УДК517.9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С ДЕСКРИПТОРНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ПОДСИСТЕМАМИ

РУТКАС А.А.

Изучается динамика гибридной системы с конечным множеством дескрипторных подсистем, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями. Возрастание количества алгебраических уравнений в подсистемах происходит в дискретные моменты времени при встречах траектории с гиперповерхностями захвата. Доказывается теорема существования и единственности траектории, начинающейся в заданной точке фазового пространства. Приводится эколого-экономическая модель, в которой захваты траектории гиперповерхностями и переключения на новые подсистемы связаны с ограничениями экологии и ресурсов.

1. Введение

Понятие гибридной системы имеет много толкований, так что для каждого конкретного объекта исследований признак «гибридности» требует отдельного разъяснения. Например, непрерывные динамические системы при импульсных внешних воздействиях трактуются некоторыми авторами как гибридные системы. Аналогично к гибридным можно отнести системы с переменной структурой, теория которых разработана специалистами по автоматическому управлению [1-3]. Мы будем исходить из точки зрения авторов статьи [4], согласно которой гибридная система состоит из конечного семейства классических непрерывных динамических подсистем (звеньев) и дискретного алгоритма мгновенного переключения с одной подсистемы на другую, либо мгновенной перестройки текущего состояния на другое допустимое состояние, либо одновременно переключения подсистем и перестройки состояний.

Траектория гибридной системы является непрерывной или даже непрерывно дифференцируемой между двумя соседними моментами времени $t_k < t_{k+1}$, в которых происходит переключение или (и) перестройка, а соответствующая непрерывная динамическая подсистема называется *активированной* в интервале $t_k \le t < t_{k+1}$. Частный случай кусочно-линейной гибридной системы изложен в [5, 6], где динамика каждой подсистемы описывается линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В данной работе рассматриваются отличающиеся от [4, 6] гибридные системы, состоящие из непрерывных дескрипторных подсистем, динамика которых описывается дифференциально-алгебраическими уравнениями в отличие от явных дифференциальных уравнений из [4, 6]. В отличие от системы явных дифференциальных уравнений разрешимость начальной задачи для системы дифференциально-алгебраических уравнений даже в линейном случае требует специальных ограничений на начальное состояние системы, которое должно принадлежать допустимому начальному многообразию [7-9].

2. Модельный пример эколого-экономической системы

Рассмотрим систему трех полулинейных дифференциальных уравнений

$$\overset{\circ}{x}_1(t) + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = f_1(t) + \varphi_1(x_1, x_2, x_3)\,, \quad (1)$$

$$\overset{\circ}{x}_2(t) + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = f_2(t) + \varphi_2(x_1, x_2, x_3)\,, \quad (2)$$

$$\overset{\circ}{x}_3(t) + b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = f_3(t) + \varphi_3(x_1, x_2, x_3), \quad (3)$$

векторная форма которой в пространстве $\mathbf{R}^3$ имеет вид

$$\overset{\circ}{x}(t) + Bx(t) = f(t) + \varphi(x). \quad (4)$$

Согласно [10, п.2] уравнения (1)-(3) при $\varphi_k \equiv 0$ описывают динамику основных производственных фондов $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ трех предприятий, образующих корпорацию и совместно осуществляющих погашение долгов, реинвестирование основных фондов, использование внешних инвестиций. Производственная функция каждого предприятия в [10] предполагалась линейной однофакторной типа Леонтьева. Если исходить из нелинейных производственных функций, то в уравнениях динамики развития предприятий возникают дополнительные нелинейные члены вида

$$\varphi_k(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1^k g_1(x_1) + \alpha_2^k g_2(x_2) + \alpha_3^k g_3(x_3)\,, \quad k = 1,2,3,$$

которые мы учитываем в уравнениях (1)-(3). При надлежащих ограничениях на функции $f_k(t), \varphi_k(x)$ [13, гл.II] задача Коши для уравнения (4) ~ (1)-(3) с начальным условием

$$x(0) = x_0 \quad (5)$$

(для произвольного начального вектора $x_0 \in \mathbf{R}^3$) имеет единственное решение:

$$x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)^{tr} \quad (6)$$

на некотором временном интервале

$$0 \le t \le t_1\,,\ t_1 > 0. \quad (7)$$

В частном случае линейной системы

$$\overset{\circ}{x}(t) + Bx(t) = f(t) \quad (8)$$

решение находится явно по формуле вариации

$$x(t) = e^{-Bt}x_0 + \int_0^t e^{-B(t-s)}f(s)ds\,, \forall t \ge 0.$$

В нелинейном случае решение $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = e^{-Bt}x_0 + \int_0^t e^{-B(t-s)}[f(s) + \varphi(x(s))]ds.$$

Предположим, по технологии производства предприятий корпорации происходит загрязнение окружающей среды вредным веществом γ_1 в зависимости от объемов производства и, в конечном счете, от объемов эксплуатируемых производственных фондов x_1, x_2, x_3 так, что суммарное удельное загрязнение вредным веществом определяется значением функционала

$$\Phi_1 = \Phi_1(x_1, x_2, x_3) = \Phi_1(x). \tag{9}$$

Пусть C_1–максимальный допустимый уровень загрязнения; тогда решение (6) должно удовлетворять условию

$$\Phi_1(x(t)) \le C_1,\ 0 \le t \le t_1. \tag{10}$$

В частности, и начальный вектор x_0 должен удовлетворять условию

$$\Phi_1(x_0) \le C_1. \tag{11}$$

Предположим, уравнение

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = C_1 \tag{12}$$

позволяет выразить переменную x_3 через остальные переменные:

$$x_3 = F_3(x_1, x_2; C_1) \tag{13}$$

(см. ниже линейный случай).

По соображениям, которые понятны из дальнейшего моделирования гибридной системы, можно считать, что момент времени t_1 из интервала (7) оказывается критическим для корпорации в том смысле, что

$$\Phi_1(x(t_1)) = \Phi_1(x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)) = C_1 \tag{14}$$

и в дальнейшем функционал загрязнения (9) возрастает:

$$\Phi_1(x(t_1 + \varepsilon)) > C_1,\ \varepsilon > 0.$$

Чтобы не допустить превышение допустимого уровня загрязнения C_1 после момента t_1, руководство корпорации может принять решение подчинить объем $x_3(t)$ используемых производственных фондов третьего предприятия объемам производственных фондов $x_1(t), x_2(t)$ остальных предприятий в соответствии с равенством (13) в каждый момент времени $t \ge t_1$. Тогда в дальнейшем предельный допустимый уровень загрязнения будет обеспечен:

$$\Phi_1(x(t)) = C_1,\ t \ge t_1. \tag{15}$$

Замечание. Выбирая $\hat{C}_1 < C_1$, в случае необходимости можно обеспечить для третьего предприятия объем используемых производственных фондов:

$$x_3(t) = F_3(x_1(t), x_2(t), \hat{C}_1),$$

что снизит загрязнение среды до уровня $\hat{C}_1$.

При указанном ограничении производства уравнение динамики (3) третьего предприятия не может выполняться при $t > t_1$ одновременно с уравнениями (1),(2). Поэтому дифференциальное уравнение (3) должно быть исключено при $t > t_1$ из системы (1)-(3) и заменено алгебраическим уравнением (13). В результате при $t \ge t_1$ мы получаем систему дифференциально-алгебраических уравнений (1), (2), (13), которая имеет векторную форму

$$\frac{d}{dt}\big(A_1 x(t)\big) + B_1 x(t) = S_1(x, t),\ t_1 \le t \le t_2, \tag{16}$$

где $S_1 = (F_1, F_2, F_3)^{tr}$, $F_k = f_k(t) + \varphi_k(x)$, $k = 1,2$, функция $F_3(x)$ есть правая часть в (13):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица A_1 является вырожденной (необратимой), но характеристический пучок матриц $\lambda A_1 + B_1$ линейной части уравнения (16) регулярен в смысле [11]: многочлен $p(\lambda) = \det(\lambda A_1 + B_1)$ не есть тождественный ноль ($p(\lambda) \not\equiv 0$).

Отметим важный частный случай линейного уравнения (8) и линейного функционала загрязнения (9):

$$\Phi_1(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

При этом (1), (2), (13) представляет собой систему линейных дифференциально-алгебраических уравнений

$$\overset{\circ}{x}_1(t) + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = f_1(t), \tag{17}$$

$$\overset{\circ}{x}_2(t) + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = f_2(t), \tag{18}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = C_1,\ t_1 \le t \le t_2. \tag{19}$$

В векторной форме этой системы

$$\frac{d}{dt}\big(A_1 x(t)\big) + \hat{B}_1 x(t) = \hat{f}(t),\ t_1 \le t \le t_2 \tag{20}$$

введены обозначения

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix};\quad \hat{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ C_1 \end{bmatrix}.$$

В качестве начального условия для дифференциально-алгебраического уравнения (20) или системы (17)-(19) следует выбрать такое:

$$x(t_1+0)=x(t_1), \qquad (21)$$

где $x(t_1)$ – граничное значение решения уравнения (4) в интервале $0 \le t \le t_1$ (7). В отличие от явного дифференциального уравнения, дифференциально-алгебраическое уравнение (16) с вырожденной матрицей коэффициентов A_1 может не иметь решения при произвольном выборе начального значения $x(t_1)$ [7-9], а необходимо выбирать начальное состояние из некоторого допустимого начального многообразия Π_1. В данном случае Π_1 представляет собой поверхность $\Im_1$ в пространстве $\mathbf{R}^3$:

$$\Pi_1=\Im_1=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\Phi_1(x)=C_1\right\}. \qquad (22)$$

В силу (14) начальное значение $x(t_1)$ в (21) принадлежит двумерному многообразию $\Im_1$: $x(t_1)\in\Im_1$. При надлежащих ограничениях на нелинейные функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\Phi_1(x)$ можно доказать существование и единственность решения задачи Коши (16),(21). При этом единственность обеспечивается не только свойствами нелинейной правой части $S_1(x,t)$, но и регулярностью характеристического матричного пучка линейной части уравнения (16).

В случае линейной задачи (20),(21) для существования и единственности ее решения с математической точки зрения достаточно, чтобы в функционале загрязнения в левой части уравнения (19) коэффициент α_3 был ненулевым ($\alpha_3\ne 0$), функции $f_1(t),f_2(t)$ были интегрируемыми и начальный вектор $x(t_1)$ удовлетворял условию

$$\alpha_1x_1(t_1)+\alpha_2x_2(t_1)+\alpha_3x_3(t_1)=C_1.$$

По смыслу рассматриваемой модели экономического объекта указанные свойства параметров $\alpha_3,f_1(t),f_2(t)$ заведомо выполнены, поэтому линейная задача (20), (21) имеет единственное решение $x(t)$, начинающееся при $t=t_1$ на плоскости Π_1 (19) и остающееся на ней при всех $t>t_1$.

Пусть при $t>t_1$ вследствие обстоятельств, не зависящих от корпорации, возникает еще одно ограничение C_2 на значение функционала $\Phi_2(x_1,x_2,x_3)$, например, имеющего смысл загрязнения отходами вида γ_2 или потребления сырья, энергоресурсов и пр.:

$$\Phi_2(x_1,x_2,x_3)\le C_2. \qquad (23)$$

Как и в случае критического момента времени t_1 (14) для первого ограничения (10), возьмем момент $t_2(>t_1)$, критический для второго ограничения (23):

$$\Phi_2(x(t_2))=C_2. \qquad (24)$$

Как и для (12), предположим, что уравнение

$$\Phi_2(x_1,x_2,x_3)=C_2 \qquad (25)$$

разрешимо относительно x_2:

$$x_2=F_2(x_1,x_3;C_2). \qquad (26)$$

Рассмотрим худший вариант, когда оценки решения $x(t)$ уравнения (16) при $t=t_2+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ прогнозируют превышение допустимого уровня C_2 функционала Φ_2:

$$\Phi_2(x(t_2+\varepsilon))>C_2. \qquad (27)$$

По аналогии с моментом t_1 корпорация принимает решение начиная с момента t_2 поставить объем используемых основных фондов второго предприятия (тем самым и объем производства) в зависимость от объемов первого и третьего предприятий по формуле (26). Таким образом, будет удовлетворяться ограничение (23) в форме равенства

$$\Phi_2(x_1(t),x_2(t),x_3(t))=C_2,\ t\ge t_2 \qquad (28)$$

или

$$x_2(t)=F_2(x_1(t),x_3(t);C_2),\ t\ge t_2. \qquad (29)$$

Динамическое соотношение (2) следует отбросить из системы при $t>t_2$ точно так, как соотношение (3) при $t>t_1$. В результате при $t>t_2$ состояние $x(t)$ моделируемого экономического объекта будет удовлетворять системе дифференциально-алгебраических уравнений

$$\overset{\circ}{x}_1(t)+b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3=f_1(t)+\varphi_1(x_1,x_2,x_3), \qquad (30)$$

$$x_2(t)=F_2(x_1,x_3,C_2), \qquad (31)$$

$$x_3(t)=F_3(x_1,x_2,C_1);\ t\ge t_2. \qquad (32)$$

Векторная форма этой системы

$$\frac{d}{dt}\left(A_2x(t)\right)+B_2x(t)=S_2(x,t),\ t\ge t_2 \qquad (33)$$

имеет элементы

$$A_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix};\ B_2=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$S_2=\begin{bmatrix}f_1(t)+\varphi_1(x)\\F_2(x)\\F_3(x)\end{bmatrix}.$$

Характеристический пучок матриц линейной части λA_2+B_2 является регулярным. Поэтому, при надлежащих ограничениях на нелинейную правую часть

$S_2(x,t)$, уравнение (33), эквивалентное системе (30)-(32), будет иметь в нетривиальном интервале $t_2 \le t \le t_3$ единственное решение $x(t)$, начинающееся в точке $x(t_2)$ из допустимого начального многообразия

$$\Pi_2 = \{x \in \mathbf{R}^3 : \Phi_1(x) = C_1, \Phi_2(x) = C_2\}. \qquad (34)$$

По построению $\Pi_2 \subset \Pi_1$ (ср.(22) и (34)), причем многообразие Π_2 есть кривая, принадлежащая поверхности $\Im_1 = \Pi_1$.

В случае линейной системы (1)-(3) и линейных функционалов Φ_1 и $\Phi_2(x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$ система дифференциально-алгебраических уравнений (30)-(32) является линейной:

$$\overset{\circ}{x}_1(t) + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = f_1(t),\ t \ge t_2, \qquad (35)$$

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = C_2,\ \beta_2 \ne 0, \qquad (36)$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = C_1,\ \alpha_3 \ne 0. \qquad (37)$$

Начальное многообразие Π_2 (34) есть прямая в $\mathbf{R}^3$.

Если функция $f_1(t)$ непрерывна или хотя бы локально интегрируема при $t \ge t_2$ и $\beta_2\alpha_3 \ne \beta_3\alpha_2$, то при начальном значении $x(t_2) \in \Pi_2$ существует единственное решение $x(t)$ системы (35)-(37). Заметим, что условие $\beta_2\alpha_3 \ne \beta_3\alpha_2$ гарантирует регулярность характеристического матричного пучка $\lambda A_2 + \hat{B}_2$ системы (35)-(37), которая имеет векторную форму

$$\frac{d}{dt}\left(A_2 x(t)\right) + \hat{B}_2 x(t) = \left(f_1(t), C_2, C_1\right)^{tr}, \qquad (38)$$

где $\hat{B}_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$.

Обращаясь к терминологии и конструкции гибридной системы в [4], можно резюмировать построение нашего модельного примера следующим образом. Рассмотренная гибридная система состоит из трех различных подсистем, описываемых векторными уравнениями (4), (16), (33), где уравнения (16) и (33) являются дифференциально-алгебраическими, с вырожденными матрицами A_1 и A_2 под знаком производной. В произвольной точке $x_0 \in \mathbf{R}^3$ начинается непрерывная траектория $x(t)$ гибридной системы, являющаяся единственным решением уравнения (4) на интервале $0 \le t \le t_1$ с начальным условием (5) и достигающая в точке $x(t_1)$ поверхности $\Im_1 = \{x : \Phi_1(x) = C_1\}$, так что удовлетворяется равенство (14). В момент t_1 происходит переключение подсистемы(4) на подсистему (16) и далее в интервале $t_1 \le t \le t_2$ траектория $x(t)$ остается на поверхности $\Im_1$ и является решением уравнения (16) с начальным условием (21). По терминологии [4] подсистема (4) активирована в интервале $[0, t_1]$, а подсистема (16) активирована в интервале $[t_1, t_2]$. В момент времени $t_2 > t_1$ траектория $x(t)$ достигает поверхности $\Im_2 = \{x : \Phi_2(x) = C_2\}$, так что выполняется равенство (24). В момент t_2 происходит переключение подсистемы (16) на подсистему (33). Далее при $t > t_2$ траектория $x(t)$ изображает в $\mathbf{R}^3$ решение уравнения (33) с начальным условием

$$x(t_2 + 0) = x(t_2). \qquad (39)$$

Поскольку при $t > t_2$ вдоль траектории удовлетворяются алгебраические равенства (31), (32), траектория $x(t)$ эволюционирует в пересечении Π_2 поверхностей $\Im_1 = \{x : \Phi_1(x) = C_1\}; \Im_2 = \{x : \Phi_2(x) = C_2\}$.

Условия (21), (39) обеспечивают непрерывность (но не дифференцируемость) траектории гибридной системы в моменты переключения t_1, t_2 с предыдущей активированной подсистемы на последующую. В описанной модели перестройки состояния $x(t)$ гибридной системы в моменты t_1, t_2 не происходит.

3. Гибридная система с произвольным числом дескрипторных подсистем

Обобщим предыдущую модель на случай произвольного числа последовательно активируемых подсистем. В интервале $0 \le t \le t_1$ активируется первая динамическая подсистема

$$\begin{array}{l} \overset{\circ}{x}_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = f_1(t) + \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{\circ}{x}_n + b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n = f_n(t) + \varphi_n(x_1, \ldots, x_n), \end{array} \qquad (40)$$

векторная форма которой есть

$$\overset{\circ}{x}(t) + Bx(t) = f(t) + \varphi(x), \quad t_0 \le t \le t_1, \qquad (41)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{tr}$.

В пространстве $\mathbf{R}^n$ задано множество гладких гиперповерхностей «захвата»

$$\Im_k = \{x : \Phi_k(x) = C_k\}, \quad k = 1,2,\ldots,N, \qquad (42)$$

и начальное условие

$$x(0) = x_0, \qquad (43)$$

не принадлежащее ни одной из гиперповерхностей (42). По условию траектория решения $x(t)$ задачи (41),(43), попадающая на любую из гиперповерхностей захвата (42), остается на ней в течение всего дальнейшего времени. Для определенности будем считать, что траектория $x(t)$ впервые попадает в момент времени t_1 именно на первую из гиперповерхностей (42), перенумеровав их соответственно, если это необходимо. Предполагается, что в достаточно обширной области из $\mathbf{R}^n$ уравнение $\Phi_1(x) = C_1$ можно разрешить относительно x_n:

$$x_n = F_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) . \qquad (44)$$

Захват траектории поверхностью $\Phi_1(x) = C_1$ при $t > t_1$ обеспечивается заменой последнего дифференциального уравнения в системе (40) алгебраическим уравнением (44). Это эквивалентно тому, при $t > t_1$ динамическая подсистема (41) или (40) становится неактивной, и активируется следующая дифференциально-алгебраическая подсистема:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{x}_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n = f_1(t) + \varphi_1(x) \\ \text{...} \\ \overset{\circ}{x}_{n-1} + b_{n-1,1}x_1 + b_{n-1,2}x_2 + ... + b_{n-1,n}x_n = f_{n-1}(t) + \\ + \varphi_{n-1}(x) \\ x_n = F_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1});\ t_1 \le t \le t_2 , \end{array}\right\} \qquad (45)$$

которая имеет векторную форму

$$\frac{d}{dt}\big(A_1x(t_1)\big) + B_1x(t) = S_1(x,t), \quad t_1 \le t \le t_2 . \qquad (46)$$

Здесь

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n-1,1} & ... & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} f_1(t) + \varphi_1(x) \\ .... \\ f_{n-1}(t) + \varphi_{n-1}(x) \\ F_n(x,t) \end{bmatrix}.$$

Активированная в интервале $t_1 \le t \le t_2$ подсистема (45) ~ (46) определяет эволюцию траектории всей гибридной системы в указанном интервале при начальном условии

$$x(t_1 + 0) = x(t_1). \qquad (47)$$

Пусть в момент $t_2 (> t_1)$ траектория подсистемы (46) попадает на гиперповерхность $\Im_2 = \{x : \Phi_2(x) = C_2\}$ из множества (42): $\Phi_2(x(t_2)) = C_2$. Предполагается, что уравнение второй гиперповерхности разрешимо относительно переменной x_{n-1}:

$$x_{n-1} = F_{n-1}(x_1, ..., x_{n-2}, x_n) . \qquad (48)$$

Тогда при $t > t_2$ подсистема (45) перестает быть активной, и активируется новая дифференциально-алгебраическая подсистема

$$\frac{d}{dt}\big(A_2x(t)\big) + B_2x(t) = S_2(x,t), \quad t_2 \le t \le t_3, \qquad (49)$$

получающаяся из подсистемы (45) заменой дифференциального уравнения с производной $\overset{\circ}{x}_{n-1}$ на алгебраическое уравнение (48). Условие

$$x(t_2 + 0) = x(t_2) \qquad (50)$$

является начальным для решения подсистемы (49). По построению в (49) имеем

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n-2,1} & ... & b_{n-2,n-2} & b_{n-2,n-1} & b_{n-2,n} \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (51)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} f_1(t) + \varphi_1(x) \\ .... \\ f_{n-2}(t) + \varphi_{n-2}(x) \\ F_{n-1}(x_i \ne x_{n-1}) \\ F_n(x_i \ne x_n) \end{bmatrix}.$$

Начальный вектор $x(t_2)$ и траектория подсистемы (49) принадлежат пересечению Π_2 гиперповерхностей $\Im_1 = \{x : \Phi_1(x) = C_1\}; \Im_2 = \{x : \Phi_2(x) = C_2\}$.

Далее эволюция траектории $x(t)$ гибридной системы осуществляется рекуррентно аналогично предыдущему с переключением в момент t_k с подсистемы на интервале $t_{k-1} \le t \le t_k$ на новую активированную в интервале $t_k \le t \le t_{k+1}$ дифференциально-алгебраическую подсистему

$$\frac{d}{dt}\big(A_kx(t)\big) + B_kx(t) = S_k(x,t), \quad t_k \le t \le t_{k+1} . \qquad (52)$$

Матрицы A_k, B_k и вектор-функция $S_k(x,t)$ имеют структуру, аналогичную (51). В частности,

$$S_k(x,t) = \begin{bmatrix} f_1(t) + \varphi_1(x) \\ .... \\ f_{n-k}(t) + \varphi_{n-k}(x) \\ F_{n-k+1}(x_i \ne x_{n-k+1}) \\ .... \\ F_{n-1}(x_i \ne x_{n-1}) \\ F_n(x_i \ne x_n) \end{bmatrix}, \ k = 1,2,...,n-1. \qquad (53)$$

Здесь функция $F_{n-k+1}(x_i \neq x_{n-k+1})$ является правой частью решения

$$x_{n-k+1} = F_{n-k+1}(x_i \neq x_{n-k+1}), k = 1,2,...,n-1 \quad (54)$$

уравнения $\Phi_k(x) = C_k$ из системы (42) относительно переменной x_{n-k+1}.

Моменты t_k перестройки предыдущей подсистемы на последующую образуют упорядоченную последовательность с числом элементов не более $n-1$:

$$0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ... < t_m, m < n. \quad (55)$$

Матрица A_k в уравнении (52) вырождена: $\mathrm{rang} A_k = n - k$. В то же время пучок $\lambda A_k + B_k$ $(n \times n)$-матриц, характеристический для левой части уравнения (52), является регулярным. Это гарантирует единственность решения уравнения (52) с начальным условием

$$x(t_k + 0) = x(t_k) \quad (56)$$

при надлежащих ограничениях на нелинейные функции в правой части (53).

Резюмируем наши построения в виде теоремы существования и единственности описанной гибридной системы.

Теорема. *Пусть гибридная система состоит из начальной динамической подсистемы (41) в* $\mathbf{R}^n$ *и дифференциально-алгебраических подсистем (52), последовательно активируемых на временных интервалах* $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ *после попадания траектории гибридной системы на очередную гиперповерхность захвата* $\Im_k$ *из множества (42) в момент переключения* $t_k; k = 1,2,..., m(< n)$. *Предположим в (40) функции* $f_i(t)$ *непрерывны при* $t \geq 0$, *функции* $\varphi_i(x)$ *в (40) и функции* F_{n-k+1} *в (54) являются глобально Липшицевыми, а моменты переключений* t_k *упорядочены согласно неравенствам (55). Тогда для начального условия (43) существует единственная траектория* $x(t)$ *гибридной системы, определенная и непрерывная всюду при* $0 \leq t < +\infty$.

4. Выводы

Рассмотрена эволюция траекторий гибридной системы, состоящей из любого конечного числа непрерывных дескрипторных (дифференциально-алгебраических) подсистем. Алгоритм переключения с одной подсистемы на другую является дискретным, сохраняет непрерывность траекторий в фазовом пространстве $\mathbf{R}^n$ и в очередной момент переключения обеспечивает вложение траектории в очередную гиперповерхность захвата. Приведены достаточные условия существования и единственности непрерывной траектории гибридной системы на бесконечном промежутке времени. Описан модельный эколого-экономический пример динамики корпорации из трех предприятий, в котором гибридная система состоит соответственно из трех подсистем переключения траектории. Вопросы практических вычислений, дискретизации и оптимизации для описанных гибридных систем могут исследоваться с помощью результатов работ [9,12].

Литература: **1.** *Неймарк Ю.И.* О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования //Автоматика и телемеханика. 1957. №1. **2.** *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.:Наука, 1967. **3.** *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.:Наука, 1974. **4.** *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем//Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44, №11. С.1523-1533. **5.** *Van der Schaft A., Schumacher H.* An introduction to hybrid dynamical systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences. № 251. Berlin, 2000. **6.** *Johansson M.* Piecewise linear control systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences. № 284, Heidelberg. 2003. **7.** *Campbell S.L.* Singular Systems of Differential Equations – San Francisco, London, Melbourne: Pitman Publishing, Research Notes in Mathematics; I-Vol.40, 1980, 176 p.; 1982. II-Vol.61. 234 p. **8.** *Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А.* Численные методы решения сингулярных систем. Новосибирск: Наука, 1989. 223 с. **9.** *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии. 2006. 273 с. **10.** *Власенко Л.А., Лысенко Ю.Г., Руткас А.Г.* Математические модели динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования // Экономическая кибернетика: Международный научный журнал. 2009. N 5-6 (59-60). С. 64-71. **11.** *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с. **12.** *Бондаренко М.Ф., Власенко Л.А., Руткас А.Г.* Дискретное оптимальное управление дескрипторными системами с переменными параметрами // Проблемы управления и информатики. 2011. №3. С. 5-13. **13.** *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Поступила в редколлегию 15.07.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Власенко Л.А.

Руткас Андрей Анатольевич, аспирант ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14.