо найти нетривиальные решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие следующим условиям: касательные составляющие вектора электрического поля обращаются в нуль на идеально проводящих стенках резонатора; на границе раздела частичных областей электромагнитное поле должно быть непрерывным. Рассмотрим случай аксиально-симметричного электромагнитного поля. Частичные области определим следующими пределами, в которых изменяются координаты:

область I: $d \le r \le b,\ 0 \le z \le l$;

область II: $a \le r \le d,\ g_1 \le z \le l$;

область III: $0 \le r \le d,\ 0 \le z \le g$.

Требуется построить модовый базис в пространстве решений рассматриваемой задачи.

3. Определение элементов базиса

Определим элементы базиса в «вихревом» подпространстве. Для каждой частичной области потенциальные функции запишем в следующем виде:

(1)

где

k – собственные числа; $\varepsilon_j (j = n, m, s)$ – число Неймана. Определяя с помощью (1) по известным формулам компоненты электромагнитного поля и подчиняя тангенциальные компоненты граничным условиям на поверхности раздела $r=d$, получаем систему функциональных уравнений, из которых следует бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов A_n и формулы для вычисления неизвестных коэффициентов B_m, C_s.

Дисперсионное уравнение, из которого находим собственные частоты рассматриваемого резонатора, имеет вид

(2)

Здесь δ_{ni} – символ Кронеккера;

$$i_2(n,m) = \frac{n l_1^2 l}{\pi\left(m^2 l^2 - n^2 l_1^2\right)} \sin\left(\frac{\pi n g_1}{l}\right).$$

Для случая малого геометрического параметра $\theta = \frac{g}{l} << 1$ из (2) получаем уравнение относительно собственных значений k_n и формулы для вычисления коэффициентов A_n, B_m, C_s:

$$\det\left\{ \delta_{ni} l p_i^2 Z_i^I(p_i d) - \right.$$
$$- \frac{l^2 q_0 Z_0^{II}(q_0 d)}{l_1 \pi^2 Z_0^{II'}(q_0 d)} \cdot \frac{p_i Z_i^{I'}(p_i d)}{ni} \sin\left(\frac{\pi n g_1}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi i g_1}{l}\right) -$$
$$\left. - \frac{g f_0 J_0(f_0 d)}{J_0'(f_0 d)} p_i Z_i^{I'}(p_i d) \frac{\sin(\pi n \theta) \cdot \sin(\pi i \theta)}{\pi^2 \theta^2 n i} \right\} = 0;$$

$n = 0,1,2,\ldots;\ i = 0,1,2,\ldots;$

$$A_n = A_0\left(V_n + G_n W + \tilde{G}_n \tilde{W}\right),\ n=1,2,3,\ldots \qquad (3)$$

(4)

(5)

$m,s=0,1,2,\ldots$

Для вычисления W и $\tilde{W}$ имеем формулы

$$W = \frac{c_1}{c_3} + \frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{c_3 c_4 + c_1 c_5}{c_3 c_6 - c_2 c_5}, \quad \tilde{W} = \frac{c_3 c_4 + c_1 c_5}{c_3 c_6 - c_2 c_5}, \qquad (6)$$

где

(7)

(8)

$$T_k = \left(l p_k^2 Z_k^I(p_k d) - \frac{2 q_0 Z_0^{II}(q_0 d)}{l_1 Z_0^{II'}(q_0 d)} p_k Z_k^{I'}(p_k d)\, i_2^2(k,0) - \right.$$

$$\left. - \frac{2 f_0 J_0(f_0 d)}{g J_0'(f_0 d)} p_k Z_k^{I'}(p_k d)\, i_1^2(k,0) \right)^{-1}.$$

Компоненты полей в каждой из трех частичных областей запишем в виде

(9)

(10)

(11)

$$U_n^E = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{E}_{jn} p_{jn} Z_j^{I'}(p_{jn} d)\, i_2(j,1),$$

$$\Theta_n^E = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{E}_{jn} p_{jn} Z_j^{I'}(p_{jn} d)\, i_1(j,1),$$

$$\widetilde{E}_{jn} \equiv V_j + G_j W + \vec{G}_j \cdot \vec{W}.$$

Здесь индекс n всюду обозначает номер собственного числа k_n.

Множитель A_0 определим из условия нормировки полей:

$$|A_0|^2 =$$

$$= \frac{V}{\left(l \sum_{j=1}^{\infty} c_7 \left|\widetilde{E}_{jn}\right|^2 \cdot \left|p_{jn}\right|^2 + \frac{c_8 \left|U_n^E\right|^2}{l_1 \left|Z_1^{II}{'}(q_{1n} d)\right|^2} + \frac{c_9 \left|\Theta_n^E\right|^2}{g \left|J_0'(f_{1n} d)\right|^2} \right)},$$

$$c_7(j,n) = \int_a^b r Z_j^{I'}(p_{jn} r) \cdot Z_j^{I'^*}(p_{jn} r)\, dr,$$

$$c_8 = \int_a^b r Z_1^{II'}(q_{1n} r)\, Z_1^{II'^*}(q_{1n} r)\, dr,$$

$$c_9 = \int_0^d r J_0'(f_{1n} r)\, J_0'^*(f_{1n} r)\, dr.$$

С точки зрения эволюционного подхода к теории электромагнетизма шестимерный вектор X_n электромагнитного поля запишем в виде [4]:

$$X_n^i(r,z) = \begin{pmatrix} \vec{E}_n^i(r,z) \\ \vec{H}_n^i(r,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{ri}^{(n)}(r,z) \\ 0 \\ E_{zi}^{(n)}(r,z) \\ 0 \\ H_{\varphi i}^{(n)}(r,z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где индекс i указывает на номер частичной области (i=I, II, III), а индекс n – на номер собственного числа k_n, которому соответствует собственный вектор X_n.

На основании теоремы Вейля [1] и согласно эволюционной теории [2-4] все трехмерные векторы (как части шестимерных собственных векторов) являются решениями граничных задач на собственные значения для лапласиана. При этом возникают четыре подпространства трехмерных «электрических» и «магнитных» частей собственных векторов $\mathring{J}_E$, $\mathring{J}_H$, $\mathring{G}_E$, $\mathring{G}_H$. Подпространство гармонических функций, на которое указывает теорема Вейля, в нашем случае односвязной поверхности резонатора содержит единственный нулевой вектор. Для нашей задачи имеем

подпространства «вихревых» собственных векторов запишем как

Таким образом, часть базиса, соответствующая подпространствам , найдена. Теперь следует определить элементы базиса в «градиентном» подпространстве $\overset{o}{G}$.

Собственному числу $k_0 = 0$ отвечают два подпространства «градиентных» собственных векторов «электрического» и «магнитного» типов вида

$$\mathrm{X}_\alpha(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\nabla\Phi_\alpha(\vec{r}) \\ \mathrm{O} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Y}_\beta(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \mathrm{O} \\ -\nabla\Psi_\beta(\vec{r}) \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где О – трехкомпонентный нулевой вектор. С целью их определения нужно решить две граничные задачи Дирихле и Неймана, которые совместно с условиями нормировки [2] позволят найти производящие функции Φ и Ψ для векторов (12) соответственно. В ходе решения задачи Дирихле получаем выражения для вычисления коэффициентов B_m^Φ и C_s^Φ через A_n^Φ и СЛАУ относительно коэффициентов A_n^Φ, условием существования и единственности решения которой является обращение в нуль ее определителя.

Для случая малого параметра $\theta \equiv \dfrac{g}{l} << 1$ путем несложных преобразований получаем представления для производящих функций Φ и уравнение относительно собственных значений λ:

где

λ – собственные значения.

Множитель A_1^Φ определим из условия нормировки, которому производящие функции $\Phi^i (i = I, II, III)$ должны удовлетворять:

$$\left|A_1^\Phi\right|^2 =$$

$$= \frac{4V}{\lambda^2 \left\{ l \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\Phi_n\right|^2 c_{10} + \dfrac{\left|U^\Phi\right|^2 c_{11}}{l_1 \left|q_1^\Phi\right|^2 \left|R_1^{II}{}'\left(q_1^\Phi d\right)\right|^2} + \dfrac{\left|\Theta^\Phi\right|^2 c_{12}}{g\left|f_1^\Phi\right|^2 \cdot \left|J_0'\left(f_1^\Phi d\right)\right|^2} \right\}},$$

Вычисляя градиенты производящих функций, получаем

$$\nabla\Phi_\alpha^i(r,z) = \left(A_1^\Phi \bar{\Phi}_\alpha^i\,;\,0\,;\,A_1^\Phi \tilde{\Phi}_\alpha^i\right), \quad i = I, II, III, \qquad (13)$$

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_\alpha^I(r,z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \Phi_{n\alpha} p_{n\alpha}^\Phi R_n^{I'}\left(p_{n\alpha}^\Phi r\right) \sin\left(\dfrac{\pi n}{l} z\right), \\ \tilde{\Phi}_\alpha^I(r,z) = \dfrac{\pi}{l} \sum\limits_{n=2}^{\infty} n\Phi_{n\alpha} R_n^I\left(p_{n\alpha}^\Phi r\right) \cos\left(\dfrac{\pi n}{l} z\right), \end{cases} \qquad (14)$$

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_\alpha^{II}(r,z) \cong \dfrac{U_\alpha^\Phi R_1^{II'}\left(q_{1\alpha}^\Phi r\right)}{l_1 R_1^{II'}\left(q_{1\alpha}^\Phi d\right)} \sin \dfrac{\pi(z - g_1)}{l_1}, \\ \tilde{\Phi}_\alpha^{II}(r,z) \cong \dfrac{\pi}{l_1^2} \cdot \dfrac{U_\alpha^\Phi R_1^{II}\left(q_{1\alpha}^\Phi r\right)}{q_{1\alpha}^\Phi R_1^{II'}\left(q_{1\alpha}^\Phi d\right)} \cos \dfrac{\pi(z - g_1)}{l_1}, \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_\alpha^{III}(r,z) \cong \dfrac{\Theta_\alpha^\Phi J_0'\left(f_{1\alpha}^\Phi r\right)}{g J_0'\left(f_{1\alpha}^\Phi d\right)} \sin\left(\dfrac{\pi}{g} z\right), \\ \tilde{\Phi}_\alpha^{III}(r,z) \cong \dfrac{\pi}{g^2} \cdot \dfrac{\Theta_\alpha^\Phi J_0\left(f_{1\alpha}^\Phi r\right)}{f_{1\alpha}^\Phi J_0'\left(f_{1\alpha}^\Phi d\right)} \cos\left(\dfrac{\pi}{g} z\right), \end{cases} \qquad (16)$$

$$U_\alpha^\Phi = \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_{n\alpha} p_{n\alpha}^\Phi R_n^{I'}\left(p_{n\alpha}^\Phi d\right) \cdot i_2(n,1),$$

$$\Theta_\alpha^\Phi = \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_{n\alpha} p_{n\alpha}^\Phi R_n^{I'}\left(p_{n\alpha}^\Phi d\right) \cdot i_1(n,1),$$

$$\Phi_{n\alpha} \equiv V_n^\Phi + G_n^\Phi W^\Phi + \bar{G}_n^\Phi \bar{W}^\Phi.$$

Компоненты $W^\Phi, \bar{W}^\Phi$ определяем по формулам, аналогичным (6)-(8).

Следует заметить, что суммирование по j ведется, начиная с номера $j = 2$. Составляющие $V_j^\Phi, G_j^\Phi, \bar{G}_j^\Phi, W_j^\Phi, \bar{W}_j^\Phi$ вычисляем по формулам

$$W_j^{\Phi} = p_j^{\Phi} R_j^{I'}\left(p_j^{\Phi} d\right) \cdot i_2(j,1),$$

$$\tilde{W}_j^{\Phi} = p_j^{\Phi} R_j^{I'}\left(p_j^{\Phi} d\right) \cdot i_1(j,1),$$

$$G_j^{\Phi} = \frac{R_1^{II}\left(q_1^{\Phi} d\right) i_2(j,1)}{l l_1 q_1^{\Phi} R_1^{II'}\left(q_1^{\Phi} d\right)} \cdot T_j^{\Phi},$$

$$\tilde{G}_j^{\Phi} = \frac{J_0\left(f_1^{\Phi} d\right) i_1(j,1)}{g l f_1^{\Phi} J_0'\left(f_1^{\Phi} d\right)} \cdot T_j^{\Phi},$$

$$V_j^{\Phi} = \left(\frac{R_1^{II}\left(q_1^{\Phi} d\right)}{l l_1 q_1^{\Phi} R_1^{II'}\left(q_1^{\Phi} d\right)} p_1^{\Phi} R_1^{I'}\left(p_1^{\Phi} d\right) i_2(1,1)\, i_2(j,1) + \right.$$

$$\left. + \frac{J_0\left(f_1^{\Phi} d\right)}{g l f_1^{\Phi} J_0'\left(f_1^{\Phi} d\right)} p_j^{\Phi} R_j^{I'}\left(p_j^{\Phi} d\right) \cdot i_1(1,1) i_1(j,1) \right) \cdot T_j^{\Phi},$$

$$T_j^{\Phi} = \left\{ R_j^{I}\left(p_1^{\Phi} d\right) - \right.$$

$$- \frac{R_1^{II}\left(q_1^{\Phi} d\right)}{l l_1 q_1^{\Phi} R_1^{II'}\left(q_1^{\Phi} d\right)} p_j^{\Phi} R_j^{I'}\left(p_j^{\Phi} d\right) \cdot i_2^2(j,1) -$$

$$\left. - \frac{J_0\left(f_1^{\Phi} d\right)}{g l f_1^{\Phi} J_0'\left(f_1^{\Phi} d\right)} p_j^{\Phi} R_j^{I'}\left(p_j^{\Phi} d\right) \cdot i_1^2(j,1) \right\}^{-1}.$$

Таким образом, определены подпространства трехмерных «электрических» частей собственных векторов для областей I, II, III:

Теперь перейдем к задаче Неймана на отыскание «невихревых» векторов «магнитного» типа. Ее решение позволит определить выражения для неизвестных коэффициентов B_m^{Ψ} и C_s^{Ψ} и бесконечную однородную СЛАУ относительно коэффициентов A_n^{Ψ}, из которой следует дисперсионное уравнение для собственных значений χ. В случае $\theta << 1$ имеем

$$\det\left\{ \delta_{jn} p_j^{\Psi} P_j^{I'}\left(p_j^{\Psi} d\right) - \right.$$

где

с – искомые собственные значения; W^{Ψ} и $\tilde{W}^{\Psi}$ находим аналогично формулам (6)-(8).

Для вычисления нормировочного коэффициента получаем выражения

$$\left|A_0^{\Psi}\right|^2 =$$

$$= \frac{4V}{\chi^2 \left\{ l \sum_{n=1}^{\infty} \left|\Psi_n\right|^2 c_{13} + \frac{\left|U^{\Psi}\right|^2 c_{14}}{l_1 \left| P_1^{II}\left(q_1^{\Psi} d\right)\right|^2} + \frac{\left|\Theta^{\Psi}\right|^2 c_{15}}{g \cdot \left|J_0\left(f_1^{\Psi} d\right)\right|^2} \right\}},$$

Компоненты $W_j^{\Psi}, \tilde{W}_j^{\Psi}, G_j^{\Psi}, \tilde{G}_j^{\Psi}$ определяем согласно формулам

$$W_j^{\Psi} = P_j^{I}\left(p_j^{\Psi} d\right) \cdot i_2(j,0), \quad \tilde{W}_j^{\Psi} = P_j^{I}\left(p_j^{\Psi} d\right) \cdot i_1(j,0),$$

$$T_j^{\Psi} = \left[p_j^{\Psi} P_j^{I'}\left(p_j^{\Psi} d\right) - \right.$$

$$- \frac{2 q_0^{\Psi} P_0^{II}{}'\left(q_0^{\Psi} d\right)}{l \cdot l_1 \cdot P_0^{II}\left(q_0^{\Psi} d\right)} \cdot P_j^{I}\left(p_j^{\Psi} d\right) \cdot i_2^2(j,0) -$$

$$\left. - \frac{2 f_0^{\Psi} J_0'\left(f_0^{\Psi} d\right)}{g \cdot l \cdot J_0\left(f_0^{\Psi} d\right)} P_j^{I}\left(p_j^{\Psi} d\right) \cdot i_1^2(j,0) \right]^{-1}.$$

Вычисление градиентов производящих функций дает

(17)

(18)

(19)

(20)

$$U_{\beta}^{\Psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{n\beta} P_n^{I}\left(p_{n\beta}^{\Psi} d\right) i_2(n,1),$$

$$\Theta_{\beta}^{\Psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{n\beta} P_n^{I}\left(p_{n\beta}^{\Psi} d\right) i_1(n,1),$$

$$\Psi_{n\beta} \equiv V_n^{\Psi} + G_n^{\Psi} W^{\Psi} + \overline{G}_n^{\Psi} \overline{W}^{\Psi}.$$

Таким образом, определены подпространства трехмерных «магнитных» частей собственных векторов для частичных областей *I, II, III*:

Итак, «градиентное» подпространство , элементами которого являются шестимерные векторы вида (12), имеет представление

4. Разложение электромагнитного поля по элементам базиса

Разложение для искомого поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\vec{H}(\vec{r},t)$ по базисным элементам в терминах трехмерных векторов напряженностей поля запишем как [4]:

(21)

(22)

Все векторы, зависящие от координат, уже известны. Они определены выше как элементы базиса в форме граничных задач на собственные значения для лапласиана. Для нашей задачи в (21), (22) введены обозначения

$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{E}_n^{I}(r,z), & d \le r \le b, \quad 0 \le z \le l; \\ \vec{E}_n^{II}(r,z), & a \le r \le d, \quad g_1 \le z \le l; \\ \vec{E}_n^{III}(r,z), & 0 \le r \le d, \quad 0 \le z \le g; \end{cases}$$

$$\vec{H}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{H}_n^{I}(r,z), & d \le r \le b, \quad 0 \le z \le l; \\ \vec{H}_n^{II}(r,z), & a \le r \le d, \quad g_1 \le z \le l; \\ \vec{H}_n^{III}(r,z), & 0 \le r \le d, \quad 0 \le z \le g; \end{cases}$$

$$\nabla\Phi_{\alpha}(\vec{r}) = \begin{cases} \nabla\Phi_{\alpha}^{I}(r,z), & d \le r \le b, \quad 0 \le z \le l; \\ \nabla\Phi_{\alpha}^{II}(r,z), & a \le r \le d, \quad g_1 \le z \le l; \\ \nabla\Phi_{\alpha}^{III}(r,z), & 0 \le r \le d, \quad 0 \le z \le g; \end{cases}$$

$$\nabla\Psi_{\beta}(\vec{r}) = \begin{cases} \nabla\Psi_{\beta}^{I}(r,z), & d \le r \le b, \quad 0 \le z \le l; \\ \nabla\Psi_{\beta}^{II}(r,z), & a \le r \le d, \quad g_1 \le z \le l; \\ \nabla\Psi_{\beta}^{III}(r,z), & 0 \le r \le d, \quad 0 \le z \le g. \end{cases}$$

Векторы

заданы формулами (9)-(11). Индекс *n* всюду указывает на номер соответствующего собственного числа k_n. Градиенты $\nabla\Phi^{i}(r,z)$ и $\nabla\Psi^{i}(r,z)$ определены с помощью формул (13)-(16) и (17)-(20) соответственно. Индекс α обозначает номер собственного числа λ_{α}, а индекс β – номер собственного числа χ_{β}.

Таким образом, в разложениях (21); (22) искомого поля $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{H}(\vec{r},t)$ по элементам модового базиса $\vec{E}_n(\vec{r})$, $\vec{H}_n(\vec{r})$, $\nabla\Phi_{\alpha}(\vec{r})$ и $\nabla\Psi_{\beta}(\vec{r})$ необходимо определить неизвестные скалярные коэффициенты

$e_n(t),\quad h_n(t),\quad a_\alpha(t),\quad b_\beta(t)$. При этом следует каждый раз учитывать свойства среды, которой заполнен резонатор.

5. Определение временных коэффициентов $e_n(t), h_n(t), a_\alpha(t), b_\beta(t)$

Разложения (21), (22) позволяют определить электромагнитное поле в любой момент времени, если известны временные коэффициенты. Задача по вычислению временных коэффициентов получается в результате проецирования уравнений Максвелла на базис в нашем пространстве решений. Тогда для коэффициентов $e_n(t), h_n(t), a_\alpha(t), b_\beta(t)$ имеем систему эволюционных уравнений [2] с начальными условиями

$$e_n(0) = e_n^{(0)},\ h_n(0) = h_n^{(0)},\ a_\alpha(0) = a_\alpha^{(0)},\ b_\beta(0) = b_\beta^{(0)},$$

которые гарантируют единственность решения задачи, а следовательно, и самого поля (21), (22).

6. Выводы

Изложенное выше показывает возможность исследования нестационарных полей в замкнутых объемах сложной геометрической формы, когда электромагнитное поле представляется в виде разложения по модовому базису. Элементы базиса определены в форме задач на собственные значения для лапласиана. Дисперсионные уравнения относительно собственных значений выписаны. В частности, применительно к данному резонатору подробно рассмотрен случай малого геометрического параметра, для которого получены характеристические уравнения относительно собственных значений, и найдены формулы для нормировочных множителей.

Предложенная схема решения системы уравнений Максвелла использует точные материальные уравнения общего вида, где зависимости $\vec{P}(\vec{E}), \vec{M}(\vec{H}), \vec{J}_\sigma(\vec{E},\vec{H})$ полагаются заданными в какой-либо форме. Этот факт позволяет не ограничивать область применимости полученного решения электродинамической задачи случаем лишь относительно малых значений напряженности искомого электромагнитного поля. Случай полного или частичного заполнения резонатора нестационарной средой приводит к задаче для определения временных коэффициентов, решение которой представляет предмет дополнительного исследования. Например, в [6] рассмотрен случай возбуждения колебаний в резонаторе с нестационарным диэлектриком внешними источниками. Решения эволюционных уравнений найдены и обсуждаются.

Литература: 1. *Вейль Г.* Избранные труды /Под ред. В. И. Арнольда. М.: Наука, 1984. С. 285-308. 2. *Третьяков О. А.* Метод модового базиса // Радиотехника и электрон. 1986. №6. С. 1071-1082. 3. *Третьяков О. А.* Волноводные и эволюционные уравнения //Радиотехника и электрон. 1989. №5. С. 917-926. 4. *Tretyakov O. A.* Essentials of Non-stationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory. Analitical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory/ Edited by Hashimoto M., Idemen M., and Tretyakov O.A. Tokio: Science House Co., Ltd, 1993. P. 572. 5. *Belogortsev A. B., Tretyakov O. A., Vavriv D. M.* Destruction of Quasi-Periodical Oscillations in Weakly Nonliner a Systems// Applied Mechanics Reviews. 1993. Vol. 43. P. 372-384. 6. *Третьяков О. А., Чумаченко С. В.* Колебания в резонаторе с нестационарным диэлектриком // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т. 2, №2. С. 222-229.

Поступила в редколлегию 28.03.98

Третьяков Олег Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической радиофизики ХГУ. Научные интересы: математические основы для решения начально-граничных задач во временной области для линейных и нелинейных уравнений Максвелла; регулярные и стохастические колебания в резонаторах с нестационарными и нелинейными средами; возбуждение и эволюция электромагнитных сигналов в волноводах. Адрес: 310077, Харьков-77, пл. Свободы-4, ХГУ, тел. (0572) 457162.
E-mail: neil@edu16.citynet.Kharkov.ua.

Чумаченко Светлана Викторовна, аспирант кафедры теоретической радиофизики ХГУ. Научные интересы: методы решения внутренних и внешних граничных задач со сложными граничными условиями; теория электромагнитных полей во временной области; электромагнитные колебания в резонаторах с нестационарной средой. Адрес: 310077, Харьков-77, пл. Свободы-4, ХГУ, кафедра теоретической радиофизики, тел. (0572) 457257, (0572) 270044.
E-mail: neil@edu16.citynet.Kharkov.ua.