УДК 519.81

В.П. ПОНОМАРЕНКО, С.Ф. ЧАЛЫЙ

ПРИНЯТИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматриваются вопросы принятия решений в условиях многокритериальности, риска и неопределенности. Предлагается модель аналитического вычисления статистических параметров функции плотности распределения обобщенной многофакторной оценки эффективности решений.

1.Введение

В настоящее время очень актуальной является проблема повышения эффективности управления социально-экономическими объектами (СЭО). Это обусловлено тем, что в современных условиях один социально-экономический объект невозможно рассматривать как локально-независимый [1]. Соотвественно, процесс управления СЭО существенно усложняется, повышаются требования к его эффективности, под которой понимается своевременность, комплексность и оптимальность принимаемых управляющих решений. Вместе с этим, в настоящее время организационное управление СЭО является в большей степени искусством, чем формальной научно обоснованной процедурой. Это обусловлено тем, что большинство решений приходится принимать в условиях множественности и противоречивости целей, жестких временных и нормативных ограничений большой размерности, высокой информационной неопределенности характеристик как собственно объекта управления, так и окружающей среды, целенаправленного активного противодействия конкурентов и т.д. С формальной точки зрения это означает, что решения необходимо принимать в условиях многокритериальности, риска и неопределенности.

Анализ существующих подходов и формальных методов решения указанных задач показывает, что недостаточное внимание уделяется совместному решению задач многокритериальной оптимизации и принятия решений в условиях риска и неопределенности. Эти задачи, как правило, рассматриваются отдельно, причем задача многокритериальной оптимизации чаще всего решается в детерминированной постановке, без учета интервальной неопределенности, возникающей при идентификации параметров модели многофакторного оценивания, а задачи принятия решения в условиях риска и неопределенности решаются в предположении, что целевая функция является не многокритериальной, а скалярной. Объединение методологий решений этих задач открывает перспективы более адекватного и эффективного решений широкого круга прикладных задач.

2. Постановка задачи исследования

Целью исследования является выбор из допустимого множества решений *X* единственного наиболее эффективного решения $x^0 \in X$. В формальной постановке это означает, что необходимо решить задачу

$$x^0 = \arg \operatorname*{extr}_{x \in X} E(x), \tag{1}$$

где $E(x)$ – обобщенный скалярный показатель качества решений.

При принятии решений в условиях многокритериальности, когда эффективность решения характеризуется кортежем противоречивых разнородных частных показателей (критериев) $\langle k_i(x) \rangle$, $i = \overline{1, n}$, для которых не существует решения $x^0 = \arg \operatorname*{extr}_{x \in X} \langle k_i(x) \rangle$, $\forall i = \overline{1, n}$, возникает дополнительная задача вычисления обобщенной скалярной оценки эффективности решений, известной как функции полезности P(x):

$$P(x) = F\langle k_i(x) \rangle, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Данная функция полезности , в конечном счете, может быть представлена в виде:

$$P(x)=\sum_{j=1}^{m} a_j k_j(x),\ \ j=1,\overline{m}, \tag{3}$$

где $a_i,\ j=\overline{1,m}$ – кортеж параметров модели; $k_j(x),\ j=\overline{1,m}$ – расширенное пространство характеристик качества решения.

Особенность рассматриваемой ситуации заключается в том, что многофакторная оценка эффективности решения является не точечной детерминированной величиной, а интервальной неопределенной оценкой, что вызвано следующими причинами:

1) коэффициенты a_j независимо от метода их идентификации являются интервальными величинами;

2) значения частных критериев полностью или частично также носят интервальный характер.

Последнее обусловлено тем, что любая система является открытой, т.е. взаимодействует с внешней средой (метасистемой), которая не контролируется локальной системой, а ЛПР не располагает полной информацией о ее состоянии. Это, в свою очередь, означает, что все или часть показателей эффективности решений $k_j(x)$ являются интервально неопределенными.

В настоящей работе рассматривается только стохастическая интервальная неопределенность. Это означает, что информация о распределении значений переменных внутри интервала возможных значений сформулирована в терминах теории вероятности. Следовательно, решение необходимо принимать по модели

$$x^0=\arg\underset{x\in X}{\operatorname{extr}}\sum_{j=1}^{m}\bar{a}_j\ \bar{k}_j(x), \tag{4}$$

где знаком “ – “ обозначены случайные величины.

Рассмотрению подходов к решению этой задачи посвящена настоящая статья.

3. Принятие многокритериальных решений с учетом неопределенности исходной информации

Предлагаемый подход основывается на том положении, что задача принятия решений в условиях стохастической неопределенности является двухкритериальной. Это означает, что решение необходимо выбирать с учетом как эффективности, так и вероятности ее реализации.

В соответствии с данным подходом выполнена детерминизация кортежа весовых коэффициентов и разработана модель аналитического вычисления статистических параметров функции плотности распределения обобщенной многофакторной оценки эффективности решений.

Этап 1. *Детерминизация кортежа весовых коэффициентов.* Оценки эффективности решений являются не абсолютными, а относительными, т.е. они устанавливают отношение порядка и силу предпочтения на ограниченном конкретном множестве допустимых решений X. При этом, чтобы получить универсальную метрику, весовые коэффициенты оценки (4) должны удовлетворять требованиям

$$0\le a_j\le 1,\ \forall j=\overline{1,\ m};\ \ \sum_{j=1}^{m}a_j=1. \tag{5}$$

Это дает возможность выполнить детерминизацию значений кортежа весовых коэффициентов $a_j,\ j=\overline{1,m}$.

В дальнейшем будем полагать, что оценки математических ожиданий значений весовых коэффициентов $M(a_j),\ j=\overrightarrow{1,m}$ являются заданными.

Как отмечено выше, одним из двух частных критериев оценки эффективности решений в условиях стохастической вероятности является вероятность его реализации. Это означает, что из всех возможных случайных допустимых значений кортежей весовых коэффициентов $a_j,\ j=\overline{1,m}$ в модели (4) необходимо принять:

$$\bar{a}_j = M(a_j), \forall j = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Однако в большинстве случаев это требование невозможно выполнить, так как

$$\sum_{j=1}^{m} M(a_j) \neq 1. \quad (7)$$

Вместе с этим, учитывая, что коэффициенты a_j, $j = \overline{1, m}$ являются масштабными множителями, а оценка эффективности решений по определению относительна, пронормируем весовые коэффициенты по правилу

$$a_j^{н} = \frac{M(a_j)}{\sum_{j=1}^{m} M(a_j)}, \ \forall j = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Очевидно, в этом случае всегда будет выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^{н} = 1, \quad (9)$$

и хотя положение экстремального значения оценки эффективности изменится, абсолютное значение останется неизменным в пространстве решений $x \in X$.

Таким образом, случайные коэффициенты a_j в модели (4) можно заменить точечными детерминированными значениями, а модель (4) соответственно примет вид:

$$x^0 = \arg \underset{x \in X}{\operatorname{extr}} \sum_{j=1}^{m} a_j^{н} \bar{k}_j(x). \quad (10)$$

Этап 2. *Аналитическое вычисление стохастической оценки эффективности решений.*

Данный этап посвящен синтезу модели вычисления стохастической оценки эффективности решений $x \in X$, т.е. функции полезности:

$$\bar{P}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j^{н} \bar{k}_j(x), \quad (11)$$

где $a_j^{н}$ – детерминированные безразмерные значения весовых коэффициентов; $\bar{k}_j(x)$ – безразмерные случайные величины, с одинаковым интервалом возможных значений [0,1], т.е. нормализованные разнородные частные критерии.

При решении поставленной задачи в данном подразделе приняты следующие допущения.

1. Предполагается, что известны объективные или субъективные функции распределения вероятностей случайных характеристик $\bar{k}_j(x)$ решений $x \in X$. При этом рассматриваются только два закона распределения вероятностей: нормальный (Гаусса) и равновероятный.

2. Случайные величины $\bar{k}_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ взаимно независимы, т.е. не коррелированны.

3. Интервал возможных значений [a,b] всех случайных величин $\bar{k}_j(x)$, $\forall j = \overline{1, m}$ известен. При этом для всех характеристики $\bar{k}_j(x)$, a=0, b=1.

Анализ модели (11), показывает, что для вычисления $\bar{P}(x)$ необходимо реализовать операции умножения случайной величины на детерминированный коэффициент и суммирования полученных результатов. Кроме того, пространство переменных $\bar{k}_j(x)$ содержит переменные вида

$$\bar{k}_i^2(x) \ \text{ и } \bar{k}_i(x) \cdot \bar{k}_r(x), \quad (12)$$

для вычисления которых необходима операция умножения случайных величин.

В соответствии с центральной предельной теоремой [2,3] обобщенная полезность (11) является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. При этом необходимое условие соизмеримости отдельных случайных слагаемых обеспечивается одинаковым интервалом изменения [0, 1].

Нормальный закон распределения полностью и однозначно характеризуется двумя статистическими параметрами: математическим ожиданием и дисперсией (среднеквадратическим отклонением) [2,3]. Это означает, что для вычисления обобщенной стохастической полезности эффективности решений $x \in X$ необходимо вычислить математическое ожидание $M[\overline{P}(x)] = M[\sum_{j=1}^{n} a_j\ k_j(x)]$ и дисперсию $D[\overline{P}(x)] = D[\sum_{j=1}^{n} a_j\ \overline{k}_j(x.)]$.

Необходимые для этого соответствующие арифметические операции строго определены и имеют вид [2].

Математическое ожидание суммы случайных линейных функций равно

$$M[\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i\ M[Y_i], \tag{13}$$

где a_i детерминированные коэффициенты; Y_i – случайные величины.

Дисперсия суммы случайных линейных функций равна

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[Y_i]. \tag{14}$$

Соответственно для произведения нескольких случайных независимых величин

$$M[\prod_{i=1}^{n} Y_i] = \prod_{i=1}^{n} M(Y_i), \tag{15}$$

$$D[\prod_{i=1}^{n} Y_i] = \prod_{i=1}^{n} D(Y_i). \tag{16}$$

В соответствии с этим модели вычисления статистических параметров обобщенной стохастической оценки эффективности решений имеют вид

$$M[\overline{P}(x)] = \sum_{j=1}^{m} a_j\ M[\overline{k}_j(x)]; \tag{17}$$

$$D[\overline{P}(x)] = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\ D[\overline{k}_j(x)]. \tag{18}$$

При принятых допущениях о том, что закон распределения вероятностных величин $\overline{k}_j(x)$ задан и интервал их возможных значений известен, определение статистических параметров: математического ожидания $M[\overline{k}_j(x)]$ и дисперсии $D[\overline{k}_j(x)]$, $j = \overline{1, m}$ не вызывает затруднений.

Для нормального закона распределения вероятностей с учетом того, что 99,9 % значений случайной величины попадает в интервал, равный 6σ, получаем

$$D[\overline{k}_j(x)] = \sigma^2[\overline{k}_j(x)] = (\frac{b-a}{6})^{2}. \tag{19}$$

С учетом того, что [b-a]=1, дисперсия равна

$$D[\overline{k}_j(x)] = (\frac{1}{6})^2 = 0,028,\ \forall j = \overline{1, m}. \tag{20}$$

Соответственно математическое ожидание равно

$$M[\overline{k}_j(x)] = \frac{1}{2} = 0,5,\ \forall j = \overline{1, m}. \tag{21}$$

Для закона равной вероятности соответствующие формулы имеют вид:

$$M[\overline{k}_j(x)] = \frac{1}{2} = 0,5,\ \forall j = \overline{1, m}; \tag{22}$$

$$D[\overline{k}_j(x)] = \frac{b-a}{12} = \frac{1}{12} = 0,08,\ \forall j = \overline{1, m}. \tag{23}$$

С учетом соотношений (20)-(23), полученные модели вычисления математического ожидания и дисперсии стохастической оценки обобщенной полезности решений имеют следующий вид:

а) для нормального закона распределения вероятностей частных характеристик $\overline{k}_j(x)$:

$$M[\overline{P}(x)] = \sum_{j=1}^{m} a_j^{н} \cdot 0,5; \tag{24}$$

$$D[\overline{P}(x)] = \sum_{j=1}^{m} (a_j^{н})^2 \cdot 0,028; \tag{25}$$

в) для закона равной вероятности:

$$M[\overline{P}(x)] = \sum_{j=1}^{m} a_j^{н} \cdot 0,5; \tag{26}$$

$$D[\overline{P}(x)] = \sum_{j=1}^{m} (a_j^{н})^2 \cdot 0,08; \tag{27}$$

г) для смеси нормального закона и закона равной вероятности

$$M[\overline{P}(x)] = \sum_{j=1}^{m} a_j^{н} \cdot 0,5; \tag{28}$$

$$D[\overline{P}(x)] = \sum_{l=1}^{m} (a_l^{н})^2 \cdot 0,028 + \sum_{L=1}^{m} a_L^{н} \cdot 0,08. \tag{29}$$

Как отмечено выше, с учетом центральной предельной теоремы можно считать, что при любой комбинации законов распределения вероятности случайных величин $\overline{k}_j(x)$ обобщенная оценка эффективности решения будет распределена по нормальному закону с функцией плотности распределения вероятностей вида

$$f[\overline{P}(x)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\overline{P}(x) - M[\overline{P}(x)]]}{2\sigma^2}}; \tag{30}$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{l=1}^{k} (a_l^{н})^2 \cdot 0,028 + \sum_{L=1}^{m} (a_L^{н})^2 \cdot 0,08}. \tag{31}$$

Таким образом, синтезирована модель аналитического вычисления статистических параметров функции плотности распределения обобщенной многофакторной оценки эффективности решений $\overline{p}(x),\ x \in X$.

4. Заключение

Впервые предложена модель аналитического вычисления статистических параметров функции плотности распределения обобщенной многофакторной оценки эффективности решений, которая основывается на детерминизации кортежа весовых коэффициентов, учитывает комбинацию закона равной вероятности и нормального закона распределения вероятности случайных величин. Это дает возможность решать задачу принятия решений в условиях стохастической неопределенности с учетом как эффективности, так и вероятности реализации указанных решений.

Список литературы: **1**.*Соколова Н.А.* Необходимые условия развития объектов хозяйственной деятельности / Н.А. Соколова, К.Э. Петров, В.Е. Ходаков // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы: Сб. науч. тр. Херсонского национального технического университета. 2007. №1(19). С. 175-182. **2.***Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. М.: Высшая шк., 2000. 480 с. **3.** *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. М. : Юнити-ДАНА, 2001. 543 с.

Поступила в редколлегию 22.02.2009

Пономаренко Владимир Петрович, соискатель ДП «НИИ Технологии приборостроения». Адрес: Украина, 61010, Харьков, ул.Примакова, 40/42.

Чалый Сергей Федорович, д-р техн. наук, профессор кафедры ИУС ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-451.