

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОНЕЧНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ СОСТОЯНИЕМ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

ГИБКИНА Н.В., ПОДУСОВ Д.Ю., СИДОРОВ М.В.  
(Системы и процессы управления)

Рассматривается задача оптимального управления нагревом однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью. Под оптимальным управлением в данной задаче понимается задание такого краевого режима на концах стержня, который в конечный момент времени обеспечит распределение температуры в стержне, наиболее близкое (в смысле некоторой метрики) к желаемому распределению температур.

### Введение

*Актуальность исследования.* Задачи оптимального управления процессами теплопроводности возникают во многих областях науки, техники и промышленного производства. В частности, такие задачи связаны с нагревом металла под прокатку или термообработку, сушкой и обжигом сыпучих материалов во вращающихся печах, обработкой металлических стержней для турбин энергетических электростанций и силовых промышленных установок, агломерацией, дистилляцией, получением монокристаллов, индукционным нагревом и многими другими производственными процессами [1].

Развитие и усложнение структуры производства приводит к тому, что проблемам моделирования режимов автоматизации технологических процессов посвящается значительное количество исследований. В ходе технического производства необходимо стремиться минимизировать затраты сырья, временных и человеческих ресурсов, одновременно с этим повышая качество производимой продукции в смысле близости ее показателей к установленным стандартам, а также полностью использовать все возможности оборудования с целью повышения производительности. Вследствие влияния различных факторов снижается качество выпускаемой продукции и увеличивается количество производственного брака, что приводит к необходимости разработки таких методов управления, которые бы обеспечивали наилучшее в некотором смысле протекание исследуемых процессов.

Формально речь идет о сложных системах, состояние которых характеризуется одним или несколькими параметрами, распределенными в пространстве и времени. В силу высокой сложности технологических производственных процессов и особенностей физических процессов распространения тепла, возникающих в ходе производства, для математического моделирования используются краевые задачи математической физики, а управление определяется функционалом специального вида, структура которого зависит от целей управления. В ряде случаев управляемую систему можно считать одномерной.

Теория оптимального управления позволяет подбирать параметры, которые обеспечат оптимальное в

некотором смысле функционирование исследуемого процесса.

Таким образом, разработка новых и усовершенствование существующих методов оптимального управления процессами теплопроводности является актуальной научной проблемой.

Для решения задач оптимального управления процессом распространения тепла в стержне используются сеточные методы в сочетании с методами оптимизации (методы проекции градиента и условного градиента) [3, 4, 8], методы, основанные на разложении в ряды Фурье [1, 2, 6] и другие методы [1].

Как известно, процессы теплопроводности описываются параболическими уравнениями [9, 10]. Кроме того, параболическими уравнениями описываются нестационарные процессы диффузии, фильтрации и др. Теоретическое исследование, а также различные постановки задач оптимального управления, описываемых параболическими уравнениями, проведено в [5, 11].

Каждый из перечисленных методов обладает рядом достоинств и недостатков. К основным недостаткам сеточных методов, например, следует отнести то, что решение задачи получается в виде массива чисел, дающих значение температуры только в отдельных точках расчетной области. Поэтому более эффективным представляется использование методов, основанных на представлении решения в виде непрерывной функции – линейной комбинации некоторых базисных функций.

*Цели и задачи исследования.* Целью настоящего исследования является разработка математических методов оптимального управления конечным температурным состоянием однородного стержня за счет управления температурным режимом на концах этого стержня.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- сформулировать соответствующую целям работы задачу оптимального управления процессом теплопроводности в однородном стержне;
- используя метод Фурье, получить решение задачи теплопроводности в однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью (без внутренних источников тепла) при заданных краевых и начальных условиях;
- рассмотреть различные способы задания управляющих воздействий (в виде отрезка ряда Фурье и в виде кубического сплайна);
- провести вычислительные эксперименты для разных параметров процесса оптимального управления конечным температурным состоянием однородного стержня.

### 1. Постановка задачи

Имеется однородный стержень  $0 \leq x \leq L$  с теплоизолированной боковой поверхностью (внутренние

источники тепла отсутствуют) и с заданным температурным режимом на его концах. Через  $u = u(x, t)$  обозначим температуру стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Пусть  $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ , – распределение температуры в стержне в начальный момент времени  $t = 0$ . Требуется, управляя температурным режимом на концах стержня, к заданному моменту времени  $T > 0$  распределение температуры в стержне сделать как можно более близким к заданному распределению температур  $y(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ .

Формальная постановка задачи оптимального управления конечным температурным состоянием стержня имеет вид: минимизировать функционал

$$J(\mu) = \|u(x, T; \mu) - y(x)\|_{L_2(0, L)}^2 = \int_0^L (u(x, T; \mu) - y(x))^2 dx \quad (1)$$

при условии, что  $u = u(x, t) = u(x, t; \mu)$  является решением начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3)$$

$$\left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=L} = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где  $a^2$ ,  $L$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – заданные положительные константы,  $\varphi(x)$  – заданная функция из  $L_2(0, L)$ .

В уравнении (2)  $a^2 = \frac{k}{\rho c}$  – коэффициент теплопроводности материала стержня,  $\rho$  – плотность материала,  $c$  – удельная массовая теплоемкость,  $k$  – коэффициент теплопроводности стержня.

Предполагается, что  $\mu = (\mu_1(t), \mu_2(t))$  – управление, принадлежащее множеству

$$M = \{\mu = (\mu_1(t), \mu_2(t)) \in L_2(0, T) \times L_2(0, T),$$

$$\mu_1^{\min} \leq \mu_1(t) \leq \mu_1^{\max}, \quad \mu_2^{\min} \leq \mu_2(t) \leq \mu_2^{\max} \quad (6)$$

почти всюду на  $[0, T]$ ,

где  $\mu_1^{\min} < \mu_1^{\max}$ ,  $\mu_2^{\min} < \mu_2^{\max}$ .

Возможны также и другие ограничения, накладываемые на управление  $\mu$  [1, 11].

Исследование разрешимости задачи (1)-(6) проводится аналогично схеме, приведенной в [4].

## 2. Построение оптимального управления

Сначала получим решение задачи (2)-(5) методом Фурье. Сделаем замену

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (7)$$

где  $v(x, t)$  – новая неизвестная функция, а

$$w(x, t) = \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(t) + \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(t). \quad (8)$$

Функция  $w(x, t)$  выбрана так, чтобы удовлетворять неоднородным краевым условиям (4)-(5).

Тогда для функции  $v(x, t)$  получим начально-краевую задачу с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$v|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (10)$$

$$\left(-\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_1 v\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$\left(\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2 v\right)\Big|_{x=L} = 0, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

где

$$f(x, t) = a^2 \left( \frac{2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(t) + \frac{2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(t) \right) - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2'(t) - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1'(t). \quad (13)$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(0) - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(0). \quad (14)$$

Собственные значения задачи (9)-(12) есть [7]

$\lambda_n = \left(\frac{\zeta_n}{L}\right)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\zeta_n$  –  $n$ -й положительный корень трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \zeta = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \zeta^2 - \beta_1 \beta_2 L^2}{(\alpha_1 \beta_2 L + \alpha_2 \beta_1 L) \zeta}, \quad (15)$$

а соответствующие им собственные функции  $\Phi_n(x)$  имеют вид [7]:

$$\Phi_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x + \theta_n),$$

где  $\theta_n = \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1 \sqrt{\lambda_n}}{\beta_1}$ .

Кроме того,

$$\|\Phi_n\|_{L_2(0, L)}^2 = \frac{L}{2} \left\{ 1 + \frac{(\alpha_1 \alpha_2 \zeta_n^2 + \beta_1 \beta_2 L^2)(\alpha_1 \beta_2 L + \alpha_2 \beta_1 L)}{(\alpha_1^2 \zeta_n^2 + \beta_1^2 L^2)(\alpha_2^2 \zeta_n^2 + \beta_2^2 L^2)} \right\}.$$

Тогда решение задачи (9)-(12) будем искать в виде ряда:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \Phi_n(x). \quad (16)$$

Подставив ряд (16) в уравнение (9) и начальное условие (10), получим, что функции  $T_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , являются решением задач Коши

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = f_n(t),$$

$$T_n(0) = \psi_n,$$

где

$$\Psi_n = \frac{(\Psi, \Phi_n)_{L_2(0,L)}}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2}, \quad (17)$$

$$f_n(t) = \frac{(f, \Phi_n)_{L_2(0,L)}}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2}, \quad (18)$$

и имеют вид:

$$T_n(t) = \Psi_n e^{-\lambda_n a^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

С учетом (8), (16) и (19) решение задачи (2)-(5) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n e^{-\lambda_n a^2 t} \Phi_n(x) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)} d\tau \cdot \Phi_n(x) + \\ & + \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(t) + \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Аппроксимацию функций  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  будем искать в виде

$$\mu_1(t) = \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(t), \quad \mu_2(t) = \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(t), \quad (21)$$

где  $\{Q_k\}$ ,  $\{R_j\}$  – системы базисных функций в  $L_2(0,T)$ .

В этом случае

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \varphi(x) - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(0) - \\ & - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(0), \\ f(x,t) = & \\ = a^2 \left( & \frac{2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(t) + \frac{2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(t) \right) - \\ & - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j'(t) - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k'(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_n = & \frac{1}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \left( \int_0^L \varphi(\xi) \Phi_n(\xi) d\xi - \right. \\ & - \sum_{j=1}^{m_2} r_j \frac{R_j(0)}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \int_0^L \xi^2 \Phi_n(\xi) d\xi - \\ & \left. - \sum_{k=1}^{m_1} q_k \frac{Q_k(0)}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \int_0^L (\xi-L)^2 \Phi_n(\xi) d\xi \right), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \left( \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(t) \frac{2a^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \int_0^L \Phi_n(\xi) d\xi + \right.$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(t) \frac{2a^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \int_0^L \Phi_n(\xi) d\xi - \\ & - \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j'(t) \frac{1}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \int_0^L \xi^2 \Phi_n(\xi) d\xi - \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k'(t) \frac{1}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \int_0^L (\xi-L)^2 \Phi_n(\xi) d\xi \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставив (21)-(23) в (20) и вычислив полученную функцию при  $t = T$ , получим

$$u(x,T) = \sum_{k=1}^{m_1} q_k A_k(x) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j B_j(x) + C(x), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A_k(x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \times \\ & \times \frac{1}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \left[ -Q_k(0) \int_0^L (\xi-L)^2 \Phi_n(\xi) d\xi \cdot e^{-\lambda_n a^2 T} + \right. \\ & + 2a^2 \int_0^L \Phi_n(\xi) d\xi \int_0^T Q_k(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (T-\tau)} d\tau - \\ & \left. - \int_0^L (\xi-L)^2 \Phi_n(\xi) d\xi \int_0^T Q_k'(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (T-\tau)} d\tau \right] + \\ & + (x-L)^2 Q_k(T), \quad k = \overline{1, m_1}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} B_j(x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \times \\ & \times \frac{1}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \left[ -R_j(0) \int_0^L \xi^2 \Phi_n(\xi) d\xi \cdot e^{-\lambda_n a^2 T} + \right. \\ & + 2a^2 \int_0^L \Phi_n(\xi) d\xi \int_0^T R_j(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (T-\tau)} d\tau - \\ & \left. - \int_0^L \xi^2 \Phi_n(\xi) d\xi \int_0^T R_j'(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (T-\tau)} d\tau \right] + \\ & + x^2 R_j(T), \quad j = \overline{1, m_2}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \int_0^L \varphi(\xi) \Phi_n(\xi) d\xi \cdot e^{-\lambda_n a^2 T}. \quad (27)$$

Таким образом, задача оптимального управления конечным температурным режимом нагревания одно-родного стержня (1)-(6) сводится к задаче оптимизации:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) = & \int_0^L \left( \sum_{k=1}^{m_1} q_k A_k(x) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j B_j(x) + C(x) - y(x) \right)^2 dx = \\ = & \sum_{k=1}^{m_1} q_k^2 \delta_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^2 \delta_j^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} q_k r_j \gamma_{kj} + \end{aligned} \quad (28)$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{m_1} q_k \sigma_k^{(1)} + 2 \sum_{j=1}^{m_2} r_j \sigma_j^{(2)} + \eta \rightarrow \min_{\substack{q_k, k=1, m_1, \\ r_j, j=1, m_2}},$$

где

$$\gamma_{kj} = \int_0^L A_k(x) B_j(x) dx, \quad k = \overline{1, m_1}, \quad j = \overline{1, m_2},$$

$$\delta_k^{(1)} = \int_0^L A_k^2(x) dx, \quad k = \overline{1, m_1},$$

$$\delta_j^{(2)} = \int_0^L B_j^2(x) dx, \quad j = \overline{1, m_2},$$

$$\sigma_k^{(1)} = \int_0^L A_k(x) (C(x) - y(x)) dx, \quad k = \overline{1, m_1},$$

$$\sigma_j^{(2)} = \int_0^L B_j(x) (C(x) - y(x)) dx, \quad j = \overline{1, m_2},$$

$$\eta = \int_0^L (C(x) - y(x))^2 dx.$$

Задачу оптимизации (28) нужно дополнить ограничениями на управление (6) или другими [1, 11].

### 3. Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительных экспериментов в задаче (1)-(6) при разных значениях  $m$  были выбраны следующие значения параметров:  $L=1$ ,  $a=1$ ,  $T=1$ . Начальное значение температуры в стержне  $\varphi(x)=0$ . Функция  $\mu_1(t)$  считается заданной, поэтому управление  $\mu$  заключается в определении функции  $\mu_2(t)$ .

Управление  $\mu_2(t)$  будем искать в виде отрезка ряда Фурье:

$$\mu_2(t) = v_{20} + \sum_{k=1}^m \mu_{2k} \sin \frac{\pi k t}{T} + \sum_{k=1}^m v_{2k} \cos \frac{\pi k t}{T}, \quad (29)$$

или кубического сплайна:

$$\mu_2(t) = \sum_{k=-1}^{m+1} r_k B_3 \left( \frac{t}{\tau} - k \right), \quad (30)$$

где

$$B_3(z) = \frac{1}{4} \left[ (z+2)_+^3 - 4(z+1)_+^3 + 6(z)_+^3 - 4(z-1)_+^3 + (z-2)_+^3 \right],$$

$$(f(z))_+ = \begin{cases} f(z), & f(z) \geq 0, \\ 0, & f(z) < 0, \end{cases} \quad \tau = \frac{T}{m}.$$

На управление  $\mu_2(t)$  накладываются следующие ограничения:

$$\mu_2(0) = 0,$$

$$0 \leq \mu_2(t) \leq 10, \quad t \in (0, T].$$

*Случай 1.* Пусть левый конец стержня поддерживается при температуре окружающей среды, равной 0, а управление заключается в задании при  $t \in (0, T]$  температурного режима на правом конце стержня. Этот случай соответствует следующим значениям па-

раметров в краевых условиях (4)-(5):  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$ . Функция  $\mu_1(t)$  известна:  $\mu_1(t) = 0$ .

В этом случае собственные значения  $\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2$ ,

$n = 1, 2, \dots$ , а собственные функции  $\Phi_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{L}$ ,

$n = 1, 2, \dots$ .

На рис. 1 приведен график функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления нагревом правого конца стержня вида (29) для  $m=5$ , а на рис. 2 – соответствующий этому случаю модуль разности желаемой  $y(x)=x$  и фактической  $u(x, T)$  температур в конечный момент времени  $T=1$ . При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,18 \cdot 10^{-4}.$$

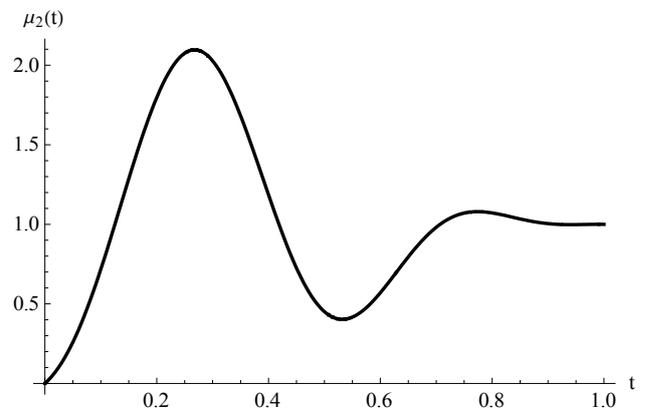


Рис. 1. График функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления нагревом правого конца стержня вида (29)  $\|u(x, T) - y(x)\|$

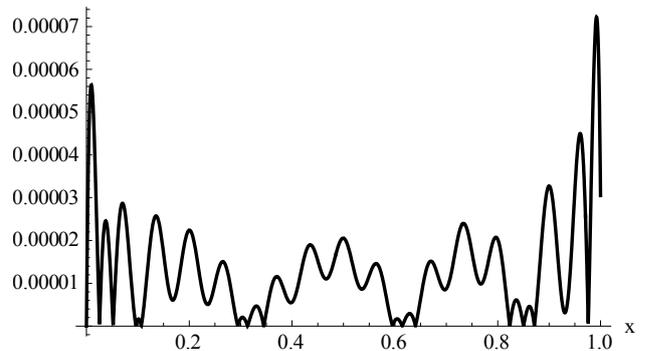


Рис. 2. График  $\|u(x, T) - y(x)\|$

На рис. 3 приведен график функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления нагревом правого конца стержня вида (30) для  $m=10$ , а на рис. 4 – соответствующий этому случаю модуль разности желаемой  $y(x)=x$  и фактической  $u(x, T)$  температур в конечный момент времени  $T=1$ . При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,13 \cdot 10^{-4}.$$

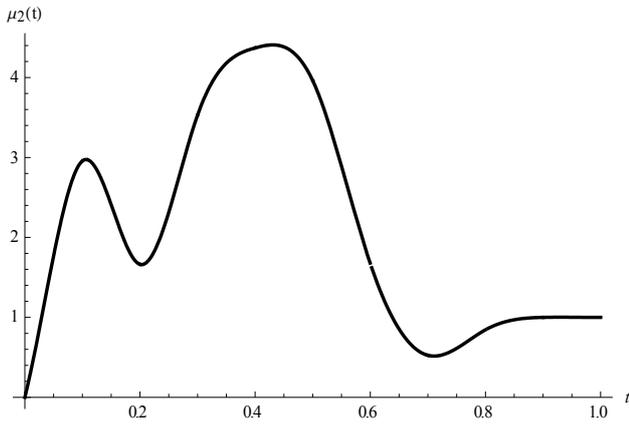


Рис. 3. График функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления нагревом правого конца стержня вида (30)  $|u(x,T)-y(x)|$

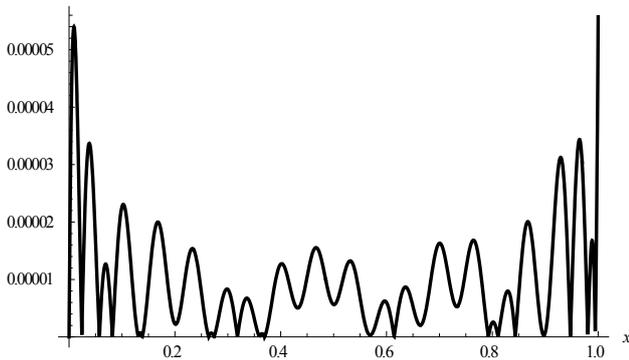


Рис. 4. График  $|u(x,T) - y(x)|$

*Случай 2.* Пусть левый конец стержня теплоизолирован, а управление заключается в задании при  $t \in (0, T]$  теплового потока на правом конце. Этот случай соответствует следующим значениям параметров в краевых условиях (4)-(5):  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ . Функция  $\mu_1(t)$  известна:  $\mu_1(t) = 0$ .

В этом случае собственные значения  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а собственные функции

$$\Phi_0(x) = 1, \quad \Phi_n(x) = \cos \frac{\pi n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

На рис. 5 приведен график функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления тепловым потоком на правом конце стержня вида (29) для  $m = 5$ , а на рис. 6 – соответствующий этому случаю модуль разности желаемой  $y(x) = x$  и фактической  $u(x, T)$  температур в конечный момент времени  $T = 1$ . При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,57 \cdot 10^{-1}.$$

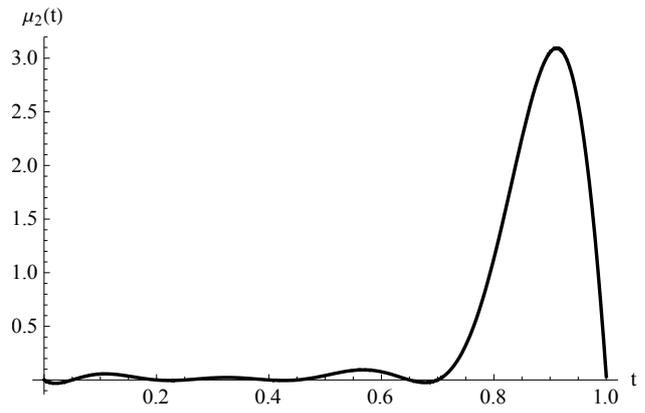


Рис. 5. График функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления тепловым потоком на правом конце стержня вида (29)

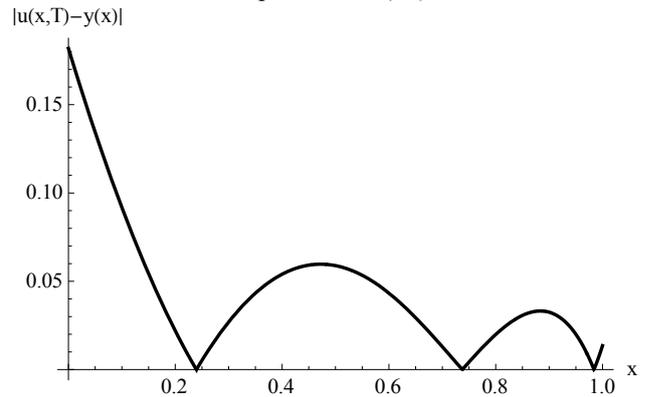


Рис. 6. График  $|u(x, T) - y(x)|$

На рис. 7 приведен график функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления тепловым потоком на правом конце стержня вида (30) для  $m = 10$ , а на рис. 8 – соответствующий этому случаю модуль разности желаемой  $y(x) = x$  и фактической  $u(x, T)$  температур в конечный момент времени  $T = 1$ . При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,48 \cdot 10^{-1}.$$

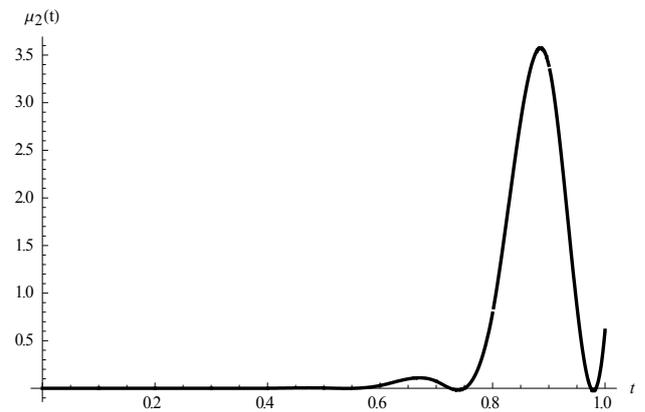


Рис. 7. График функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления тепловым потоком на правом конце стержня вида (30)

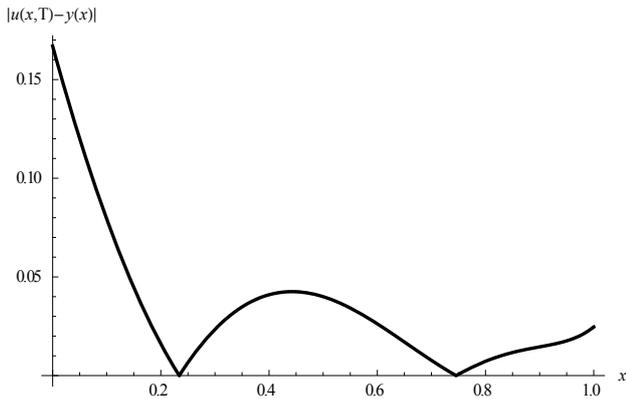


Рис. 8. График  $|u(x, T) - y(x)|$

*Случай 3.* Считаем, что на левом конце стержня происходит конвективный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона (температура окружающей среды равна 0), а управление заключается в задании при  $t \in (0, T]$  температурного режима на правом конце стержня. Этот случай соответствует следующим значениям параметров в краевых условиях (4)-(5):  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$ . Функция  $\mu_1(t)$  известна:  $\mu_1(t) = 0$ .

В этом случае собственное значение  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определяется как  $n$ -й положительный корень уравнения  $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} L = -\frac{\alpha_1 \sqrt{\lambda}}{\beta_1}$ , а собственные функции  $\Phi_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n}(x - L)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

На рис. 9 приведен график функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления нагревом правого конца стержня вида (29) для  $m = 5$ , а на рис. 10 – соответствующий этому случаю модуль разности желаемой  $y(x) = x$  и фактической  $u(x, T)$  температур в конечный момент времени  $T = 1$ . При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,39 \cdot 10^{-1}.$$

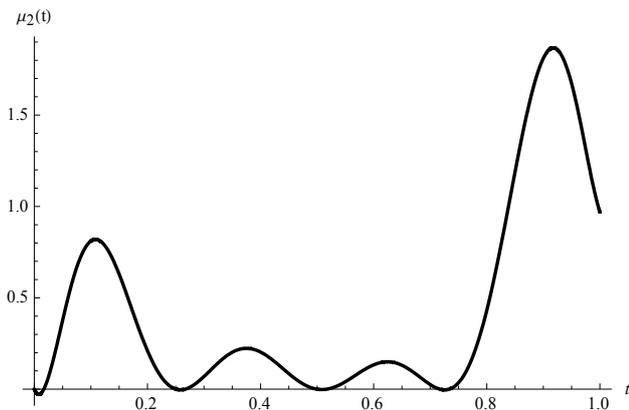


Рис. 9. График функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления нагревом правого конца стержня вида (29)

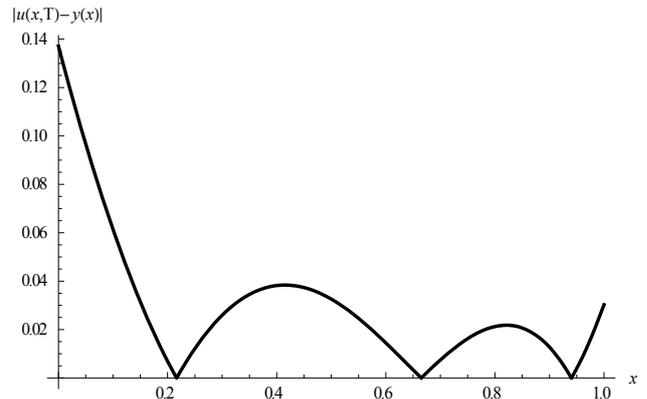


Рис. 10. График  $|u(x, T) - y(x)|$

На рис. 11 приведен график функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления нагревом правого конца стержня вида (30) для  $m = 10$ , а на рис. 12 – соответствующий этому случаю модуль разности желаемой  $y(x) = x$  и фактической  $u(x, T)$  температур в конечный момент времени  $T = 1$ . При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,38 \cdot 10^{-1}.$$

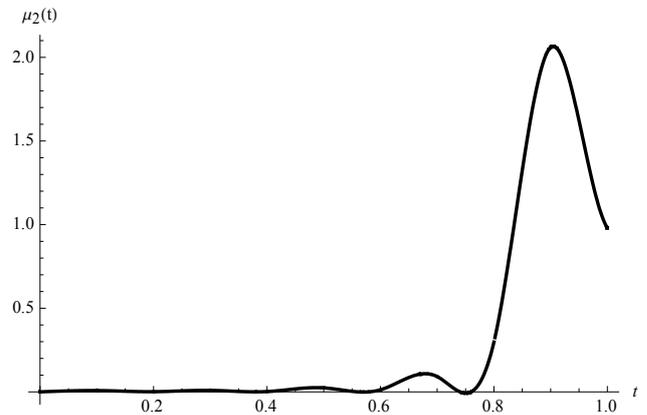


Рис. 11. График функции  $\mu_2(t)$  оптимального управления нагревом правого конца стержня вида (30)

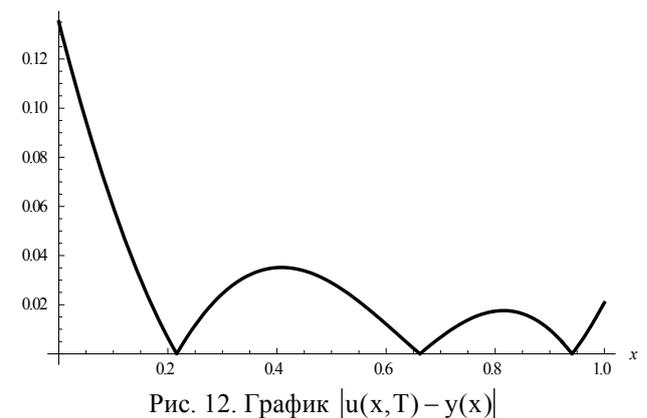


Рис. 12. График  $|u(x, T) - y(x)|$

### Выводы

В работе предложен метод построения оптимального управления конечным температурным состоянием однородного стержня. Предложено аппроксимировать управляющие функции отрезком ряда Фурье и кубическим сплайном. Проведены вычислительные эксперименты для различных температурных режимов, поддерживаемых на концах стержня. Видно, что

при использовании различных типов аппроксимации сохраняется структура оптимального управления нагретом стержня  $\mu_2(t)$ . Предложенный метод отличается от известных методов тем, что начально-краевая задача для температуры решается аналитически и оптимальное управление также ищется в аналитическом виде. Полученные результаты могут быть использованы при расчете оптимальных программ управления температурным режимом в производственных технических процессах. Выбор типа аппроксимации управляющего воздействия определяется техническими возможностями производственного процесса. Это и определяет научную новизну и практическую значимость полученных результатов.

**Литература:** 1. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с. 2. *Бутырин В.И., Фильштинский Л.А.* Оптимальное управление температурным полем в стержне при программном изменении зоны управления // Прикладная механика. 1976. Т. 12, №8. С. 115 – 118. 3. *Вабищевич П.Н.* Вычислительные методы математической физики. Обратные задачи и задачи управления. М.: Вузовская книга, 2009. 268 с. 4. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. Ч. II. Мн.: МНЦНМО, 2011. 434 с. 5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с. 6. *Лисковец О.А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. М.: Наука и техника, 1981. 344 с. 7. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с. 8. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с. 9. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Наука, 2004. 416 с. 10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с. 11. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.

Поступила в редколлегию 00.00.0000

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

**Гибкина Надежда Валентиновна**, канд. техн. наук, доц., доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, оптимальное управление и его приложения, математическая физика, актуарная и финансовая математика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

**Подусов Денис Юрьевич**, магистрант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование и оптимальное управление, программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

**Сидоров Максим Викторович**, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

**станом однорідного стрижня** / Н.В. Гибкіна, Д.Ю. Подусов, М.В. Сидоров // Радіоелектроніка та інформатика. 2014. № 3. С. 000 – 000.

Розглянуто задачу оптимального керування нагріванням однорідного стрижня з теплоізолюваною боковою поверхнею. Визначено такий крайовий режим на кінцях стрижня, що в кінцевий момент часу приводить до розподілу температури в стрижні, якомога близького до бажаного розподілу. Наведено результати розв'язання задачі оптимального керування для різних типів крайових умов.

Лл. 12. Бібліогр.: 11 назв.

UDC 517.977.56

**The optimal control of a homogeneous rod final temperature state** / N.V. Gybkina, D.Yu. Podusov, M.V. Sidorov // Radioelektronika i informatika. 2013. № 3. P. 000–000.

The problem of optimal control of heating a homogeneous rod with insulated lateral surface were considered. The boundary mode on the ends of the rod, which leads at the final moment of time to the temperature distribution in the rod as close as possible to the desired distribution, were defined. The results of solving the problem of optimal control for various types of boundary conditions were obtained.

Fig. 12. Ref.: 11 items.