

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ КІНЦЕВИМ ТЕМПЕРАТУРНИМ РЕЖИМОМ У ОДНОРІДНОМУ СТРИЖНІ

Подусов Д.Ю.

Науковий керівник – к.т.н., доцент Гибкіна Н.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Леніна, 14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: denispodusov@gmail.com

We consider one of the possible formulations of problems of optimal control of heating, homogeneous rod. Optimal control problem is you need from the set of admissible controls choose that offer quality criterion of the minimum possible value. The problem of optimal control of heating a homogeneous rod with thermally insulated lateral surface. Under optimal control in this problem is understood task such regional regime at the ends of the rod, which is the final time will provide the temperature distribution in the rod, the closest to the desired distribution, the temperature distribution.

У роботі розглядається задача оптимального керування нагріванням однорідного стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею. Під розв'язком будемо розуміти, пошук такої крайової умови на кінцях стрижня, яка у кінцевий момент часу забезпечить розподіл температури у стрижні, якомога близький до бажаного розподілу температур.

Задачі оптимального керування процесами теплопровідності пов'язані з нагріванням металу під прокатку або термообробку, сушінням і випалюванням сипучих матеріалів в обертових печах, отриманням монокристалів, індукційним нагріванням, обробкою металевих стрижнів для турбін енергетичних електростанцій і силових промислових установок і багатьма іншими виробничими процесами.

Метою роботи є розробка математичних методів оптимального керування кінцевим температурним станом однорідного стрижня за рахунок керування температурним режимом на кінцях цього стрижня.

Розглядається задача нагріванням однорідного стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею, $0 \leq x \leq L$. Закон, за яким відбувається розповсюдження тепла у стрижні, заданий у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1)$$

з початковими та крайовими умовами:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2)$$

$$\left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u \right) \Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad t \geq 0, \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \right) \Big|_{x=L} = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

де a^2 , L , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 – задані додатні константи, $\varphi(x)$ – задана функція

із $L_2(0, L)$, $u = u(x, t)$ – температура стрижня у точці x у момент часу t .

Керування процесом нагрівання стрижня здійснюється у такий спосіб: змінюючи температуру на кінцях стрижня, необхідно у заданий момент часу $T > 0$ отримати розподіл температури у стрижні, якомога ближчий до бажаного розподілу температур $y(x)$, $0 \leq x \leq L$. Оптимальне керування шукатимемо у вигляді функцій $\mu = (\mu_1(t), \mu_2(t))$, таких, що

$$M = \{\mu = (\mu_1(t), \mu_2(t)) \in L_2(0, T) \times L_2(0, T),$$

$$\mu_1^{\min} \leq \mu_1(t) \leq \mu_1^{\max}, \mu_2^{\min} \leq \mu_2(t) \leq \mu_2^{\max} \text{ майже всюди на } [0, T]\}. \quad (4)$$

За таких умов формальна постановка задачі оптимального керування кінцевим температурним станом стрижня полягає у мінімізації функціоналу:

$$J(\mu) = \|u(x, T; \mu) - y(x)\|_{L_2(0, L)}^2 = \int_0^L (u(x, T; \mu) - y(x))^2 dx, \quad (5)$$

де $u = u(x, t) = u(x, t; \mu)$ – функція, яка є розв’язком початково-крайової задачі (1) – (3) за умови (4), що отримано методом Фур’є.

Апроксимацію функцій керування $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ в (5) запропоновано обирати у вигляді $\mu_1(t) = \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(t)$, $\mu_2(t) = \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(t)$, де коефіцієнти q_k , r_j , $k = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, m_2}$ визначаються із розв’язку задачі мінімізації (5) з обмеженнями (4), а $\{Q_k\}$, $\{R_j\}$ – системи базисних функцій у $L_2(0, T)$.

Результати розв’язання задачі оптимального керування (5) при $y(x) = x$ у момент часу $T = 1$ для випадку початкових та крайових умов (2) – (3):

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + u \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad \beta_2 u|_{x=L} = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq L,$$

де $\mu_2(t) = v_{20} + \sum_{k=1}^5 \mu_{2k} \sin \frac{\pi k t}{T} + \sum_{k=1}^5 v_{2k} \cos \frac{\pi k t}{T}$, наведено на рис. 1. Точність наближення при цьому склала $\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,39 \cdot 10^{-1}$.

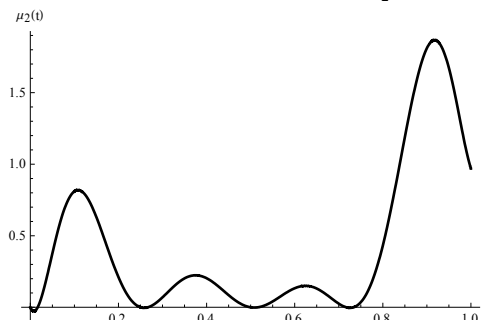


Рисунок 1 – Графік функції $\mu_2(t)$ оптимального керування нагріванням правого кінця стрижня

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. «Дифференциальные уравнения математической физики» – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XII.)