УДК 519.21

А.Є. Басманов, В.А. Дікарєв, В.В. Семенець

Неоднорідні марковські процеси та деякі їх застосування. Фокусування й синтез: Монографія. – Харків, 2009. – 240 с.

ISBN 978-966-659-160-2

Монографія присвячена дослідженню умов збіжності ймовірностей неоднорідних марковських процесів до граничних значень. На основі доведених теорем про фокусування розподілів запропоновано конкретні алгоритми керування параметрами інфінітезимальної матриці марковського процесу, що забезпечує збіжність до заздалегідь заданих розподілів.

Розглянуто можливість відновлення інформації про стохастичну матрицю неоднорідного марковського процесу за стохастичними матрицями його фрагментів. Знайдено необхідні й достатні умови, під час виконання яких синтез є можливим. Для випадку нормального розподілу помилок у фрагментах побудовано статистичний критерій, що дає змогу перевірити вірогідність синтезованої матриці процесу.

Отримані результати використовуються для вивчення дифузійних процесів, які протікають у промислових екстракторах. Розглянуто й інші застосування марковських процесів, зокрема, модель нейронної пам'яті.

Монографія призначена для фахівців в області прикладної математики, системного аналізу й математичного моделювання. Може бути корисною аспірантам і студентам вузів.

Бібліогр. найменувань.: 194.

Рецензенти: В.А. Дорошенко, д-р фіз.-мат. наук, професор (ХНУРЕ);
Г.Ф. Кривуля, д-р техн.. наук, зав. каф. АПВТ (ХНУРЕ).

ISBN 978-966-659-160-2

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

А.Є. Басманов, В.А. Дікарєв, В.В. Семенець

НЕОДНОРІДНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ ТА ДЕЯКІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ. ФОКУСУВАННЯ Й СИНТЕЗ

Харків 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

А.Є. Басманов, В.А. Дікарєв, В.В. Семенець

НЕОДНОРІДНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ ТА ДЕЯКІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ. ФОКУСУВАННЯ Й СИНТЕЗ

РЕКОМЕНДОВАНО
науково-методичною радою
університету.
Протокол № 6 від 2.07.09

Харків 2009

Навчальне видання

БАСМАНОВ Олександр Володимирович,
ДІКАРЕВ Вадим Анатолійович
СЕМЕНЕЦЬ Валерій Васильович

НЕОДНОРІДНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ ТА ДЕЯКІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ. ФОКУСУВАННЯ Й СИНТЕЗ

Монографія

Відповідальний випусковий В.В. Семенець
Редактор Б.П. Косіковська
Комп’ютерна верстка Л.Д. Медведєва

ЗМІСТ

ВСТУП

Постійна увага до марковських процесів з боку теоретиків і прикладників, яка спостерігається вже більше сімдесяти років, пояснюється тим, що багато процесів, з якими доводиться мати справу в різних галузях науки й техніки, мають так звану марковську властивість. У силу цього, такі процеси описуються з тим або іншим ступенем точності за допомогою відповідним чином підібраного марковського процесу (або кількох марковських процесів, кожний з яких найточніше передає властивості реального процесу, що досліджується). Марковська властивість, яку з деяким огрубінням можна сформулювати так – «при фіксованому сьогоденні майбутнє не залежить від минулого», є характерною рисою багатьох процесів біології, екології, фізики й хімії, економіки й техніки. Загальновідома роль марковських процесів у радіотехніці й електроніці.

Серед багатьох робіт, присвячених розвитку теорії марковських процесів і її застосувань (див., наприклад, [7, 76, 68, 83, 89, 94] і бібліографію, що міститься в них), є роботи, в яких досліджується питання про збіжність імовірностей станів процесу $p_j(t)$ $(j=1,2,...)$ при $t \to \infty,$ де t – час, до своїх граничних значень: $p_j(t) \to \pi_j, \pi_j > 0$. Ці границі мають бути однаковими для будь-яких початкових розподілів імовірностей, заданих у початковий момент часу t_0. Марковські процеси, які мають цю властивість, називаються ергодичними, граничний розподіл імовірностей $\{\pi_j\}$ називають стаціонарним або фінальним, а теореми, у яких з'ясовується, при виконанні яких умов процес є ергодичним – ергодичними теоремами.

Важливість того, чи є конкретний процес ергодичним чи ні, є очевидною. Наприклад, якщо даний процес описує деякий технологічний режим, то важливо знати, чи будуть його основні робочі характеристики з часом локалізовані біля деяких, що не змінюються (або мало змінюються) у часі значень. Дійсно, виконання цієї умови означає, що через певний час матиме місце стабільність роботи зазначеного режиму.

Встановленню умов, при виконанні яких марковський процес є ергодичним, присвячено багато робіт (див., наприклад, роботи [123, 160] і бібліографію, що міститься в них).

Особливий інтерес з погляду застосувань мають теореми типу ергодичних для неоднорідних процесів Маркова. Дослідження цього питання було зроблено в ряді робіт (див., наприклад, [129, 73]). В них існування фінальних імовірностей з'ясовується як і раніше за умови $t \to \infty$. Відзначимо тут порівняно недавні роботи [30, 31], у яких розв'язок задачі про існування граничних імовірностей зроблено з використанням теорії стійкості систем звичайних диференціальних рівнянь.

Підкреслимо, що донедавна задача про існування фінальних імовірностей розглядалася лише за умови $t \to \infty$. Разом з тим, з погляду застосувань є цікавою задачу про встановлення умов, за яких фінальні ймовірності станів існують при $t \to t_0$, $t_0 < \infty$. Зокрема, прикладне значення має така задача: чи можна побудувати на $[s_0, t_0)$ $(t_0 < \infty)$ марковський процес із дискретним або неперервним часом (тобто задати на $[s_0, t_0)$ матрицю $P(s,t)$ перехідних імовірностей процесу) таку, щоб для будь-якого початкового розподілу ймовірностей, заданого в момент часу $t = s_0$, імовірності станів процесу при $t \uparrow t_0$ приймали задані граничні значення $\{\pi_j\}$. У такій ситуації кажуть, що процес фокусує на розподіл $\{\pi_j\}$ у момент t_0 [60 – 62]. Виявляється, що ця задача може бути розв'язана для процесів зі скінченною, зліченою і континуальною множиною станів для часового проміжку $[s_0, t_0)$ як завгодно малої тривалості.

Основні результати з цього питання містяться в роботах [38, 58, 59, 62, 63]. У роботі [2] за допомогою методу, викладеного в [62], описаний розв'язок задачі про фокусування для неоднорідного марковського процесу з дискретним часом. У роботі [57] сформульовано й розв'язано задачу про фокусування процесів зі скінченним або зліченим числом станів при локальних збуреннях частини його станів (збуреннях фрагментів процесу). В [64, 174] досліджено задачу про економіки, що розпадаються, з фіксацією основних економічних показників у момент розпаду в кожній з економік.

У всіх перерахованих публікаціях про фокусування розв'язок задачі (тобто побудова фокусувального процесу) існуватиме, якщо деяка підмножина елементів інфінітезимальної матриці процесу отримає сильні збурення в лівому півоколі точки фокусування t_0. Ці збурення мають бути певним чином пов'язані між собою. Необхідною умовою фокусування є вимога, щоб ці збурення були неінтегровані [62]. Підкреслимо, що для марковських систем, з якими доводиться мати справу на практиці, ця умова не може бути виконана, оскільки її реалізація пов'язана з нескінченними енерговитратами. Тому в [65] досліджується задача про поведінку при $t \uparrow t_0$ $(t_0 < \infty)$ ймовірностей станів процесу для випадку, коли зазначені збурення інтегровані.

Встановлено, якщо ці інтеграли досить великі, то при $t \uparrow t_0$ для всіх імовірностей станів $p_j(s_0,t)$ незалежно від початкового розподілу ймовірностей, заданого в момент s_0, виконується умова $p_j(s_0,t) \in (a-\sigma, a+\sigma)$, $a > 0$, $\sigma > 0$. У цьому випадку кажуть, що точка t_0 є точкою σ- фокусування процесу. Якщо в момент t_0 має місце фокусування або σ-фокусування, то t_0 називають точкою стабілізації процесу. Зі сказаного раніше випливає, що стабілізація процесу досягається, якщо надати елементам його інфінітезимальної матриці сильних збурень, певним чином пов'язаних між собою. Підкреслимо, якщо збурення, які забезпечують стабілізацію, локалізовані на як завгодно малих часових проміжках, то стабілізація процесу виконується за як завгодно малий проміжок часу.

Останнє твердження потрібно уточнити. Справа в тому, що для більшості реальних процесів характеристики середовища, в якому вони протікають (тиск, щільність, температура й ін.), не можуть істотно змінити свої значення за як завгодно малі проміжки часу. Так, реалізувати за допомогою сильних збурень стабілізацію процесу дифузії часток, зважених у воді, найпростіше в температурній зоні, локалізованій біля 4°С – температури, при якій вода має максимальну щільність. Відомо, що в цій зоні при заданих малих коливаннях температури величини, що визначають процес дифузії, мають максимальні варіації. Однак для отримання таких варіацій необхідно, щоб швидкі зміни в часі мала й температура води. Останнє вимагає часу навіть при значних енергетичних витратах.

На практиці часто виникає необхідність у стабілізації процесу не до певного моменту часу t_0, а на деякому часовому проміжку, наприклад, на проміжку $\alpha \le t \le \beta$. Вважають виконання для всіх $t \in [\alpha, \beta]$ умови

$$\left| \vec{p}(s_0,t) - \vec{\pi} \right| \le \sigma, \ \ \sigma > 0.$$

Тут $\vec{p}(s_0,t)$ – вектор, компонентами якого є ймовірності станів процесу в момент t, $s_0 < \alpha$ – момент, в який задається початковий розподілу процесу, $\vec{\pi}(t)$ – вектор-функція, в σ- околі якої проводиться стабілізація. Величина σ характеризує точність стабілізації. Зрозуміло, що задача про таке керування процесом, при якому мала б місце його стабілізація на заданому часовому проміжку, виникає під час розробки й налагодження технологічних режимів, пов'язаних з масовим виробництвом.

Задачу про стабілізацію розподілів імовірностей неоднорідних марковських процесів на скінченному часовому проміжку було поставлено й розв’язано в роботі [13]. У ній для процесів зі скінченною та зліченою множиною станів було встановлено, що стабілізацію можна реалізувати за допомогою спеціальним способом підібраних збурень (керуючих впливів) елементів інфінітезимальної матриці процесу. Кожне таке збурення локалізоване на часовому проміжку δt малої тривалості й, з погляду його впливу на процес, є «поштовхом», що впливає на процес так, щоб для всіх $t \in \delta t$ виконувалася зазначена умова стабілізації. Послідовність таких поштовхів, загалом кажучи, різних за ступенем їхнього впливу на процес і відповідним чином розподілених на проміжку $\alpha \le t \le \beta$, дозволяє провести стабілізацію на цьому проміжку. Цей підхід реалізується й для процесів з континуальною множиною станів.

В [13] показано, що вибір керуючих впливів (поштовхів) можна зробити багатьма способами. Це дає можливість для досліджуваного процесу отримати цей вибір найбільш оптимальним. Керування виробничим процесом за допомогою напрямних поштовхів з метою його стабілізації, як правило, є важким завданням. Потрібно з'ясувати, наскільки цей виробничий процес сумісний з керуванням, пов’язаним із зазначеними впливами: наскільки пристосовані до неминуче виникаючих при цьому аритміях устаткування й середовище, у якому протікає процес. Потрібно також виділити ті збурення (їх тривалість, плавність змін, амплітуда), які в конкретних умовах можна використовувати. Таким чином, задача про стабілізацію процесу не може бути розв’язана без всебічного аналізу конкретного виробничого процесу.

1 ДЕЯКІ ЗАДАЧІ, ЩО ПРИЗВОДЯТЬ ДО МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

1.1 Нейронна пам'ять

За сучасними уявленнями електрофізіології пам’ять тварин і людини можна поділити на короткочасну й довгострокову [23, 39, 80]. Перша пов’язана з первинною електрофізичною реакцією нейронів на стимул, друга – з наступними необоротними структурними змінами міжнейронних зв’язків. Під короткочасною пам’яттю розуміють здатність нейронної мережі зберігати (утримувати) деякі задані просторові конфігурації збурених нейронів протягом досить тривалого часу (порядку декількох секунд) для того, щоб могла відбутися структурна або біохімічна модифікація міжнейронних зв’язків, активних у цих конфігураціях. Короткочасна пам'ять, очевидно, необхідна не тільки для запису інформації в довгострокову пам'ять, але і для зчитування з неї сигналів у формі електричної активності, що нагадує початково записану конфігурацію.

Основне завдання, що виникає під час дослідження зв’язку між короткочасною та довгостроковою пам’яттю, полягає в наступному. Нехай у заданій нейронній мережі встановлено зв’язки між її елементами й задано ймовірності переходу граничного потенціалу для будь-якої пари її елементів. Чи можна підібрати зазначені зв’язки так, щоб у мережі з’явилася короткочасна пам’ять? Поява короткочасної пам’яті на виділеній групі нейронів має місце в тому випадку, коли всі (або майже всі) нейрони з цієї групи збурюються протягом деякого проміжку часу достатньо часто.

Складність задачі у тому, що необхідний час збереження конфігурацій груп збурених нейронів має на 2 – 3 порядки перевищувати час релаксації одиночних незалежних нейронів (він становить усього кілька десятків мілісекунд). Тому, якщо розв’язок існує, то тільки за рахунок узгодженої активності всіх елементів мережі, оскільки в задачі виключена можливість збільшення пам’яті одиночного нейрона за допомогою будь-яких більш повільних субклітинних процесів. Ця задача більш детально розглядається у другому розділі.

Цей напрямок вказав на принципово нові можливості моделювання пам’яті та дав початок розробці загальних методів аналізу багатокомпонентних систем. Однак отримані тут результати не дозволяють з’ясувати, чи реалізується подібний критичний режим фіксації короткочасної пам’яті в нервовій системі.

У роботах [23, 39, 80] виникнення й фіксація короткочасної пам’яті досягалися зведенням задачі збурення нейронної мережі до імовірнісної задачі про випадкові блукання в ній.

1.2 Потік крові в мережі дрібних судин

В останні десятиліття фізіологи й біофізики досліджують процеси кровотоку в мережі дрібних судин. При цьому і експериментатори, і теоретики в основному вивчають поведінку одиночних судин. Разом з тим є факти, що вказують на необхідність розглянути взаємодію дрібних кровоносних судин у мережі одна з одною. Найбільш істотним з них є факт просторової неоднорідності тканинного кровотоку, що спостерігається в багатьох органах. Очевидний приклад цього – кровотік у шкірі обличчя й долонь. Червоні й білі плями на обличчі й долонях – це результат неоднорідного кровонаповнення. Неоднорідність кровотоку була зареєстрована й у корі головного мозку. Про можливий неоднорідний розподіл кровотоку в серцевому м’язі свідчать мікроінфаркти (точкові омертвіння) міокарда.

Слід зазначити, що судини, заповнені кров’ю, утворюють досить складну мережу, і рух крові в артеріолах, капілярах і венулах відбувається не завжди тими самими шляхами. Так кров з артеріальної гілки у венозну може перетікати як коротким шляхом, так і більш довгим. Очевидно, що коли кров тече коротким шляхом, то опір течії менший, ніж у тому випадку, коли кров тече більш довгим шляхом. А тому просторова структура кровотоку може істотно впливати й на опір судинної мережі. Відомий факт 20-кратного збільшення кровотоку в м’язі при фізичному навантаженні в порівнянні зі станом спокою при всього лише 20%-му збільшенні градієнта тиску може пояснюватися просторовим упорядкуванням кровотоку.

В основному розглядаються два механізми, що впливають на просторову структуру кровотоку в мережі дрібних судин і її гідродинамічний опір.

1. Зміна структури мережі за рахунок того, що в її склад входять не тільки пасивні судини – капіляри, але й активні, що мають м’язовий шар у стінці (артеріоли, венули, артеріовенозні шунти). Вони можуть відкриватися й закриватися залежно від внутрішньосудинного тиску й м’язової напруги й тим самим змінювати структуру шляхів, якими може рухатися кров.

2. Зміна спрямованості кровотоку в окремих ділянках мережі при одній і тій самій конфігурації сукупності відкритих судин.

Реальна мережа судин має дуже складну структуру. На першому етапі дослідження окремо взятої ділянки кровоносної мережі, мережа, що відповідає цій ділянці, замінюється двовимірною решіткою. Більш точне моделювання процесу кровотоку проводять за допомогою заміни досліджуваної мережі відповідним чином підібраним графом [4, 107, 108]. Потім кровотік у мережі вивчається за допомогою процесу випадкових блукань на зазначеному графі. Цей процес є неоднорідним.

1.3 Атласи економіко-виробничих показників і зв'язків

Відомо, що багато процесів, що досліджуються в економіці, зручно описувати за допомогою відповідним чином побудованих графів. Основною моделлю, що описує процес виробництва, є граф (система залежностей і відносин), що відображує сукупність усіх виробничих, економічних та інформаційних зв’язків між різними цехами та службами підприємства. Вершини цього графа зображують відповідні підрозділи підприємства, а його дуги – зв’язки між його підрозділами. До зв’язків відносять потоки вантажів, потоки виготовленої продукції, заготовок і комплектуючих виробів, потокові лінії мережі силових кабелів, інформаційні канали диспетчерської та інших служб.

Економічна діяльність будь-якого великого підприємства (корпорації) настільки складна й різнобічна, що часто її описують не одним графом, а їх набором (атласом). Графи, що входять в атлас, пов’язані між собою. Це – зв’язки між різними ланками й виробничими процесами підприємства. Вони, загалом кажучи, змінюються в часі. Ці зміни можуть бути враховані, якщо розглядати процеси на графах з характеристиками, що змінюються в часі.

Окремі графи, що складають атлас, пов’язані один з одним загальними дугами й вершинами. При виконанні деяких умов стабілізація процесу на одному з графів призводить до його стабілізації на всіх графах атласу – абсолютна стабілізація. Далі будуть наведені умови, при виконанні яких абсолютна стабілізація можлива (або не має місця).

Всі вершини й дуги графа повинні мати дані про процес виробництва, економічні витрати, втрати, планові показники та відхилення від них. Щоб ці дані описували динаміку виробництва й витрат, потрібно фіксувати їх досить часто. У ряді випадків, наприклад, під час дослідження періодичності деякого технологічного процесу, слід мати у своєму розпорядженні такі дані для малих проміжків часу. Ці дані записують у вигляді матриці техніко-економічних показників (МТЕП), елементи якої характеризують певні сторони процесу виробництва, економічні, матеріальні та трудові витрати.

Окремі фрагменти виробничого графа часто піддаються випадковим впливам, які, діючи на пов'язані з ними вершини, вносять випадкові збої в роботу цехів і інших служб. Ці збої негативно впливають на виробничі цикли, оскільки приводять до різких коливань їхніх характеристик. Прогнозування й оцінювання таких коливань ґрунтується на статистичних даних, що містяться в МТЕП, і їх теоретико-імовірнісному аналізі.

Особливий інтерес становлять фрагменти виробничого графа, які стійкі відносно малих збурень програмних показників, а також такі фрагменти, усередині яких характеристики виробничих процесів є відомими функціями від цих збурень. Виявлення таких фрагментів дозволяє досить точно прогнозувати процес виробництва усередині кожного з них. Такі фрагменти вигідно відрізняються від фрагментів, усередині яких навіть малі збурення робочих характеристик призведуть до істотних, а в деяких випадках і до непередбачених відхилень виробничих процесів від норми.

Нестійкість проявляє себе на тих фрагментах, на яких виробничі процеси найбільше піддаються впливу випадкових факторів, відхиленням і збоям. Виявлення й дослідження таких фрагментів є важливим завданням. Ці фрагменти є нестійкими не для всіх збурюючих режимів. Найчастіше нестійкість проявляється для певних наборів збурень. Такі набори (для кожного нестійкого фрагмента) і необхідно фіксувати в першу чергу. Це можна зробити за допомогою статистичних даних, що містяться в МТЕП.

1.4 Моделювання економік, що розпадаються, за допомогою неоднорідних марковських процесів

В [64, 65, 174] досліджено можливість такого керування розпадом єдиної економічної структури на незв'язані або слабко зв'язані структури, при якому їхні основні показники в моменти часу, близькі до моменту розпаду або співпадаючі з ним, приймають будь-які наперед задані значення або локалізуються поблизу них. Розпад економік досліджується за допомогою неоднорідних марковських процесів з неперервним часом і скінченним числом станів. Передбачається, що розпад відбувається за скінченний проміжок часу. Його аналіз здійснюється за допомогою рівнянь Колмогорова [94] з інфінітезимальною матрицею $\Lambda(t)$, заданою на часовому проміжку $[s_0, t_0]$, на якому вивчається розпад. Під станом j, $j = 1, ..., n$, досліджуваного процесу $\xi(t)$ слід розуміти один з можливих станів досліджуваної економіки. Він може описуватися заданням основних його економічних показників.

На основі рівнянь Колмогорова створено модель, що імітує розпад економічної системи. З її допомогою проведено ряд експериментів. Підтверджено, що при виконанні ряду певних умов, у певні моменти часу відбувається стабілізація процесу. Встановлено, що характер розпаду процесу залежить від виду розкладання інфінітезимальної матриці на невзаємодіючі або майже невзаємодіючі блоки. Був реалізований алгоритм побудови матриці $\Lambda(s)$, що описує процес стабілізації.

Більш детальний аналіз динаміки економік, що розпадаються, з урахуванням їх зв'язків можливий на основі аналізу процесів випадкових блукань на графах.

Зі змісту цього підрозділу видно, що розв'язок задач фізіології, нейрофізіології й економіки вимагає залучення методів імовірнісного аналізу – дослідження процесів випадкових блукань на графах. Процеси випадкових блукань використовуються під час вивчення й ряду інших питань. До них належать задачі про еволюцію рослинних конгломератів [85], про структури рослинного покриву, стійкі до зовнішніх впливів [86]; про еволюцію мас часток при їхніх блуканнях зі склеюванням [189], а також задачі, пов'язані з вивченням складних систем [116, 141]. Всі перераховані задачі пов'язані з дослідженням неоднорідних процесів. Підкреслимо, що до сьогодні аналіз процесів неоднорідних блукань на графах не був проведений. Зокрема, не були відомі умови, під час виконання яких процес випадкових блукань буде стабілізований за скінченний проміжок часу.

1.5 Опис процесів, що відбуваються в рідких сумішах

Відомо, що процеси, пов'язані з виготовленням різних рідких сумішей, є процесами дифузії. Далі для визначеності під рідкою сумішшю розумітимемо фармакологічний розчин (фармакологічний сироп). Викладений нижче підхід в описуванні процесів розчинення застосуємо й до інших рідких сумішей. Відомо, що крім низькочастотних коливань, присутність яких пов'язана з роботою устаткування, вагомий внесок у процес обробки лікарської сировини вносять слабкі електромагнітні поля, що виникають при турбулентних рухах рідини [111], та швидкозмінні в часі вібрації. Часто їхню високочастотну компоненту подано досить масивно. Присутність таких вібрацій в оброблюваному фармакологічному розчині обумовлена сумою хаотичних і випадкових впливів. Ці впливи виникають через недосконалість роботи устаткування й степінь його зношеності (шорсткості, мікротріщини, раковини в передавальних ланках) і неминучі перешкоди, які привносять у робочий режим діючого устаткування шуми в силових кабелях, випадкові електромагнітні поля, а також сама природа процесу й інші фактори, які звичайно важко виявити. Опишемо їх.

Відомо, що коли провідне (і навіть слабко провідне) середовище знаходиться в магнітному полі, то при гідродинамічних рухах у ньому індукуються електричні поля й виникають електричні струми. Оскільки фармакологічний сироп аж до останніх етапів його приготування перемішують, то присутність цих рухів є неминучою. Відомо також, що слабкі магнітні поля можуть бути в рідких розчинах навіть у заключний період розчинення їхніх компонент. Але на струми в магнітному полі діють сили, які можуть впливати на рух рідкого розчину. З іншого боку, ці струми змінюють і саме магнітне поле. Таким чином, виникає складна картина взаємодії магнітних і гідродинамічних явищ, що має розглядатися на основі спільної системи рівнянь поля й рівнянь руху рідини. Такий підхід дозволяє виявити лише якісну картину взаємодії зазначених полів з рідким середовищем.

До сказаного необхідно додати наступне. У рідкому розчині на всіх етапах розчинення його компонент можуть виникати турбулентні рухи, які призводять до появи магнітних полів. Навіть у слабкопровідній рідині завжди існують малі збурення, викликані факторами, сторонніми відносно самого руху рідини (наприклад, магнітомеханічними ефектами в обертових ділянках рідини й тепловими флуктуаціями), що супроводжуються появою дуже слабких електричних і магнітних полів. Подальша поведінка полів – чи будуть вони в результаті турбулентного руху в середньому помітно підсилюватися або згасати – залежить від властивостей самої рідини. Зазвичай має місце їхнє згасання. Тоді доводиться мати справу з чисто гідродинамічною турбулентністю, що створює тло, на якому розвиваються малі магнітні збурення.

2 НЕЙРОННА ПАМ'ЯТЬ

Міркування, що наводяться в даному розділі, висновки й рисунки взято авторами з роботи [80].

2.1 Вступ і постановка задач

За сучасними уявленнями електрофізіології пам’ять тварин і людини можна поділити на короткочасну й довгострокову. Перша пов’язана з первинною електрофізичною реакцією нейронів на стимул, друга – з наступними необоротними структурними змінами міжнейронних зв’язків. Під короткочасною пам’яттю розуміють здатність нейронної мережі зберігати (або утримувати)
деякі задані просторові конфігурації збурених нейронів досить тривалий час (порядок декількох секунд) для того, щоб могла відбутися структурна або біохімічна модифікація міжнейронних зв’язків, активних у цих конфігураціях. Короткочасна пам’ять, очевидно, необхідна не тільки для запису інформації в довгострокову пам’ять, але також і для зчитування з неї сигналів у формі електричної активності, що нагадує первісну записану конфігурацію.

Основна задача полягає ось у чому. Припустимо, що електрична активність одиночних незалежних нейронів описується деякою досить правдоподібною моделлю (наприклад, відомою моделлю першого проходження граничного рівня випадковим мембранним потенціалом з експонентним загасанням [92]). Уведемо локальні зв’язки між нейронами, тобто такі зв’язки, щоб пресинаптичний імпульс, що надходить на даний нейрон, помітно змінив величину мембранного потенціалу лише в тому випадку, якщо він надійшов від нейрона, розташованого в деякому околі даного. Чи можна підібрати силу цих зв’язків так, щоб у мережі з’явилася короткочасна пам’ять?

Складність задачі в тому, що необхідний час збереження конфігурацій має на 2 – 3 порядки перевищувати час релаксації одиночних незалежних нейронів. (Останнє визначається здатністю незалежних нейронів швидко адаптуватися й реагувати на збурення, що надходять). Тому, якщо й існує розв’язок, то тільки за рахунок погодженої активності всіх елементів мережі, оскільки в нашій задачі виключена можливість збільшення пам’яті одиночного нейрона за допомогою будь-яких більш повільних субклітинних процесів.

Найближча аналогія – ефекти колективності, що досліджуються в статистичній фізиці. Ця аналогія була відзначена в серії робіт групи московських математиків [33, 34], спочатку пов'язаної з моделюванням деяких відділів центральної нервової системи [90, 142]. Спочатку за допомогою машинних експериментів було виявлено, а потім точно доведено, що дуже довгий ланцюжок послідовно з'єднаних самозбуджених нейроноподібних елементів (формальних нейронів із внутрішніми шумами) має нетривіальну поведінку, яка нагадує явище фазового переходу: при досить низьких, але ненульових шумах система неергодична. Таким чином, така мережа має кілька стаціонарних станів, у які вона може потрапити залежно від початкових умов і тим самим може як завгодно довго пам'ятати ці початкові стани.

Цей напрям вказав на принципово нові можливості моделювання пам'яті та поклав початок розробці загальних методів аналізу багатокомпонентних систем. Однак отримані тут результати самі по собі не дозволяють з'ясувати, чи реалізується подібний критичний режим у нервовій системі. Причина, звичайно, в тому, що основна модель, задача Ставської, ґрунтується на припущеннях, що не відповідають реальності (одномірна решітка, дискретний час, формальний нейрон). Щодо цього більше обнадіює досвід вивчення критичних явищ за допомогою так званої кінетичної моделі Ізінга [178], головним чином через можливість установити нейронні аналоги фундаментальних фізичних понять – температури, намагніченості, сприйнятливості, – тісно пов'язаних з експериментальними вимірами. На жаль, описана модель постулює малоправдоподібні для нейронів припущення:

A. Всі стаціонарні стани гіббсовські.

B. Виконується принцип детального балансу («оборотність у часі»).

C. За відсутності взаємодії стани окремого елемента або ±1, або розподілені симетрично.

Природно, що перевірка хоча б приблизної узгодженості їх з електрофізіологічними характеристиками має бути важливою складовою частиною задачі, разом з дослідженням можливості відмовитися від цих припущень. Необхідність останнього можна зрозуміти, якщо врахувати, що нейронна мережа – неавтономна, відкрита система, і її часова еволюція, на відміну від кінетичної моделі Ізінга, визначається не гамільтоніаном, а нелінійним функціоналом від стану нейронів у даний момент.

Спроба пов'язати модель Ізінга з довгоживучими станами в мозку міститься у великій серії робіт [183, 190]. Всі їхні результати, особливо більш ранні, здаються не пов'язаними з припущеннями A, B, C, а випливають із наступного трохи, на перший погляд, загадкового постулату:

D. Імовірність спрацьовування i -го одиничного нейрона дорівнює

$$(1+\exp(-\beta x_i))^{-1},$$

де x_i – сумарний мембранний потенціал i -го нейрона за винятком граничного рівня; β – константа.

Насправді, як відзначено в [190], постулат D запозичений із квантової механіки; там він випливає з більш фундаментальних припущень A, B, C, крім того там x_i, – локальний гіббсовський потенціал i -го спіну, а β – зворотна температура. Тому не дивно, що умови існування короткочасної нейронної пам'яті виявилися в цих роботах тотожними умовам існування далекого порядку в магнітній системі. Виникає природне запитання, у чому ж специфіка нервової системи.

У роботі [190] наведено евристичне обґрунтування постулату D у термінах нейрональних процесів, при цьому величина $1/\beta$, ідентифікована як середньоквадратичне значення синаптичних шумів. Автори в майбутньому замість постулату D обіцяли розглянути задачу про перше досягнення границі випадковим процесом. Зазначимо, що ця задача є досить близькою до розглянутої основної задачі.

У цілому оцінити результати цього напрямку досить важко, оскільки роботи виконані на фізичному рівні строгості й нерідко виникає сумнів у тому, що вони погоджуються з результатами імітаційних моделей [178]. Так, застосований матричний формалізм, справедливий тільки при високих температурах, змушує думати, що вони не описують більших термінів релаксації, які спостерігаються в багатьох машинних експериментах (див. рис. 2.5). Тим самим проблема короткочасної нейронної пам'яті ще очікує свого розв'язку.

Подальше просування в цьому напрямку ускладнюється тим, що для більш загальної моделі Ізінга без припущень B і C невідомо майже ніяких математичних результатів про існування фазових переходів. Тому роль імітаційного моделювання на ЕОМ різко зростає.

Але особливо великою є роль імітаційної моделі для організації експериментів з виявлення критичного режиму в нервовій системі. Тут найбільший
інтерес становлять виміри сили синоптичних зв'язків. Однак використання для цього звичайних кроскореляційних вимірів неминуче зіштовхнеться з великими труднощами через принципову нестаціонарність «метастабільної» фази критичних явищ.

Отже, основна задача про існування короткочасної нейронної пам’яті може розділюватися на такі відносно самостійні завдання:

1) методом моделювання на ЕОМ виявити й дослідити критичний режим, що призводить до неергодичної поведінки мережі, складеної з неформальних нейронів, з’єднаних між собою за двовимірною моделлю Ізінга;

2) розробити метод аналізу мережі без припущень А, В, С і якісно пояснити поведінку основних макрозмінних системи – середнього рівня і її дисперсії;

3) обґрунтувати гіббсовість стаціонарних станів мережі (припущення А) при більш слабких припущеннях, ніж В і С, і описати його можливу неодиничність як прояв короткочасної пам’яті;

4) розв’язати задачу про перше досягнення випадковим процесом криволінійної границі та застосувати її для знаходження нейронних аналогів парного потенціалу, температури й зовнішнього поля;

5) розробити новий метод ідентифікації взаємодії між нейронами й дати рекомендації з його застосування при пошуку критичного режиму в реальних нейронних мережах;

6) запропонувати структурно-функціональну модель нейронної пам’яті, що реалізує критичний режим стосовно конкретної нейронної структури мозку.

У даному розділі будуть розглянуті лише перша й частково остання задачі.

2.2 Опис імітаційної моделі

Основна модель нейронної мережі в цілому випливає з допущень аналітичної моделі [92], але має деякі відмінності, частково обумовлені реалізацією на ЕОМ, а частково пов’язані з уточненням структур зв’язків (за моделлю
Ізінга). Так, час у моделі є дискретним, один крок $\Delta\tau$ відповідає часу абсолютної рефрактерності.

1. Поріг нейрона враховує абсолютну й відносну рефрактерність і має вигляд, зображений на рис. 2.1, де $t_{абс} = \Delta\tau$, $tg\psi = 3$.

2. Кожен нейрон двосторонньо пов’язаний із чотирма сусідніми елементами, розташованими у вузлах плоскої решітки. Всі ваги зв’язків однакові й
дорівнюють амплітуді стрибка a, на який збільшується мембранний потенціал даного нейрона при надходженні на нього імпульсу збурення від сусідів. Граничні умови періодичні.

3. За відсутності вхідних імпульсів мембранний потенціал кожного нейрона згасає лінійно до потенціалу спокою.

4. Після кожного перетину мембранним потенціалом порога нейрон посилає імпульс збурення на сусідні нейрони, а його мембранний потенціал стає рівним потенціалу спокою. Поріг після збурення приймає значення $+\infty$, наступну зміну порога показано на рис. 2.1 (при цьому нуль на осі часу відповідає моменту збурення нейрона).

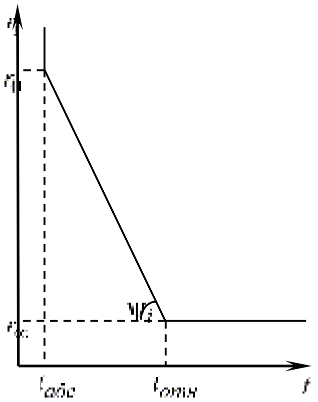


Рисунок 2.1 – Крива порога

5. До описаного в п.3 мембранного потенціалу доданий стаціонарний гауссовський шум з нульовим середнім і дисперсією σ^2.

Модель має три основних параметри $a,\ \sigma,\ r_\infty$. Інші параметри фіксовані, причому в більшій частині експериментів r_∞ також фіксується й наведені значення a та σ нормовані на r_∞.

Станом мережі називається решітчаста конфігурація з нулів і одиниць, що відповідають збуреному $(x_i^t = 1)$ або незбуреному $(x_i^t = 0)$ нейрону. Рівнем активності мережі називатимемо величину

$$\overline{x}^t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^t, \qquad (2.1)$$

де N – число нейронів у мережі. В розглянутих нижче мережах вибиралося від 400 до 2500 модельних нейронів.

2.3 Чисельні експерименти

Динаміка рівня активності: вихід на стаціонарний рівень. Дослідження нашої моделі ми почнемо з аналізу досить простої характеристики роботи мережі – рівня активності $\overline{x}^t$. Розглянемо реалізації $\overline{x}^t$ за різних значень параметрів моделі a й σ, але при одній і тій самій початковій конфігурації (пляма з одиниць на тлі нулів з $\overline{x}^0 = 0{,}024$, рис. 2.2).

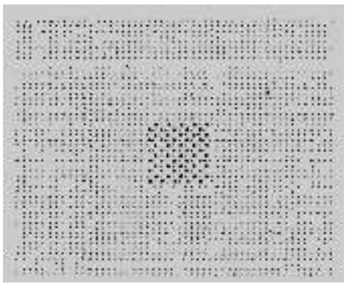


Рисунок 2.2 – Початкова конфігурація

Задаючи різні початкові значення датчика псевдовипадкових чисел, ми отримали різні реалізації $\overline{x}^t$ для фіксованих значень параметрів мережі й початкової конфігурації.

Всі реалізації $\overline{x}^t$ поводяться так: якийсь час після початку є тренд рівня активності, потім тренд зникає й $\overline{x}^t$ коливається навколо деякого стаціонарного значення, що залежить від a і σ. При a= 0,84, σ= 0,2 спостерігається різке збільшення τ. Ці значення параметрів a і σ ми називатимемо критичними. Час виходу на стаціонарний рівень у критичній ситуації зростає зі збільшенням розмірів мережі (рис. 2.6).

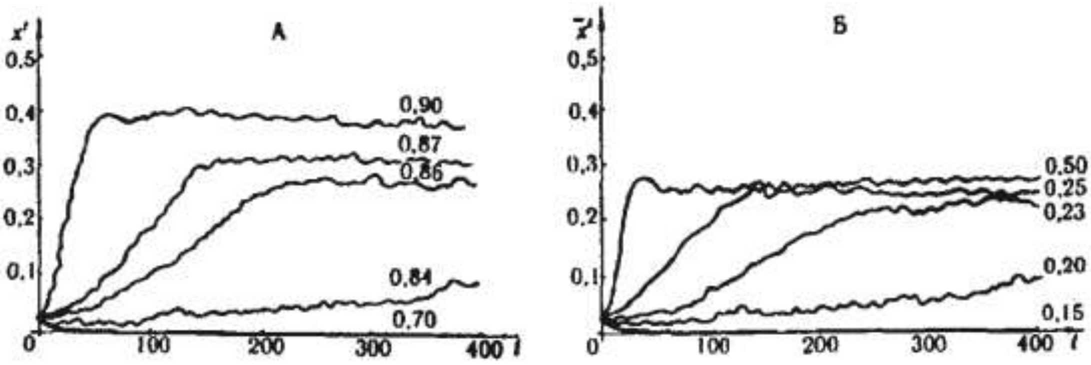


Рисунок 2.3 – Реалізації $\overline{x}^t$: А – за різних значень a ($\sigma = 0{,}2$); Б – за різних значень σ ($a = 0{,}84$). В обох випадках $r_0 = 30$, $r_\infty = 10$

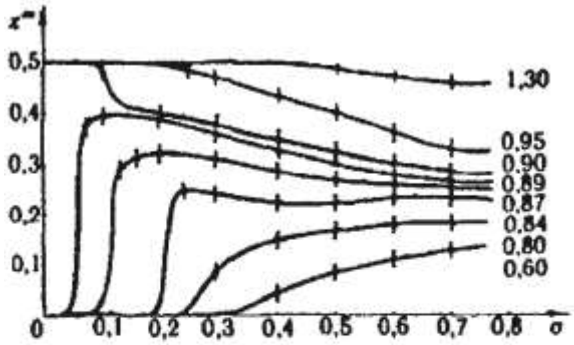


Рисунок 2.4 – Залежність стаціонарного рівня активності від σ
за різних значень a. Параметри порога як на рис. 2.3

Для мережі із критичними параметрами є характерним ще один ефект. Різні реалізації $\overline{x}^t$ сходяться не до одного (як у некритичному випадку), а до двох різних стаціонарних значень (рис. 2.7).

Ще одним досить важливим показником динаміки мережі є дисперсія рівня активності. Вона обчислювалася за 10 реалізаціями за формулою:

$$D^t = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(\overline{x}_{(i)}^t - \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}\overline{x}_{(j)}^t\right)^2, \ i, j \text{ – номери реалізацій.}$$

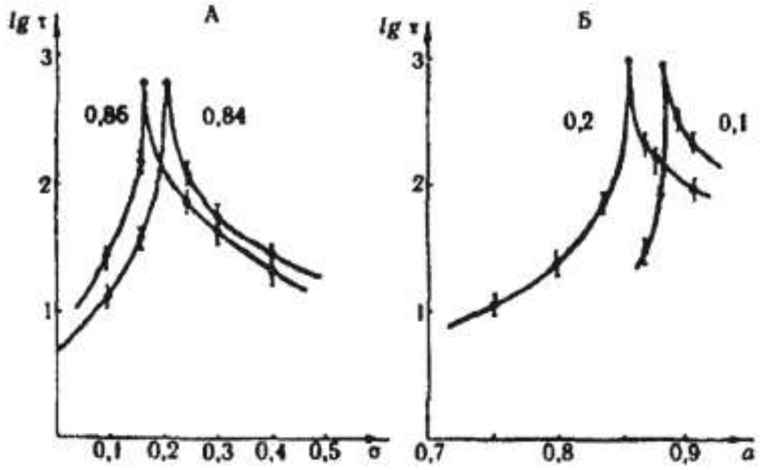


Рисунок 2.5 – Час виходу на стаціонарний рівень:
А – при зміні σ (a фіксоване); Б – при зміні a (σ фіксоване)

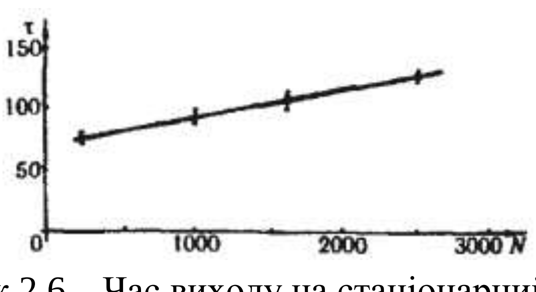


Рисунок 2.6 – Час виходу на стаціонарний рівень

залежно від розмірів мережі ($a = 0,86$, $\sigma = 0,2$).

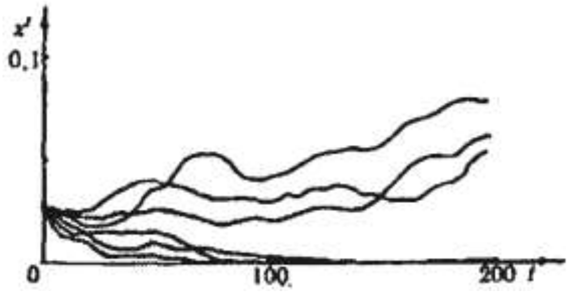


Рисунок 2.7 – Початкові ділянки реалізацій $\overline{x}^t$ при критичних параметрах ($a = 0,84$, $\sigma = 0,2$). Параметри порога як на рис. 2.3

Для a, σ далеко від критичних значень дисперсія D^t спочатку зростає, потім, при наближенні $\overline{x}^t$ до стаціонарного рівня, D^t спадає; на стаціонарній ділянці дисперсія мала. Інша картина в критичній ситуації. Тут дисперсія зростає, доки не буде досягнутий стаціонарний рівень, і потім залишається майже незмінною (рис. 2.8). Більша дисперсія на стаціонарній ділянці пояснюється неєдиністю стаціонарного рівня активності в критичному випадку.

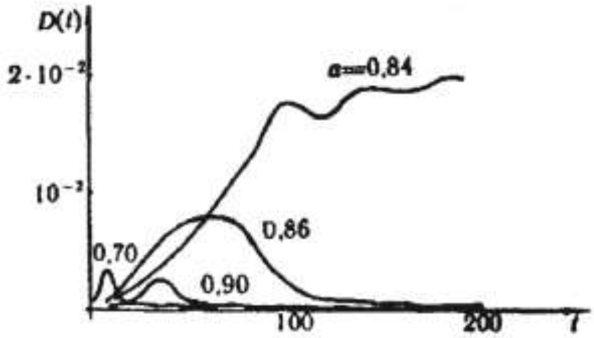
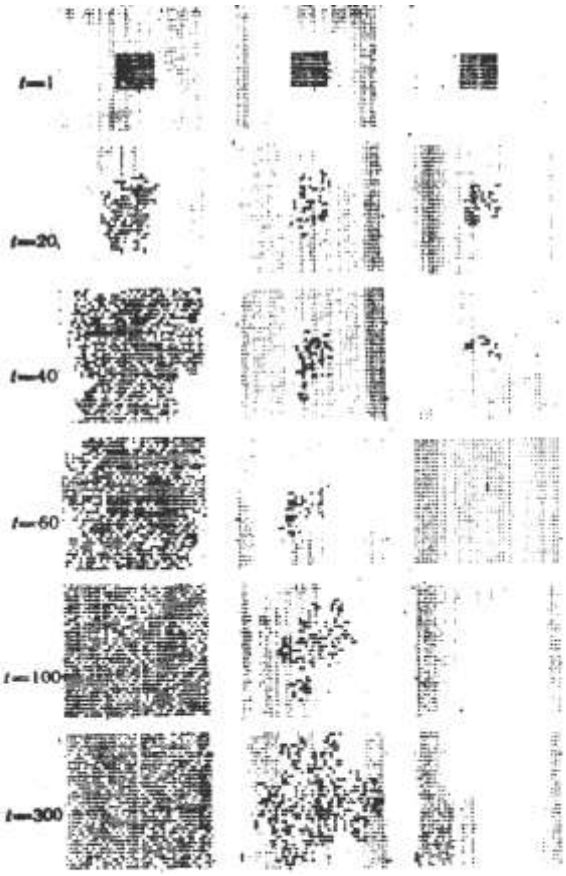


Рисунок 2.8 – Дисперсія рівня активності ($\sigma = 0,2$)

2.4 Ефект збереження плями

Розглянемо тепер, як змінюється в часі стан мережі, якщо початковий стан – пляма з одиниць на тлі нулів (рис. 2.2). При певних параметрах пляма розповзається (рис. 2.9,а), і в стаціонарному режимі активність мережі (у деякому діапазоні значень a) є кластерною конфігурацією, що змінюється в часі (приклад таких станів мережі на рис. 2.11). В іншому випадку пляма розмивається й зникає, таким чином встановлюється конфігурація, що складається в основному з нулів (рис. 2.9). Як правило, розмивання або розповзання плями відбувається досить швидко ($t \approx 50$ кроків часу, рис. 2.9,а,в), однак мережа з критичними значеннями параметрів здатна тривалий час перебувати в стані, близькому до початкового (рис. 2.9,б), так би мовити, зберігати пляму. Час збереження плями істотно залежить від початкового розміру плями (рис. 2.10). Пляма, менша певного розміру, швидко розмивається.



а б в

Рисунок 2.9 – Ефект збереження плями

($\sigma = 0,2, r_0 = 30, r_\infty = 10, t$ – такти машинного часу).

Лінії критичного режиму. Протягом експерименту спостерігається стаціонарна активність чотирьох типів. Кожному з них відповідає своя область на площині параметрів системи (рис. 2.12). Для області I характерні впорядковані стаціонарні стани мережі, за яких будь-який елемент є збуреним кожний другий такт часу ($\bar{x}^\infty = 0,5$). Якщо параметри мережі належать області II, то кінцеві стаціонарні стани є конфігураціями, що складаються цілком з нулів ($\bar{x}^\infty = 0$).

Область III відповідає випадкам кластерних конфігурацій ($0 < \overline{x}^{\infty} < 0{,}5$), що змінюються в часі (приклад таких станів мережі на рис. 2.11). В області IV, що відповідає більшим шумам, установлюються конфігурації з випадково розкиданих нулів і одиниць.

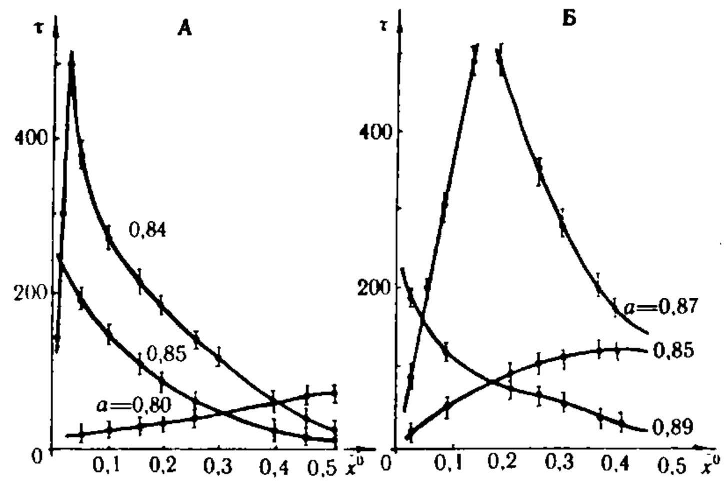


Рис. 2.7 – Час збереження плями залежно від його початкових розмірів і параметрів мережі: А – $\sigma = 0{,}2$; Б – $\sigma = 0{,}1$

Періодична модуляція порога. У цьому розділі модель буде ускладнена – введемо періодичний зовнішній вплив (аналог тета-ритму). Для цього до порога кожного елемента мережі додамо величину $\Delta r'$, що є періодичною функцією часу $\Delta r' = A_{\theta} \sin(2\pi\lambda_{\theta} t + \varphi)$.

Як забезпечити в умовах такого зовнішнього впливу тривале збереження початкової конфігурації (ефект збереження плями)?

Виявляється, що для цього необхідно виконати такі умови:

1. Параметри a та σ близькі до критичного.

2. Період модуляції $T_{\theta} = 1/\lambda_{\theta}$ близький до часу виходу на стаціонарний рівень у критичному випадку.

3. Початкова фаза φ з певного діапазону. Вихідна конфігурація зберігається при зростаючому порозі, у фазі спадання порога цього не відбувається.

Для збільшення наочності, стан кожного елемента підсумовувався з його станом у наступному такті часу; якщо сума приймала значення одиниці, то ставилася зірочка, а якщо нуль – крапка. Ця ж операція використана при отриманні конфігурацій, зображених на рис. 2.9 і 2.13.

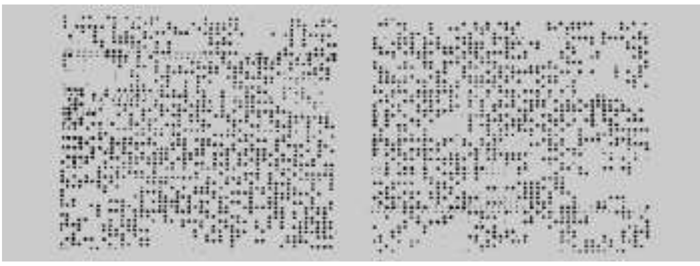


Рисунок 2.11 – Приклади кластерних конфігурацій.

Мережа з синаптичною модифікацією. Була проведена серія експериментів, у яких ваги зв’язків між окремими елементами могли змінюватися в процесі роботи моделі. А саме, щоразу, коли два сусідніх елементи збурювалися в той самий або у два послідовних моменти часу, сила зв’язку між ними зростала на малу величину $\Delta a \sim 0,001 \div 0,02$.

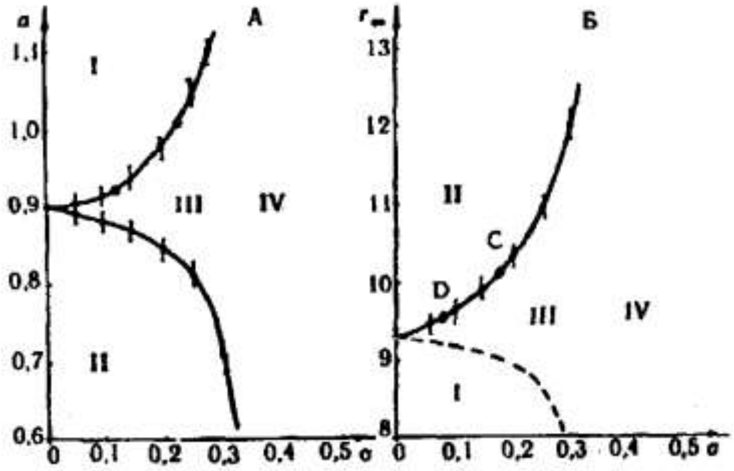


Рисунок 2.12 – Лінії критичного режиму:
$A - r_{\infty} = 10, r_0 = 30; \acute{A} - a = 0,84, r_0 = 30$

На мережу з параметрами, близькими до критичних, подавалася початкова конфігурація у вигляді плями з одиниць на тлі нулів. Оскільки деякий час зберігається конфігурація, близька до початкової, відбувається поступове збільшення зв’язків між елементами плями. У результаті час збереження плями значно зростає, і стан мережі менше відрізняється від початкового, ніж у випадку мережі без модифікації зв’язків (рис. 2.13).

Відновлення або «прояв» раніше записаної плями відбувається, по-перше, при встановленні параметрів, близьких до критичних (наприклад, можна лише злегка збільшити поріг, зберігши інші параметри тими ж, що були при записі), і, по-друге, при збуренні частини записаної конфігурації; останнє можна замінити подачею випадкової конфігурації з рівномірним розподілом нулів і одиниць.

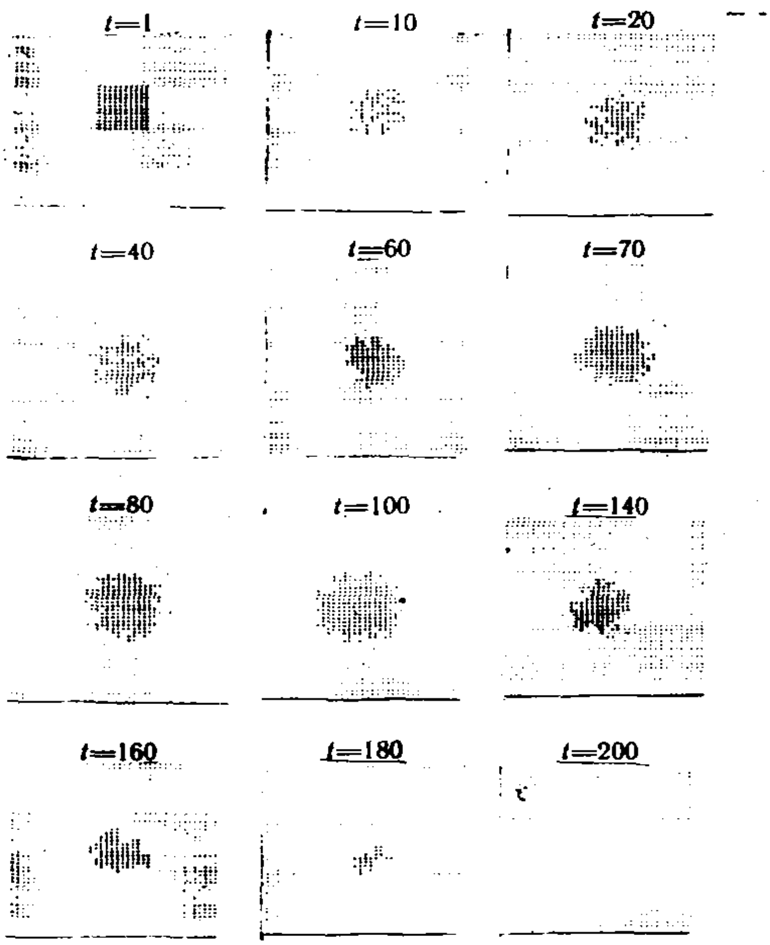


Рисунок 2.13 – Збереження плями при модифікації й наростаючому порозі
$(\sigma = 0,2, a = 0,85, \Delta a = 0,002, 1/\lambda_0 = 400)$

2.5 Порівняння з нейрофізіологією гіппокампа

Гіпотеза рециркуляції та ефект збереження плями. Багато існуючих теорій нейронної асоціативної пам'яті [91] пропускають одну істотну складність: щоб записати на згадку будь-який стан, необхідно його зафіксувати на якийсь час, або багато разів повторити. Вона дозволяється відповідно двома способами. Перший спосіб – фіксація – дотепер чисто гіпотетичний [183], тепер цілком реальна завдяки ефекту збереження плями. Другий більш традиційний спосіб пов'язаний з відомою гіпотезою рециркуляції нервових імпульсів [161]. Гіпотеза була використана в теорії просторової пам'яті гіппокампа, що викликала надзвичайно широку дискусію фахівців. Трохи раніше гіпотеза привернула увагу математиків [93, 115], що довели її за певних умов у зв'язку з моделюванням оперативної пам'яті. Тому необхідно зіставити обидва способи.

Відповідно до гіпотези рециркуляції, у нервовій системі з досить розвинутою синаптичною структурою виникають (за наявності полегшення й уторування) замкнуті шляхи, якими можуть багаторазово циркулювати нервові імпульси протягом значного часу після припинення сигналу. У свою чергу, реверберараційний слід, на думку Екклса, може призвести до довгострокових морфологічних або хімічних змін у структурі синаптичного апарата.

Однак у багатьох відділах мозку одного імпульсу недостатньо для того, щоб викликати імпульс в іншому нейроні, а скінченна послідовність імпульсів як ціле вимагає для рециркуляції дуже спеціальних умов (наприклад, згідно з Петуніним [115], передача збурення з одного нейрона має бути не більше ніж на один нейрон). Таким чином, в підсумку залишається незрозуміло, що ж власне циркулює в реальних нервових мережах. Якщо ототожнити реверберацію з кореляцією між мембранними потенціалами зв'язаних нейронів, то в такій формі реверберація стає вже скоріше статистичною властивістю, а не фіксованим повторенням будь-якого паттерна активності.

Ефект збереження плями має, безумовно, статистичний характер. Так, передача збурення від одного нейрона має йти до чотирьох найближчих сусідів (як у плоскій моделі Ізінга), замість одного, та й ця умова легко послаблюються. «Одноколійний» характер реверберацийних слідів має обмежити область застосування гіпотези рециркуляції найпростішим типом пам'яті. (Уже одна ця обставина дозволяє засумніватися в згаданій, заснованій на рециркуляції, відповідно до якої, однак, гіппокамп формує карту абсолютного, тривимірного, евклідового простору). Але, мабуть, більш серйозні заперечення проти гіпотези реверберації стосовно гіппокампу являють такі факти:

«Однією з дивних особливостей активності нейронів гіппокампа була нерегулярність розрядів. Деякі нейрони, за даними обробки міжспайкових інтервалів, авто- і кроскореляційного аналізу, виявили ритмічне членування розрядів, але воно рідко було чітким» [35].

«Особливістю пірамідних нейронів гіппокампа є повільне повернення мембранного потенціалу до вихідного рівня після спайкового розряду... Очевидно, ця слідова деполяризація слугує причиною особливого типу спонтанної активності нейронів гіппокампа з вираженою тенденцією до групових, неритмічних, залпових розрядів, що відмічають всі автори. У такому залповому множинному розряді спайки йдуть із дуже великою частотою. Далі, однак, частота зменшується... аж до повного припинення генерації».

Слід зазначити, що ефект збереження плями, пов'язаний з аперіодичною, кластерною динамікою (рис. 2.11) легко із цим узгоджується. Більш того, таке пояснення нерегулярної активності, якщо розгорнути його в термінах вихідних постулатів моделі, багато в чому збігається з нижченаведеною гіпотезою Ейлера та Гріна.

«Багато авторів розглядали цей феномен як прояв процесу інактивації, тобто катодного блоку генераторної зони пірамід при надмірній деполяризації. Природу деполяризаційного потенціалу, що розвивається після першого спайка, Ейлер і Грін вважали незрозумілою, але висловлювали припущення, що він може бути наслідком сумації ВПСП, що виникають при участі власних поворотних коллатералів пірамід. Кандел і Спенсер, однак, вважають спостережуване явище наслідком сумації справжніх деполяризаційних післяпотенціалів, що залежать не від поворотних ВПСП, а від власних властивостей мембрани, яка довгостроково зберігає змінений потенціал, що й призводить до множинного залпу з постійним гальмуванням генерації соматодендритного спайка» [35].

Альтернативна гіпотеза Кандела й Спенсера, яка заперечує, очевидно, роль сусідніх нейронів, є, з погляду задачі, що розглядається, невиправданим перенесенням основних труднощів (одержання тривалого перехідного процесу) на більш низький молекулярний рівень організації. Цікаво також відзначити, що залпова активність (як прояв сумації ВПСП у критичному режимі) має місце в розглянутій моделі без катодної депресії, хоча останню за необхідності легко врахувати введенням накопичення рефрактерності (тобто накопичення тих самих післяпотенціалів, які необхідні в гіпотезі Кандела й Спенсера).

Повертаючись до гіпотези реверберації, відзначимо, що її детерміністський характер призводитиме до труднощів відтворення довгострокового запису на синапсах. Навпаки, стохастичний характер ефекту збереження плями дозволяє легко відновити загальні риси конфігурації, що існувала при записі. Найпростіший спосіб – відновити критичний режим і подати на вхід слабкий рівномірний шум або частину раніше записаної конфігурації. (Останній випадок нагадує колатеральний ефект Марра).

Аналогічні переваги перед гіпотезою рециркуляції виникають не тільки при відтворенні, але й в інших режимах роботи – пуск, зупинка, раптові зміни вхідних і вихідних сигналів і т.д. Легкість керування режимами забезпечується великою чутливістю критичного режиму до зміни параметрів. Так, будь-яка вхідна конфігурація, здатна злегка змінити параметри мережі в процесі збереження плям, поступово зруйнує критичний режим, і сама загасне в результаті «звикання».

Дійсно, реакція мережі на стимул-конфігурацію, відповідно до результатів, поданих на рис. 2.3 і 2.5, буде продовженою тонічною, якщо в мережі встановлений критичний режим. Будь-яке відхилення від нього, наприклад, при зміні синаптичних ваг у результаті модифікації, веде до зменшення тривалості реакцій. Повторне подання раніше згаслої конфігурації викликає лише швидко загасаючу фазичну реакцію, що свідчить про відсутність «новизни» у сигналі. Цим частково пояснюється звикання (habituation) – основний динамічний ефект поля CA_3 гіппокампа.

2.6. Гальмування в гіппокампі й критичне регулювання порогів

«Гальмівні явища в гіппокампі носять універсальний характер. Це може свідчити про високу дискретність (у часі) процесів збурення в гіппокампі, які завжди здійснюються на тлі зниження активності більшості клітин. Гальмування може мати поворотну, латеральну й аферентну природу» [39].

«Найуніверсальнішим, найбільш постійним і часто єдиним синаптичним явищем при внутрішньоклітинному відведенні від пірамід гіппокампа є потужний і тривалий ТПСП. Будь-яка теоретична інтерпретація інтегративних нейронних механізмів гіппокампа, – писали Спенсер і Кандел, – має враховувати існування цих гальмівних ефектів» [39].

Може здатися, що модель, яка не містить у явному вигляді гальмівної популяції нейронів, є надмірно спрощеною й не заслуговує довіри. Розглянемо, чи не так це насправді.

Насамперед, зміна порогів модельних нейронів за синусоїдальним законом, імітує аферентні гальмівні впливи септального входу на піраміди CA_3 через кошикові клітини в режимі тета-ритмічної активності. У більш повній моделі цю функцію має виконувати окрема порівняно невелика (1:200) гальмівна популяція. Але навіть спрощена модель дозволяє пояснити дуже важливий для подальшого факт, який полягає в тому, що «імовірність розрядів пірамід є вищою при певному фазовому куті ніж тета-хвиля» [39]. Результуючий поріг досягає критичного значення лише при певному фазовому куті, при якому й стає можливим ефект збереження плями. Подальше зростання фази виводить систему із критичного режиму й пляма зникає, щоб відновитися в наступному періоді, якщо вхідний сигнал має правильне фазування відносно тета-хвилі.

Далі, якщо ми вважатимемо таку модифікацію ефекту збереження плями основною функцією поля CA_3, то інші можливі види гальмування мають бути допоміжними відносно неї. Так, якщо існують латеральні зв'язки (наприклад, з пірамід на кошикові клітини), то вони мають запобігати «розпливанню» плями, причому їхня дія усередині плями ефективно вимикається за рахунок домінуючого збурення від сусідніх пірамід. Додатковою функцією такого гальмування може бути автоматичне регулювання загального рівня збурення в гіппокампі й у зв'язаних структурах під час відсутності тета-ритму (при їжі, питті, уникненні болю, деяких автоматичних рухах і т.д.). Зв'язок гальмування зі збуренням у некритичному режимі можна описати аналітично за допомогою моделі типу [194], один варіант якої вже був докладно досліджений спеціально стосовно до гіппокампу [130].

Нарешті, звернемо увагу ще на одну дуже важливу допоміжну функцію аферентного гальмування, уже досить відому в нейрофізіології, але яка здобуває особливе значення у зв'язку з ефектом збереження плями.

«Сумарний аферентний потік гіппокампа (а, отже, і його загальні регуляторні впливи на неспецифічні структури) у період наявності тета-ритму, очевидно, знижується. Однак на загальному гальмівному тлі можливим є диференційоване збурення частини пірамід – дискретне за часом і обмежене в просторі» [39].

«Очевидно, ранні ТМСП у гіппокампі, що виникають при збуренні ретикулярної формації, можна інтерпретувати як початкову генералізовану зупинку активності пірамід, що є передумовою для перебудови їхньої роботи й синхронізації сигналів» [39].

У термінах побудованої моделі це може означати таке: щоб сформувати пляму, потрібно попередньо зупинити або погасити високу стаціонарну фонову активність, установивши, таким чином, необхідну «тишу». Ця операція здійснюється програмно; її необхідність видно з рис.2.3, що вказує на значну різницю початкової й фінальної ділянок сумарного рівня горіння, тобто при збереженні плями й у стаціонарному режимі.

Цим же пояснюється «перевага тонічних гальмівних реакцій нейронів гіппокампа (принаймні, у поле CA_3) при дії нових сенсорних збудників, тобто в умовах, що викликають активацію з появою тета-ритму» [39]. Для цього необхідно лише зазначити, що, згідно з рис. 2.4 і 2.10, критичний режим найбільш стійкий, якщо середній рівень активності плями (саме в період розвитку тонічної реакції) у два-три рази нижче стаціонарного рівня. Це добре узгоджується з таким спостереженням:

«З'ясувалася стійка чисельна перевага тонічних гальмівних ефектів над активаційними при дії сенсорних подразників. Перевага гальмівних ефектів над активаційними, за даними різних авторів, складає від 1,5:1 до 3:1» [39].

Відзначимо, що гальмування в даній моделі має принципово інше

призначення в порівнянні з моделлю типу [194]. Хоча й там гальмівна популяція може регулювати чутливість популяції, що збурює, однак сумнівно, щоб її достатньо
більша інерційність дозволила б їй швидко встановити «тишу». Головна ж функція гальмування побудованої моделі – регулювання порогів (за допомогою зовнішнього генератора ритму) для знаходження й стабілізації критичного, метастабільного режиму. Останній (зовсім відсутній у моделі Вілсона й Коуена через зневагу флуктуаціями) виникає в принципі й без участі гальмівної популяції, хоча й має потребу в ній для встановлення початкових умов і для автоматичної компенсації різних збурень, які прагнуть порушити критичний режим.

Однак поза критичним режимом дана машинна модель із доданням окремої гальмівної популяції, очевидно, добре описуватиметься рівняннями Вілсона й Коуена. Тому для створення більш повної аналітичної моделі необхідно в першу чергу розглянути критичний режим при виключеному гальмуванні. Введення гальмівної популяції, хоча є бажаним для повноти картини, очевидно, нічого математично цікавого не принесе. Функціональні можливості розширеної комбінованої моделі, природно, зростають. Вона зможе пояснити, чому «деякі форми навчання можливі під час відсутності тета-ритму» [39], чому можлива увага без тета-ритму та навіть чому необхідні дві системи уваги, що працюють по черзі. Ми побачимо далі, що в гіппокампі можуть існувати два типи пам'яті – одна в критичному режимі, а інша поза ним, які працюють майже одночасно, займаючи по черзі відповідну частину періоду тета-хвилі. Однак, щоб обговорювати питання пам'яті та поведінки, необхідно, крім уже розглянутого гальмівного регулювання порогів, розглянути способи регулювання двох основних
параметрів моделі, що залишилися, – рівня шумів і ваг синапсів.

2.7 Множинність входів у гіппокамп і критичне регулювання шумів

Гіппокамп має принаймні два основних входи – септальний і кортикальний. І кожен із входів ніби дублюється: вхідні сигнали ними надходять як на сому пірамід, так і на дендрити. Яка роль такого нерівноправного дублювання? Адже ефективність дендритів у проведенні імпульсів досить низька, навіть якщо врахувати можливе її збільшення за рахунок дендритних спайків. Навіщо потрібен додатковий дифузійний вхід, якщо він може сигналізувати не про конкретні властивості сигналу, а, у найкращому випадку, про його середній рівень або, можливо, про його дисперсію?

Виявляється, для даної моделі такий додатковий вхід принципово необхідний, якщо основними входами надходять сигнали, що змінюються в часі. Нехай у моделі встановлений режим збереження плями, так що значення основних параметрів зображуються точкою C на рис. 2.12,б. Змінимо середній рівень плями, зменшивши його розмір або інтенсивність вхідних імпульсів. Тоді відповідно до рис. 2.10 тривалість збереження плями різко впаде. Щоб збереглася й ця нова пляма, доведеться зменшити поріг нейронів, що, згідно з рис. 2.12,б, спричинить зменшення шумів, так що в просторі параметрів система перейде в точку D, також розташовану на лінії критичного режиму, оскільки пляма зберігається тільки на ній.

Таким чином, зміна рівня аферентного потоку в режимі фіксації інформації можлива тільки при узгодженій зміні порогів і шумів. Перше здійснюється регулюванням фази тета-ритму, що надходить через основний септальний вхід, друге – регулюванням рівня шумів через додатковий кортикальний вхід на дендрити пірамід. Природно припустити, що таке ж призначення має згаданий додатковий (збурюючий) септальний вхід, що до того ж може компенсувати не тільки середній рівень основного сигналу, але і його непостійну залпову вираженість, що безпосередньо змінює дисперсію шуму. У цьому ж зв'язку обговоримо інше часто виникаюче запитання: чи не занадто спрощує побудована модель реальні внутрішні зв'язки нейронів гіппокампа, враховуючи, як і в моделі Ізінга, активність лише чотирьох найближчих сусідніх нейронів і зневажаючи активністю інших? Так, спрощує, але не настільки, щоб ефект збереження плями помітно послабився або зник зовсім. Навпаки, збільшуючи кількість зв'язків з усе більш віддаленими нейронами, можна очікувати посилення ефекту в сенсі збільшення тривалості збереження плями й розширення класу конфігурацій, що запам'ятовуються. Так, якщо замість незмінних внутрішніх шумів, які в моделі генеруються спеціальною підпрограмою, використовувати нестаціонарну дендритну, дифузійну активність від віддалених сусідніх нейронів, тоді ефект має зберігатися для більш широкого класу вхідних конфігурацій – приблизно у зв'язку з тими ж причинами, що й при регулюванні шумів через зовнішні додаткові входи.

Таке регулювання внутрішніх шумів, на відміну від дії зовнішніх входів, можна назвати внутрішнім параметричним регулюванням. Це, по суті, підстроювання параметрів за законом фіксованої функціональної залежності. У цьому випадку ця залежність лінійна, оскільки й регульована дисперсія шумів, і регулюючий її середній рівень шумів лінійно, але з різними коефіцієнтами, залежать від сумарної частоти імпульсів мережі. (Це відома властивість дробового шуму, що виникає в цьому випадку у зв'язку з незалежністю віддалених нейронів). Точність такого регулювання зазвичай невелика й визначається тим, наскільки реалізована залежність є близькою до ідеальної, яка обумовлена принципом дії регулятора. Ідеальну характеристику легко одержати з рис. 2.12,б, якщо врахувати, що на ньому по осі ординат відкладена величина, пропорційна середньому рівню шумів, а по осі абсцис – квадратному кореню з дисперсії. Найбільша точність, мабуть, буде у випадку, коли суцільна крива, зображена на рис. 2.12,б, виявиться параболою.

Цікаво відзначити, що в чисто математичному плані ідея, близька до параметричного регулювання, була висловлена в роботі Шнірмана [159]. Він запропонував використовувати нелокальне керування локальними зв'язками, наприклад, за допомогою температури (що відповідає нашій дисперсії шумів) для різкого збільшення числа інваріантних мір у задачі Ставської (тобто знову ж для розширення класу «утримуваних» вхідних сигналів).

Через досить вузьку критичну область параметрів описане подвійне регулювання шумів саме по собі не гарантує стабілізацію критичного режиму, а лише сприяє їй, здійснюючи грубе настроювання. Головне регулювання здійснюється за допомогою високоточної системи автоматичного регулювання фази тета-ритму, причому кожен з додаткових «шумових» входів гіппокампа здатен зірвати режим спостереження, порушуючи оптимальні умови обробки інформації, що чомусь стала для глобальної системи «нецікавою», «неновою», «неактуальною». Можливо, що такий гранично простий спосіб відключення високоточної критичної системи уваги й тим самим включення більш грубої («вілсон-коуеновської») системи гіппокампального регулювання неспецифічних структур і є головною функцією інших неспецифічних входів у гіппокамп.

Частотна потенціація чи хеббовська модифікація? Останнім часом багато фізіологів, що вивчають поведінкові реакції, доходять висновку, що одна з основних функцій гіппокампа – пам'ять, хоча й неодностайні в тому, яка саме: робоча, короткочасна, буферна, епізодична, асоціативна, просторова, часово-просторово-тимчасова й т.д. Однак спостереження на синаптичному рівні досі не дають для цього необхідних підстав: замість кроскореляційної (хеббовської) модифікації синапсів вдається спостерігати лише частотну потенціацію, тобто збільшення ефективності синапса з частотою його використання. Останнє може забезпечити (якнайбільше) найпростішу, неасоціативну форму пам'яті. Розглянута ж модель допомагає зрозуміти можливу причину виниклих труднощів і підказує новий спосіб виявлення кроскореляційної модифікації.

Пропозиція 2.1. Припустимо, що в мережі ефективне значення порога (r_0^t), дорівнює математичному сподіванню від кривої порога у момент спрацьовування, змінюється по синусоїді з частотою тета-ритму (λ_θ) поблизу критичного порога, як показано на рис. 2.14. Нехай частота залпів вхідного сигналу також дорівнює частоті тета-ритму. Тоді хеббовська модифікація $(\Delta a_{ij}^{t\tau})$ розпадається на дві компоненти: звичайну хеббовську $(\Delta a_{ij}^{t0})_H$, пропорційну частоті збігів (λ_{ij}) у тимчасовому вікні $(\Delta\tau)$ пре- і постсинаптичних потоків, і додаткову $(\Delta a_{ij}^{t\tau})_\theta$, пропорційну кроскореляції між вхідним сигналом і тета-ритмом, що залежить від часового зсуву (τ) між ними.

Крім того

$$\Delta a_{ij}^{t\tau} = (\Delta a_{ij}^{t0})_H + (\Delta a_{ij}^{t\tau})_\theta, \tag{2.2}$$

$$(\Delta a_{ij}^{t0})_H = \gamma_H \Delta\tau\lambda_{ij}[1-\lambda_\theta(\tau_k+\tau_c)]t, \tag{2.3}$$

$$(\Delta \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{t0}}) = \begin{cases} \gamma_{\mathrm{H}}(\tau_{\mathrm{k}}-\tau_{\mathrm{c}})\lambda_0\left(1-\dfrac{|\tau|}{\tau_{\mathrm{k}}-\tau_{\mathrm{c}}}\right), & |\tau|<\tau_k-\tau_c, \\ 0, & \text{у решта випадків.} \end{cases} \tag{2.4}$$

де хеббовська модифікація визначається співвідношенням

$$\frac{da_{ij}^{t0}}{dt} = \gamma_H x_i^t x_j^t, \tag{2.5}$$

x_i^t, x_j^t – пре- і постсинаптична активність, γ_H – хеббовська ефективність,

$$\tau_c = \frac{1}{2\pi\lambda_\theta}\arcsin\frac{r_\infty - r_c}{A_\theta},$$

$$\tau_k = \frac{1}{2\lambda_\theta}\left(1-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{r_\infty - r_c}{A_\theta}\right), \tag{2.6}$$

де A_θ – амплітуда тета-хвилі.

Розглянемо можливості експериментального виміру модифікації. З (2.3) і (2.4) видно, що максимальна швидкість додаткового компонента в $\lambda_\theta(\tau_k-\tau_c)/(\lambda_{ij}\Delta\tau)$ раз більша за звичайну хеббовську і може бути значно більшою

1. Досить парадоксально, але саме ця обставина, що забезпечує високу ефективність модифікації, може сильно ускладнити виявлення останньої.

Справді, припустимо, що ми вибрали звичайний кроскореляційний метод оцінки синаптичних зв'язків [22] (зазначимо, що більш безпосередні електрофізіологічні методи оцінки ефективності синапсів, наприклад, за допомогою антидромної стимуляції [164], очевидно, порушують природні умови й умови критичного режиму). Такий метод, використовуючи позаклітинну відведену активність, дає, очевидно, найменший вплив на об'єкт, але вимагає достатньо великих масивів даних. Водночас висока швидкість модифікації дозволяє мережі записати сигнал на своїх синапсах за досить короткий час: обмеження по силі зв'язку й пов'язане з ним обмеження за часом запису здійснюється автоматично при виході мережі з критичного режиму. У результаті для кореляційного аналізу придатна лише порівняно коротка до того ж нестаціонарна ділянка тонічної реакції на стимул.

Інша, можливо ще більша складність полягає в тому, що додатковий компонент (2.4) є пропорційним не кроскореляції λ_{ij}, а частоті вхідного сигналу λ_{θ}, а в більш загальному випадку – кроскореляції сигналу й тета-ритму. Цей результат в експериментальних умовах досить важко відрізнити від згаданої частотної потенціації, особливо під час відсутності контролю тета-ритму. Більш того, всі кореляційні оцінки, виявляються залежними від частоти вхідних сигналів, так що проблема впевненого розрізнення двох типів модифікації залишається. Але це ще не означає, що кроскореляційна модифікація в гіппокампі відсутня. Наша модель пророкує, що в загальному випадку, крім хеббовської, може виявитися значною, якщо не переважною, додаткова кроскореляція двох основних сигналів гіппокампа – некортикального й септального, причому з регульованим зсувом між ними.

Цікаво зазначити, що якщо хеббовський компонент відповідальний за просторову асоціативність, то додатковий – за асоціативність подій у часі, так що часова-просторово-тимчасова пам'ять – цілком імовірна функція гіппокампа, про що вже давно здогадувалися деякі фізіологи. Ця гіпотеза більш докладно обговорюється наприкінці наступного розділу. Її правдоподібність може збільшитися, якщо ми врахуємо, що хеббовська ефективність γ_H, формально обумовлена співвідношенням (2.5), насправді може сильно зрости в критичному режимі за рахунок полегшуючого впливу групової, кластерної активності на просторові синаптичні процеси, на зразок взаємодії мембранних пор через загальні струмові шляхи.

Ще одне зауваження стосується оцінки ємності просторової короткочасної пам'яті. Результати, наведені на рис. 2.10, показують, що існує мінімальний критичний розмір плями, нижче якого вона швидко загасає. За нашими оцінками, критична пляма містить 5×5 нейронів, так що ємність короткочасного зберігання не перевищує $0,04N$ двійкових одиниць, де N – число нейронів мережі. Для більших N це значно більше $C_1\sqrt{N}$ – верхньої оцінки Цирельсона [156], але значно менше N^2 – оцінки, що дається в [190]. Оскільки в плоскій моделі Ізінга кожний нейрон пов'язаний з чотирма сусідніми, то запропонована в роботі оцінка дає 0,01 біт/синапс. Настільки низька ємність – це, звичайно, плата за критичний режим і, зокрема, за високу швидкість синаптичної модифікації, тобто за можливість записувати досить короткочасні, але, можливо, життєво важливі сигнали.

Наведемо висновок співвідношень (2.2) – (2.6), випередивши його коротким переліком раніше запропонованих алгоритмів модифікації для того, щоб зрозуміти природну необхідність ще одного різновиду гіпотези Хебба. Марр припустив, що модифікація синапсів у мозочку відбувається при збігу двох вхідних сигналів, тобто замість (2.5) маємо

$$\frac{da_{ij}^t}{dt} = \gamma_M x_i^t z_j^t, \tag{2.7}$$

де z_j^t – активність ліанного волокна. Для виключення втрат за рахунок насичення від випадкових збігів Сейновський запропонував (також для мозочка) відняти добуток середніх $\bar{x}_i^t \bar{z}_j^t$:

$$\frac{da_{ij}^t}{dt} = \gamma_S \left(x_i^t z_j^t - \bar{x}_i^t \bar{z}_j^t \right). \tag{2.8}$$

Ще раніше було висловлене припущення, що існують синапси, для зміни яких необхідний збіг активності трьох різних нейронів

$$\frac{da_{ij}^t}{dt} = \gamma_G x_i^t y_j^t z_k^t. \tag{2.9}$$

Тепер, за аналогією з цим, неважко записати, як зміниться гіпотеза Хебба (2.5) в умовах критичного режиму. Чисто формально, з огляду на залежність ефекту збереження плями від фази тета-ритму, маємо

$$\frac{da_{ij}^t}{dt} = \begin{cases} \gamma_H x_i^t y_j^t z^{t-\tau}, & \text{якщо } z^{t-\tau} \neq 0 \\ \gamma_H x_i^t y_j^t, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{2.10}$$

де z^t – індикатор критичної фази (рис. 2.14), що є послідовністю одиничних прямокутних імпульсів, синхронних і синфазних з тета-ритмом.

Розглянемо активність пари сусідніх нейронів i і j, що перебувають у тій самій плямі або кластері, тобто такі нейрони, які мають однотипні збурюючі, продовжені (тонічні) реакції. Через те, що в плямі кожен з таких нейронів майже неперервно генерує імпульси, можна вважати, що $x_i^t = y_j^t$ при $z^{t-\tau} \neq 0$.

Тоді, за час від нуля до t зв'язок між ними зміниться на величину

$$\Delta a_{ij}^{t\tau} = \gamma_H \int_0^t x_i^t z^{t-\tau} dt + \gamma_H \int_{\{t_1 : z^{t_1-\tau}=0, 0<t_1<t\}} x_i^{t_1} y_j^{t_1} dt_1.$$

Перший інтеграл як згортка двох прямокутних імпульсів однакової тривалості (останнє не обов'язково, але прийнято для спрощення формул) дає (2.4), а другий, з урахуванням імовірності збігів $\lambda_{ij}\Delta\tau$, має математичне сподівання, записане в правій частині (2.3), де множник у квадратних дужках враховує ту обставину, що другий інтеграл може дорівнювати нулю, якщо критичний режим тета-ритму не зривається, тобто коли $\tau_k + \tau_c$ дорівнює періоду тета-ритму $1/\lambda_\theta$. Формули (2.6) очевидні з рис. 2.14.

Відзначимо, що у випадку, коли перший інтеграл значно більший ніж другий, алгоритм, що розглядається, при $\tau = 0$ є близьким (за формою, але не за ефективністю) до алгоритму Марра (2.7), причому z^t є аналогічним активності ліанного волокна. У цьому випадку другий інтеграл, аналогічно другому доданку в алгоритмі Сейновського (2.8), зобов'язаний в основному випадковим збігам, але ми маємо можливість ним зневажити за рахунок великої різниці в ефективності в критичному режимі й поза ним. Очевидний кроскореляційний характер першого інтеграла стає не настільки очевидним у формулі (2.4), у якій додатково враховано, що вхідний сигнал має постійну частоту залпів λ_θ. Замість неї в більш загальному випадку стоятиме імпульсна кроскореляція між септальним і кортикальним входами. Саме ця властивість, з урахуванням залежності від зсуву фаз, дозволить надалі розглядати пам'ять як часовий аналог голографії.

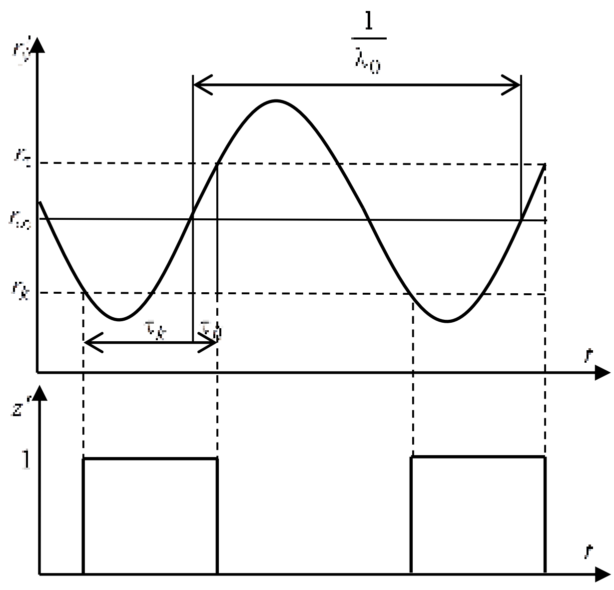


Рисунок 2.14 – Крива ефективності порога r_e^t й індикатор критичної фази z^t;
r_k – критичний поріг; r_c – поріг зриву; r_∞ – поріг, що встановлюється у відсутності тета-ритму

В іншому крайньому випадку, коли можна зневажити першим інтегралом (наприклад, через відсутність тета-ритму або через несприятливий зсув фаз між ним і кортикальним сигналом), розглянутий алгоритм не відрізняється від хеббовського, за винятком, можливо, більшого значення γ_H внаслідок можливого впливу критичного режиму на мембранно-синаптичні процеси. За цією же причиною роль випадкових збігів, що накопичуються в основному в більш тривалий, але некритичний період часу, виявиться не такою помітною (як в алгоритмі Сейновського), щоб потрібна була їхня компенсація. Нарешті, загальний випадок, як видно з (2.10), нагадує комбінацію синапса Хебба й синапса Гріффіса аж до того, що третій співмножник z^t, як з'ясується в наступному розділі, пов'язаний з емоціями, а точніше – з увагою.

2.8 Тета-ритм як сигнал синхронізації імпульсної системи, що стежить, і його поведінкові кореляти

До теперішнього часу існує принаймні чотири гіпотези про функціональну роль тета-ритму, що відповідають чотирьом основним функціям, які приписуються гіппокампа [39]: 1) орієнтовний рефлекс – увага; 2) мотивація – емоції; 3) довільні рухи й 4) пам'ять – навчання.

Деякі фізіологи пропонують прийняти компромісний розв'язок питання: визнати, що гіппокамп має складну множинну функцію й, отже, тета-ритм може брати участь в організації всіх або більшості цих функцій. Однак О.С. Виноградова дійшла іншого висновку.

«Аналіз електрофізіологічних даних про кореляти тета-ритму й зіставлення їх з іншими фактами про функції гіппокампа дозволяють відкинути припущення про мотивацію, емоції й довільні рухи як причину або наслідок тета-ритму гіппокампа. Можна стверджувати лише, що тета-ритм відображує певний (оптимальний) робочий рівень мозку й щодо цього ближче всього корелює з реакцією активації, орієнтовним рефлексом, увагою (у специфічному вираженні, властивому нижчим ссавцям). Оскільки підтримка активного стану й високого робочого рівня мозку є в нормі неодмінною умовою фіксації нових слідів, то правомірні й уявлення про роль тета-ритму в навчанні й пам'яті, висунуті деякими авторами. Можливо, що в цих процесах тета-ритм у гіппокампі відіграє більш специфічну роль синхронізуючого, сонастроючого механізму» [39].

Розглянемо, як природний розвиток розглянутої моделі для поля CA_3 гіппокампа дозволяє зрозуміти й трохи підсилити цей висновок. Спочатку відмітимо, що результати, викладені вище, узгоджуються із загальноприйнятим тепер уявленням про те, що поле CA_3 виконує функцію компаратора в трохи більш широкому, ніж у Виноградової [39], змісті клапана: воно пропускає вхідні сигнали далі до поля CA_3 гіппокампа лише в дискретні моменти часу, обумовлені фазою тета-ритму, незалежно від будь-яких властивостей або якостей сигналів. Це стандартна ланка автоматики, що має різноманітні застосування (іноді його називають імпульсним елементом, логічною схемою «І», брамою й т.д.). У нашому випадку воно збільшує перешкодозахищеність системи від небажаних вхідних сигналів, що приходять поза певним часовим інтервалом.

Однак функції поля CA_3 цим не обмежується. Зіставлення результатів з тим фактом, що «імовірність розрядів пірамід вища при певному фазовому куті (з'ясовується при векторному аналізі), хоча спайки можуть виникати й в інші періоди» [39], змушує припустити, що між двома основними входами поля CA_3 може існувати часовий або фазовий зсув, що змінюється. Але тоді поле CA_3 як компаратор-клапан зможе виділити сигнал помилки, пропорційний різниці фаз двох своїх вхідних сигналів, якщо на його виході включити так звану фіксуючу ланку. Останнє – також стандартний вузол автоматики, що є різновидом низькочастотного фільтра. Без нього сигнал на виході компаратора не здатний помітно вплинути на поведінку системи регулювання, що містить будь-які інерційні ланки, якими в гіппокампі є синапси, що модифікуються, а поза ним – тета-генератор і різні соматичні й вегетативні ефектори. Тільки в сполученні з ним компаратор-клапан може стати фазовим компаратором, хоча останній термін уже давно використовується для позначення можливої функції гіппокампа [39].

Але де взяти фіксуючу ланку? Виявляється, що в розглянутій моделі її дія цілком замінюється ефектом збереження плями. Справді, результати показують, що модель здатна зберігати або фіксувати вхідну конфігурацію протягом деякої частини періоду тета-ритму, якщо виконані правильні фазові співвідношення. Наприкінці часу фіксації ця конфігурація швидко зникає, щоб у наступному періоді можна було зафіксувати іншу конфігурацію й т.д.

Таким чином, поле CA_3 може виконувати одночасно функції декількох стандартних ланок системи автоматичного регулювання: імпульсного елемента (клапана), що фіксує ланки, фазового компаратора й навіть носія робочої пам'яті. Після цього не дивно, що існує так багато гіпотез про поведінкові кореляти тета-ритму незважаючи на те, що він виконує тут неспецифічну функцію синхронізації. Адже така ланка, що створює сигнал помилки неузгодженості, необхідна для систем регулювання різного призначення й без неї не обійдеться жодна теорія функції гіппокампа.

Поряд з такою універсальною, неспецифічною роллю тета-ритм може відіграти особливу, дуже спеціальну роль у навчанні й пам'яті. Для її опису нам, природно, буде потрібно, по-перше, припустити, що в мережі існує кроскореляційна модифікація синапсів і, по-друге, доведеться доповнити нашу модель поля CA_3 до замкнутої системи автоматичного регулювання, включивши в неї необхідні ланки й насамперед сам генератор тета-ритму.

Про те, що частота тета-ритму регулюється замкнутою петлею негативного зворотного зв'язку поля CA_3 на себе, можна довести з того факту, що частота тета-ритму в півтора рази знижується при стимуляції гіппокампа та майже вдвічі підвищується при відсіканні гіппокампального входу на септум, де перебуває джерело тета-ритмічної активності [39]. Крім цього, існує зовнішнє, «ручне» (тобто неавтоматичне) регулювання частоти загальним сенсорним припливом, що надходить на ретикулярну формацію від різних структур. Характеристика регулювання по частоті в обох випадках, очевидно, є лінійною в досить широких межах: «Чим більший об'єм вхідної інформації, тим вища частота тета-ритму, що, таким чином, є чутливою мірою загального рівня сенсорного припливу. Тета-ритм не виникає при його низькому рівні, лінійно зростає по частоті в міру його підвищення й зникає при надмірно високих рівнях впливу» [39].

Розглянутий як елемент автоматики, тета-генератор – це інтегратор – основний вузол досить точних (астатичних, тобто таких, що забезпечують нульову сталу помилку) систем автоматичного регулювання. Назва його пояснюється тим, що його вихідна змінна – фаза φ – виражається інтегралом від вхідної частоти керуючих імпульсів λ_R, оскільки вона лінійно регулює частоту тета-ритму λ_θ, а ця, у свою чергу, дає за визначенням кутової частоти $2\pi\lambda_\theta \equiv \frac{d\varphi}{dt}$. В іншому варіанті інтегратор – це генератор імпульсів, затримка яких щодо запуску регулюється лінійно за допомогою вхідного сигналу.

Не проводячи тут детального аналізу виникаючої замкнутої системи, що стежить і регулює увагу, покажемо, як частота тета-ритму може відображати динаміку процесу регулювання й нести, таким чином, інформацію про стадії навчання. Для цього припустимо, що залп тета-активності збурює неокортекс і через деякий час T_N викликає на вході поля CA_3 залповий відгук. Тоді фазовий компаратор забезпечить сигнал неузгодженості (помилки) $\tau = T_N - T_\theta$, що, завдяки фіксації й негативному зворотному зв'язку, змінить частоту тета-ритму $\lambda_\theta = 1/T_\theta$ в напрямку зменшення неузгодженості. При цьому стала помилка, завдяки інтегратору, дорівнюватиме нулю, так що частота тета-ритму виявиться постійною, якщо T_N – постійна.

Припустимо тепер, що $T_N = t_N + t_F$, де t_N – постійна, t_F – змінна латентність, що залежить від ступеня уторування шляхів, так що t_F зменшується з часом до нуля. Тоді сигнал неузгодженості на виході CA_3 мінятиме період тета-ритму T_θ таким чином, що він буде з деякою ненульовою помилкою «стежити» за зміною T_N, оскільки T_N з часом зменшується, то частота тета-ритму зростає доти, доки не буде досягнута максимально можлива частота, після чого режим спостереження зривається. Тим самим цикл запису даного сигналу припиняється автоматично.

Таким чином, зміна частоти тета-ритму в режимі спостереження дійсно відображає динаміку, поточну стадію процесів запису інформації. Наприклад, «доучування» внаслідок меншої латентності сигнальних шляхів вимагає більш високої частоти тета-ритму в порівнянні зі свіжим враженням. Цим частково пояснюються результати Ейді, що виявив зв'язок окремих вузьких частотних смуг тета-ритму з певними стадіями й фазами навчання [39].

Збільшення частоти тета-ритму за допомогою зовнішнього, неавтоматичного («ручного») регулювання з боку неспецифічних структур має, як правило, приводити до зриву автоматичного регулювання, хоча, очевидно, бувають випадки, коли це не так. Іноді, можливо, таке «мотиваційне» регулювання допомагає зберегти увагу за допомогою «вольового зусилля», що надходить через «ручне» керування, але найчастіше, за аналогією з технічними системами, це ручне регулювання має використовуватися для «свідомого» вибору об'єкта уваги, інформація про яке потім буде записана автоматично. Крім мотивацій і емоцій, цим же «ручним» шляхом можуть виникнути кореляції тета-ритму з довільними рухами, з парадоксальним сном, «предустановкой» і т.д.

На закінчення вкажемо ще на одну особливу роль тета-ритму в організації просторово-тимчасової пам'яті. Для цього зазначимо, що будь-яка розподілена в просторі кроскореляційна пам'ять має асоціативну властивість, яка полягає в тому, що для відтворення записаної конфігурації достатньо подати на вхід тільки частину конфігурації. Однак у попередньому розділі ми бачили, що в нашій мережі можна записати не тільки просторові, але й часові кореляції. Тому є підстави очікувати від мережі властивості просторово-тимчасової асоціативності, тобто можливості за деяким фрагментом просторово-тимчасової послідовності конфігурацій відновити всю записану послідовність. Оскільки при записі в режимі автоматичного регулювання змінюються фаза й частота тета-ритму, їхній часовий хід необхідно відтворити й при зчитуванні, завдяки чому критичний режим «витягатиме» з пам'яті лише ту інформацію, яка була при записі асоційована з певною фазою тета-ритму. Тета-ритм є, таким чином, своєрідним аналогом опорної частоти в голографії, причому автоматичне регулювання частоти призводить до додаткового ефекту, аналогічного топографічному кіно.

Близьку гіпотезу про роль тета-ритму як аналога лазера в голографії висловив Лендфілд (1976), хоча він нічого не говорить про відтворення часових послідовностей, вважаючи, очевидно, тета-ритм аналогом когерентного джерела постійної частоти.

3 ФОКУСУВАННЯ Й СТАБІЛІЗАЦІЯ

3.1 Основні відомості з теорії марковських процесів

Розглянемо однорідні марковські процеси зі скінченним або зліченим числом станів, що еволюціонують зі зміною неперервного часу [94]. До таких процесів відносять: пуассонівські процеси, процеси народження й загибелі, процеси випадкових блукань і процеси відновлення.

Марковський процес з неперервним часом позначатимемо через $\xi(t)$, $t \geq 0$. У будь-який додатній момент часу t процес $\xi(t)$ може перебувати в одному з можливих станів i, $i = 0, 1, 2, 3, .$ (індексами i, j ми як і раніше нумеруємо стани). Якщо в момент часу t процес $\xi(t)$, перебуває в стані i, то пишуть $\xi(t_1) = i$.

Основною властивістю марковських процесів з неперервним часом є марковська властивість, яка полягає в тому, що: при заданому стані $\xi(s) = i$ еволюція процесу в майбутньому, тобто при $t \geq s$, не залежить від плину процесу в минулому, тобто від його еволюції при $t \leq s$.

Марковську властивість можна описати ще так. Нехай у довільні моменти часу $s_1, s_2, ..., s_n, s$, $(0 < s_1 < s_2 < ... < s_n < s)$, $\xi(s_1) = i_1$, $\xi(s_2) = i_2$, $\ldots$, $\xi(s_n) = i_n$, $\xi(s) = i$.

Тоді

$$P\{\xi(s+t) = j \mid \xi(s_1) = i_1, \xi(s_2) = i_2, ..., \xi(s_n) = i_n, \xi(s) = i\} = p_{ij}(t). \tag{3.1}$$

Ця властивість має виконуватися для будь-яких i, j і s, t. Величини $p_{ij}(t), t \geq 0$, називають імовірностями переходу зі стану i в стан j за час t або перехідні ймовірності.

Розглянемо довільний марковський процес $\xi(t)$, $t \geq 0$, з перехідними ймовірностями

$$p_{ij}(t) = \{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}, \; p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

заданими при всіх $i, j = 0,1,2,3,\ldots$. Відзначимо, що при будь-якому заданому кроці $h>0$ послідовність $\xi(nh)$ $(n=0,1,...)$ утворить дискретний ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями $p_{ij}(h)$.

Нехай заданий початковий розподіл імовірностей $p_i^0 = P\{\xi(0)=i\}$, $i=0,1,2,...$. Тоді відповідно до марковської властивості спільний розподіл імовірностей випадкових величин $\xi(t_1),...,\xi(t_n)$ за будь-яких $0=t_0<t_1<...<t_n$ має вигляд

$$P\{\xi(t_1)=j_1,...,\xi(t_n)=j_n\}\sum_i p_i^0 p_{ij_1}(t-t_0)...p_{j_{n-1}j_n}(t_n-t_{n-1}).$$

Зокрема, при $t>0$, $s>0$:

$$p_j(t)=\sum_i p_i^0 p_{ij}(t),$$

$$p_{ij}(t+s)=\sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t),\ i,j=0,1,2,....$$

У першій із цих формул $p_j(t)$ є ймовірність того, що в момент часу t система перебуватимемо в стані j.

Рівняння Колмогорова. Як і раніше розглядаються однорідні процеси Маркова. Нехай існують границі

$$\lambda_{ii}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}=-\lambda_i\le 0,$$

$$\lambda_{ij}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}\ge 0,\ i\ne j.$$

Вважатимемо, що

$$\sum_{i\ne j}\lambda_{ij}=\lambda_i.$$

Ця умова завжди виконується, якщо кількість станів процесу скінченна. Сформулюємо теореми, що відіграють важливу роль у дослідженні марковських процесів з неперервним часом.

Теорема 3.1. Нехай умова $\sum\limits_{i \neq j} \lambda_{ij} = \lambda_i$, виконується. Тоді перехідні ймовірності $p_{ij}(t)$ процесу відповідають оберненій системі рівнянь Колмогорова:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t), \; i, j = 0,1,2,....$$

Теорема 3.2. При виконанні зазначених вище обмежень на величини λ_{ij}, $\Lambda(s)$ перехідні ймовірності $p_{ij}(t)$ відповідають *прямій* системі рівнянь Колмогорова:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj} \;, \; i, j = 0,1,2,....$$

Імовірності станів відповідають такий прямій системі рівнянь:

$$p'_j(t) = \sum_k p_k(t)\lambda_{kj} \;, \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \; \alpha_i \geq 0$$

Збіжність до стаціонарного розподілу для марковських процесів з неперервним часом. Умова збіжності тут така ж, як і для дискретних ланцюгів Маркова: нехай існує стан j_0 і такі h і $\delta > 0$, що для всіх i

$$P_{ij_0}(h) \geq \delta > 0.$$

Тоді незалежно від початкового розподілу

$$\lim_{t \to \infty} p_j(t) = \pi_j, \; (j = 0,1,...),$$

де π_j – компоненти стаціонарного розподілу. Ця збіжність рівномірна по j.

Стаціонарний розподіл $\{\pi_j\}$ відповідає такій системі рівнянь:

$$\sum_i \pi_i \lambda_{ij} = 0, \ i, j = 0,1,\ldots.$$

Розглянемо неоднорідний процес зі скінченним або зліченим числом станів. Множину всіх станів позначимо через X (X – фазовий простір). Вимагатимемо, щоб для усіх станів $i, j = 0,1,\ldots$ існували границі:

$$\lim_{s_1 \uparrow s, s_2 \downarrow s} \frac{p_{ij}(s_1, s_2) - \delta_{ij}}{s_2 - s_1} = \lambda_{ij}(s) \tag{3.2}$$

і щоб для кожного t_k $(i = 0,1,\ldots)$ виконувалися умови

$$\sum_j \lambda_{ij}(s) = \lambda_i(s). \tag{3.3}$$

Теорема 3.3. Якщо для всіх $(i, j, s) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} \times (0, t)$ умови (3.2) і (3.3) мають місце, то тоді ймовірності $p_{ij}(s,t)$ диференційовні по s $(0 < s < t)$ і відповідають системі диференціальних рівнянь (зворотні рівняння Колмогорова):

$$-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = \sum_{k \in \mathrm{X}} \lambda_{ik}(s) p_{kj}(s,t), \ i, j = 0,1,2,\ldots.$$

Теорема 3.4. Якщо умови (3.2), (3.3) виконуються для всіх $i, j \in \mathrm{X}$, то перехідні ймовірності $p_{ij}(s,t)$ відповідають прямим рівнянням Колмогорова:

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = \sum_{k \in \mathrm{X}} p_{ik}(s,t) \lambda_{kj}(t), \ i, j = 0,1,2,\ldots, \ 0 < s < t.$$

Теорема 3.5. Якщо умови теореми 3.4 мають місце, то ймовірності станів $p_j(s,t)$ відповідають прямим рівнянням Колмогорова

$$\frac{\partial p_j(s,t)}{\partial t} = \sum_{k\in X} p_k(s,t)\lambda_{kj}(t), \quad j = 0,1,2,\dots .$$

Зупинимося на питаннях про існування й одиничність розв'язків прямої та оберненої систем Колмогорова й про збіг розв'язків для прямої й оберненої систем. В. Феллер довів [151], що якщо при кожному s $(0 < s < t)$

$$\sup_i \lambda_i(s) < \infty,$$

то існує єдиний загальний розв'язок прямої й оберненої систем $\{p_{ij}(s,t)\}$, що задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k\in X} p_{ik}(s,\tau) p_{kj}(\tau,t)$$

і умовам

$$p_{ij}(s,t) \ge 0, \quad \sum_{j\in X} p_{ij}(s,t) = 1. \tag{3.4}$$

Під час розв'язування конкретних прикладних задач, доводиться мати справу з такими послідовностями $\lambda_i(t)$, які не задовольняють умову (3.3). У таких випадках зіштовхуються з розв'язками, для яких

$$\sum_{j\in X} p_{ij}(s,t) < 1. \tag{3.5}$$

В. Феллером було встановлено, що, незалежно від поведінки коефіцієнтів $\lambda_i(s)$, завжди існує мінімальний розв'язок $\{p_{ij}(s,t)\}$, що відповідає обом системам Колмогорова, і також рівнянню Колмогорова-Чепмена. Цей розв'язок називається мінімальним, оскільки для будь-якого розв'язку $\{\tilde{p}_{ij}(s,t)\}$, що відповідає або прямим, або оберненим рівнянням Колмогорова

$$\tilde{p}_{ij}(s,t) \ge p_{ij}(s,t).$$

Ним було також встановлено, якщо мінімальний розв'язок задовольняє (3.4), то крім нього пряма й зворотна системи не мають ніяких інших розв'язків, що мають імовірнісний зміст. Іншими словами, якщо мінімальний розв'язок відповідає умовам (3.4), то процес однозначно визначиться кожною із систем Колмогорова. Якщо ж мінімальний розв'язок відповідає умові (3.5), то в цьому випадку існує нескінченне число розв'язків, що відповідають зворотним рівнянням і рівнянню Колмогорова-Чепмена й, отже, існує нескінченно багато марковських процесів, що відповідати цим рівнянням. Частина цих розв'язків може задовольняти й прямим рівнянням.

Нижче розглядатимуться системи Колмогорова, частина коефіцієнтів яких може мати неінтегровані особливості. Під час дослідження розв'язків таких рівнянь слід зважати на ті їхні властивості, які були наведені вище.

3.2 Оцінка точності σ-фокусування марковського процесу

Розглянемо марковський процес, заданий на часовому півінтервалі $[a,b)$. Якщо для будь-якого початкового розподілу $\{p_i^0\}$, заданого в точці b, розподіл імовірностей процесу $p_i(t) \to p_i^*$, $i = 1,2,...,n$, при $t \to b$, то таке явище називається фокусуванням [61, 62, 65, 66]. В [62] показано, що за деяких умов, які накладаються на інфінітезимальну матрицю $\Lambda(t)$ процесу (існування стовпця, що містить неінтегровані особливості в точці b, та існування границі для нульового власного вектора матриці $\Lambda(t)$), зазначене фокусування має місце. Якщо ж у цьому стовпці інтеграли сходяться, але приймають за абсолютною величиною досить великі значення, то фінальні ймовірності лежать у деякому σ-околі:

$$\overline{\lim_{t \to b}} p_i(t) \le p_i^* + \sigma; \ \underline{\lim_{t \to b}} p_i(t) \ge p_i^* - \sigma$$

і таке явище зветься σ-фокусуванням [62]. Отримана нижче оцінка для параметра σ, що характеризує точність σ-фокусування, зроблена способом, відмінним від способу, запропонованому в [62].

Побудуємо оцінку параметра σ для σ-фокусування процесу за заданою інфінітезимальною матрицею $\Lambda(t)$ неоднорідного марковського процесу, виражаючи її через елементи інфінітезимальної матриці, а не стохастичної як в [62]:

$$R_j(s_0,t_0)-r_j(s_0,t_0)\le \prod_{k=1}^{N}[1-\delta_j(s_{k-1},s_k)], \tag{3.6}$$

де

$$R_j(s_0,t_0)=\sup_i p_{ij}(s_0,t_0);$$

$$r_j(s_0,t_0)=\inf_i p_{ij}(s_0,t_0);$$

$$\delta_j(s_{k-1},s_k)=\inf_{i\ne j} p_{ij}(s_{k-1},s_k);$$

$s_0,s_1,...,s_k,...$ – така послідовність моментів часу, що $s_k\in[s_0,t_0)$; $s_0<s_1<...<s_k<...$; $\lim\limits_{k\to\infty} s_k=t_0$.

За визначенням,

$$R_j(s_0,t_0)-r_j(s_0,t_0)=2\sigma.$$

Для $i\ne j$ розглянемо границю добутку (3.6) при $N\to\infty$, з огляду на те, що $p_{ij}(t,t+h)=\lambda_{ij}(t)h+\bar{o}(h)$.

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_{ij}\left(t_0+\frac{t-t_0}{N}(k-1),t_0+\frac{t-t_0}{N}k\right)\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{t-t_0}{N}\lambda_{ij}\left(\frac{t-t_0}{N}(k-1)+t_0\right)\right)=$$

$$\exp\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\ln\left(1-\frac{t-t_0}{N}\lambda_{ij}\left(\frac{t-t_0}{N}(k-1)+t_0\right)\right)\right\}.$$

Оскільки, $\ln(1-x)=-x+\bar{o}(x)$, то ми можемо перетворити останній вираз до вигляду

$$\exp\left\{-\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{t-t_0}{N}\lambda_{ij}\left(t_0+\frac{t-t_0}{N}(k+1)\right)\right\}=\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\lambda_{ij}(\tau)d\tau\right\}.$$

Якщо тепер розглянути аналогічну границю для δ_j:

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\delta_j\left(t_0+\frac{t-t_0}{N}(k-1),t_0+\frac{t-t_0}{N}k\right)\right),$$

то в кожній з розглянутих точок величина δ_j заміниться на відповідне значення $p_{i_m j}(t_{k-1},t_k)$, таке що

$$p_{i_m j}(t_{k-1},t_k)=\min_{i\neq j}p_{ij}(t_{k-1},t_k).$$

Отже, має місце оцінка

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\delta_j\left(t_0+\frac{t-t_0}{N}(k-1),t_0+\frac{t-t_0}{N}k\right)\right)\leq\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\min_{i\neq j}\lambda_{ij}(\tau)d\tau\right\}.$$

Оскільки,

$$p_j(s,t)=\sum_{i=1}^{n}p_i(s)p_{ij}(s,t)\leq\sum_{i=1}^{n}p_i(s)R_j(s,t)=R_j(s,t) \text{ і}$$

$$p_j(s,t)=\sum_{i=1}^{n}p_i(s)p_{ij}(s,t)\leq\sum_{i=1}^{n}p_i(s)r_j(s,t)=r_j(s,t),$$

то залежно від початкового розподілу ймовірність знаходження процесу в стані j лежатиме між $p(t)=p(a)P(a,t)=(\alpha_1e_1(a)+\alpha_2e_2(a)+...+\alpha_ne_n(a))P(a,t)=$ і $=\alpha_1e_1(a)P(a,t)+\alpha_2e_2(a)P(a,t)+...+\alpha_ne_n(a)P(a,t)=:$

$$r_j(s,t)\leq\inf_{p_i(s)}p_j(s,t)\leq p_j(s,t)\leq\sup_{p_i(s)}p_j(s,t)\leq R_j(s,t),$$

де інфінум і супремум беруться за всіма можливими початковими розподілами у момент часу s. Тоді

$$\sup_{p_i(s)} p_j(s,t) - \inf_{p_i(s)} p_j(s,t) \le \exp\left\{-\int_s^t \min_{i\ne j} \lambda_{ij}(\tau)d\tau\right\}. \quad (3.7)$$

Таким чином, якщо $\int_s^t \min_{i\ne j_0} \lambda_{ij0}(\tau)d\tau > -\ln\sigma$, то матиме місце σ-фокусування. Зокрема, якщо розбігається інтеграл

$$\alpha_i \ge 0$$

то в граничній точці $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$ спостерігатиметься точне фокусування.

Зазначимо, що з оцінки (3.7) випливає, що максимальна відстань між траєкторіями, які відповідають різним початковим розподілам, зменшується з часом.

3.3. Розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова

Розглянемо неоднорідний марковський процес, заданий інфінітезимальною матрицею $\Lambda(t)$, де $t\in[a,b]$. Знайдемо відповідну їй стохастичну матрицю $P(a,t)$, що описує ймовірності переходу між станами на відрізку часу $p(a)=\alpha_1 e_1(a)+\alpha_2 e_2(a)+...+\alpha_n e_n(a)$. Питання чисельного розв'язку системи диференціальних рівнянь розглянуті в [103, 137, 153]. Спеціальні підходи до розв'язку системи рівнянь Колмогорова наведені в [75, 119, 158]. Складності при її чисельному розв'язку виникають, коли інфінітезимальна матриця швидко змінюється (такі ефекти виникають при явищах фокусування або σ-фокусування). Спочатку розглянемо задачу Коші загального вигляду

$$y' = f(x,y),\ \ x\in(a,b), \quad (3.8)$$

$$y(a)=y_0. \quad (3.9)$$

Тут x, y – скаляри або вектори.

Загальна форма чисельного методу розв'язку задачі (3.8)-(3.9) така

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \ n = 0,1,2,..., \tag{3.10}$$

де α_j, β_j – постійні, $\alpha_k \neq 0$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$; це лінійне співвідношення між y_{n+j} і f_{n+j}. Метод, що відповідає формулі (3.10), називається лінійним багатокроковим методом або k-кроковим методом. Якщо $\beta_k = 0$, то метод (3.10) називається явним багатокроковим методом. Якщо ж $\beta_k \neq 0$, то в загальному випадку необхідно розв'язувати нелінійне рівняння відносно y_{n+k} й метод (3.10) називається неявним багатокроковим методом. В [138] показано, що, незважаючи на велику обчислювальну складність, неявні методи зазвичай переважають на практиці. Для заданого числа k неявний метод є в принципі більш точним, ніж явний. Далі, коли справа доходить до поведінки методів при малих збуреннях значень y_n (моделюючої поведінки формул при їхній чисельній реалізації на обчислювальних машинах), виявляється, що в явних методах значення кроку h мають бути набагато меншими, ніж у неявних методах (внаслідок абсолютної стійкості останніх).

З огляду на вищесказане, перейдемо до чисельного розв'язку системи диференціальних рівнянь Колмогорова

$$\frac{dp^T}{dt} = \Lambda^T(t) p^T, \ t \in (a,b), \quad p^T(a) = p^0,$$

де $p^T(t)$ – вектор-стовпець, що описує розподіл імовірностей у момент часу t. Використовуватимемо неявний метод прямокутників

$$p_{n+1}^T - p_n^T = h_n \Lambda^T(t_{n+1}) p_{n+1}^T \tag{3.11}$$

і неявний метод трапецій

$$p_{n+1}^T - p_n^T = \frac{h_n}{2}(\Lambda^T(t_n) p_n^T + \Lambda^T(t_{n+1}) p_{n+1}^T), \tag{3.12}$$

де нижній індекс n означає значення відповідного параметра на n-й ітерації. Розв'язуючи рівняння (3.11) – (3.12) відносно p_{n+1}^T, знайдемо

$$p_{n+1}^T = \left(E - h_n \Lambda^T (t_{n+1})\right)^{-1} p_n^T \qquad (3.13)$$

для методу прямокутників і

$$p_{n+1}^T = \left(E - \frac{h_n}{2} \Lambda^T (t_{n+1})\right)^{-1} \left(E + \frac{h_n}{2} \Lambda^T (t_n)\right) \qquad (3.14)$$

для методу трапецій. Перевагою неявного методу трапецій є також і те, що в ньому при обчисленні значення шуканої функції в точці t_{n+1} враховуються значення інфінітезимальної матриці Λ в точках t_n і t_{n+1}. Це значно поліпшує точність наближення, навіть у випадку різких збурень $\Lambda(t)$.

Загальна схема обчислень полягає в наступному. Задамо досить малу максимально припустиму похибку $\varepsilon > 0$, мінімально припустимий крок $h_{\min}$ і максимально припустимий крок $h_{\max}$. На n-й ітерації обчислюємо $p_{n+1}^{T(np)}$ за формулою прямокутників (3.13) і $p_{n+1}^{T(mp)}$ за формулою трапецій (3.14). Обчислюємо локальну похибку $\left\| p_{n+1}^{T(np)} - p_{n+1}^{T(mp)} \right\| < \varepsilon$. За норму в просторі векторів беремо суму модулів координат вектора:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Якщо локальна похибка більше ε й крок $h_n > h_{\min}$, то зменшуємо крок у δ раз і повторюємо n-у ітерацію ($\delta > 1$). Для більш точного опису процесів з більшими за модулем елементами інфінітезимальної матриці зменшуємо (наскільки це можливо) крок ітерації так, щоб

$$h_n < \frac{1}{\max\limits_{1 \le i \le n} \left|\lambda_{ij}(t_n)\right|}.$$

Продовжуємо процес доти, доки або локальна похибка не виявиться меншою ε, або крок h_n не виявиться меншим мінімально припустимого $h_{\min}$.

Після цього вважатимемо значення вектора розподілу ймовірностей у точці t_{n+1} рівним значенню, отриманому за формулою трапецій: $p_{n+1}^{T} = p_{n+1}^{T(mp)}$ і переходимо до $(n+1)$-ї ітерації. Ми використовуємо значення $p_{n+1}^{T(mp)}$, оскільки метод трапецій є більш точним.

При переході до $(n+1)$-ї ітерації залишаємо крок незмінним $h_{n+1} = h_n$, якщо на n-й ітерації проводилося його зменшення, або крок уже досяг свого максимального значення $h_{\max}$. У протилежному випадку збільшуємо крок $h_{n+1} = \gamma h_n$, де γ – заздалегідь обрана константа, $1 < \gamma < 2$. Таке збільшення кроку значно прискорює розв'язок системи рівнянь на тих проміжках, де $\Lambda(t)$ змінюється досить плавно.

3.4 Стабілізація розподілів марковського процесу

В [147] встановлено, що фокусування в точці t_0 має місце, якщо елементи $\lambda_{ij}(t)$ інфінітезимальної матриці $\Lambda(t)$ (всі або їх частина) при $t \to t_0$ швидко зростають. Їх швидке зростання зазвичай виникає через вплив на процес зовнішніх факторів, що швидко змінюються, локалізованих на малих проміжках часу. На практиці доводиться мати справу з такими факторами, які, впливаючи на процес на деякому проміжку часу $[a,b]$, призводять до появи на ньому точок фокусування, розподілених майже неперервно. У зв'язку з цим виникає задача про стабілізацію ймовірностей станів марковського процесу в околі заданого розподілу шляхом цілеспрямованого впливу на його інфінітезимальну матрицю $\Lambda(t)$.

Нехай задана n-вимірна крива $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$:

$$\varphi_k(t) \ge 0,\ k = 0,1,2,...n;\ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) = 1,\ t \in [a,b]. \tag{3.15}$$

У початковій точці a заданий розподіл імовірностей $p(a)$. Потрібно, щоб у наступні моменти часу $t \in [a,b]$ розподіл імовірностей $p(t)$ знаходився в околі зазначеної кривої $\varphi(t)$ (3.15):

$$\varphi(t) - \sigma(t) \le p(t) \le \varphi(t) + \sigma(t),\ t \in [a,b], \tag{3.16}$$

де $\sigma(t)$ – максимально припустима похибка. Вважатимемо, що в початковий момент часу $t = a$ ця умова вже виконана:

$$\varphi(a) - \sigma(a) \le p(a) \le \varphi(a) + \sigma(a).$$

Задача в тому, щоб при заданому початковому розподілі $p(a)$ вибрати інфінітезимальну матрицю $\Lambda(t)$ таким чином, щоб виконувалася умова (3.16). Функція $\sigma(t)$ й інфінітезимальна матриця $\Lambda(t)$ при цьому передбачаються неперервними на відрізку $[a,b]$, $\sigma(t) \ge 0$.

Зв'язок між інфінітезимальною матрицею $\Lambda(t) = \left\| \lambda_{ij}(t) \right\|$ й розподілом імовірностей $p(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t))$ задається прямою системою диференціальних рівнянь Колмогорова

$$\frac{dp^T}{dt} = \Lambda^T p^T.$$

Розіб'ємо весь часовий відрізок $[a,b]$ на малі відрізки $[t_k, t_{k+1}]$, $t_0 = a$, $t_m = b$. Через неперервність інфінітезимальної матриці $\Lambda(t)$, а, отже, і розв'язку $p(t)$, на кожному із окремих відрізків замінимо рівняння Колмогорова наближеним різницевим матричним рівнянням. Позначимо $h_k = t_{k+1} - t_k$ (рис. 3.1).

Значення в проміжній точці $t_k + \dfrac{h_k}{2}$ – може бути подане у вигляді

$$p^{T(k+1/2)} = \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} \right) p^{T(k)} + \bar{o}(h_k) \tag{3.17}$$

і, з іншого боку,

$$p^{T(k+1/2)} = \left(E - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right) p^{T(k+1)} + \bar{o}(h_k). \tag{3.18}$$

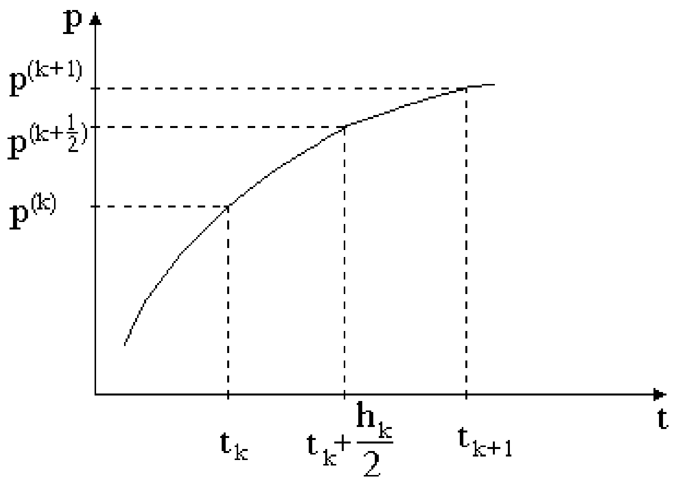


Рисунок 3.1 – Апроксимація рівнянь Колмогорова

Тут E – одинична матриця. Зіставляючи співвідношення (3.17) і (3.18), отримаємо апроксимацію системи рівнянь Колмогорова матричним рівнянням

$$p^{T(k+1)} = \left(E - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right)^{-1} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} \right) p^{T(k)}, \tag{3.19}$$

де символ $^{(k)}$ є значенням відповідного параметра в точці t_k. Зменшуючи крок h_k, можемо домогтися як завгодно малої різниці між точним розв'язком системи диференціальних рівнянь і наближеним розв'язком різницевої системи. Перетворюючи різницеве рівняння, матимемо

$$\left(E - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right) p^{T(k+1)} = \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} \right) p^{T(k)},$$

$$p^{T(k+1)} - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} p^{T(k+1)} = p^{T(k)} + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} p^{T(k)},$$

$$p^{(k+1)} - \frac{h_k}{2} p^{(k+1)} \Lambda^{(k+1)} = p^{(k)} + \frac{h_k}{2} p^{(k)} \Lambda^{(k)},$$

$$p^{(k+1)} \Lambda^{(k+1)} = 2 \frac{p^{(k+1)} - p^{(k)}}{h_k} - p^{(k)} \Lambda^{(k)}. \tag{3.20}$$

Таким чином, на кожному з відрізків $[t_k, t_{k+1}]$ за заданим значенням матриці $\Lambda^{(k)}$ в початковій точці t_k ми можемо знайти значення $\Lambda^{(k+1)}$ в кінцевій точці t_{k+1} так, щоб розподіл імовірностей у ній мало значення $\Lambda^{(k+1)}$. Однак рівняння (3.20) не визначає однозначно матрицю $\Lambda^{(k+1)}$. Тому доцільно із множини матриць $\Lambda^{(k+1)}$ вибрати таку, яка б мінімально відхилялася від вихідної незбуреної матриці.

Позначимо через $X^{(k+1)}$ шукане значення збуреної матриці в точці t_k й перепишемо умову (3.20) у вигляді

$$p^{(k+1)}X^{(k+1)} = \frac{p^{(k+1)} - p^{(k)}}{h_k} - p^{(k)}X^{(k)}.$$

Це призводить до задачі мінімізації виду

$$\alpha\sum_{i,j}\left(x_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k+1)}\right)^2 + \beta\sum_{i,j}\left(x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)}\right)^2 \to \min_{x_{ij}^{(k+1)}}; \tag{3.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k+1)}x_{ij}^{(k+1)} = -\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)}x_{ij}^{(k)} + \frac{2}{h_k}\left(p_j^{(k+1)} - p_j^{(k)}\right),\ j = 1,2,...,n; \tag{3.22}$$

$$x_{ii}^{(k+1)} = -\sum_{j\neq i} x_{ij}^{(k+1)},\ i = 1,2,...,n; \tag{3.23}$$

$$x_{ij}^{(k+1)} \geq 0,\ i \neq j. \tag{3.24}$$

Тут ${x_{ij}}^{(k+1)}$ – елементи шуканої матриці $X(t)$ в точці t_k, ${\lambda_{ij}}^{(k+1)}$ – елементи незбуреної матриці $\Lambda(t)$ в тій же точці. Обмеження (3.22) є апроксимацією (3.20) рівнянь Колмогорова. Обмеження (3.23) – (3.24) визначаються властивостями інфінітезимальної матриці. Перший доданок у функції цілі означає наближення до мінімального відхилення від вихідної незбуреної матриці $\Lambda(t)$, другий доданок уведений для запобігання різких осциляцій збуреної матриці. Додатні коефіцієнти α й β регулюють внески цих доданків.

Задача (3.21) – (3.24) є задачею квадратичного програмування з лінійними обмеженнями й квадратичною функцією цілі. Така задача завжди має єдиний розв'язок, який можна знайти чисельними методами. Таким чином, задача про отримання розподілу ймовірностей марковського процесу в околі деякої функції розподілу (3.16) зводиться до розбиття часового інтервалу на частинні відрізки й розв'язування задачі мінімізації (3.21) – (3.24) на кожному з них. Якщо знайдений розв'язок $X^{(k+1)}$ після підстановки в рівняння Колмогорова дає

$$p(t_{k+1}) \in [\varphi(t_{k+1}) - \sigma(t_{k+1}),\ \varphi(t_{k+1}) + \sigma(t_{k+1})],$$

то приймаємо його як початкове значення на наступному відрізку $[t_{k+1}, t_{k+1}]$. У протилежному випадку зменшуємо крок h_k на даному частинному відрізку й повторюємо обчислення заново. Відзначимо, що зазначений підхід дозволяє обчислити збурену інфінітезимальну матрицю процесу на будь-якій системі точок з часового відрізка $[a,b]$.

3.5 Довільний початковий розподіл

Попередня задача була розв'язана в припущенні про те, що початковий розподіл відомий. Якщо ж початковий розподіл невідомий, то необхідно так вибирати інфінітезимальну матрицю $\Lambda(t)$, щоб при будь-якому початковому розподілі, заданому в точці a, розподіл імовірностей лежав би в смузі

$$\varphi_1(t) \le p(t) \le \varphi_2(t),\ t \in [a, b],$$

де $\varphi_1(t) = (\varphi_{11}(t), \varphi_{12}(t), \dots, \varphi_{1n}(t))$, $\varphi_2(t) = (\varphi_{21}(t), \varphi_{22}(t), \dots, \varphi_{2n}(t))$ – вектор-функції, неперервні на $[a,b]$ й такі, що $\varphi_1(t) \le \varphi_2(t),\ \ t \in [a, b],\ \varphi_1(a) = 0,$ $\varphi_2(a) = 1$ (рис. 3.2).

Відзначимо, що якщо $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = 0$ в деякій точці $t_0 \in [a, b]$, то інфінітезимальна матриця $\Lambda(t)$ може мати розрив типу полюс у точці t_0 [147]. Тому далі вважатимемо, що $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ не перетворюється в нуль у жодній із точок відрізка $[a, b]$. Тоді матриця $\Lambda(t)$ буде неперервна на всьому відрізку $[a, b]$.

Нехай $P(a,t)$ – матриця перехідних імовірностей на відрізку часу $[a, t]$. Тоді $p(t) = p(a)P(a,t)$. Відображення $P(a,t)$ переводить множину початкових розподілів $\{p(a)\}$ у множину $\{p(t)\}$. Набір векторів $e_1(t), e_2(t), ..., e_n(t)$ називатимемо додатним базисом множини розподілів $\{p(t)\}$, якщо будь-який вектор із цієї множини подається у вигляді невід'ємної лінійної комбінації базисних векторів: $p(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + ... + \alpha_n e_n(t)$, де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$.

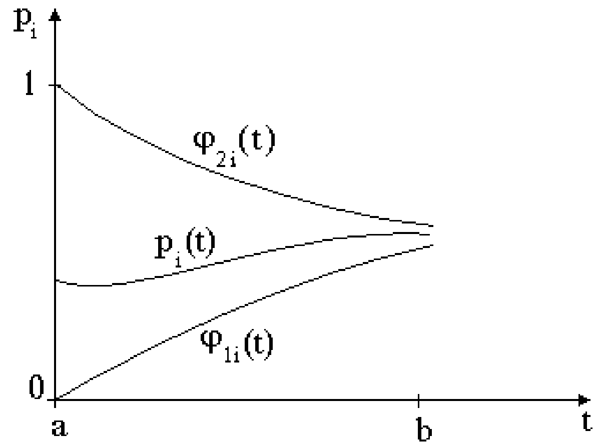


Рисунок 3.2 – Утримання вектора розподілу в заданій смузі

Лема 3.1. Відображення $P(a,t)$ переводить додатний базис $e_i(a)$ у додатний базис $e_i(t)$.

Доведення. Оскільки $e_1(a), e_2(a), ..., e_n(a)$ утворюють додатний базис, то будь-який розподіл імовірностей $p(a) \in \{p(a)\}$ може подаватися у вигляді лінійної комбінації:

$$p(a) = \alpha_1 e_1(a) + \alpha_2 e_2(a) + ... + \alpha_n e_n(a),$$

де $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$. Тоді в точці t отримаємо

$$p(t) = p(a)P(a,t) = (\alpha_1 e_1(a) + \alpha_2 e_2(a) + ... + \alpha_n e_n(a))P(a,t) =$$

$$= \alpha_1 e_1(a)P(a,t) + \alpha_2 e_2(a)P(a,t) + ... + \alpha_n e_n(a)P(a,t) =$$

$$= \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + ... + \alpha_n e_n(t).$$

Таким чином, розподіл $p(t)$ подається у вигляді невід'ємної лінійної комбінації векторів $e_i(t)$, що є відображенням базисних векторів $e_i(a)$. Отримана рівність і доводить лему.

Лема 3.2. Якщо початкові розподіли $e_1(a), e_2(a), ..., e_n(a)$ утворюють додатний базис і $e_i(t) \geq \varphi_1(t)$, $t \in [a,b]$, $i = 1,2,...,n$, то для будь-якого початкового розподілу $p(a)$ виконується та ж нерівність $p(t) \geq \varphi_1(t)$, $t \in [a,b]$.

Доведення. Нехай $P(a,t)$ – матриця перехідних імовірностей на відрізку часу $[a,t]$. Тоді $p(t) = p(a)P(a,t)$. Оскільки $e_1(a), e_2(a), ..., e_n(a)$ утворюють додатний базис, то будь-який початковий розподіл записується у вигляді $p(a) = \alpha_1 e_1(a) + \alpha_2 e_2(a) + ... + \alpha_n e_n(a)$, де $\alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$.

Тоді в момент часу t:

$$p(t) = \left(\alpha_1 e_1(a) + \alpha_2 e_2(a) + ... + \alpha_n e_n(a)\right) P(a,t) =$$

$$= \alpha_1 e_1(a) P(a,t) + \alpha_2 e_2(a) P(a,t) + ... + \alpha_n e_n(a) P(a,t) =$$

$$= \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + ... + \alpha_n e_n(t).$$

Оскільки $e_i(t) \geq \varphi_i(t)$, то

$$p(t) \geq \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_1(t) + ... + \alpha_n \varphi_1(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\varphi_1(t) = \varphi_1(t).$$

Лему доведено.

Аналогічно доводиться твердження про те, що якщо всі елементи додатного базису $e_i(t) \leq \varphi_2(t)$, $t \in [a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то для будь-якого початкового розподілу $p(a)$ виконується нерівність $p(t) \leq \varphi_2(t)$, $t \in [a,b]$. Очевидно, що вектори

$$e_1(a) = (1, 0, ..., 0),$$

$$e_2(a) = (0, 1, ..., 0),$$

$$\ldots$$

$$e_n(a) = (0, 0, ..., 1)$$

утворюють додатний базис у початковій точці a й, отже, вектори $e_m(t) = e_m(a)P(a,t)$ утворюють додатний базис у будь-якій точці $t \in [a,b]$. Зазначимо, що даний базис є єдиним, що дає всі інші можливі початкові розподіли ймовірностей. З оцінки (3.7) випливає, що із часом вектори e_i додатного базису наближатимуться, якщо тільки існує стовпець матриці $\Lambda(t)$, недіагональні елементи якого відмінні від нуля.

Розіб'ємо часовий інтервал на частинні відрізки $[t_k, t_{k+1}]$. Відповідно до лем 2.1, 2.2, для виконання умови $p^{k+1} \geq \varphi_1^{k+1}$в точці t_{k+1}, необхідно й достатньо, щоб вона виконувалася, коли як початковий розподіл в точці t_k вибрані вектори додатного базису $e_m^{(k)}$. Тоді з формули (3.19) маємо

$$p^{T(k+1)} = \left(E - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right)^{-1} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} \right) e_m^{T(k)} \geq \varphi_1^{T(k+1)}.$$

Для лінеаризації отриманої нерівності скористаємося розкладанням

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots, \ |q| < 1.$$

Тоді $\left(E - \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right)^{-1} \approx E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)}$ при досить малому значенні $\left\| \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right\|$, що може досягатися вибором відповідного кроку h_k. Тоді

$$\left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k+1)} \right) \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{T(k)} \right) e_m^{T(k)} \geq \varphi_1^{T(k+1)}.$$

Транспонуємо нерівність і виділяємо $\Lambda^{(k+1)}$:

$$e_m^{(k)} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k)} \right) \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k+1)} \right) \geq \varphi_1^{(k+1)},$$

$$\frac{h_k}{2} e_m^{(k)} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k)} \right) \Lambda^{(k+1)} + e_m^{(k)} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k)} \right) \geq \varphi_1^{(k+1)},$$

$$e_m^{(k)} \left(E + \frac{h_k}{2} \Lambda^{(k)} \right) \Lambda^{(k+1)} \geq \frac{2}{h_k} (\varphi_1^{(k+1)} - e_m^{(k)}) - e_m^{(k)} \Lambda^{(k)}.$$

Аналогічне співвідношення виконується й для φ_2:

$$e_m^{(k)}\left(E+\frac{h_k}{2}\Lambda^{(k)}\right)\Lambda^{(k+1)} \le \frac{2}{h_k}(\varphi_2^{(k+1)} - e_m^{(k)}) - e_m^{(k)}\Lambda^{(k)}.$$

Це призводить до задачі мінімізації, аналогічної (3.21) – (3.24),

$$a\sum_{i,j}(x_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k+1)})^2 + b\sum_{i,j}(x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)})^2 \to \min_{x_{ij}^{(k+1)}}; \tag{3.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{mi}^{(k+1)} x_{ij}^{(k+1)} \ge \frac{2}{h_k}\left(\varphi_{1j}^{(k+1)} - e_{mj}^{(k)}\right) - \sum_{i=1}^{n} e_{mi}^{(k)} x_{ij}^{(k)}; \tag{3.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{mi}^{(k+1)} x_{ij}^{(k+1)} \ge \frac{2}{h_k}\left(\varphi_{2j}^{(k+1)} - e_{mj}^{(k)}\right) - \sum_{i=1}^{n} e_{mi}^{(k)} x_{ij}^{(k)}, \quad j, m = 1, 2, \dots, n, \tag{3.27}$$

де

$$a_{mi}^{(k)} = e_{mi}^{(k)} + \frac{h_k}{2}\sum_{j=1}^{n} e_{mi}^{(k)} x_{ji}^{(k)}, \; m = 1, 2, \dots, n; \tag{3.28}$$

$$x_{ii}^{(k+1)} = -\sum_{j \ne i} x_{ij}^{(k+1)}, \; i = 1, 2, \dots, n; \tag{3.29}$$

$$x_{ij}^{(k+1)} \ge 0, \; i \ne j. \tag{3.30}$$

Тут, як і раніше, $x_{ij}^{(k+1)}$ – елементи шуканої матриці $X(t)$ в точці t_{k+1}, $\lambda_{ij}^{(k+1)}$ – елементи незбуреної матриці $\Lambda(t)$ в тій же точці.

Задачі (3.21) – (3-24) і (3.25) – (3 30) подібні, за винятком того, що при переході до випадку з довільним початковим розподілом умова (3.22) типу рівності замінюється умовами типу нерівностей вигляду (3.26) – (3.27).

3.6 Комп'ютерне моделювання процесу фокусування

Розглянемо довільний неоднорідний марковський процес з неперервним часом, скінченною множиною станів I, $|I|=n$, та інфінітезимальною матрицею $\Lambda(t)$. Імовірності знаходження процесу в i-му стані $i \in I$ в момент часу t позначимо $p_i(s_0,t)$.

Інфінітезимальна матриця марковського процесу є квазістохастичною. Задача Коші в цьому випадку має вигляд

$$p'(t) = \Lambda^T(t)\,p(t),$$
$$p(0) = p^0,$$

де $p(t) \in R^n$ – вектор імовірностей станів процесу, p^0 – початковий розподіл імовірностей.

Матриця Якобі для цієї задачі співпадає з матрицею $\Lambda^T(t)$. Як було показано в [77], множина характеристичних коренів матриці Якобі знаходиться в колі $\left|z+|\rho|\right| \le |\rho|$ й має з окружністю $\left|z+|\rho|\right| = |\rho|$ загальні точки $|\rho| e^{\frac{2\pi i a}{b}} - |\rho|$, де $0 \le a < b \le n$, ρ – максимальний за модулем елемент інфінітезимальної матриці марковського процесу. Його межа складається із цих точок і з'єднуючих їх у круговому порядку криволінійних дуг.

Відрізки границі множини характеристичних коренів матриці Якобі, що проходять через точку комплексної площини $(0,0)$, є відрізками прямих, що з'єднують точки $|\rho| e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - |\rho|$ і $(0,0)$, $(0,0)$ і $|\rho| e^{\frac{2\pi i}{n}} - |\rho|$ відповідно. В околі полюса інфінітезимальної матриці максимальний за модулем елемент ρ необмежено зростає, однак це не впливає на праву границю множини характеристичних коренів матриці Якобі. Дійсно, точки

$$|\rho| e^{\frac{2\pi i}{n}} - |\rho| = |\rho| \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1 \right)$$

лежать на одному промені, що з'єднує точки (0, 0) і $e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1$ незалежно від величини ρ, а точки

$$|\rho| e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - |\rho| = |\rho| \left(e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} - 1 \right)$$

лежать на промені, що з'єднує точки $(0,0)$ й $e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}}-1$ незалежно від величини $|\rho|$. Таким чином, всі характеристичні корені матриці Якобі відповідають умові

$$|\arg(-z)|<\frac{2\pi}{n}.$$

Для чисельного розв'язку рівнянь Колмогорова використано систему Mathematica 5.0®. На сьогоднішній день ця система є світовим лідером серед комп'ютерних систем символьної математики для персональних комп'ютерів і забезпечує не тільки можливості виконання складних чисельних розрахунків з виведенням результатів у графічній формі, але й проведення особливо трудомістких аналітичних обчислень і перетворень.

Опишемо процес побудови інфінітезимальної матриці Λ в припущенні, що її нульовий власний вектор

$$\vec{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$$

відомий. Задача відшукання Λ має нескінченну множину розв'язків. Покажемо один з таких розв'язків. Перепишемо рівність $\Lambda^{\tau}\vec{\pi}=0$ у вигляді:

$$\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\\ \ldots\\ \pi_n\end{pmatrix}^{\tau}\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1,n}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2,n-1} & \lambda_{2,n}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \cdots & \lambda_{3,n-1} & \lambda_{3,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{n,n-1} & \lambda_{n,n}\end{pmatrix}=0.$$

Вектор $(\lambda_{11},\lambda_{21},\ldots,\lambda_{n1})$, що складається з елементів першого стовпця матриці Λ, має бути ортогональним вектору $\vec{\pi}$. Крім того, мають виконуватися умови $\lambda_{11}<0$, $\lambda_{k1}>0$ $(k=2,\ldots,n)$. Вектор $(\lambda_{12},\lambda_{21},\ldots,\lambda_{n2})$, компоненти якого є елементами другого стовпця матриці Λ, також ортогональний вектору $\vec{\pi}$; у ньому $\lambda_{22}<0$, $\lambda_{12}>0$, $\lambda_{32}>0$, … , $\lambda_{n2}>0$... Крім того, мають виконуватися умови $\lambda_{11}+\lambda_{12}<0$, $\lambda_{21}+\lambda_{22}<0$. Очевидно, що вибір величин $\lambda_{12},\lambda_{22},\ldots,\lambda_{n2}$ (передбачається, що перший стовпець матриці Λ вже обраний) проводиться неоднозначно. 3-й, … , $(n-1)$-й стовпці матриці Λ також знаходяться неоднозначно: потрібно лише, щоб кожен з них був ортогональним $\vec{\pi}$, елементи λ_{ii}, $(i=3,\ldots,(n-1))$ цих стовпців мають бути від'ємними, а інші елементи – додатними. При побудові чергового стовпця необхідно спочатку правильно вибрати його член, що відповідає діагональному елементу матриці Λ. Інші елементи цього стовпця будуються без особливих ускладнень.

Якщо припустити, що всі стовпці матриці Λ, до $(n-2)$-го стовпця включно, уже побудовані, то $(n-1)$-й її стовпець будується так. Він має бути ортогональним $\vec{\pi}$. Всі його елементи $\lambda_{i,n-1}$, $i \neq n-1$ мають бути додатними, а елемент $\lambda_{n-1,n-1}$ від'ємний. Крім того, суми елементів кожного рядка матриці Λ (у якій n-й стовпець ще не побудований) мають бути від'ємними. Очевидно, $(n-1)$-й стовпець матриці Λ, що відповідає зазначеним умовам, будується неоднозначно. Останній n-й стовпець матриці Λ дорівнює сумі побудованих її стовпців, узятої з протилежним знаком.

З описаного вище способу побудови матриці Λ видно, що її вибір робиться неоднозначно.

Розглянемо неоднорідний марковський процес з інфінітезимальною матрицею

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{0,5}{1-t} & \frac{0,5}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} & \frac{-3}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ \frac{0,5}{1-t} & \frac{0,5}{1-t} & \frac{-2}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{-3}{1-t} \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Для цього процесу виконуються умови існування точки фокусування й умови існування граничних імовірностей у цій точці, що не залежать від початкового розподілу ймовірностей і моменту часу, у який вони задані. Точкою фокусування тут є точка $t_0 = 1$. З процесами, що описуються матрицями виду (3.31) з неінтегрованими особливостями порядку t^{-1}, доводиться мати справу в тому випадку, коли зовнішні впливи на процес виникають за рахунок точкових зарядів, величини яких швидко змінюються в часі.

Нижче наведені результати чисельного моделювання даного марковського процесу, що полягає в розв'язуванні системи диференціальних рівнянь Колмогорова з інфінітезимальною матрицею (3.31).

З таблиці 3.1. видно, що процес виходить на свій стаціонарний розподіл з моменту часу, приблизно рівного $t = 0,99$. Динаміку збіжності ймовірності станів до фінальних імовірностей видно з табл. 3.1.

Імовірності станів для $t = 0,99$ збігаються з граничними ймовірностями з точністю до 3-го знаки після коми.

Таблиця 3.1 – **Збіжність імовірності станів до фінальних імовірностей**

t	$p_1(t)$	$P_2(t)$	$P_3(t)$	$P_4(t)$
0,88	0,288337	0,214954	0,283349	0,213361
0,99	0,285719	0,214287	0,285709	0,214284

0,999	0,285714	0,214286	0,285714	0,214286

У розглянутому вище прикладі збіжність імовірностей станів до фінальних імовірностей відбувається досить швидко. Розглянемо тепер процес із інфінітезимальною матрицею виду

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix} -\ln\frac{1}{1-t} & \frac{1}{3}\ln\frac{1}{1-t} & \frac{2}{3}\ln\frac{1}{1-t} \\ \ln\frac{1}{1-t} & -2\ln\frac{1}{1-t} & \ln\frac{1}{1-t} \\ \ln\frac{1}{1-t} & 2\ln\frac{1}{1-t} & -3\ln\frac{1}{1-t} \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Тут $t_0=1$ є точкою фокусування. Елементи матриці (3.32) мають при $t_0=1$ неінтегровані розриви, однак відповідні невласні інтеграли розбігаються повільно через повільне прагнення до ∞ (при $t\uparrow 1$) її елементів. Тому ймовірності станів $p_j(t)$ $(j=1,2,3)$ при $t\uparrow 1$ прагнуть до фінальних імовірностей досить повільно. Динаміку збіжності ймовірності станів до стаціонарного розподілу наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – **Збіжність імовірності станів до стаціонарного розподілу**

t	p_1(t)	p_2(t)	p_3(t)
0,9	0,630986	0,19109	0,177923
0,99	0,575686	0,23146	0,19285
0,999	0,568734	0,236751	0,194515
0,9999	0,567789	0,23474	0,194737
0,99999	0,567667	0,237567	0,194766
0,999999	0,567652	0,237578	0,194769
0,9999999	0,567651	0,23758	0,19477
0,9999999	0,567651	0,23758	0,19477
0,99999999	0,56765	0,23758	0,19477
0,999999999	0,56765	0,23758	0,19477

Елементи останнього рядка цієї таблиці збігаються з компонентами граничного розподілу. Розглянемо тепер чотири процеси з інфінітезимальними матрицями

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix} -\ln^2\frac{1}{1-t} & \frac{1}{3}\ln^2\frac{1}{1-t} & \frac{2}{3}\ln^2\frac{1}{1-t} \\ \ln^2\frac{1}{1-t} & -2\ln^2\frac{1}{1-t} & \ln^2\frac{1}{1-t} \\ \ln^2\frac{1}{1-t} & 2\ln^2\frac{1}{1-t} & -3\ln^2\frac{1}{1-t} \end{bmatrix}, \qquad (3.33)$$

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix} -\ln^3\frac{1}{1-t} & \frac{1}{3}\ln^3\frac{1}{1-t} & \frac{2}{3}\ln^3\frac{1}{1-t} \\ \ln^3\frac{1}{1-t} & -2\ln^3\frac{1}{1-t} & \ln^3\frac{1}{1-t} \\ \ln^3\frac{1}{1-t} & 2\ln^3\frac{1}{1-t} & -3\ln^3\frac{1}{1-t} \end{bmatrix}, \qquad (3.34)$$

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix} -\ln^4\frac{1}{1-t} & \frac{1}{3}\ln^4\frac{1}{1-t} & \frac{2}{3}\ln^4\frac{1}{1-t} \\ \ln^4\frac{1}{1-t} & -2\ln^4\frac{1}{1-t} & \ln^4\frac{1}{1-t} \\ \ln^4\frac{1}{1-t} & 2\ln^4\frac{1}{1-t} & -3\ln^4\frac{1}{1-t} \end{bmatrix}, \qquad (3.35)$$

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix} -\ln^5\frac{1}{1-t} & \frac{1}{3}\ln^5\frac{1}{1-t} & \frac{2}{3}\ln^5\frac{1}{1-t} \\ \ln^5\frac{1}{1-t} & -2\ln^5\frac{1}{1-t} & \ln^5\frac{1}{1-t} \\ \ln^5\frac{1}{1-t} & 2\ln^5\frac{1}{1-t} & -3\ln^5\frac{1}{1-t} \end{bmatrix}. \qquad (3.36)$$

Для кожної з них $t_0 = 1$ є точкою фокусування. У цих матрицях показник при логарифмі (він приймає значення 2, 3, 4, 5 відповідно) задає порядок прагнення до нескінченності їхніх елементів при $t \uparrow 1$.

З наведених нижче даних видно, як при цьому змінюється динаміка збіжності ймовірностей станів до фінальних імовірностей. Для кожної із цих матриць динаміку збіжності ймовірностей станів до фінальних імовірностей наведено в табл. 3.3 – 3.6 відповідно.

Таблиця 3.3 – **Збіжність імовірностей станів до фінальних імовірностей для матриці (3.33)**

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,599091	0,214	0,186908
0,599	0,510391	0,283062	0,206547
0,99999	0,509177	0,284061	0,206762
0,9999999	0,509149	0,284084	0,206767
0,99999999	0,509148	0,284085	0,206767
0,999999999	0,509148	0,284085	0,206767

Таблиця 3.4 – **Збіжність імовірностей станів до фінальних імовірностей для матриці (3.34)**

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,544721	0,2554	0,199879
0,99	0,500151	0,29154	0,208308
0,999	0,500009	0,291659	0,208332
0,9999	0,500004	0,291663	0,208333
0,99999	0,500003	0,291664	0,208333

Елементи останніх рядків у кожній з наведених таблиць збігаються з компонентами відповідного стаціонарного розподілу.
Матриці розглянутих вище процесів з точністю до скалярних множників, що перетворюються в нескінченність при $t\uparrow 1$, постійні. Може виникнути помилкове припущення про те, що саме ця обставина забезпечує фокусування. Наведемо комп'ютерний аналіз процесу, для якого інфінітезимальна матриця не має зазначеної властивості.

Таблиця 3.5 – **Збіжність імовірностей станів до фінальних імовірностей для матриці (3.35)**

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,508846	06284334	0,20682
0,99	0,5	0,291667	0,208333
0,999	0,5	0,291667	0,208333

Таблиця 3.6 – **Збіжність імовірностей станів до фінальних імовірностей для матриці (3.36)**

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$
0,9	0,500363	0,291364	0,208273
0,99	0,5	0,291667	0,208333
0,999	0,5	0,291667	0,208333

Розглянемо процес, матриця якого містить елементи різних порядків зростання. Інфінітезимальна матриця процесу має вигляд:

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{1-t}-\ln\frac{1}{1-t} & \ln\frac{1}{1-t} & \frac{1}{3(1-t)} & \frac{2}{3(1-t)} \\ \ln\frac{1}{1-t} & -\frac{2}{1-t}-3\ln\frac{1}{1-t} & \frac{2}{1-t} & 2\ln\frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t}+\ln\frac{1}{1-t} & \ln\frac{1}{1-t} & -2\ln\frac{1}{1-t}-\frac{2}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1-t} & \frac{2}{1-t} & \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-t} & -\frac{3}{1-t}-\ln\frac{1}{1-t} \end{bmatrix}.$$

Точка $t=1$ є для нього точкою фокусування. Цей процес промодельований при різних початкових розподілах імовірностей. З результатів обчислень видно, що значення граничних імовірностей не залежать від початкового розподілу ймовірностей. Стабілізація процесу спостерігається, починаючи з моменту часу $\mathrm{t}=0{,}99999999$.

З табл. 3.7 видно, що процес стабілізується, починаючи із цієї точки. Динаміку збіжності ймовірності станів до стаціонарного розподілу наведено в табл. 3.7.

Таблиця 3.7 – **Збіжність імовірностей станів до фінальних імовірностей**

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_4(t)$
0,9	0,416145	0,182363	0,237695	0,163797
0,9999	0,393922	0,177583	0,28009	0,149594
0,9999999	0,392524	0,17757	0,280373	0,149533
0,999999999	0,392523	0,17757	0,280373	0,149533

Тут елементи останнього рядка збігаються з компонентами граничного розподілу, чисельні дані таблиці відповідають початковому розподілу ймовірностей $(1, 0, 0, 0)$. Дані для інших початкових розподілів починаючи з моменту $t=0{,}9999$, збігаються з наведеними вище.

Розглянемо марковський процес зі скінченним числом станів n і інфінітезимальною матрицею $\Lambda(t)$ $(s_0 \le t \le t_0)$, що розпадається при $t \uparrow t_0$ на незв'язані фрагменти. Нехай Λ_{11} і Λ_{22} є лівий верхній і правий нижній діагональні блоки матриці Λ розмірності $m \times m$ і $(n-m)\times(n-m)$. Позначимо через $\Lambda_{12}(t)$, $\Lambda_{21}(t)$ правий верхній й лівий нижній блоки $\Lambda(t)$ (недіагональні блоки) розмірностей $m\times(n-m)$ і $(n-m)\times m$. Елементи недіагональних блоків прагнуть до нуля при $t \uparrow t_0$. У цьому випадку говоритимемо, що при $t \uparrow t_0$ процес розпадається на незв'язані фрагменти. Становить інтерес випадок, коли в момент розпаду $t = t_0$ відбувається й фокусування розподілів процесів, що відповідають матрицям Λ_{11} і, Λ_{22} або фокусування хоча б одного з них. Наведемо умови, під час виконання яких ці фокусування мають місце.

Відомо (див., наприклад, [152]), що «близьким» у сенсі норми матрицям двох лінійних систем диференціальних рівнянь відповідають розв'язки цих систем, що мало відрізняються один від одного. Припустимо, що

$$\left\| X_k(t) - \hat{X}_k(t) \right\| \to 0 \ \ (k \to \infty). \tag{3.37}$$

Тут $X_k(t)$ – матрицант системи, що розпадається, рівнянь Колмогорова з матрицею $\Lambda(t)$, що відповідає відрізку $[t_k, t_{k+1}]$; $\hat{X}_k(t)$ – матрицант системи Колмогорова для цього ж відрізка з матрицею $\hat{\Lambda}(t)$, отриманою із $\Lambda(t)$ заміною нулями елементів із $\Lambda_{12}(t)$, з наступною корекцією елементів. Ця корекція полягає в заміні $\lambda_{ii}(t)$ величинами $\hat{\lambda}_{ii}(t) = \lambda_{ii}(t) + \Delta_i(t)$. Тут

$$\Delta_i(t) = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_{ij}(t), \ i = 1,2,\dots,m, \quad \Delta_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}(t), \ i = m+1,\dots,n.$$

Вважатимемо, що процеси, які описуються матрицями $\hat{\Lambda}_{11}(t)$, $\hat{\Lambda}_{22}(t)$, відповідають на $[s_0, t_0]$ умовам фокусування.

Умова (3.37) виконуватиметься, якщо зменшення до нуля елементів блоків Λ_{12}, Λ_{21}, буде досить швидким (див. [65]). Матриця $\hat{\Lambda}(t)$ – блочно-діагональна. Її блоки $\hat{\Lambda}_{11}(t)$, $\hat{\Lambda}_{22}(t)$ є інфінітезимальними матрицями. Відповідні їм процеси при $t \uparrow t_0$ фокусують на вектори $\vec{p}_1$ й $\vec{p}_2$.

Нехай матриця $\Lambda(t)$ процесу, що розпадається, відповідає перерахованим вище умовам. Тоді для довільного розподілу ймовірностей, заданого в точці $s \in [s_0, t_0)$, імовірності станів $p_j(s,t)$ процесу, що розпадається, мають границі при $t \uparrow t_0$:

$$\lim_{t \uparrow t_0} p_j(s,t) = p_j, \ \ j = 1,2,\dots,n. \tag{3.38}$$

Вектор $\vec{p}$ з компонентами p_j має вигляд

$$\vec{p} = (\alpha\vec{p}_1, (1-\alpha)\vec{p}_2). \tag{3.39}$$

Тут $\alpha \in (0,1)$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ – вектори, на які фокусують при $t \uparrow t_0$ блоки $\hat{\Lambda}_{11}$, $\hat{\Lambda}_{22}$.

Якщо лише один з діагональних блоків, для визначеності, блок $\hat{\Lambda}_{11}$ відповідає умовам фокусування й умова (3.37) як і раніше виконується, то (3.38) матиме місце лише для $j = 1,...,m$. Рівність (3.39) зберігається лише частково: α і $\vec{p}_1$ ті ж, що й в (3.39), але $\vec{p}_2$ тепер не є вектор, на який фокусує блок $\hat{\Lambda}_{22}$.

Якщо кожен з блоків $\hat{\Lambda}_{11}$, $\hat{\Lambda}_{22}$ σ-фокусує при $t \uparrow t_0$ на вектори розподілів $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, то процес, що розпадається, σ-фокусує на $\vec{p} = (\alpha\vec{p}_1, (1-\alpha)\vec{p}_2)$.

У перерахованих випадках скалярний множник α в (3.39) залежить від початкового розподілу ймовірностей, точки s, в якій воно задається, і швидкості спадання до нуля елементів блоків Λ_{12}, Λ_{21}.

Розглянемо приклад фокусування для процесу, що розпадається на невзаємодіючі процеси. Інфінітезимальна матриця процесу має вигляд

$$\begin{pmatrix} -2/(1-t)-10(t-1)^4 & 2/(1-t) & 5(t-1)^4 & 5(t-1)^4 \\ 3/(1-t) & -3/(1-t)-10(t-1)^4 & 5(t-1)^4 & 5(t-1)^4 \\ 5(t-1) & 5(t-1) & -2/(1-t)-10(t-1) & 2/(1-t) \\ 5(t-1) & 5(t-1) & 2/(1-t) & -3/(1-t)-10(t-1) \end{pmatrix}$$

Таким чином, точка фокусування $t_0 = 1$ і момент розпаду збігаються. Результати розрахунків при $s_0 = 0$ наведені в табл. 3.8.

Таблиця 3.8 – **Збіжність імовірностей станів до фінальних імовірностей**

t	p_1	p_2	p_3	p_4
0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,551682	0,367788	0,048318	0,032212
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,551682	0,367788	0,048318	0,032212
0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000
1,000000	0,551134	0,367413	0,048866	0,032577
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000
1,000000	0,551134	0,367413	0,048866	0,032577

Результати розрахунків для того ж процесу при $s_0 = 0,5$ наведено в табл. 3.9. З наведених даних видно, що при перенесенні точки завдання початкових умов s_0 ближче до точки фокусування, фінальні розподіли помітно змінюються.

Таблиця 3.9 – **Збіжність імовірностей станів до фінальних імовірностей**

t	p_1	p_2	p_3	p_4
0,500000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,584468	0,389645	0,015532	0,010355
0,500000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,584468	0,389645	0,015532	0,010355
0,500000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000
1,000000	0,422980	0,281987	0,177020	0,118013
0,500000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000
1,000000	0,422980	0,281987	0,177020	0,118013

Комп'ютерний аналіз σ-фокусування зроблений в [38]. Поведінка ймовірностей $p_j(s_0,t)$ при $t \uparrow t_0$ (t_0 – точка σ-фокусування) розглядалася залежно від вектора початкового розподілу ймовірностей $\vec{p}^{\,0}$, заданого при $t = s_0$. В [70] наведені значення верхніх і нижніх границь $\overline{\lim_{t \uparrow t_0}} p_j(s_0,t)$, $\underline{\lim_{t \uparrow t_0}} p_j(s_0,t)$ для різних значень вектора $\vec{p}^{\,0}$. Множина всіх цих значень вибиралася так, щоб вона становила досить щільну ε-мережу на поверхні Π, яка задається умовами $p_i > 0, (i = 1,\dots,n)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Дані чисельного моделювання, отримані для матриці

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \frac{-0,2}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,05}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,05}{(1-t)^{0,99}} \\ \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{-0,3}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} \\ \frac{0,05}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,05}{(1-t)^{0,99}} & \frac{-0,2}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} \\ \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{0,1}{(1-t)^{0,99}} & \frac{-0,3}{(1-t)^{0,99}} \end{pmatrix},$$

наводити не будемо. Відзначимо лише, що вони повністю узгоджуються з теоретичними висновками, наведеними в [38, 61]:

а) чим більші модулі інтегралів від збурених елементів інфінітезимальної матриці, тим менша величина σ, що визначає точність σ-фокусування;

б) при $s_0 \to t_0$ σ зростає; якщо різниця $t_0 - s_0$ досить мала, то σ-фокусу-вання

немає.
Розглянемо марковський процес, заданий інфінітезимальною матрицею, елементи якої мають різні точки розривів

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{3}{4}}} & \dfrac{0,5}{(1-t)^{\frac{3}{4}}} & \dfrac{0,5}{(1-t)^{\frac{3}{4}}} \\ \dfrac{0,25}{(1-t+\delta_1)^{\frac{3}{4}}} & -\dfrac{0,5}{(1-t+\delta_1)^{\frac{3}{4}}} & \dfrac{0,25}{(1-t+\delta_1)^{\frac{3}{4}}} \\ \dfrac{1}{(1-t+\delta_2)^{\frac{3}{4}}} & \dfrac{0,5}{(1-t+\delta_2)^{\frac{3}{4}}} & -\dfrac{1,5}{(1-t+\delta_2)^{\frac{3}{4}}} \end{bmatrix}.$$

Тут у другому й третьому рядках матриці $\Lambda(t)$ її елементи містять добавки δ_1, і δ_2. Ці добавки передбачаються малими. Таким чином, матриця $\Lambda(t)$ має три точки $t=1$, $t=1+\delta_1$, $t=1+\delta_2$ $(\delta_1 \neq \delta_2)$, у яких її елементи мають неінтегральні розриви. Тому тут не зрозуміло, яка точка буде точкою σ-фокусування (σ-фокусування буде в тому випадку, якщо $\delta_1=\delta_2=0$).

Якщо в розглянутій матриці покласти $\delta_1=\delta_2=0$ й усюди замінити показник $\frac{3}{4}$ на показник $k>1$, то $t_0=1$ буде точкою фокусування.

Цікаво з'ясувати, як виглядає динаміка збіжності ймовірностей станів процесу і як відбувається при цьому їхнє розсіювання зі зміною величин δ_1, δ_2. З процесами, елементи інфінітезимальних матриць яких мають точки розривів (інтегровані або неінтегровані), загалом кажучи, незбіжні, доводиться зіштовхуватися на практиці. Часто доводиться мати справу із системами марковського типу, що мають значну просторову довжину. Зовнішні фактори, впливаючи на такі процеси, збурюють їх компоненти в різні моменти часу. Точніше, максимум збурень, які отримують різні ланки системи, що збурюється, фіксуються в них у різні моменти часу. Але моменти часу, в які максимуми збурень досягають цих ланок і є точками розривів відповідних елементів матриці $\Lambda(t)$. Відзначимо, що величини δ_1, δ_2, загалом кажучи, залежать від часу, оскільки різним положенням системи, тривалої щодо джерела збурень, відповідають різні проміжки часу, за які збурення, поширюючись від джерела, досягає різних її частин.

Чисельне моделювання процесу з «розмитою» точкою фокусування проводилося при значеннях δ_1, δ_2, що змінюються в проміжку значень від 0,1 до 10^{-15}. На часовому проміжку, що має розриви всіх елементів інфінітезимальної матриці, значення її елементів $\lambda_{ij}(t)$ замінювалися постійними Λ_{ij}. Ці постійні дорівнюють максимальним значенням функцій $\lambda_{ij}(t)$ поза зазначеним проміжком. Результати чисельного моделювання описаної в цьому підпункті ситуації не наводитимемо в зв'язку з їх громіздкістю. Відзначимо лише якісну відмінність отриманих тут даних з відповідними даними для випадку σ-фокусування. У випадку σ-фокусування ймовірності станів $p_j(s_0,t)$ при $t \uparrow t_0$ (t_0 – точка σ-фокусування) локалізуються в малих околах π_j – компонент граничного розподілу. Поведінка ймовірностей $p_j(s_0,t)$ для ситуації цього підпункту трохи інша. Тепер величини $p_j(s_0,t)$ при різних значеннях j локалізуються в різні моменти часу.

3.7 Фокусування розподілів марковських процесів з континуальною множиною станів

Багато марковських процесів, з якими доводиться мати справу на практиці, еволюціонують у реальному середовищі. Множина всіх елементарних наслідків імовірнісного простору, на основі якого будується такий процес, часто є областю простору одного або більшого числа вимірів. До таких процесів відносяться, наприклад, дифузійні процеси й процеси, що досліджуються в екології. Тут для випадку дифузії на прямій під станом процесу розуміють відрізок або інтервал прямої, а множина всіх його станів є сімейством відрізків (інтервалів) прямої. Часто для одновимірного процесу дифузії під множиною всіх його станів розуміють систему всіх борелівських множин прямої. Ця система множин має досить складну будову. Очевидно, що задача про введення множини всіх станів ускладнюється, якщо процес дифузії відбувається на площині або в просторі більшого числа вимірів.

Зрозуміло, що розглядаючи процеси марковского типу, які відбуваються в реальному просторі, доводиться зіштовхуватися з такою ситуацією, коли процес еволюціонує в кількох частинах простору, що перетинаються на множинах малої міри. При цьому може виникнути така задача: як буде протікати такий процес, якщо в початковий момент часу збурена лише одна із цих частин простору? Очевидно, що еволюція процесу істотно залежатиме від того, які міри зазначених перерізів. У реальних задачах дифузії може виникати питання про те, як еволюціонує процес, якщо міри цих перерізів прагнуть до нуля. Дослідження таких задач, загалом кажучи, не може бути зроблене в рамках теорії марковських процесів зі скінченним або зліченим числом станів.

Виявляється, що при виконанні деяких умов, які наводяться нижче, дослідження задач про фокусування процесів з континуальною множиною станів можна звести до розгляду процесу зі зліченою або навіть скінченною множиною станів. Важливим є те, що похибку, яка виникає при переході від вихідного процесу до процесу зі скінченним числом станів, можна зробити як завгодно малою. В основі цього переходу лежить припущення про те, що множина всіх елементарних наслідків Ω містить злічену всюди щільну множину. Це припущення, за рідкісним винятком, виконується для всіх Ω.

Перш ніж переходити до точного обґрунтування схеми зазначеного переходу, наведемо деякі визначення, пов'язані з розв'язком нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь з нескінченним числом невідомих.

Нескінченною системою лінійних рівнянь із нескінченним числом невідомих називається система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots = b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{3.40}$$

Надалі рівняння цієї системи записуватимемо у вигляді:

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k + b_i, \ (i = 1, 2, \ldots). \tag{3.41}$$

Перехід від системи (3.40) до системи (3.41) можливий, зокрема, для нес-кінченної системи алгебраїчних рівнянь, у якій матриця коефіцієнтів при невідомих співпадає з інфінітезимальною матрицею процесу зі зліченим числом станів.

Кажуть, що розв'язок системи (3.40) може обчислюватися методом редукції, якщо його можна знайти за допомогою переходу в розв'язку скінченної системи, що отримана з нескінченної системи (3.40) відкиданням у ній всіх рівнянь і невідомих, починаючи з деякого номера. Точніше, якщо в (3.40) відкинути всі рівняння й члени з невідомими x_n, у яких $n \geq N$, і потім знайти розв'язок $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ отриманої таким способом системи

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1N}x_N + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_N = c_{N1}x_1 + \ldots + c_{NN}x_N + b_N, \end{cases} \tag{3.42}$$

то розв'язок $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots)$ системи (3.40) можна отримати граничним переходом

$$x_i^* = \lim_{N \to \infty} x_i.$$

Часто при такому переході від (3.40) до (3.42) коефіцієнти системи (3.40) піддають певній корекції. Далі під час дослідження процесу фокусування використовується схема редукції з корекцією.

Обґрунтуємо процес фокусування.

Марковским процесом у широкому значенні називається сукупність таких об'єктів:

а) вимірного простору $\{\Omega, F\}$;

б) відрізка I (півінтервалу) дійсної осі;

в) марковського сімейства стохастичних ядер

$$\{P_{st}(x,B),\, s<t,\, (s,t)\in I\times I\}.$$

Тут $P_{st}(x,B)=P(s,x,t,B)$ – умовна ймовірність того, що в момент t система перебуває в множині станів з B, якщо в момент часу s система перебувала в стані x. Для визначеності думатимемо, що множина всіх елементарних наслідків $\Omega\subset R^n$ (це припущення можна послабити) і що множина всіх подій складається із всіх борелівських множин $\{B\}$, $B\in\Omega$. Передбачається, що на множині $\{B\}$ задані імовірнісна міра P й умовна ймовірність, що задовольняє співвідношення

$$P(\xi(t)\in A\,|\,\xi(s)\in B,\xi(s_1)\in B_1,\dots,\xi(s_n)\in B_n)=P(\xi(t)\in A\,|\,\xi(s)\in B),$$
$$s_n<\dots<s_1<s<t.$$

Таким чином, розглянутий нами процес є узагальненням неоднорідного марковського процесу на випадок континуальної множини станів. Нижче під час вивчення процесів фокусування й σ-фокусування, в основному, використовуватимемо злічену систему подій $\{B_j\}$, усюди щільну на множині всіх подій $\{B\}$. Це дозволяє звести аналіз процесу з континуальною множиною станів до вивчення марковського процесу зі зліченим числом станів. Вважатимемо, що $B_i\bigcap B_j=\delta_{ij}$ (символ Кронекера). Основним об'єктом аналізу буде стохастична матриця $P_{st}=\left\|P_{st}(B_i,B_j)\right\|$, $i,j=1,2,\dots$. Тут $P_{st}(B_i,B_j)$ є умовною ймовірністю того, що досліджувана система в момент часу t попадає в стан B_j, якщо в момент s вона перебувала в стані B_j. Ці ймовірності легко обчислюються, якщо задане марковське сімейство стохастичних ядер $\{P_{st}(x,B), s<t, (s,t)\in I\times I\}$. Тут I – інтервал (півінтервал, відрізок) часової прямої. Далі істотно використовується техніка отримання нерівностей, подібна до застосованої в [61].

Нехай матриця $P_{st}=\left\|P_{st}(B_i,B_j)\right\|$, $s_0<s<t<t_0$, задовольняє умови:

1) існує така послідовність індексів $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ і монотонна послідовність $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, $s_k\uparrow t_0$, $s_k<s_{k+1}$, $k=1,2,\dots$, для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta(s_k,s_{k+1})=\infty, \tag{3.43}$$

де $\delta(s_k, s_{k+1}) = \inf_i P_{s_k, s_{k+1}}(B_i, B_{j_k}) > 0$;

2) власний вектор $\vec{p}(t)$ матриці P_{st}^{τ}, що відповідає власному числу рівному одиниці, має границю при $t \uparrow t_0$:

$$\lim_{t \uparrow t_0} \vec{p}(t) = \vec{\pi}.$$

Якщо ці умови виконуються, то з теореми 3.1 для будь-якого початкового розподілу ймовірностей $\vec{\pi}^0$, заданого в $s \in [s_0, t_0)$ випливає

$$\lim_{t \uparrow t_0} \vec{p}(s,t) = \vec{\pi}. \tag{3.44}$$

Нагадаємо, що в описаній ситуації точку t_0 називатимемо точкою фокусування. Умова (3.43) еквівалентна існуванню неінтегрованих особливостей у точці t_0 всіх або деяких елементів інфінітезимальної матриці $\Lambda(t)$. Якщо ж ряд (3.43) збігається, але сума його досить велика, або послідовність власних векторів (3.44) не має границі, але її верхня й нижня границі відрізняються незначно при $t \uparrow t_0$, компоненти вектора $\vec{p}(s,t)$ локалізовуватимуться в σ-околах компонент деякого вектора $\vec{\pi}$. У такій ситуації точка t_0 називається точкою σ-фокусування [61, 65]. Доведення рівності (3.44) з деякими змінами проводиться за тією ж схемою, що й в [62, 147]. Ці зміни пов'язані з тим, що тепер кількість станів $\{\xi \in B_i\}$ нескінченна (злічена), у той час, як доведення, наведене в [62, 147], придатне лише для скінченного числа станів. Покажемо, що запропонований підхід можна змінити так, щоб він став придатний і для зліченого числа станів.

В [62, 147] дослідження неоднорідного марковського процесу з інфінітезимальною матрицею $\Lambda(s)$ зведено до дослідження процесу з кусково-постійною інфінітезимальною матрицею $\tilde{\Lambda}(s)$ того ж порядку, що й $\Lambda(s)$.

Така апроксимація вихідного процесу процесом з належним чином підібраною матрицею $\tilde{\Lambda}(s)$ дозволила при доведенні (3.44) використовувати аналіз, розроблений для однорідних процесів. Крім того, вона давала можливість із будь-яким ступенем точності описати еволюцію вихідного неоднорідного процесу процесом з матрицею $\Lambda(s)$. Зазначена схема дозволила довести наступне твердження. Які б не були $\varepsilon > 0$ й початковий розподіл $\vec{\pi}^0$, заданий у будь-якій точці $s \in [s_0, t_0)$, знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon, \vec{\pi}_0))$, що для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ й кожного $j = 1, 2, \ldots$.

$$\left| p_j(s,t) - \pi_j \right| < \varepsilon.$$

Тут π_j – компонента вектора $\vec{\pi}$ з (3.44). Модифікуємо цю схему для процесу зі зліченим числом станів.

Вважатимемо, що інфінітезимальна матриця $\Lambda(s)$ досліджуваного процесу $\xi(t)$ неперервна на $[s_0, t_0)$ і що для всіх s, таких, що $s_0 < s < t < t_0$, її діагональні елементи задовольняють умову

$$|\lambda_{ii}(s)| \leq C(t) < \infty .$$

У цьому випадку вихідний процес $\xi(t)$ з матрицею $\Lambda(s)$, що містить нескінченне число рядків і стовпців, на будь-якому відрізку $[s_0, t)$, $t < t_0$ можна з будь-яким ступенем точності апроксимувати процесом $\hat{\xi}(t)$ зі скінченним числом станів n. Інфінітезимальна матриця $\hat{\Lambda}(s)$ цього процесу є лівим верхнім матричним блоком матриці $\Lambda(t)$, підданий деякій корекції. Ця корекція полягає в заміні $\lambda_{ii}(t)$ величиною

$$\hat{\lambda}_{ii}(t) = \lambda_{ii}(t) + \Delta_i(t),$$

де $\Delta_i(t) = \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \lambda_{ij}(t), \; i = 1, 2, ..., n.$

Відомо, що така апроксимація можлива при відповідному виборі й для будь-якого однорідного процесу з інфінітезимальною матрицею $\Lambda(s)$, що є значенням матриці-функції $\Lambda(s)$ при будь-якому фіксованому $s \in [s_0, t) \subset [s_0, t_0)$. Звідси неважко отримати те, що існує й, таке, що зазначена вище апроксимація вихідного процесу $\xi(t)$ може реалізовуватися лівим верхнім діагональним блоком $\hat{\Lambda}(s)$ матриці $\Lambda(s)$, яка має для будь-якого $s \in [s_0, t)$ ту саму розмірність $n \times n$.

Очевидно, що вибір n, який визначає розмірність матриці $\hat{\Lambda}(s)$ залежить від точності апроксимації вихідного процесу з матрицею $\Lambda(s)$ процесом з матрицею $\hat{\Lambda}(s)$, що містить n станів.

Зрозуміло, що із зростанням n, загалом кажучи, поліпшується точність апроксимації й що існує така послідовність чисел $n_1, n_2, ..., n_m, ...$ $(n_m \to \infty, m \to \infty)$, для якої апроксимуючі процеси з числом станів $n_1, n_2, ..., n_m, ...$ побудовані за тим самим правилом, що й процес при необмеженому зростанні n_m, даватимуть похибку в апроксимації, яка прагне до нуля. Оскільки для кожного з апроксимуючих процесів мають місце оцінки, наведені в [62], то вони матимуть місце й для граничного процесу $\xi(t)$.

Відзначимо, що фокусування й стабілізація марковського процесу можуть реалізовуються за як завгодно малий проміжок часу шляхом надання інфінітезимальній матриці $\Lambda(t)$ сильних збурень, підібраних спеціальним чином.

4 ВИПАДКОВІ БЛУКАННЯ НА ГРАФАХ

У цьому розділі розглянуто деякі типи випадкових блукань на графах. Оскільки в застосуваннях доводиться досліджувати процеси блукань на графах з числом вершин, що змінюється, на початку розділу поставлена задача про стабілізацію розподілів імовірностей для процесів з числом станів, що змінюється. Наведено умови, під час виконання яких ця стабілізація має місце. Далі вивчені найпростіші варіанти випадкових блукань. Потім розглянута загальна схема випадкових блукань на графах. При цьому вводяться деякі поняття (точки скидання, частинна стабілізація, зони Саргасса), використання яких дозволяє більш повно описати особливості конкретного процесу блукань. Після цього за допомогою спеціалізованої програми, що дозволяє моделювати процеси блукань на графах різних видів, це моделювання реалізується для ряду конкретних графів. Процеси блукань розглянуто для графів, що містять зони частинної стабілізації й зони Саргасса, графів зі змінним числом станів і багатошарових графів. Крім того, розглянутий процес блукань на парах графів, що мають непусті перерізи.

При розгляді кожного конкретного випадку в моделюючу програму вводяться ті обмеження, які накладаються на досліджуваний процес блукань.

4.1 Процеси зі змінним числом станів

При розгляді ряду прикладних задач доводиться мати справу з такими системами, еволюція яких може бути описана за допомогою марковських процесів зі змінним числом станів. Під час вивчення таких процесів насамперед виникає задача про їхнє узгодження (стикування). Вона полягає в наступному. Нехай на часових проміжках $[s_0, s_1 - \delta]$, $[s_1 + \delta, s_2]$, $\delta > 0$, задані інфінітезимальні матриці $\Lambda_1(s)$, $\Lambda_2(s)$, що визначають процеси Π_1, Π_2 з числом станів n_1 і n_2. Нехай, для визначеності, $n_2 - n_1 = 1$. Припустимо, що кожному стану процесу Π_1 поставлений у відповідність певний стан процесу Π_2. Тоді процес Π_2 містить «зайвий» стан E_0 – йому не відповідає жоден стан процесу Π_1. При розгляді конкретних процесів (фізичних, біологічних, економічних та ін.), які можна описати за допомогою марковських процесів зі змінним числом станів, зазначена відповідність зазвичай природно визначається еволюцією процесу. У загальному випадку виникає запитання: як треба визначити інфінітезимальну матрицю Λ_{12} (матрицю узгодження), неперервну на $[s_1-\delta, s_1+\delta]$, що відповідає умовам

$$\Lambda_{12}(s_1-\delta)=\Lambda_1(s_1-\delta),$$

$$\Lambda_{12}(s_1+\delta)=\Lambda_2(s_1+\delta), \tag{4.1}$$

так, щоб виникаючий при цьому на $[s_0, s_2]$ процес Π був у якомусь сенсі оптимальним (природним) продовженням процесу $\Pi_1(t)$, $t\in[s_0, s_1-\delta]$ на відрізок $[s_1+\delta, s_2]$, на якому $\Pi=\Pi_2$. На $[s_1-\delta, s_1+\delta]$ процес Π визначається матрицею Λ_{12}.

При розгляді конкретних процесів матриця Λ_{12} зазвичай є розв'язком деякої варіаційної задачі. Так при розгляді економічних процесів цю матрицю часто шукають, виходячи з обмежень, що дозволяють мінімізувати сумарні витрати на капіталовкладення, максимізувати прибуток або забезпечити переважний розвиток виділених груп підприємств та ін. Розглянемо дві задачі про побудову матриці Λ_{12}.

Нехай розподіл $\{p_j(s_0,t)\}$ процесу Π_1, обумовлений початковим розподілом імовірностей $\{p_j(s_0)\}$, є з якихось причин найкращим у порівнянні з іншими. Виходить, у цьому випадку Λ_{12} необхідно будувати так, щоб з її допомогою переважно «пропускався» розподіл $\{p_j(s_0,t)\}$ і розподіли близькі до нього в сенсі близькості їхніх норм. Аналогічно ставиться задача відшукання Λ_{12}, якщо мова йде про переважний пропуск розподілів $\{p_j(s_0,t)\}$, що відповідають деякій множині початкових розподілів імовірностей $\{p_j(s_0)\}$.

Під переважним пропуском деякої множини розподілів ми розуміємо таку ситуацію, при якій імовірності реалізації розподілів з цієї множини перевищують реалізації ймовірності розподілів, які в нього не входять.

При розгляді фізичних задач еволюція матриці $\Lambda_{12}(t)$ зазвичай визначається процесом поглинання (або виділення) енергії. Мірою таких енерговитрат є деякий функціонал (часто квадратичний), що залежить від Λ_{12}. Якщо, наприклад, цей функціонал має вигляд $(\Lambda_{12}f, f)$ (символ $(\cdot\ ,\cdot)$означає скалярний добуток), то відшукання Λ_{12} зводиться до розв'язку наступної варіаційної задачі. Потрібно знайти матрицю Λ_{12} порядку $(n_1+1)\times(n_1+1)$, що відповідає умовам (4.1) і умові

$$\int\limits_{t_1-\delta}^{t_1+\delta}(\Lambda_{12}(s)\vec{p}_0(s_0,s),\vec{p}(s_0,s))ds=\min.$$

Тут мінімум визначається за всіма інфінітезимальними матрицями $(n_1+1)\times(n_1+1)$.

Розглянемо задачу про стабілізацію розподілів процесів зі змінним числом станів. Нехай $\Pi(t)\ \ (t\geq 0)$ – процес зі змінним числом станів, такий, що на кожному з відрізків, що не перетинаються

$$[s_k,t_k),\ k=0,1,...,\ s_0=0,\ t_k\to\infty\ \ (k\to\infty), \qquad (4.2)$$

число станів процесу постійне. Вважатимемо, що процес Π_k, якийй співпадає з $\Pi(t)$ на $[s_k,t_k)\ \ (k=0,1,...)$, є частиною однорідного процесу, що має стаціонарний розподіл $\{\pi_{k,j}\}$. Нехай $\Lambda_{k,k+1}(t)$ – матриці узгодження процесів Π_k, Π_{k+1}.

Матриці $\Lambda_{k,k+1}(t)$ можна вибрати так, щоб кожна з них фокусувала процес $\Pi(t)$ (при зміні t на $[t_k,s_{k+1})$) на розподіл $\{\pi_{k+1,j}\}$. Такий процес $\Pi(t)$ має таку властивість: яким би не був початковий розподіл імовірностей $\{p_j(s_0)\}$ розподіл імовірностей $\{p_j(s_0,t)\}$ процесу $\Pi(t)$ на проміжках $[s_{k+1},t_{k+1})$ збігатиметься зі стаціонарним розподілом $\{\pi_{k+1,j}\}$, що відповідає цьому проміжку.

Матриці $\Lambda_{k,k+1}(t)$ можна також вибрати так, щоб розподіли ймовірностей $\{p_j(s_0,t)\}$ процесу $\Pi(t)$ на кожному $[s_{k+1},t_{k+1})$ відповідали умовам

$$\left|p_j(s_0,t)-\pi_{k+1,j}\right|<\sigma,\ \ j=1,2,...;\ k=1,2,...$$

для будь-якого початкового розподілу $\{p_j(s_0)\}$.

Якщо послідовність відрізків $[s_k, t_k)$ згущується при $k \to \infty$ до точки $t^* < \infty$ й зазначені вище припущення про процес $\Pi(t)$ і фокусуючих збуреннях матриць $\Lambda_{k,k+1}(t)$ залишаються в силі, то $\Pi(t)$ фокусує (або σ-фокусує) на розподіли в точках s_k. Якщо додатково припустити, що

$$\{\pi_{k+1,j}\} \to \{\pi_j^*\} \ (k \to \infty),$$

то точка t^* є точкою фокусування (σ -фокусування) процесу $\Pi(t)$ на розподіл $\{\pi_j^*\}$.

Зараз при розгляді багатьох конкретних процесів часто використовують підхід, заснований на теорії марковських процесів. У ряді випадків розв'язок задачі вдається отримати при розгляді відповідним чином обраного процесу випадкових блукань на півпрямій або на графі.

4.2. Найпростіші схеми випадкових блукань

1. Розглянемо найпростіший варіант випадкового блукання по цілочисельним точкам числової прямої. Нехай частинка переходить із точки $x = i$ в $x = i+1$ з імовірністю p_i $(0 < p_i < 1)$ та з імовірністю $q_i = 1 - p_i$ попадає (повертається) у точку $x = 0$. Точки, в які частинка може повертатися, далі називатимемо «точками скидання». У розглянутому випадку точка $x = 0$ є точкою скидання. Тут станами є цілочисельні точки прямої $x = 0, 1, 2, \ldots$; всі стани такі, що сполучаються.

Нехай у початковий момент часу частинка знаходиться в точці $x = 0$. Імовірність ланцюжка переходів $0 \to 1 \to \ldots \to n \to \ldots$ дорівнює

$$\lim_{n \to \infty} p_0 p_1 \ldots p_n. \tag{4.3}$$

Якщо ця границя дорівнює нулю, то стан $x = 0$ є зворотним (у цьому випадку всі інші стани також зворотні). Якщо ж границя (4.3) відмінна від нуля, то всі стани незворотні. У цьому випадку частинка при $n \to \infty$ з імовірністю 1 необмежено зміщуватиметься вправо (прагнути до $+\infty$). Якщо стан є зворотним, то частинка з імовірністю 1 буде нескінченне число раз повертатися в кожен зі станів $x = 0,1,2,...$ Середній час повернення у вихідний стан $x = 0$ дорівнює

$$T = (1 - p_0) + 2(1 - p_1)p_0 + ... = 1 + p_0 + p_0 p_1 + ... + p_0 p_1 ... p_{n-1} + ... \tag{4.4}$$

Якщо сума (4.4) скінченна й для всіх i виконується умова

$$q_i \geq \delta > 0, \tag{4.5}$$

то, [12,44], існує єдиний стаціонарний розподіл $\{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$ і для будь-якого початкового розподілу ймовірностей $\{p_j^0\}_{j=0}^{\infty}$ $(p_j^0 = \mathrm{P}(x = j, t = 0))$

$$\lim_{t \to \infty} p_j(t) = \pi_j, \quad j = 0,1,2,... . \tag{4.6}$$

Тут $p_j(t)$ $(j = 0,1,2,...)$ – імовірність того, що частинка знаходиться в стані j в момент часу t. Неважко перевірити, що

$$\pi_0 = T^{-1}, \pi_1 = p_0 T^{-1}, ..., \pi_n = p_0 p_1 ... p_{n-1} T^{-1}. \tag{4.7}$$

Описане випадкове блукання відоме з [123]. Наведемо деякі його модифікації.

2. Розглянемо випадкове блукання зі змінним числом станів. Нехай при $t = 0$ число станів $x = i$, $i \leq n_0$, скінченне $(n_0 < \infty)$. Нехай, далі, у моменти часу $t_1, t_2, ..., t_l, ...$ $(0 < t_1 < ... < t_l < ...)$ число станів процесу блукань зростає, приймаючи значення $n_1, n_2, ..., n_l, ...$ $(n_1 < n_2 < ... < n_l < ...)$. Нехай як і в розглянутому вище варіанті блукань перехід з $x = i$ у $x = i + 1$ відбувається з імовірністю p_i, а скидання в нуль $(x = 0)$ відбувається з імовірністю $q_i = 1 - p_i$. Однак тепер при $t_k \leq t < t_{k+1}$ число станів дорівнює n_k й імовірності p_i, q_i слід було б відмітити крім індексу i ще й індексом k. Ми цього не робитимемо для простоти запису. При $t \in [t_k, t_{k+1})$ початковий розподіл імовірностей необхідно задавати в точках $x = 0,1,2,...,n_k$.

Нехай при $t \in [t_k, t_{k+1})$ має місце (4.5). Тоді якби випадкові блукання відбувалися при всіх $t > t_k$ (т.еt. необмежено довго), то гранична рівність (4.6) виконувалася б. Обмеження $t < t_{k+1}$ призводить до того, що в (4.6) $t \in [t_k, t_{k+1})$, а за цей проміжок часу (4.4) може мати місце лише для певного класу початкових розподілів імовірностей [192]. Якщо різниця $t_{k+1} - t_k$ досить велика, то величини $p_j(t)$ з (4.4) при t близьких до t_{k+1} будуть локалізовані в околах граничних точок π_j:

$$\pi_j - \sigma < p_j(t) < \pi_j + \sigma .$$

Таким чином, при t близьких до t_{k+1} має місце σ-фокусування.

3. Опишемо випадкове блукання, що відрізняється від розглянутих вище числом точок скидання. У перших двох блуканнях точкою скидання був стан $x = 0$. Тепер число таких точок буде більше одиниці. Спочатку розглянемо блукання із двома точками скидання $x = 0$ і $x = a$. Імовірнісна схема блукань тут така. При $x \in [0, a]$ частинка переходить із $x = i$ у $x = i + 1$ з імовірністю p_i та з $x = i$ в 0 з імовірністю $q_i = 1 - p_i$ Якщо ж $x \in (a, \infty)$, то частка з імовірністю p_i переходить із $x = i$ в $x = i + 1$, з імовірністю q_{0i} – в 0 і з імовірністю q_{ai} – у точку a ($p_i + q_{0i} + q_{ai} = 1$). Якщо виконується умова $q_{0i} \ge \delta > 0$, то дане випадкове блукання має стаціонарний розподіл.

Якщо множина точок скидання $0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ дорівнює $n\ (n > 2)$, то імовірнісна картина блукань виглядає так. При $x \in [0, a_2]$ схема блукань та ж, що й для двох точок скидання. При $x \in [a_2, a_3]$ частинка з імовірністю p_i переходить із $x = i$ в $x = i + 1$, з імовірністю q_{0i} – у точку 0 і з імовірністю $q_{a_j i}$ – у точку $a_j\ (j = 1, 2)$; $p_i + q_{0i} + q_{a_1 i} + q_{a_2 i} = 1$. На півінтервалах $(a_k, a_{k+1}]$ $(2 < k \le n - 2)$, (a_{n-1}, ∞) схеми випадкового блукання вводяться аналогічно. Якщо число точок скидання нескінченне, то схема випадкових блукань визначається так само, як і для скінченного їх числа.

4. Випадкові блукання зі скінченним або нескінченним числом точок скидання й зі змінним числом станів уводиться так само як і для блукання 2. У моменти часу $t_1, t_2, ..., t_l, ...$ $(0 < t_1 < ... < t_l < ...)$ число станів процесу приймає

значення $n_1, n_2, ..., n_l, ...$ $(t_1 \to \infty, n_1 \to \infty)$. На кожній множині станів із $[0, n_1]$ при $0 \le t < t_{l+1}$ процес блукань визначається так само, як і для випадку постійного (нескінченного) числа станів. Як і в розглянутих вище випадках умова існування стаціонарного розподілу має вигляд

$$q_{0i} \ge \delta > 0. \tag{4.9}$$

4.3 Випадкові блукання на графах

Опишемо процес блукань на графі, що являє собою дерево. Вважатимемо, що ребра графа мають цілочисельні довжини, загалом кажучи, різні. Занумеруємо вершини гілок дерева, його ребра й точки на ребрах, що знаходяться від його кінців на цілочисельні відстані. Випадкові блукання відбуваються по цих точках і вони розглядаються як стани обумовленого нами процесу. Координати станів тепер, на відміну від блукання уздовж прямої, мають вигляд (n_1, n_2, n_3). Тут n_1 – номер вершини, n_2 – номер ребра, що із цієї вершини виходить, n_3 – цілочисельна координата на ребрі з номером n_2. Існує багато способів введення координат (n_1, n_2, n_3). У ряді випадків вершини гілок розумно нумерувати залежно від їхніх відстаней до вершини дерева, а нумерація вершин гілок, рівновіддалених від вершини дерева нумерувати, скажімо, зліва направо. Ребра, що виходять з однієї й тієї ж вершини, також розумно нумерувати зліва направо, цілочисельні координати точок на ребрах мають збігатися з відстанями від цих точок до початку ребра.

Нехай n_1, n_2, n_3 введені зазначеним способом. Перейдемо до опису процесу блукань на дереві. Вершини всіх гілок вважатимемо точками скидання. Розглянемо множину станів (n_1, n_2, n_3) на графі, для яких n_1, n_2 фіксовані, а n_3 приймає значення цілочисельних координат на ребрі n_2. Нехай точка $(n_1, n_2, n_3 + 1)$ належить ребру (n_1, n_2) (тобто ребру з номером n_2 з початком в n_1). Тоді позначимо через p_{n_1, n_2, n_3, n_3+1} імовірність переходу з (n_1, n_2, n_3) в $(n_1, n_2, n_3 + 1)$. Якщо ж точка (n_1, n_2, n_3) є кінцем ребра n_2, що збігається з вершиною m_1, то необхідно задати ймовірність переходу з (n_1, n_2, n_3) в $(m_1, m_2, 1)$. Тут m_2 – номер ребра з початком в m_1. Крім того, необхідно задати ймовірності переходу в точки скидання (вершини гілок). Описаний спосіб нумерації станів зручний і для випадку, коли блукання на графі є процесом зі змінним числом станів. Така нумерація зручна й тим, що дає можливість відновити з її допомогою топологію графа. У ряді випадків можна вдатися до такої нумерації, при якій координатою стану є одне число. Але й у цьому випадку природно нумерувати стани, починаючи від вершини дерева й проводити її так, щоб координати станів не зменшувалися в міру віддалення станів від нього.

Розглянуті вище випадкові блукання можна вивчати при неоднакових довжинах переходів зі стану в стан. Якщо при цьому послідовність довжин переходів утворить розбіжний ряд, то під час виконання деяких умов матиме місце фокусування або σ-фокусування. Описані випадкові блукання можна розглядати і як дискретний ланцюг Маркова, що породжений марковським процесом з неперервним часом. Цей процес може бути й неоднорідним зі змінними довжинами переходів. Тепер при розгляді процесу блукань на графі не передбачається, що ребра графа мають цілочисельні довжини, а стани (точки на ребрах) – цілочисельні координати. Сформулюємо умови фокусування для цього випадку. При цьому досліджуваний процес описуватимемо його інфінітезимальною матрицею $\Lambda(t)$. Розглянуті варіанти випадкових блукань містять деякі обмеження (за один крок процес переходить із вихідного стану в найближчий до нього, всі вершини гілок дерева є точками скидання). Вони були введені, щоб мала місце наступність з відомими й добре вивченими видами випадкових блукань. У випадку неперервного часу під час дослідження процесів фокусування й стабілізації від цих обмежень можна відмовитися. Нижче стани нумеруватимемо одним індексом.

Нехай існує така послідовність інтервалів, що попарно не перетинаються

$$\{[s_k, t_k)\}_{k=1}^{\infty},\ s_k < t_k < s_{k+1},\ s_k \uparrow t_0,\ t_0 \le \infty,$$

і така послідовність індексів j_k, $k = 1, 2, \dots$ (j_k нумерує стани), для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_i \left| \int_{s_k}^{t_k} \lambda_{ij_k}(s)\,ds \right| = \infty, \tag{4.10}$$

причому на множині

$$[s_0,t_0)\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}[s_k,t_k)$$

норма матриці $\Lambda(s)$ обмежена однією й тією ж константою.

Нехай, далі, $\Lambda(t)$ неперервна на $[s_k,t_k)$ й існує границя

$$\lim_{t\uparrow t_0}\vec{p}(\tau_k)=\vec{p}\quad, \tag{4.11}$$

де $\tau_k\in[s_k,t_k),\ \vec{p}(\tau_k)$ – нульовий власний вектор матриці $\Lambda^*(\tau_k)$. Тоді для будь-якого j й будь-якого початкового розподілу ймовірностей, заданого в точці $s\in[s_0,t_0)$

$$\lim_{t\uparrow t_0}p_j(s_0,t_0)=p_j\,.$$

Тут p_j – j – а компонента вектора $\vec{p}$ з (4.9).

Якщо ряд (4.10) збігається, але його сума досить велика, то t_0 є точкою σ -фокусування.

4.4 Фокусування й σ-фокусування розподілів при випадкових блуканнях на графах

Вивчимо явища фокусування й σ-фокусування для випадкових блукань на конкретному графі. Отримані результати дозволяють краще усвідомити різноманіття ситуацій, що зустрічаються. Розглянемо граф Γ_1 (рис. 4.1), що є деревом. Процес блукань описуватимемо за допомогою деякого ланцюга Маркова. Вважатимемо, що стани цього ланцюга – вершини графа Γ_1; для кожної вершини за допомогою програми, що моделює процес блукань, задаються ймовірності переходу в усі сусідні вершини й імовірності «скидання» (на рис. 4.1 точки скидання позначено жирними колами). Вважатимемо, що корінь дерева (стан 1) також є точкою скидання для будь-якої іншої вершини, тобто $\forall i\ p_{i1}>0$.

Задамо часову послідовність t_k, що збігається до точки t_0, так:

$$t_k = t_0(1 - q^k).$$

Тоді

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = t_0 q^k (1 - q).$$

Припустимо, що переходи зі стану в стан можливі лише в моменти часу t_k. Тоді процес блукань на графі описуватиметься неоднорідним ланцюгом Маркова, оскільки довжини переходів зі стану в стан різні.

Для розрахунків в моделюючій процеси блукань програмі було обрано $q = 0,9$ і $t_0 = 1$; процес розглядається на відрізку $[0, t_0)$.

Нехай у початковий момент часу блукаюча частинка з імовірністю 1 знаходиться в корені дерева, тобто початковий розподіл імовірностей p^0 має вигляд $p^0 = (1, 0, ..., 0)$.

Розглянемо динаміку фокусування для процесу блукань на графі Γ_1. Граф має 50 станів, 8 з яких є точками скидання. За момент часу, коли відбулося фокусування, приймемо момент часу, коли розподіл імовірностей процесу з точністю 10^{-6} збігається з фінальним розподілом.

З точністю до 10^{-6} фінальний розподіл для графа Γ_1 досягнутий за 37 кроків. Розглянемо стабілізацію на гілках.

На гілці 1 швидше всього стабілізувалися ймовірності станів 12, 11 і 10 (відповідно за 17, 22 і 24 кроки); а довше всього – імовірності станів 4, 7, 5, 13, 18 (перші два – за 37 і 31 крок відповідно, а останні три – за 30 кроків).

На гілці 2 першими стабілізувалися стани 21 (за два кроки), 33 (за 18 кроків), 32 (за 19 кроків). Останніми стабілізуються стани 20 (за 31 крок), 25 (за 28 кроків), 26 (за 27 кроків) і 28 (за 26 кроків).

На гілці 3 найшвидше стабілізуються стани 37, 38, 39, 40 (за 0 кроків). Швидка стабілізація в них пояснюється тим, що ймовірності влучення в ці стани дуже малі. Найдовше стабілізуються стани 35 (за 36 кроків), 42 (за 35 кроків), 48 (за 32 кроки).

У результаті проведення чисельних експериментів для різних початкових розподілів p^0, була встановлена незалежність фінального розподілу від p^0. Крім того, з'ясовано, що чим ближче точка скидання до кореня дерева, тим довше в ній відбувається стабілізація в порівнянні зі станами, віддаленими від кореня дерева.

Для графа Γ_1 введемо «перескоки» з гілки на гілку, тобто переходи між станами, що належать сусіднім гілкам. Перескоки допускаються між станами 12 і 15,12 і 30, 21 і 18,17 і 24,4 і 21, 34 і 38,42 і 50,20 і 35 (на рис. 4.1 (дод. В) ці перескоки зображені пунктиром). Динаміка фокусування процесу блукань із перескоками розглядалася в [44]. Вихід на фінальний розподіл з точністю до 10^{-6} відбувається за 40 кроків. Аналіз швидкості збіжності на гілках приводить до висновку, що внесення у вихідний граф Γ_1 перескоків лише незначно погіршує збіжність.

Дослідимо процес стабілізації на графі Γ_1 для випадку, коли перехідні ймовірності отримують збурення. На кожному кроці будемо додавати до елементів матриці $P(s,t) = \left\| p_{ij}(s,t) \right\|$ збурення $\varepsilon_{ij}^{(k)}$. Тоді в момент часу t_k матриця переходу за один крок матиме вигляд

$$\tilde{P}(t_k, t_{k+1}) = P(t_k, t_{k+1}) + \varepsilon^{(k)}.$$

Тут $\tilde{P}(s,t) = \left\| \tilde{p}_{ij}(s,t) \right\|$ – збурена матриця; $\varepsilon^{(k)} = \left\| \varepsilon_{ij}^{(k)} \right\|$ – матриця збурень на k -му кроці.

Збурення $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, які були введені в моделюючу програму, вибиралися так. Моделювалася послідовність $\{b_k\}$, така, що

$$\lim_{k \to \infty} b_k = 0.$$

Нехай

$$\alpha^{(k)} = \min\{ p_{ij}(t_k, t_{k+1}), 1 - p_{ij}(t_k, t_{k+1}), b_k \}.$$

Якщо $p_{ij}(t_k, t_{k+1}) = 0$, то $\varepsilon_{ij}^{(k)} = 0$; якщо ж $p_{ij}(t_k, t_{k+1})$ >0, то – $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ випадкове число, що має рівномірний розподіл на $[-\alpha^{(k)}, \alpha^{(k)}]$. Крім того, вимагалося, щоб для всіх i

$$\sum_j \varepsilon_{ij}^{(k)} = 0 .$$

Результати моделювання описаного вище процесу випадкових блукань такі. Для всіх станів фінальний розподіл з точністю до 10^{-6} досягнутий за 326 кроків. Наведемо дані про блукання на кожній з гілок.

На гілці 1 найшвидше стабілізація досягається в станах 12, 11, 9, 10, 15 (відповідно за 24, 36, 49, 52 і 64 кроки), а найдовше – у станах 2 (за 290 кроків), 4 (за 278 кроків), 3 (за 184 кроки), 13 (за 173 кроки).

На гілці 2 першими стабілізувалися стани 33 (за 8 кроків), 30, 32 (за 12 кроків), а останніми – стани 20 (за 225 кроків) і 19 (за 224 кроки).

На гілці 3 найшвидше стабілізувалися стани 37, 38, 39, 40 (на першому кроці), 44 (за 33 кроки) і 46 (за 34 кроки), а найдовше – стан 35 (за 299 кроків). Останнім зі станів стабілізувався корінь дерева Γ_1 (за 326 кроків).

Таким чином, випадкові збурення істотно сповільнюють процес збіжності. Найдовше фокусування відбувається в точках скидання (майже у два рази повільніше, ніж в інших станах).

4.5 Частинне фокусування

Дослідимо частинне фокусування на графах. Під частинним фокусуванням на будь-якій фіксованій гілці розумітимемо настання стабілізації у всіх її вершинах.

Для кожної точки скидання i введемо величину δ_i як мінімальну ймовірність скидання в цю точку. Для дослідження процесу частинного фокусування візьмемо граф Γ_2, зображений на рис. 4.2 (дод. В). Він має 55 станів, з яких 8 є точками скидання, стохастична матриця цього процесу була промодельована за допомогою спеціальної програми.

На рис. 4.2 (дод. В) поруч із кожною із точок скидання наведена величина δ_i. Варіюючи величинами δ_i, простежимо за фокусуваннями на кожній з гілок.

За допомогою моделюючої програми отримано такі дані. Вихід на граничний вектор p^* (фінальний розподіл) з точністю до 10^{-6} відбувся за 378 кроків. У середньому на гілках фокусування відбулося: на гілці 1 за 314 кроків, на гілці 2 за 267 кроків, на гілці 3 за 296 кроків, на гілці 4 за 273 кроки. Найдовше стабілізувався стан 3, мінімальна ймовірність скидання в який максимальна:

$$\delta_3 = \max\{\delta_1, \delta_3, \delta_{14}, \delta_{16}, \delta_{28}, \delta_{35}, \delta_{41}, \delta_{46}\}.$$

Зміна мінімальної ймовірності скидання у вершині 28, збільшення δ_{28} до 0,95 призводить до того, що фокусування відбувається тепер за 580 кроків. При розгляді фокусування за станами видно, що найдовше стабілізація відбувається в стані 28. У середньому ж на гілках фокусування відбувається: на гілці 1 за 497 кроків, на гілці 2 за 382 кроки, на гілці 3 за 365 кроків, на гілці 4 за 398 кроків. Як видно, першою стабілізувалася гілка, що містить вершину 28.

Повернемося до вихідного графа Γ_2 (рис. 4.2, дод. В) і збільшимо δ_3 до 0,82, а δ_{28} зменшимо до 0,15. Тепер фокусування відбувається за 737 кроків. При 82 розгляді фокусування за станами видно, що найдовше фокусування відбувається в стані 3. У середньому ж фокусування на гілках відбувається: на гілці 1 за 429 кроків; на гілці 2 за 507 кроків; на гілці 3 за 493 кроки; на гілці 4 за 512 кроків. Таким чином, збільшення мінімальної ймовірності скидання в будь-якій точці скидання призводить до поліпшення збіжності (у порівнянні з іншими гілками) на гілці, що містить цю точку скидання. Виходить, варіюючи величинами δ_i, можна управляти процесом збіжності до граничного розподілу.

4.6 Випадкові блукання на графах зі змінним числом станів

Розглянемо кілька схем випадкових блукань на графах зі змінним числом станів. При цьому як і раніше використовується моделююча програма процесів випадкових блукань. Для кожної з розглянутих нижче схем будуть справедливі наступні припущення. Вважатимемо, що в початковий момент часу процес з імовірністю 1 знаходиться в стані з номером 1, тобто

$$p^{(0)} = (1, 0, \ldots, 0).$$

Опишемо процес зростання початкового графа Γ_1 (рис. 4.3, а) до графа Γ_4

(рис. 4.3, г). Нехай у початковий момент часу є граф Γ_1. У результаті моделювання процесу блукань отримуємо результуючий вектор p_1. Потім доповнюємо вектор p_1 нульовими координатами й беремо його як початковий розподіл після зростання графа (кількість станів змінюється в момент, коли відбувається σ-фокусування). Далі описана процедура повторюється для кожного із графів Γ_2, Γ_3, Γ_4.

Перейдемо до розгляду різних схем блукань.

1. Нехай блукання частинки на графі, що є деревом, описується однорідним ланцюгом Маркова. Вважатимемо, що корінь дерева є точка скидання. Нехай, далі, у деякі, не обов'язково визначені заздалегідь, моменти часу $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k, ...$ число станів процесу змінюється, приймаючи значення $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ (тобто змінюється число вершин і ребер графа, на якому відбувається процес блукань). Спосіб пересування частинки залишається попереднім: з будь-якої вершини графа частинка може перейти в кожен із сусідніх станів, залишитися на місці або з ненульовою ймовірністю "скинутися" у корінь дерева. У початковий момент часу відбувається ініціація процесу блукань: задається початковий вид графа, початковий розподіл імовірностей, імовірності переходів. За моменти часу τ_k. ($k = 1, 2, ...$), у які відбувається зміна топологічної структури графа (зміна числа станів, набору ребер) приймемо ті значення часу, коли для графа Γ_k ($k = 1, 2, ...$) починається процес σ-фокусування.

На рис. 4.3 наведено розглянутий приклад триетапної еволюції системи. Жирним шрифтом виділені ті вершини й ребра, які при зміні в момент часу τ_k числа станів залишилися попередніми; поруч із кожним ребром графів Γ_2, Γ_3, Γ_4 зафіксований момент τ_k, в який дане ребро з'явилося (ребра вихідного графа Γ_i не позначені).

Далі досліджується процес блукань – на кожному проміжку $[s_0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$, $[\tau_2, \tau_3)$, $[\tau_3, t_0)$. Наведено експериментально отримані значення векторів розподілу в моменти часу $t \in [s_0, \tau_k)$. Тут s_0 – початковий момент часу; τ_k, $k = 1, 2, 3$, – моменти зростання розглянутого графа.

Як моменти зростання τ_k приймався час настання σ-фокусування в кожному із графів Γ_1, Γ_2, Γ_3, тобто таке τ_k, що для будь-якого $\tau > \tau_k$

$$\max_{1\le i\le n_k} |\, p_i(\tau_{k-1}) - p_i(\tau_k)\,| < \sigma \; .$$

Отриманий розподіл імовірностей $p(\tau_k)$, доповнений нулями, надходить на вхід наступного процесу. При обчисленнях обрано $\sigma = 10^{-7}$.

Проаналізуємо отримані результати. Перехід від графа Γ_1 до графа Γ_2 відбувся через 51 крок. Стабілізація з точністю до 7 знака відбулася приблизно через 40 кроків у станах 2 і 10. Найменшу швидкість збіжності мали стани 9 і 6 (спостерігалися коливання біля граничного значення й вектор розподілу ймовірностей з точністю до 7 знаків установився до 48-го кроку). Перехід від графа Γ_2 до графа Γ_3 здійснений через 36 кроків. Частинне фокусування спостерігалося вже на 27-му кроці. Максимальна швидкість збіжності відзначена для станів 1, 2, 3, 5, 10; найбільш довго встановлювалися ймовірності станів 12, 14 і 15. Перехід від графа Γ_3 до графа Γ_4 відбувся на 109-му кроці, при цьому на графі Γ_3 найдовше стабілізувалися стани 18 і 21. Фокусування на графі Γ_4 проходили протягом наступних 88 кроків. Процес стабілізації частково завершився вже через 72 кроки на станах 1, 6, 8, 30, 31, 33; мінімальна швидкість збіжності мала місце для станів 2, 7, 16, 17, 18, 22, 34.

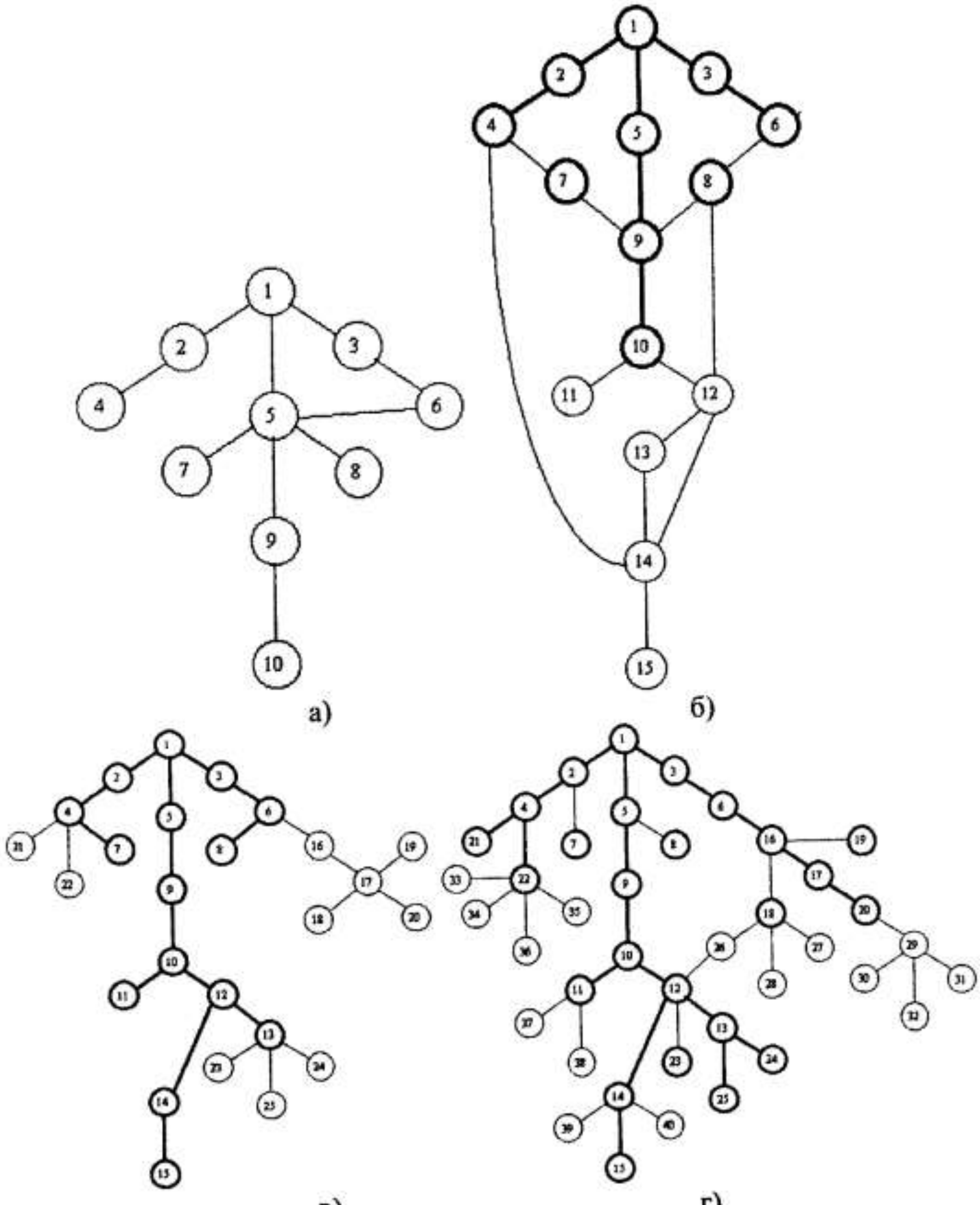


Рисунок 4.3 – Графи Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4

Відзначимо, що при однаковій розрідженості матриць перехідних імовірностей, фокусування на графі Γ_2, що має 15 станів, відбувається швидше, ніж на графі що Γ_1 має 10 станів. Це явище спостерігалося й для графів Γ_4 і Γ_3. Як видно, графи Γ_2 й Γ_4 мають замикання (шляхи, якими можна повернутися у вихідний стан). Для графа Γ_2 – це 1-3-8-9-5-1, а для графа Γ_4 – це 1-3-6-16-18-26-12-10-9-5-1. Ці замикання пояснюють більш високу швидкість збіжності, ніж у ситуаціях без замикань.

2. Розглянемо тепер неоднорідний випадок. Відмінність від однорідного випадку полягає в тому, що ймовірність переходу за один крок зі стану i в стан j залежить від моменту часу, в який цей перехід відбувається. Нехай $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k, ...$, як і в пункті 1, – моменти зростання досліджуваного графа. У неоднорідному випадку для кожного графа Γ_k, $k = 1, 2, ...$ моменти зростання визначаються з умови

$$\tau_k = \min(\forall t', t'' : \left| p_j(\tau_{k-1}, t') - p_j(\tau_{k-1}, t'') \right| < 2\sigma, \ j = 1, 2, ..., n, \ k = 1, 2, ..., n,$$

де σ – задане позитивне число (обране $\sigma = 10^{-6}$).

Нехай на кожному часовому інтервалі $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ матриця перехідних імовірностей P_k графа Γ_k, отримана за допомогою моделюючої програми, на кожному кроці збурюється так: до кожного елемента $p_{ij}^{(k)}$ матриці P_k додається деяке збурення $\delta p_{ij}(t_{l-1}, t_l)$, при цьому збурення відповідають умовам:

а) при будь-якому i

$$\sum_{j=1}^{n_k} \delta p_{ij}(t_{l-1}, t_l) = 0;$$

б) рівномірно по всім i і j із зростанням t_l,

$$\delta p_{ij}(t_{l-1}, t_l) \to 0.$$

Таким чином, на кожному інтервалі $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ матриця ймовірностей переходу в момент часу $t_l \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$ має вигляд

$$\tilde{P}(t_{l-1}, t_l) = P_k + \delta P(t_{l-1}, t_l).$$

Порівняємо отримані в пункті 2 результати з результатами пункту 1. Як видно, для однорідного випадку збіжність до граничного розподілу була більш швидкою. Уповільнення збіжності для неоднорідного випадку пояснюється руйнуючою дією на процес збурюючої матриці.

Проаналізуємо результати пункту 2, отримані за допомогою моделюючої програми. Процес стабілізації на графі Γ_1 зайняв 372 кроки. Максимальна швидкість збіжності спостерігалася в станах 6, 9 і 10, а мінімальна – у станах 1 і 5. Перед розвитком графа Γ_2 до графа Γ_3 було зроблено 120 кроків; у деяких станах була помічена висока швидкість стабілізації (стани 2, 7 і 11); практично у всіх інших станах стабілізація відбулася на останніх двох-трьох кроках. Від графа Γ_3 до графа Γ_4 перейшли через 599 кроків. Найшвидше (до 545-го кроку) стабілізувалися стани 3, 13-15, 23-25; мінімальна швидкість збіжності спостерігалася в станах 11, 17 і 22. Для графа Γ_4 σ-фокусування виникло за 521 крок. Найшвидше збіглися до граничного розподілу ймовірності станів 2, 13, 20, 21, 23, 24, 29-32, 36, 38-40; а найповільніше – імовірності станів 1, 4, 5, 12 і 17. Як можна помітити, тут спостерігається та ж закономірність, що й у п. 1 (залежність швидкості збіжності від наявності замикань (циклів) у графах Γ_2 і Γ_4).

3. Розглянемо, як і в п.2, неоднорідні випадкові блукання, однак тепер збурення додаватимемо у відповідності зі схемою Бернуллі. Це означає, що на кожному кроці з імовірністю p стохастична матриця випробовує малі збурення, а з імовірністю $q = 1 - p$ ці збурення відсутні. Розрахунки наведені для $p = 0{,}3$.

Нижче наведено результати реалізації цієї схеми для графів $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ (рис.4.3). Після реалізації моделюючої програми відмічено таке: за досить великої кількості кроків при наближенні до точки фокусування t_0 швидкість збіжності не залежить від імовірності p збурення матриці перехідних імовірностей. Це пояснюється тим, що стохастична матриця процесу збурена лише в ряді випадків, а також тим, що при наближенні t_1 до t_0 збурення $\delta p_{ij}(t_{l-1}, t_l)$ спадають.

Досліджуючи залежність швидкості збіжності від величини p, встановлено, що зі зменшенням параметра p спостерігалося різке збільшення швидкості збіжності, а при прагненні параметра p до 1 швидкість збіжності була повільною, майже такою ж, як у п. 2. Опишемо більш докладно процес стабілізації. Перехід від графа Γ_1 до графа Γ_2 здійснений через 36 кроків. Найбільшу швидкість збіжності мали стани 2 і 3; а найменшу – стани 1, 4, 8 і 10. Процес стабілізації на графі Γ_2 проходив 26 кроків, причому частинне фокусування спостерігалося вже на 15-му кроці (стани 2, 3, 5). Останніми встановилися ймовірності станів 10, 12, 14. Перехід від графа Γ_3 до Γ_4 відбувся через 76 кроків. Максимальна швидкість збіжності була в станах 2, 3, 9, 11 і 23; а мінімальна – у станах 4, 5, 8 і 25. На графі Γ_4 σ-фокусування досягнуто за 104 кроки.

Відзначимо, що реалізована схема, коли на вхід графа, "що розростається", Γ_{k+1} подається доповнений нулями граничний розподіл (з точністю до σ) для графа Γ_k, дає максимальну швидкість збіжності. Це пояснюється тим, що граф Γ_{k+1} "стартує" з розподілом, який вже в деякому сенсі є наближенням до граничного розподілу всього процесу.

Також відмічено, що найменшу швидкість збіжності давали, як правило, імовірності знову виниклих станів.

4.7 Випадкові блукання на графах, що мають саргассові зони

Під саргассовою зоною розумітимемо підмножину S вершин графа, а деякому сенсі ізольованих від всіх інших його вершин. Це означає, що ймовірність переходу в зону досить мала, а ймовірність виходу з неї – такого ж порядку, що й імовірність входу в зону, або на кілька порядків менша. Нехай p_s – імовірність переходу в зону S, а δ_{Si} – імовірність виходу зі стану i саргассової зони (δ_{Si} визначається як сума ймовірностей скидання з вершини $i \in S$ у вузли графа, що знаходяться на шляху від кореня до саргассової зони), $\delta_S = \sum_{i \in S} \delta_{Si}$ – імовірність виходу із саргассової зони.

Для дослідження властивостей збіжності введемо наступні величини.

Нехай δ_j – мінімальна ймовірність скидання у вузол j:

$$\delta_j = \min_{i \in M} p_{ij} ,$$

де M – множина вершин графа, що належать відгалуженням вузла j.

Нехай $\delta = \min_i p_{i1}$ – мінімальна ймовірність скидання в стани 1 (корінь дерева).

Мірою стабілізації або швидкістю збіжності в момент часу t_k назвемо величину

$$V_k = \sum_i V_{ki},\ k = 1, 2, ...,$$

де $V_{ki} = | p_i(t_k) - p_i(t_{k-1}) |$ – швидкість збіжності ймовірності i-го стану в момент часу t_k. Величина V_k характеризує зміну вектора розподілу ймовірностей на відрізку $[t_{k-1}, t_k)$.

Середньою швидкістю збіжності в момент часу t_k назвемо величину

$$\langle V_k \rangle = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} V_i \ .$$

Оцінкою збіжності в момент часу t_k назвемо величину

$$R_k = \sum_i R_{ki},\ \mathrm{k} = 1, 2, ...,$$

де $R_{ki} = \left| p_i^* - p_i(t_k) \right|$ – оцінка збіжності ймовірності i-го стану в момент часу t_k. Величина R_k показує наскільки розподіл імовірностей у момент часу t_k відрізняється від граничного розподілу p^*.

Дослідимо процес стабілізації в системі із саргассовою зоною. Для дослідження обрано граф Γ_1, зображений на рис. 4.4, а; саргассова зона тут обведена пунктирною лінією. Вона складається з 6 вершин графа:

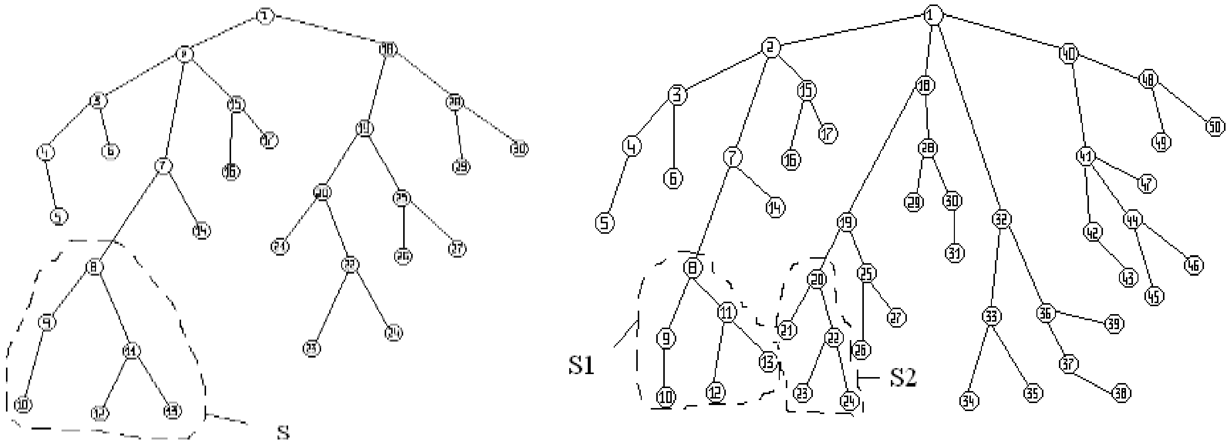
$$\mathrm{S} = \{8,9,10,11,12,13\} \ .$$

Її виникнення було промодельовано за допомогою програми, що імітує процеси випадкових блукань на графах.

Саргассова зона має такі характеристики: імовірність влучення в зону $p_s = 0{,}001$, імовірність виходу з неї $\delta_s = 0{,}0001$. Надалі величину δ_s називатимемо ступенем ізоляції саргассової зони S.

Наведемо результати моделювання процесу для графа Γ_1 (усього було зроблено 10000 кроків).

Спочатку процес стрімко розвивався, однак після 10-го кроку спостерігалося значне уповільнення й далі величина міри стабілізації, досягши значення $V_{15} \approx 0{,}00022$, рівномірно спадала до $V_{10000} \approx 0{,}000026$. При цьому оцінка збіжності R_k змінювалася від $R_{15} \approx 0{,}76$ до $R_{10000} \approx 0{,}15$. Це говорить про те, що за один крок імовірності станів змінюються дуже мало, у той час, як «відстань» до граничного розподілу ще велика. Таким чином, ми маємо справу з процесом, що повільно розвивається.



а) б)

Рисунок 4.4 – Графи Γ_1 (а) і Γ_2 (б), що мають саргассові зони

Опишемо залежність стабілізації від ступеня ізоляції саргассової зони. Наведемо характеристики стабілізації на 100-му кроці для $\delta_S^{(1)} = 0{,}001$, $\delta_S^{(2)} = 0{,}0001$, $\delta_S^{(3)} = 0{,}00001$ і $p_s = 0{,}001$. У всіх трьох випадках величини V_k й $\langle V_k \rangle$ збігаються з точністю до 10^{-6}, однак оцінки R_k сильно відрізняються: $R_k^{(1)} = 0{,}10$, $R_k^{(2)} = 0{,}75$, $R_k^{(3)} = 1{,}71$. Таким чином, чим вища ступінь ізоляції саргассової зони, тим довше відбувається збіжність до граничного розподілу.

Наведемо залежність стабілізації від початкового розподілу для процесу з $p_s = 0{,}0001$, $\delta_s = 0{,}0001$. Результати моделювання показують, що якщо система в початковий момент часу знаходиться в одному зі станів саргассової зони, то процес збіжності протікає в 1,5-2 рази швидше, ніж для процесу, що знаходиться в початковий момент часу з імовірністю 1 у корені дерева.

Наведемо результати моделювання для процесу стабілізації при періодичних включеннях і вимиканнях механізму ізоляції саргассової зони.

У початковий момент часу система з імовірністю 1 знаходяться в корені дерева Γ_1 (стан 1). У ланцюзі Маркова без саргассової зони процес стабілізації обірвався вже на 21-му кроці при $V_{21} \approx 0{,}0001$, при цьому ймовірності станів були дуже близькі до своїх граничних значень ($R_{21} \approx 0{,}0005$). Потім включалася ізоляція саргассової зони 5 і стабілізація доводила до тієї ж оцінки 0,0001 за 1122 кроки, однак відстань до граничного значення було дуже великою: $R_{1122} \approx 0{,}619$. Подібним чином два ланцюги Маркова поміняли один одного кілька разів. Було відзначено, що на відміну від системи без ізоляції саргассової зони S збіжність сильно вповільнювалася, оскільки в період дії ізоляції зони S вектор розподілу «не встигав» наблизитися до граничного значення.

Перейдемо до розгляду неоднорідного випадку. Нехай процес заданий на часовому відрізку $[s_0, t_0)$. Нехай, далі, t_k, $k = 1, 2, \ldots$ – послідовність, така, що

$$\lim_{k \to \infty} t_k = t_0,$$

де $[s_0, t_0)$ схему поетапного посилення ізоляції саргассової зони.

Нехай P_1 – стохастична матриця для графа Γ_1 без саргассової зони, а P_2 – стохастична матриця для графа Γ_1 за наявності саргассової зони S (рис. 4.4, а)). Матриці P_1, P_2 промодельовані за допомогою програми. В кожен момент часу t_k матрицю переходу за один крок для неоднорідного процесу визначимо так

$$P(t_k) = r_k P_1 + (1 - r_k) P_2,$$

де $0 \le r_k \le 1$, $r_k \to 0$ при $t_k \uparrow t_0$. Таким чином, при $t_k \uparrow t_0$ $P(t_k) \to P_2$.

Наведемо результати про стабілізацію при поступовому включенні ізоляції саргассової зони. Було проведено 2000 кроків. Спочатку процес збіжності протікав досить швидко. Подальше вповільнення збіжності викликається зниженням впливу збурення (доданка $r_k P_1$ в (4.12)) на матрицю P_2, що призводить до зростання впливу саргассової зони.

Наведемо результати процесу стабілізації при випадкових збуреннях, що моделюються за формулою

$$P(t_k) = c_k P_1 + (1 - c_k) P_2,$$

де $c_k = r_k \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Тут P_1, P_2, r_k, ті ж, що й в (4.10), а ξ_k – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку [0,1]. Як видно, і в цьому випадку вплив саргассової зони сильно сповільнює процес збіжності. Вивчимо процес взаємодії двох саргассових зон. Для цього розглянемо граф Γ_2 (рис. 4.4, б)), що має дві саргассові зони S_1 й S_2 (стохастична матриця була промодельована). Саргассові зони задані такими характеристиками:

– для зони S_1 $p_{S1} = 0{,}0001$, $\delta_{S1} = 0{,}0001$;

– для зони S_2 $p_{S2} = 0{,}00001$, $\delta_{S2} = 0{,}00001$.

Опишемо граничні розподіли для різних зв'язків між зонами 5, і S_2 (однобічна й двостороння). Встановлено, що виникнення двостороннього зв'язку за однакових імовірностей переходу з S_1 в S_2 і з S_2 в S_1, практично не змінює характер збіжності. Наявність же однобічного зв'язку (наприклад, можливий лише перехід з S_1 в S_2) викликає перерозподіл імовірностей: підвищуються ймовірності станів зони S_2 й, відповідно, знижуються ймовірності станів, що не належать зоні S_2, причому ймовірності станів саргассової зони S_1 зменшуються на кілька порядків.

4.8 Багатошарові графи

Під час дослідження виробничих процесів на підприємствах, які виготовляють вироби, що містять велику кількість різнорідних елементів і комплектуючих виробів, різні його цехи й ланки мають з погляду технологічних циклів певну автономію. Разом з тим ці підрозділи підприємства пов'язані один з одним єдино загальним для них виробництвом випуску продукції. Ці зв'язки в певні проміжки часу можуть проявлятися досить жорстко. Роботу окремого цеху (сукупність всіх його виробничих зв'язків) зручно подавати у вигляді графа. Частина цих зв'язків описує внутрішньоцехові виробничі зв'язки й цикли. Частина ж з них описує зв'язки між окремими цехами. Об'єднання цих графів за всіма цехами з урахуванням зв'язків між ними звичайно утворить досить складний граф, який ми називатимемо багатошаровим – кожний окремий шар відповідає певному цеху. У цьому підрозділі вивчаються питання про стабілізацію виробничих процесів багатошарових графів.

Опишемо схему блукань для багатошарових графів. Нехай є деякий граф, що складається із двох підграфів: $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, причому Γ_1 і Γ_2 є дерева з n_1 і n_2 вершинами відповідно. Позначимо множину станів кожного з підграфів Γ_i через N_i. Нехай $N = N_1 \cap N_2 \neq \varnothing$. Вважатимемо, що множина N містить всі точки скидання, а також, можливо, і деякі інші вершини. Таким чином, точки скидання для обох підграфів Γ_1 і Γ_2 мають бути "загальними". Як і раніше, вважатимемо, що з будь-якої вершини графа частинка може перейти в кожен із сусідніх станів, залишитися на місці або з ненульовою ймовірністю "скинутися" у корінь дерева. Відповідно до зазначеної схеми випадкових блукань частинки, кожному з підграфів Γ_i за допомогою програми, що імітує процес блукань, поставимо у відповідність матрицю ймовірностей переходу P_k й початкову матрицю збурень. Процес вважатимемо неоднорідним. На відміну від однорідного випадку, імовірність переходу за один крок із стану k в стан j на графі Γ_j залежить від моменту часу, у який цей перехід відбувається. Для цього на кожному кроці до стохастичної матриці P_k, $k = 1, 2$, додаватимемо збурення так. До кожного елемента $p_{ij}^{[k]}$ матриці P_k додається в момент часу t деяке збурення $\delta p_{ij}^{[k]}(t)$. Збурення відповідають умовам

а) при будь-якому i

$$\sum_{j=1}^{n_k} \delta p_{ij}^{[k]}(t) = 0, \; k = 1, 2;$$

б) рівномірно по всім i і j із зростанням t

$$\delta p_{ij}^{[k]}(t) \to 0, \; k = 1, 2.$$

Таким чином, у момент часу t матриця ймовірностей переходу за один крок для кожного з підграфів має такий вигляд:

$$\tilde{P}_k(t) = P_k + \delta P^{[k]}(t).$$

Вважатимемо, що в початковий момент часу процес на обох графах з імовірністю 1 знаходиться в стані 1 (корінь дерева), тобто

$$p_k^{(0)} = (1, 0, ..., 0), \; r = 1, 2.$$

Опишемо спосіб досягнення фокусування на багатошаровому графі Γ. Нехай у початковий момент часу параметри процесу блукань частинки на даному графі встановлені таким чином, що відбувається фокусування на підграфі Γ_1, а процес на підграфі Γ_2 пущений на "самоплив". Це досягається так: елементи, що $\delta p_{ij}^{[1]}$ збурюють, підграфа Γ_1 в кожен момент часу t зменшуються (тобто виконується умова б) для збурень), а для підграфа Γ_2 збурення $\delta p_{ij}^{[2]}$ мають випадковий характер. Нехай τ_k – момент виникнення σ-фокусування на підграфі Γ_1 (визначається з такої умови:

$$| p_j^{[1]}(\tau_m) - \pi_j | > \bar{\sigma}).$$

Тоді в момент τ_k процес на Γ_2 передається на керування одиничній матриці E до того моменту часу, доки відбудеться σ-фокусування на Γ_1 (на підграфі Γ_1 добавки, що збурюють, втрачають свій випадковий характер і з часом зменшуються). Як тільки буде виконана умова σ-фокусування для Γ_1, процес стабілізації на Γ_2 "пробуджується" (процес блукань передається на керування матриці, відмінної від одиничної). За момент часу, якому відповідає закінчення проведення процесу блукань, приймемо момент τ_0, в який буде спостерігатиметься σ-фокусування на всьому багатошаровому графі Γ. Тобто для кожного з підграфів має виконуватися така умова:

$$\pi_j - \underline{\sigma} \le p_j^{[k]}(\tau_0) \le \pi_j + \underline{\sigma}, \; k = 1, 2.$$

На рис. 4.5 наведено структуру підграфів Γ_1 і Γ_2. Жирним шрифтом виділені точки скидання; знаком «штрих» відзначені номери тих станів, які є загальними для Γ_1 й Γ_2. Стохастичні матриці для кожного із цих підграфів були промодельовані.

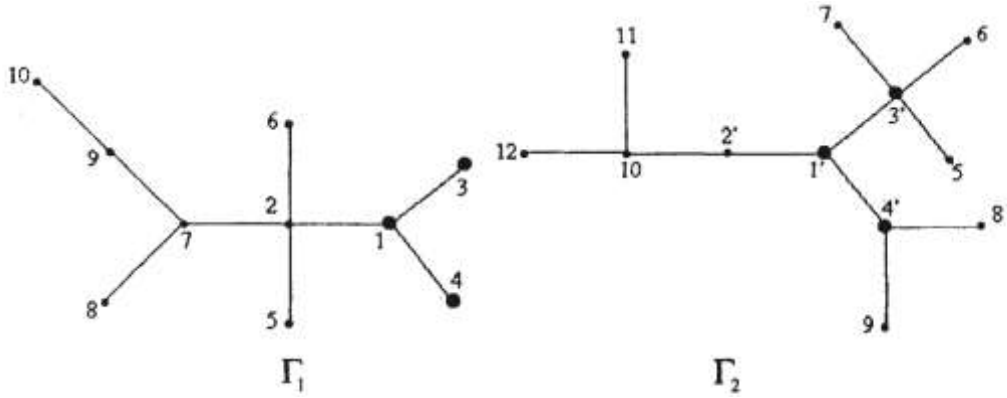


Рисунок 4.5 – Двошаровий граф $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

Наведемо результати процесу блукань на багатошаровому графі Г. Частинне фокусування на підграфі Γ_1 має місце вже до 90-го кроку. Потім спостерігаються коливання значень координат вектора розподілу, що відповідає підграфу Γ_1, у той час, як координати вектора $p^{[2]}$ наближаються до відповідного стаціонарного розподілу $\pi^{[2]}$. На рис. 4.6 – 4.9 наочно продемонстровано тенденції процесу збіжності.

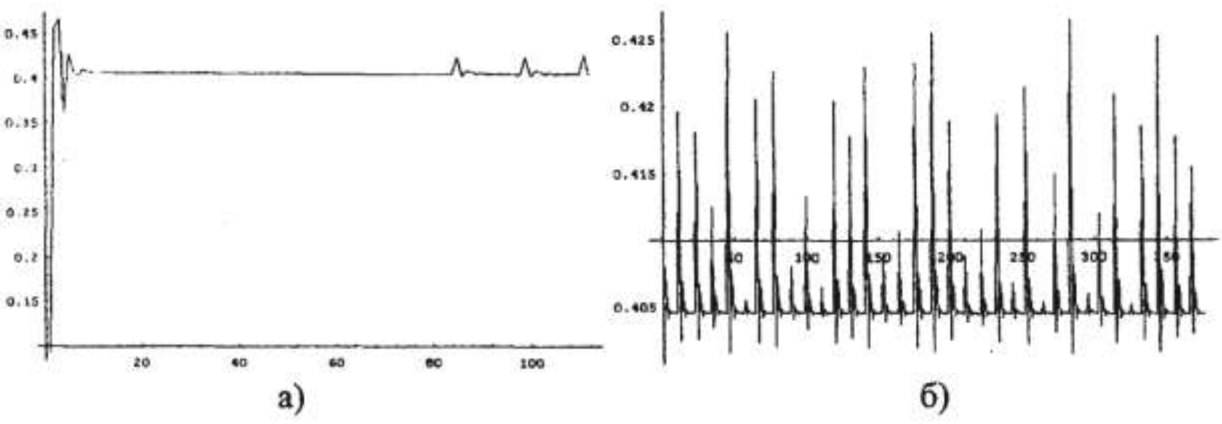
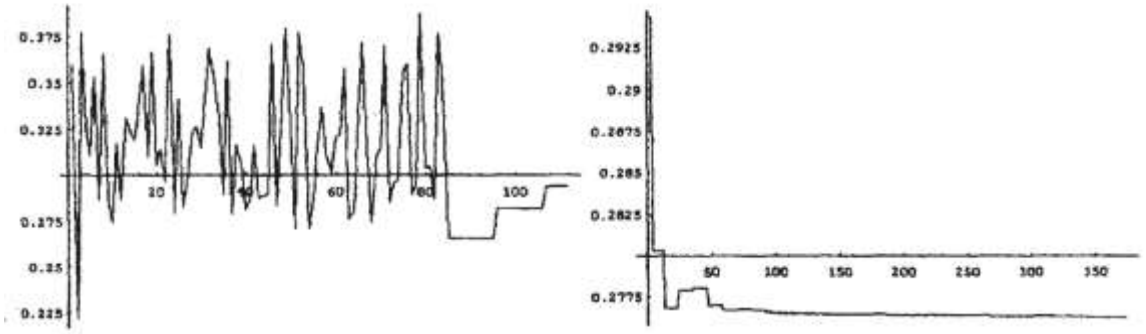


Рисунок 4.6 – Аналіз компоненти $p_1^{[1]}$

(графіки при $t \in [0, t_{100})$ (а) і при $t \in [0, \tau_0)$ (б))

Тут наведено графіки зміни значень деяких компонент векторів розподілів імовірностей протягом усього процесу стабілізації. Як досліджувані вершини взято стани із множини N : точка скидання й вершина без особливостей (не точка скидання). Із наведених графіків можна так само визначити момент першого σ-фокусування на підграфі Γ_1. Як видно, для станів підграфа Γ_1 характерним є поступове наближення процесу до σ-фокусування (приблизно до 85-го кроку), а потім спостерігається хаотичне коливання компонент вектора розподілу поблизу їхніх граничних значень до настання σ-фокусування на підграфі Γ_2. Для компонент вектора розподілів підграфа Γ_2 характерною була інша поведінка: до настання σ-фокусування на Γ_1 спостерігалися хаотичні коливання ймовірностей станів, однак потім відбулося поступове східчасте наближення до моменту τ_0. Спостережуваний ефект можна пояснити тим, що при розстабілізації процесу після настання першого σ-фокусування на графі Γ_1 процес блукань на Γ_2 припиняється й проводиться додаткова обробка підграфа Γ_1.



а) б)

Рисунок 4.7 – Аналіз компоненти $p_1^{[1]}$

(графіки при $t \in [0, t_{100})$ (а) і при $t \in [0, \tau_0)$ (б))

а) б)

Рисунок 4.8 – Аналіз компоненти $p_2^{[1]}$

(графіки при $t \in [0, t_{100})$ (а) і при $t \in [0, \tau_0)$ (б))

Додатково зроблені обчислення з метою порівняння швидкостей збіжностей на кожному із двох графів окремо зі швидкістю збіжності на багатошаровому графі. Стабілізація на графі Γ займала приблизно 495 кроків, а стабілізації на підграфах Γ_1 і Γ_2 – 123 і 100 кроки відповідно.

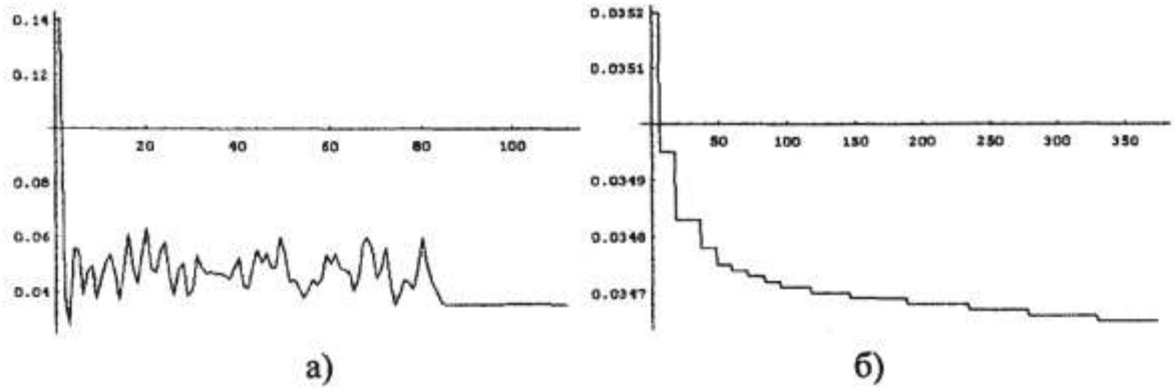


Рисунок 4.9 – Аналіз компоненти $p_2^{[2]}$

(графіки при $t \in [0, t_{100})$ (а) і при $t \in [0, \tau_0)$ (б))

4.9 Стабілізація на графах, що перетинаються

Розглянуті процеси випадкових блукань з неперервним часом на множині $\{\Gamma_k\}$ $(k = 1, 2, ...)$, елементами якого є графи Γ_k. Передбачається, що: серед елементів з $\{\Gamma_k\}$ є графи, що мають непусті перерізи (загальні вершини й ребра); процес випадкових блукань на будь-якому графі $\Gamma_j \in \{\Gamma_k\}$ не залежить від процесів блукань на інших графах з $\{\Gamma_k\}$.

Наведемо умови, під час виконання яких має місце стабілізація процесу блукань на графі $\bigcup_k \Gamma_k$. Нехай L – будь-яка замкнута крива, що знаходиться в тому ж просторі R, що й графи з $\{\Gamma_k\}$ така, що $L \bigcap \{\Gamma_k\} = 0$ (0 – порожня множина). Зажадаємо виконання умови: будь-яку вказану криву можна за допомогою неперервних деформацій стягти в точку так, щоб при стягуванні виконувалися умови $\Gamma \subset R, \Gamma \bigcap \{\Gamma_k\} = 0$.

Нехай перераховані умови виконано, й на всіх графах з $\{\Gamma_k\}$ має місце фокусування. Позначимо через $\vec{\pi}_i$ вектор розподілу, на який фокусує процес, що відбувається на графі Γ_i. Нехай Γ_i, Γ_j будь-які графи з $\{\Gamma_k\}$ такі, що $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq 0$, а $\vec{\pi}_i$, $\vec{\pi}_j$ – вектори розподілів, на які ці графи фокусують. Якщо для будь-якої такої пари Γ_i, Γ_j загальні компоненти векторів $\vec{\pi}_i$, $\vec{\pi}_j$ однакові, то на графі $\bigcup_i \Gamma_i$ можливе фокусування. Для довільного початкового розподілу ймовірностей фокусування на $\bigcup_i \Gamma_i$ матиме місце, якщо на кожному графі з $\{\Gamma_k\}$ фокусування відбудеться нескінченне число разів. З досить великою кількістю фокусувань на кожному $\Gamma_i \in \{\Gamma_k\}$ на графі $\bigcup_i \Gamma_i$ матиме місце σ-фокусування. Якщо розбіжності між загальними компонентами векторів $\vec{\pi}_i$, $\vec{\pi}_j$ досить малі, то на графі $\bigcup_i \Gamma_i$ можливе σ-фокусування.

Для конкретних графів $\{\Gamma_k\}$ зроблено чисельне моделювання процесу випадкових блукань на графі $\bigcup_i \Gamma_i$ й вивчено динаміку збіжності до граничного розподілу. Розглянемо один із цих прикладів.

Розглянемо два графи. Нехай множина вершин (станів) першого графа дорівнює I_1, множина вершин другого графа дорівнює I_2. Нехай ці графи мають загальний підграф, множина вершин якого дорівнює $I = I_1 \cap I_2$. Вважатимемо, що на часовому інтервалі $[s_0, t_0), t_0 \leq \infty$, нескінченне число раз відбувається почергове «включення» першого й другого графів, причому ймовірності «включення» кожного з графів дорівнюють $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Для математичного моделювання такого процесу першому графу поставимо у відповідність інфінітезимальну матрицю $\Lambda_1(t)$, елементами якої будуть $\lambda_{ij}^{(1)}(t)$ – щільності ймовірностей переходів із точки і у точку j ($i, j \in I_1$) за проміжок часу t. Аналогічно поставимо у відповідність другому графу інфінітезимальну матрицю $\Lambda_2(t)$. Нехай у деякі моменти часу t_k^1 процес блукання, що описується матрицею $\Lambda_1(t)$, фокусує на розподіл імовірностей π^1 станів $i \in I_1$. Нехай в інші моменти часу t_k^2, відмінні від t_k^1, процес, що описується матрицею $\Lambda_2(t)$, фокусує на розподіл імовірностей π^2 станів $i \in I_2$.

Необхідно визначити граничний розподіл імовірностей за всіма станами $i \in I_1 \bigcup I_2$.

Розглянемо множину станів I загального підграфа. З одного боку, еволюція блукань на множині I_1 описується підматрицею $\Lambda_{12}(t)$ матриці $\Lambda_1(t)$. Ця підматриця складається з елементів $\lambda_{ij}^{(1)}(t)$. З іншого боку, ці ж блукання описуються підматрицею $\Lambda_{21}(t)$, що складається з елементів $\lambda_{ij}^{(2)}(t)$ $i, j \in I_2$ матриці $\Lambda_2(t)$.

Розглянемо вектор π^{12}, що складається з $\pi_i^1, i \in I$, і вектор π^{21}, що складається з $\pi_i^2, i \in I$. Обидва вектори описують розподіл імовірностей станів множини I для блукання на першому й другому графах відповідно.

Якщо виконується умова паралельності векторів π^{12} і π^{21}, то процес блукання по об'єднаному графові з множиною вершин $I_1 \bigcup I_2$ з імовірністю 1 фокусує на розподіл π^*, що не залежить від початкового розподілу, заданого в початковий момент часу s_0. При $t \to \infty$ вектори π^{12} й π^{21} мають співпадаючі границі

$$\lim_{t \to \infty} \pi^{12}(t) = \lim_{t \to \infty} \pi^{21}(t) = \pi_{12}^*,$$

де π_{12}^* – підвектор вектора π^*, що складається з елементів $\pi_i^*, i \in I$.

Наведемо приклад такого процесу для двох повних графів. Нехай перший граф має вершини I_1={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, другий граф – вершини I_2={6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}. Тоді перерізом графів буде множина $I = I_1 \bigcap I_2 = \{6,7,8,9,10\}$. Нехай блукання на першому графі описуються матрицею $\Lambda_1(t)$:

$$\Lambda_1(t) = \frac{1}{t_k^1 - t}\begin{pmatrix} -12 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -12 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -12 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -12 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -10 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -11 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -11 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -11 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Множник $\frac{1}{t_k^1 - t}$ забезпечує фокусування процесу в точках t_k^1. Граничний розподіл, що обчислюється як лівий власний вектор, який відповідає нульовому власному значенню матриці $\Lambda_1(t)$, дорівнює

π^1= {0,0769,0,0828,0,0833,0,0833,0,0903,0,1667,0,0833,0,0833,0,0833,0,1667}.

Нехай блуканням на другому графі відповідає матриця $\Lambda_2(t)$:

$$\Lambda_2(t) = \frac{1}{t_k^2 - t}\begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -11 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -11 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -11 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & -13 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -13 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -13 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -13 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

Граничний розподіл, що обчислюється як лівий власний вектор, який відповідає нульовому власному значенню матриці $\Lambda_2(t)$, дорівнює

π^2 = {0,1667,0,0833, 0,0833,0,0833,0,1667,0,0714,0,0816,0,0831,0,0833,0,0972}.

При чисельному моделюванні отриманий граничний розподіл імовірностей станів для всіх п'ятнадцяти вершин об'єднаного графа:

$$\pi^* = \{0054,0,058,0,059,0,059,0,064,0,118,0,059,$$
$$0,059,0,059,0,118,0,050,0,058\ 0,059,0,059\ 0,069\}.$$

Цікаво відзначити, що для даних матриць $\Lambda_1(t)$ і $\Lambda_2(t)$ процес виходить на стаціонарний розподіл уже після 30 «включень». При цьому характер збіжності для вершин $i \in I$ відрізняється від характеру збіжності для вершин $i \in I_1 \bigcup I_2$ (рис. 4.10).

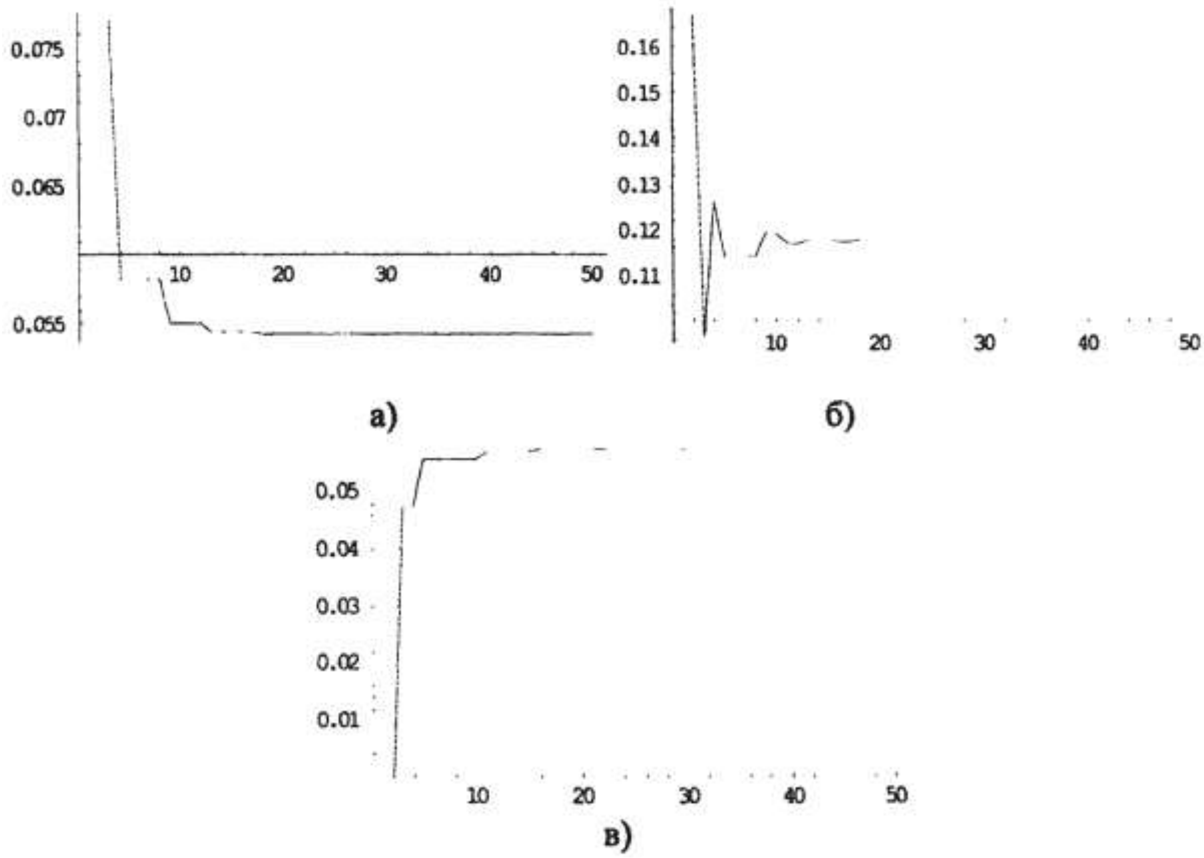


Рисунок 4.10 – Збіжність до граничного розподілу компонент $p_1(t)$ (а), $p_6(t)$, $p_{11}(t)$ (в)

5 ВИКОРИСТАННЯ ФОКУСУЮЧИХ ФАКТОРІВ ПРИ ВИГОТОВЛЕННІ ЛІКАРСЬКИХ ФОРМ

У цьому розділі описано схему, що дозволяє звести дослідження процесу дифузії, що відбувається в рідкій суміші, до розв'язування системи рівнянь Колмогорова для процесу зі скінченним числом станів. Описано методи фокусування й стабілізації, які можуть використовуватися при формуванні лікарських сиропів. Ці методи при певному впливі на фармакологічний сироп на останній стадії його приготування дозволяють отримати лікарську форму, що відповідає всім нормативним вимогам.

5.1 Методи обробки фармакологічних сумішей

Інтенсифікація основних процесів у хіміко-фармакологічній промисловості пов'язана із прискоренням масообміну в системі тверде тіло – рідина. Під твердим тілом розуміють істинно тверді речовини, що мають кристалічну структуру, а також анізотропні тіла – рослинні або тваринні тканини, аморфні з'єднання.

На сьогодні є великий досвід щодо впровадження новітніх методів, що інтенсифікують масообмін у системі тверде тіло – рідина, в основі яких лежить метод передачі системі вібрацій, пульсацій або коливань різних амплітуд, частот та інтенсивностей [5, 6, 19, 20, 52, 105]. При всіх позитивних якостях основним недоліком цих методів є великі енерговитрати, оскільки в кожному випадку інтенсифікації масообміну електрична енергія перетворюється в кінетичну енергію рідини багатоступінчасто й коефіцієнт корисної дії таких установок, що створюють у рідині пульсації, вібрації й т.д., менший, ніж в одноступінчастих.

Виходячи із цього, перспективним є використання пристроїв з мінімумом ступенів перетворення. До них відносять, крім механічних і гідравлічних, електроімпульсні, магнітоімпульсні, оптикоімпульсні (лазерні) пристрої.

При механічному способі накладання на середовище коливальних силових полів прискорення дифузійного механізму масопереносу добре проявляється в області досить низьких частотних коливань 3 – 50 Гц при малих розмірах часток.

При електроімпульсному способі інтенсифікації процесу коливальний рух рідини отримується при створенні в ній високовольтного заряду, що утвориться в результаті накопичування (акумулювання) електричної енергії, а потім її виділення в дуже короткі проміжки часу. Високе значення миттєвої потужності, що виділяється в імпульсному електричному пробої рідини при розряді конденсатора, створює в іскровому каналі, що швидко розширюється, ряд явищ, які обумовлюють електрогідравлічний ефект. Серед них: потужне імпульсне електромагнітне випромінювання, що супроводжує розряд, високий імпульсний тиск, що виникає в середовищі в результаті утворення ударних хвиль і сягає десятків тисяч атмосфер і викликає переміщення рідини зі швидкістю сотень метрів за секунду; полідисперсне ультразвукове випромінювання, що створює пульсації газових включень, порожнини, імпульсну кавітацію у великому об'ємі середовища; вплив плазми іскри, що несе у своєму спектрі широкий діапазон інфрачервоного, ультрафіолетового, твердого випромінювання.

Електрогідравлічні удари всередині оброблюваної суміші відбуваються один за одним досить часто. Ця частота регулюється залежно від протікання технологічного процесу й виду оброблюваної суміші. При електрогідравлічній обробці отримана в результаті суміш змінює й свою молекулярну структуру. При цьому в ній виникають статичні й квазістаціонарні поля, характеристики яких можуть визначатися спеціальними способами, зокрема, за допомогою зондувальних графів.

Одна з властивостей електрогідравлічного удару полягає в тому, що в результаті переорієнтації іонів, приведенням їх у збурений стан, суміш, оброблена електроімпульсним способом, втрачає здатність утворювати сторонні домішки й накип. Зміна властивостей води – явище тимчасове й залежить від прикладеної напруги, тобто властивості води можна регулювати штучним шляхом.

Фактично електрогідравлічний удар іскрового розряду слід відносити до типу мікровибуху, й механізм його впливу в області гідродинаміки необхідно розглядати з цих позицій. Вплив плазми розряду в зв'язку з її специфічністю може використовуватися в області прискорення хімічних процесів при отриманні нових речовин, полімеризації, для стерилізації й знепліднювання середовища й т.д.

Аналогічно електрогідравлічному ефекту існує світлогідравлічний ефект. Сильні гідравлічні хвилі виникають усередині рідини при поглинанні нею світлового променя квантового генератора (лазера). Ефект підсилюється, якщо рідина не безбарвна, а тіла, занурені в неї, здатні поглинати світло сфокусованого променя.

При цьому відзначається не тільки інтенсивна турбулізація рідини, аж до викиду її з ємності, але й значна деформація занурених у рідину часток сировини з розривом кліток, викликаним виникненням надлишкового тиску в ударній хвилі – порядку мільйона атмосфер. Ефект проявляється в ще більш короткі проміжки часу, ніж при електричному розряді, що обумовлено малою тривалістю світлового імпульсу, який несе заряд енергії великої потужності [1, 53].

Використання квантових генераторів у хіміко-фармацевтичному виробництві – зовсім нова мало вивчена область, що вимагає ретельного дослідження. У цей час лазерна техніка досить упевнено використовується в окремих галузях медицини й біології при опроміненні різних органів і тканин, біологічних субстратів. Виявлено параметри випромінювання, що впливають на технологічні процеси, потужність падаючого світлового променя, довжини хвилі, щільність енергії й т.д. [79, 96]. Була зроблена спроба використання енергії квантового генератора (гелій-неонового лазера) з довжиною хвилі 633 нм і потужністю на виході з генератора трубки 25 Мвт і 2 Мвт при стерилізації ін'єкційних розчинів і порошків: спазмолітину, апрофену, тіфену. Дослідження складу ліків шляхом тонкошарової хроматографії й мікробіологічна оцінка їхньої стерильності дали обнадійливі результати [106].

Є відомості про дію лазерного випромінювання (гелій-неонового лазера) при експозиції від 10 до 40 хв на найпоширеніші мікроорганізми: стафілокок патогенний, кишкову паличку, вульгарний протей, синьогнійну паличку й ін. Відомо також, що лазерний промінь проявляє бактеріостатичний ефект, причому ступінь останнього залежить від потужності випромінювання й тривалості впливу. Виявлено й деяку інгібікуючу дію лазерного випромінювання на мікроорганізми, що є збудниками раневої інфекції.

Із сказаного випливає, що сучасні методи виробництва вимагають застосування процесів переробки сировини в екстремальних умовах, що значно інтенсифікують загальний процес. Серед численних факторів зовнішнього впливу провідними є швидкісні зміни температури й тиску. Зміна цих параметрів може досягатися за допомогою різних фізичних і електрофізичних прийомів, хімічного вибуху, що створює тиск до 1×10^{10}Па, імпульсного магнітного поля (1×10^{9}Па), термічної та механічної дії лазерного випромінювання на рідину ($2\text{-}3\times10^{22}$Па), акустичного випромінювання й імпульсного електричного розряду (до 10^{9}Па.) [106,155]. Перевага електрогідравлічного ефекту в порівнянні з кожним із перерахованих методів полягає в більшій надійності й відтворюваності процесу, можливості його автоматизації, тобто використання в потокових лініях і системах, хоча кожен з них окремо має й свої специфічні переваги.

В області малих енергій (одиничний вплив в межах 1-1000 Дж), коли виникає необхідність застосування дуже коротких (до десяти наносекунд) імпульсів впливу, перевагу має світлогідравлічний ефект, що створюється лазерним імпульсом [117], а при обробці матеріалів, що проводять електричний струм, перевагу слід віддавати високоінтенсивним імпульсним полям [53, 121].

У зв'язку з обмеженістю відомостей про застосування лазерної технології у фармації це питання спеціально не розглядається.

З вищевикладеного випливає, що процес імпульсної обробки лікарської сировини складається із сильних впливів – ударів, що виникають один за іншим через короткі проміжки часу. Кожен з цих ударів локалізований у межах досить малого об'єму оброблюваної суміші. Сумарний ефект при зазначеному способі впливу на рідку суміш призводить до однорідності її властивостей після закінчення процесу обробки. На останньому етапі цієї операції оброблюваний екстракт не містить твердих фрагментів і процеси, що відбуваються в ньому, – це процеси дифузії.

5.2. Марковський підхід при описанні процесів, що відбуваються в рідких сумішах

Якщо устаткування якісне й зовнішніх впливів практично немає й технологічний режим протікає без порушень, то процес виготовлення лікарської форми відбувається відповідно до паспортного режиму. Це означає, що проміжок часу $[s_0,t_0)$, на якому відбувається виготовлення лікарського препарату, можна розбити на частини, наприклад, n частин, $[s_0,s_1),[s_1,s_2),\dots,[s_{n-1},t_0)$,у кожній з яких маса, що формується, перебуває в певному нормативному стані. Під нормативним станом розуміють таку ситуацію, за якої основні характеристики фармакологічного сиропу (його внутрішня температура, хімічний склад, вміст каталізаторів і т.д.) перебувають у заданих межах.

Чим більше n – число проміжків часу, на які розбитий інтервал $[s_0,t_0)$ – тим точніший опис процесу виготовлення лікарської форми. Позначимо стани маси, що формується, в проміжках часу $[s_0,s_1),[s_1,s_2),\dots,[s_{n-1},t_0)$ через $E_1,E_2,\dots,E_n$. З кожним станом $E_k,(k=1,\dots,n)$, пов'яжемо усереднене значення основної характеристики фармакологічної маси – ступінь чистоти еталонного лікарського препарату, що перебуває в стані E_k.

Якщо процес виготовлення лікарської форми протікає відповідно до паспортного режиму й рівень високочастотних вібрацій і шумів низький, то на кожному з інтервалів $[s_{k-1},s_k)$ фармакологічна маса перебуває в стані E_k з імовірністю p_{kk}, що лише незначно відрізняється від одиниці. Якщо ж високочастотні вібрації й випадкові впливи представлені досить масивно, то p_{kk}

помітно відмінні від одиниці, оскільки на часових проміжках $[s_{k-1}, s_k)$ фармакологічна маса може знаходитися (крім стану E_k) і в станах близьких до E_k, зокрема, у станах E_{k-1}, E_{k+1}, у яких би вона знаходилася з імовірністю близькою до нуля в тому випадку, якби високочастотних вібрацій і випадкових впливів на процес не було.

Розглянемо докладніше досліджуваний процес на кожному з проміжків $[s_{k-1}, s_k)$. Для $t \in [s_{k-1}, s_k)$ позначимо через $\dots, p_{k,k-2}(t), p_{k,k-1}(t), p_{k,k+1}(t)$, $p_{k,k+2}(t), \dots$ імовірності знаходження формованої маси в станах $\dots, E_{k-2}, E_{k-1}, E_{k+1}, E_{k+2}, \dots$. Якщо число n всіх часових проміжків $[s_{k-1}, s_k)$ не дуже велике й, разом з тим, таке, що з їхньою допомогою процес описується досить точно, то тоді стохастична матриця процесу буде тридіагональною. При більших значеннях n і значному фоні високочастотних і випадкових впливів стохастична матриця процесу матиме менше нульових елементів, ніж для випадку тридіагональної матриці. Таким чином, за наявності вібрацій і випадкових впливів дослідження процесу виготовлення лікарської форми можна звести до вивчення марковського процесу зі скінченним числом станів, зокрема, до дослідження марковського процесу з тридіагональною матрицею.

Більш точний аналіз процесу готування фармакологічного сиропу ґрунтується на його описі за допомогою п’ятидіагональної матриці. Якщо технологічний режим протікає відповідно до заданих обмежень, то елементи цієї матриці, найбільш віддалені від її головної діагоналі, малі, й зневага ними не призводить до грубих похибок в описі процесу.

На закінчення цього пункту нагадаємо, що процес готування лікарського сиропу протікає в результаті впливу на нього збурень, які локалізовані на малих проміжках часу та прямують один за одним досить часто. Їхній погоджений вплив на рідку суміш дозволяє втримувати основні характеристики процесу в заданих межах протягом усього часу його виготовлення.

На практиці готування лікарських форм часто ставиться задача про реалізацію такого процесу, коли фармакологічний сироп відповідає всім нормативним вимогам лише на останньому етапі його готування. На проміжних етапах (зокрема, коли відбувається подрібнення твердих фракцій суміші, що готується) допускається відступ від нормативних середніх.

У наступних пунктах будуть описані методи стабілізації розподілів марковських систем, реалізація яких дозволяє зробити готування лікарського сиропу за зазначеною схемою.

5.3 Розподілені фокусуючі фактори

Явища точного фокусування й σ-фокусування були описані в розділах 1, 2. У випадку точного фокусування й σ-фокусування серед елементів матриці $\Lambda(s)$ є елементи, які при $s \uparrow t_0$ швидко зростають. Таке зростання зазвичай виникає через вплив на процес швидкозмінних факторів, локалізованих найчастіше на малих проміжках часу. Часто буває, що такі фактори, багаторазово впливаючи на процес на деякому проміжку часу, щоразу викликають сильні «майже неінтегровані» збурення елементів матриці Λ, що призводить до багаторазової появи точок σ-фокусування. На практиці доводиться мати справу з такими факторами, які, систематично впливаючи на процес на проміжку $a \le t \le b$, призводять до багаторазової появи на ньому точок σ-фокусування, розподілених на $[a,b]$ майже «неперервно». Такі фактори називають фокусуючими [12, 65]. У цьому випадку для всіх вимірних за Лебегом множин з $[a,b]$ можна ввести міру F фокусування. Достатньо ввести цю міру на множині всіх півінтервалів $[t',t'') \subset [a,b]$. Припустимо

$$F[t',t'') = \sup_j \left\{ R_j(t',t'') - r_j(t',t'') \right\}, \tag{5.1}$$

де $R_j(t',t'') = \sup_i p_{ij}(t',t'')$, $r_j(t',t'') = \inf_i p_{ij}(t',t'')$, $p_{ij}(t',t'')$ – перехідні ймовірності.

Таким чином, величина $F(t',t'')$ з (5.1) визначає сумарний фокусуючий ефект, що виникає за рахунок всіх точок фокусування, «розмазаних» на $[t',t'']$.

Якщо точок фокусування на $[a,b]$ досить багато й внесок кожної з них у сумарний фокусуючий ефект на $[a,b]$ малий, можна ввести поняття щільності розподілу $p_F(t)$ таких точок на $[a,b]$. При цьому необхідно використовувати макроскопічний опис поняття щільності, коли зневажають «мікроскопічними» значеннями усереднених величин. Якщо серед точок фокусування є точки, внесок яких у сумарний фокусуючий ефект значний, при описі щільності $p_F(t)$ слід використовувати δ-функції. У випадку, коли щільність фокусування $p_F(t)$ постійна на $[a,b]$ для кожного $[t',t'') \subset [a,b]$, міра $F(t',t'')$ залежить лише від різниці $t''-t'$ й на кожному $[t',t'']$ фокусування відбувається на той самий розподіл.

Описані вище фокусуючі фактори, зазвичай діють на тлі деякої стохастичної (інфінітезимальної) матриці, що від них не залежить. Такі матриці називатимемо фоновими. Якщо збурення, що породжують фокусуючі фактори, локалізовані на малих проміжках часу $\Lambda_i(t)$ й норма фонової матриці невелика, то її внесок у процес фокусування на часових інтервалах малої тривалості малий.

Розглянемо найпростіший випадок розподілу фокусуючих факторів на $[a,b]$ – випадок, коли вони зосереджені на рівновіддалених один від одного інтервалах $(t_i,t_i+\delta t_i)$, $(i=1,\ldots,n)$, що не перетинаються. Передбачається, що кожному $(t_i,t_i+\delta t_i)$ відповідає (з точністю до зсуву) та сама інфінітезимальна матриця $\Lambda_i(t)$, що перетворюється в нуль при $t\notin\bigcup_{i=1}^{n}(t_i,t_i+\delta t_i)$. Вважатимемо, що матриця $\Lambda_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ така, що еволюція процесу на $(t_i,t_i+\delta t_i)$, призводить до σ-фокусування його розподілу до моменту $t_i+\delta t_i$; δt передбачається настільки малим, що внеском фонової матриці в процес фокусування за проміжок δt можна знехтувати. Зміна вектора розподілу процесу $\vec{p}(t)$ на $[a,b]$ залежить від того, наскільки близько розташовані один до одного фокусуючі інтервали $(t_i,t_i+\delta t_i)$. Якщо відстані між ними достатньо малі, то σ-фокусування матиме місце при $t\in[a+\Delta,b]$. В протилежному випадку моменти часу, у які σ-фокусування має місце, будуть локалізовані лише в деяких околах точок $t_i+\delta t_i$.

Розглянемо випадок рівновіддалених фокусуючих інтервалів, які можна отримати в результаті поділу заданого фокусуючого фактору на n однакових частин. Нехай на інтервалі $(t,t+\delta t)\subset[a,b]$ розподілені фактори, що забезпечують σ-фокусування процесу, який реалізується матрицею $\Lambda(t)$. Поза $(t,t+\delta t)$ $\Lambda(t)=0$. Побудуємо n інтервалів $(t_i,t_i+\delta t)$ $(i=1,\ldots,n)$, що рівновіддалені один від одного й рівномірно заповнюють $[a,b]$. Нумерація цих інтервалів проводиться зліва направо. Вважатимемо, що $n\cdot\delta t\le b-a$. З кожним $(t_i,t_i+\delta t)$ пов'яжемо фокусуючі фактори, які визначаються матрицею $\Lambda_i(t)$; кожну $\Lambda_i(t)$ можна отримати з $\Lambda(t)$ зменшенням її в n разів з таким зсувом: матриця $n^{-1}\Lambda(t)$ після відповідного зсуву має своїм носієм один з інтервалів

$(t_i, t_i + \delta t)$. Якщо фокусуюча сила матриці $\Lambda(t)$ на $(t, t + \delta t)$ була досить великою, то кожна з матриць $\Lambda_i(t)$ фокусуватиме при заміні t на $(t_i, t_i + \delta t)$. Якщо при цьому фонова матриця $P(s,t)$ – одинична на (a,b) (або мало відрізняється від неї), то σ-фокусування досліджуваного процесу на $[a,b]$ буде досягнуте вже після фокусування на кількох перших інтервалах $(t_1, t_1 + \delta t), (t_2, t_2 + \delta t), \ldots$. Якщо ж фонова матриця значно відрізняється від одиничної, то σ-фокусування на $[a,b]$ може й не бути.

Все вищесказане про рівновіддалені фокусуючі інтервали з незначними змінами переноситься на часову піввісь $s_0 < t$. Тепер, однак, множина інтервалів $(t_i, t_i + \delta t_i)$, на яких розподілені фокусуючі фактори, має бути нескінченною (зліченою). Якщо відстані між інтервалами $(t_i, t_i + \delta t_i)$ зміню-ються й деякі їх підмножини групуються одна до одної досить щільно, то на часових проміжках, які ці підмножини заповнюють, процес фокусування протікає швидше, ніж у випадку менш щільного їх розташування. Якщо на скінченному часовому відрізку $a \le t \le b$ є нескінченна (злічена) множина інтервалів $(t_i, t_i + \delta t_i)$, то $[a,b]$ містить хоча б одну точку згущення для них (відзначимо, що в цьому випадку нумерація інтервалів $(t_i, t_i + \delta t_i)$ у порядку зростання t_i, загалом кажучи, неможлива). Якщо фонова матриця одинична, то в цих точках фокусуючий ефект проявляється найбільш різко.

Розглянемо випадок, коли $s_0 \le t \le \infty$ й фокусуючі фактори, розподілені на інтервалах $(t_i, t_i + \delta t_i)$, з'являються випадково. Позначимо через p_i імовірність того, що фактор, який забезпечує σ-фокусування, розподілений на $(t_i, t_i + \delta t_i)$. Вважатимемо, що множина $\bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, t_i + \delta t_i)$ може мати точки згущення. Під час дослідження описаної ситуації часто можна використовувати леми Бореля-Кантеллі. Так, якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ збігається, то з імовірністю 1 фокусування може бути реалізоване лише на скінченній множині інтервалів $(t_i, t_i + \delta t_i)$. Якщо ж цей ряд розбігається й фокусування на інтервалах $(t_i, t_i + \delta t_i)$ є незалежними випадковими величинами, то з імовірністю 1 фокусування відбувається на нескінченній множині інтервалів $(t_i, t_i + \delta t_i)$.

В [44] наводяться умови фокусування й σ-фокусування, що реалізовані при локальних збуреннях марковського процесу з неперервним часом і скінченною, зліченою й континуальною множиною станів. Кожне окремо взяте збурення впливає лише на деяку підмножину фазового простору. Погоджений вплив таких збурень призводить до стабілізації процесу в цілому. Передбачається, що фазовий простір наділений деякою топологією, зокрема, є метричним простором. Якщо деякий стан (або група станів) отримає збурення, то збурення отримають і стани, близькі до нього. Множина всіх збурених станів породжує інфінітезимальну матрицю, що називають фрагментом. Передбачається, що фрагменти, які перетинаються, певним чином погоджені між собою [12, 44, 57]. Якщо умови узгодження виконані, то за деяких природних обмежень на послідовність моментів часу, у які відбуваються збурення, процес стабілізується: імовірності його станів із зростанням часу або приймають деякі граничні значення, або локалізуються поблизу їх.

Реалізація процесу стабілізації в кожному конкретному випадку вимагає проведення попередніх досліджень. Нехай, для визначеності, мова йде про такі впливи на процес розчинення твердих домішок у рідкому середовищі, при яких до моменту часу t_0 швидкість розчинення твердої домішки Π_k, $k=1,2,\ldots$ має дорівнювати V_k. Тоді, знаючи масу кожної розчинної домішки Π_k, можна знайти її відносну щільність p_k у всьому розчині до моменту часу t_0. На практиці описаний процес є лише частиною деякого технологічного процесу й потрібно вибрати такі зовнішні впливи на нього, щоб у моменти $t>t_0$ відносні щільності $p_k(t)$ приймали задані значення $p_k(t)$, наприклад, не змінювалися: $p_k(t)=p_k$. В такій ситуації доводиться розв’язувати кілька задач. Слід розбити робочий простір D, у якому відбувається розчинення, на кілька частин D_k, у кожній з яких потрібно розташувати джерела збурень, що породжують фокусуючі фрагменти. Ці джерела необхідно вибрати так, щоб виконувалися умови узгодження з [57, 44] і щоб при $t>t_0$ $p_k(t)$ приймали задані значення (або мало відрізнялися від них). Розбиття робочого простору на області D_k можна виконати багатьма способами. Тут виникає задача про оптимальний вибір областей D_k. Якщо момент t_0 фіксований, то ставиться задача про такий вибір D_k, при якому реалізація процесу пов'язана з мінімальною витратою енергії. Мова може йти також про такий вибір D_k, при якому для фіксованого об'єму енерговитрат і заданому початковому моменті процесу розчинення s_0 різниця t_0-s_0 приймала мінімальне значення. Зі зміною часу фізичні характеристики робочої суміші змінюються, у зв'язку з чим потрібно певним чином змінити потужності джерел збурень у кожній області D_k. Ці зміни вибираються так, щоб відповідні енерговитрати були мінімальними й основні робочі характеристики процесу мало відрізнялися від паспортних. З перерахованих задач видно, що керування процесом розчинення вимагає проведення додаткових досліджень і розв'язування ряду допоміжних задач.

5.4 Стабілізація розподілів імовірностей марковського процесу при локальних збуреннях його частин

Опишемо докладніше метод стабілізації, схема якого була намічена в попередньому пункті. Вважатимемо, що: кожне чергове збурення локалізоване в деякому околі моменту часу τ_k, що відокремлює τ_k від проміжків, на яких діють інші збурення; моменти τ_k є точками фокусування для процесів з інфінітезимальними матрицями-фрагментами, що виникають при цих збуреннях; кожен фрагмент після моменту τ_k перетворюється в нуль за малий проміжок часу. Це означає, що результати фокусування не зміняться за проміжок (τ_k, t), на якому даний фрагмент ще відмінний від нуля. Еволюція процесу розглядається на проміжку $[s_0, t_0)$, $t_0 < \infty$. Якщо $t_0 = \infty$, вважатимемо, що за відсутності збурень стохастична матриця $P(s,t)$ процесу збігається з одиничною матрицею. Якщо $t_0 < \infty$, то $P(s,t)$ передбачається лише неперервною.

Спочатку розглянемо випадок, коли $t_0 = \infty$ й фокусування, реалізоване фрагментами, точне. Опишемо зміну вектора $\vec{\pi}(t)$ розподілу ймовірностей станів усього процесу, що відбувається при кожному черговому фокусуванні. Нехай фрагмент Δ_i, у момент τ_k фокусує на $\vec{\pi}_i = \vec{\pi}_i(\tau_k)$. Розглянемо вектор $\vec{\pi}'_i(t)$, координати якого складаються із всіх координат $\vec{\pi}(t)$, що знаходяться в тих же рядках, що й рядки Δ_i. Нехай (t', t'') – будь-який інтервал, що містить τ_k, у якому ніякий фрагмент, крім Δ_i, не фокусує. Тоді, щоб отримати вектор розподілу $\vec{\pi}(t)$ процесу при $t \in (\tau_k, t'')$, треба підвектор $\vec{\pi}_i{}'(t')$ вектора $\vec{\pi}_i(t')$ замінити на $\vec{\pi}_i(\tau_k)$. В результаті отримаємо $\vec{\pi}(t)$.

Кожному елементу будь-якого фрагмента відповідає певний елемент матриці $P(s,t)$. Нехай Δ_i, Δ_j – довільні фрагменти. Виділимо з них всі елементи, які відповідають тому самому елементу з $P(s,t)$. Множину всіх таких елементів з Δ_i і

Δ_j називатимемо їх перерізом: $\Delta_{ij} = \Delta_i \bigcap \Delta_j$. Прямокутна матриця Δ_{ij} приймає, загалом кажучи, різні значення в околах моментів фокусування фрагментів Δ_i, Δ_j. Поза цими околами $\Delta_{ij} = 0$.

Зробимо наступні припущення.

а) Будь-який момент τ_k фокусування довільного фрагмента Δ_i (а виходить, і збурення, що його породжує) не залежить від еволюції процесу до τ_k. Існує послідовність інтервалів

$$\left\{[s_k, s_{k+1})\right\}_{k=0}^{\infty}, \quad \bigcup_{k=0}^{\infty} [s_k, s_{k+1}) = [s_0, \infty), \tag{5.2}$$

така, що будь-який фрагмент Δ_i, $(i = 1, \ldots, N)$ у моменти $\tau_k \in [s_k, s_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, фокусує з імовірністю $p_i(\tau_k)$,

$$0 < p_0 \le p_i(\tau_k) \le p_i < 1. \tag{5.3}$$

Будь-який фрагмент при кожному черговому його збуренні фокусує на той самий розподіл $\vec{\pi}_i$.

б) Нехай

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i$$

– об'єднання всіх фрагментів. Вважатимемо, що: M накриває всю діагональ матриці $P(s,t)$; можлива така нумерація фрагментів, при якій

$$\Delta_{i,i+1} \ne \varnothing, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

$$\Delta_{i,N} \ne \varnothing, \quad i = 1, \ldots, N-2,$$

діагональні елементи $P(s,t)$, що належать $\Delta_i \setminus \Delta_{i,i+1}$, лежать лівіше діагональних елементів $P(s,t)$ з $\Delta_{i+1} \setminus \Delta_{i,i+1}$.

Далі використовується така нумерація фрагментів.

в) Умови узгодження. Нехай Δ_i, Δ_j – будь-які фрагменти, для яких $\Delta_{i\,j} \neq \varnothing$ і Δ_i, Δ_j фокусують на $\vec{\pi}_i$, $\vec{\pi}_j$.

Розглянемо вектори

$$\vec{\pi}_{i\,j}, \vec{\pi}_{j\,i}, \tag{5.4}$$

координати яких складаються з тих координат $\vec{\pi}_i, \vec{\pi}_j$, які лежать у тих самих рядках, що й рядки фрагмента $\Delta_{i\,j}$. Зажадаємо, щоб $\vec{\pi}_{ij}$, $\vec{\pi}_{ji}$ були паралельні.

Якщо виконуються всі перераховані умови, то такий процес з імовірністю 1 фокусує на розподіл $\vec{\pi}^*$,що не залежить від початкового розподілу ймовірностей, заданого в момент s_0. При $t \to \infty$ вектори $\vec{\pi}_{i\,j}, \vec{\pi}_{j\,i}$ з (5.4) мають співпадаючі границі

$$\lim_{t\to\infty} \vec{\pi}_{i\,j}(t) = \lim_{t\to\infty} \vec{\pi}_{j\,i}(t) = \vec{\pi}^*_{i\,j}. \tag{5.5}$$

Доведення цього твердження зводиться до перевірки наступних тверджень.

1. Після кожного фокусування будь-якого фрагмента сума

$$\sum_{i,j} \left| \vec{\pi}_{ij} - \vec{\pi}_{ji} \right| \tag{5.6}$$

не зростає. Перевірка цього твердження ґрунтується на припущенні про паралельність векторів $\vec{\pi}_{i\,j}, \vec{\pi}_{j\,i}$.

2. Існують такі ланцюжки (системи) фрагментів, при послідовному фокусуванні яких сума (5.6) спадає. До їхнього числа, зокрема, відноситься ланцюжок

$$\left\{ \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{N-1}, \Delta_N \right\}. \tag{5.7}$$

Тут фрагменти розташовані в тому порядку, в якому вони фокусують. Якщо всі фрагменти такого ланцюжка послідовно фокусують у зазначеному порядку нескінченну кількість раз, то сума (5.6) перетвориться в нуль. При перевірці цього твердження істотну роль відіграє умова $\Delta_{i,N} \neq \varnothing \ \left(i = 1, \ldots, N-2 \right)$ з б). Якщо такий фрагмент Δ_N не існує, то зазначене прагнення до нуля суми (5.6) не має місця без додаткових припущень про зв'язки між векторами $\vec{\pi}_i$, на які фокусують фрагменти.

3. Імовірність того, що всі фрагменти ланцюжка (5.7) за проміжок $\left[s_0,\infty\right)$ будуть збурені (у порядку їхньої нумерації) нескінченну кількість раз, дорівнює одиниці. Це твердження перевіряється за допомогою (5.3).

Опишемо будову вектора $\vec{\pi}^*$. Позначимо через $\vec{\pi}_i^*$ границі (при $t\to\infty$) векторів $\vec{\pi}_i\left(\tau_k\right)$, на які фокусують фрагменти Δ_i $\left(i=1,\ldots,N\right)$. Замінимо нулями всі координати вектора $\vec{\pi}_i^*$ $\left(i=2,\ldots,N\right)$, які належать $\vec{\pi}_{i-1,i}^*$ із (5.2). Відкинувши в цьому новому векторі отримані таким чином нульові координати, отримаємо вектор $\vec{\pi}_{ii}^*$. Вектор $\vec{\pi}^*$ має вигляд

$$\vec{\pi}^*=\left(\vec{\pi}_{11}^*,\vec{\pi}_{22}^*,\ldots,\vec{\pi}_{NN}^*\right). \tag{5.8}$$

Випадок $t_0<\infty$ має місце при лавинному зростанні потужності факторів, що породжують фокусуючі фрагменти. Сформульоване вище для випадку $t_0=\infty$ твердження тут має місце, коли матриця $P\left(s,t\right)$ неперервна й t_0 не є її точкою фокусування. Доведення цього твердження з незначними змінами проводиться так само, як і для випадку $t_0=\infty$. Рівність (5.2) тепер має вигляд

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}\left[s_k,s_{k+1}\right)=\left[s_0,t_0\right);$$

як і раніше, $\tau_k\in\left[s_k,s_{k+1}\right)$.

Нехай виконуються перераховані вище умови, але тепер всі фрагменти σ-фокусують. Тоді при $t\uparrow t_0$ має місце σ-фокусування на $\vec{\pi}^*$. Це твердження є правильним і для випадку, коли частина фрагментів σ-фокусує, а інші – фокусують.

Якщо вектори $\vec{\pi}_{ij},\vec{\pi}_{ji}$ з (5.8) відповідають умовам узгодження з точністю до доданків, довжини яких досить малі, то має місце σ-фокусування.

Отримані результати справедливі й у випадку, коли множина всіх станів досліджуваного процесу Π є зліченою або континуальною. Для кожного із цих випадків число можливих фрагментів нескінченне. Умови узгодження тут такі ж, як і у випадку скінченного числа станів. Доведення збіжності до фінального розподілу проводиться спочатку для процесів Π_n $(n=1,2,\ldots)$, у кожному з яких число можливих фрагментів скінченне й необмежено зростає із зростанням n. Кожен процес Π_n при $t \uparrow t_0$ фокусує на розподіл $\vec{\pi}_n^*$ і апроксимує із заданою точністю процес П. Із зростанням n точність апроксимації збільшується. Далі встановлюється, що $\vec{\pi}_n^* \to \vec{\pi}^*(n \to \infty)$.

До локальних збурень, за допомогою яких проводиться керування процесом готування рідкої суміші, ми відносимо й послідовне введення в розчин реагентів. Реагенти вводяться малими порціями; моменти їхнього введення визначаються на основі аналізів рідкої суміші. Ці аналізи проводяться досить часто.

Нехай локальні збурення процесу Π такі, що вектори розподілів на які фокусують фрагменти, є випадковими. Потужність множини всіх станів процесу Π як і раніше не більш ніж континуальна. Передбачається, що будь-який фрагмент при кожному черговому його збуренні фокусує на той самий випадковий вектор. Умови узгодження тепер полягають у тому, щоб були паралельними вектори математичних сподівань $M\vec{\pi}_{ij}$, $M\vec{\pi}_{ji}$. Інші припущення про досліджуваний процес залишаються попередніми (див. умови а), б)). Тоді процес Π із імовірністю 1 фокусує на випадковий вектор $\vec{\pi}^*$. Рівність (5.5) тепер має вигляд

$$\lim_{t \uparrow t_0} M\vec{\pi}_{ij}(\mathrm{t}) = \lim_{t \uparrow t_0} M\vec{\pi}_{ji}(t).$$

Описана в цьому пункті схема фокусування застосовна до процесів, інфінітезимальні матриці яких тридіагональні. Якщо інфінітезимальна матриця процесу п’ятидіагональна і її елементи, максимально віддалені від головної діагоналі, є достатньо малими (ця вимога на практиці готування лікарських форм зазвичай виконується), то вектори узгодження $\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}$ з (5.4) будуть із точністю до малих доданків паралельними й σ-фокусування матиме місце.

Фармакологічний сироп наприкінці його готування має являти однорідну суміш – її властивості мають бути однаковими у всіх точках об'єму, який вона займає. Тому описаний вище процес стабілізації, реалізований за допомогою погоджених локальних збурень, має представляти фокусування на рівномірний розподіл, коли фармакологічний розчин можна піддавати перемішуванню. Потрібно лише, щоб локальні збурення, що впливають на розчин у всіх частинах об'єму, який він займає, були ідентичні з огляду їхнього впливу на розчин. Дотримання цієї умови призводить до того, що кожне таке локальне збурення фокусує на фрагмент рівномірного розподілу. Фінальний розподіл також буде однорідним.

5.5 Рівняння для високочастотних коливань, що виникають при впливі детермінованих і випадкових факторів

До сильних збурень, що впливають на процес і дозволяють керувати їм, відносяться високочастотні вібрації, що впливають на всю фармакологічну масу або окремі її частини й багаторазово повторювані електрогідравлічні удари, рівномірно розподілені у всьому робочому просторі на останньому етапі її готування. Коли тверді фракції суміші вже повністю подрібнені, основними факторами впливу на рідку суміш є реактиви, що вводяться послідовно в неї, інтенсивне перемішування, а для багатьох видів сумішей і високочастотні вібрації [121]. Всі ці способи впливу на фармакологічний сироп призводять до виникнення в ньому фокусуючих факторів, описаних у п. 5.4, 5.5.

Розглянемо фармакологічний сироп, що має домішки, розчинення яких ініціюється штучно створюваними вібраціями. Передбачається, що ці вібрації містять високочастотні коливання, які, як відомо [105, 106], беруть найбільш активну участь у процесі розчинення. Крім вібрацій розчиненню домішок сприяє перемішування, що є рівномірним або майже рівномірним обертанням фармакологічної суміші. З'ясуємо, який внесок дають високочастотні гармоніки в сумарну силу, що впливає на частинки, що знаходяться в фармакологічному сиропі (розчині).

Розглянемо випадок, коли частинки знаходяться одночасно під дією повільнозмінного поля, U, що відповідає рівномірному обертанню сиропу, і сили

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \cos\omega t + \vec{f}_2 \sin\omega t, \tag{5.9}$$

що змінюється з часом з великою частотою ω. Передбачається, що $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ – функції від просторових координат. Сила $\vec{f}$ відповідає високочастотній гармоніці. Таким чином, тут передбачається, що високочастотні вібрації зводяться лише до цієї гармоніки (5.9). Під «великою» частотою розуміють таку частоту ω, що відповідає умові $\omega >> \dfrac{1}{T}$, де T – час, за який поле U помітно змінює своє значення. Сила $\vec{f}$ не передбачається малою в порівнянні з силами, що діють у полі U. Однак, припускатимемо, що під дією сили $\vec{f}$ частинка робить коливальні зсуви ξ малої амплітуди. Це припущення є правильним, оскільки $\omega >> \frac{1}{T}$. Для простоти запису вважатимемо, що рух частинки одно- мірний. Це буде в тому випадку, якщо U й f залежать лише від однієї просторової координати x. Перехід до тривимірного випадку не являє особли-вих труднощів. Рівняння частинки має вигляд

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f. \tag{5.10}$$

Із зроблених вище припущень випливає, що рух частинки є переміщенням уздовж деякої плавної траєкторії, обумовленої рівномірним обертанням сиропу, з одночасними малими коливаннями з частотою ω навколо її. Таким чином,

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{5.11}$$

де $\xi(t)$ – зсув частинки за рахунок швидких осциляцій. Замінимо всі величини в (5.11) їхніми середніми значеннями за період $\frac{2\pi}{\omega}$. Середнім значенням функції $f(t)$ на проміжку $\left[t-\frac{T}{2}, t+\frac{T}{2}\right]$ називається величина

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{T}\int_{1-\frac{T}{2}}^{1+\frac{T}{2}} f(\tau)d\tau. \tag{5.12}$$

Передбачається, що результати усереднень, зроблені за допомогою (5.12), усувають фактор випадковості й дозволяють перейти від рівняння (5.11) до рівняння з невипадковими членами.

Враховуючи, що середнє значення функції $\xi(t)$ за час її періоду $\frac{2\pi}{\omega}$ дорівнює нулю та що $X(t)$ за цей час майже не змінюється, отримаємо

$$\bar{x} = X(t).$$

Це означає, що $X(t)$ описує усереднений за швидкими осциляціями, плавний рух частинки. Виведемо рівняння для цієї функції. Підставимо (5.11) в (5.10) і розкладемо доданки отриманої рівності за ступенями ξ. Зневажаючи членами $o(\xi)$, матимемо

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi\frac{d^2U}{dX^2} + f(X,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}. \tag{5.13}$$

Це рівняння містить члени двох типів – швидко осцилюючі й повільно змінні. Вони мають взаємно знищуватися в кожній із цих двох груп окремо. Для осцилюючих членів маємо

$$m\ddot{\xi} = f(X,t). \tag{5.14}$$

Інші осцилюючі члени малі, оскільки містять малий множник ξ. Похідна $\ddot{\xi}$ пропорційна великій величині ω^2 й тому не є малою. Розв'язуючи рівняння (5.14) з функцією f з (5.10) і приймаючи X за постійну, отримуємо

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \tag{5.15}$$

Тепер усереднимо рівняння (5.13) за тим самим часовим проміжком $\frac{2\pi}{\omega}$, що й вище. Враховуючи, що середні значення середніх ступенів f і ξ дорівнюють нулю, матимемо

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}}.$$

Це рівняння відносно функції X. Перепишемо його так

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{еф}}{dX},$$

де

$$U_{еф} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{f}^2 = \frac{1}{4m\omega^2}\left(f_1^2 + f_2^2\right).$$

Передбачається, що маса m частинки за період $\frac{2\pi}{\omega}$ не змінюється. Порівнюючи це рівняння з (5.15), робимо висновок, що додатковий до поля U член є ні що інше, як середня кінетична енергія осциляційного руху:

$$U_{еф} = U + \frac{m}{2}\overline{\xi}^2. \qquad (5.16)$$

З (5.16) випливає, що усереднення за осциляціями руху частинки відбувається так, ніби, крім постійного поля U, діяло ще й додаткове постійне поле, що визначається доданком $\frac{m}{2}\overline{\xi}^2$.

Із проведеного аналізу видно, що рівняння (5.14) для коливального зсуву $\xi(t)$ і його розв'язок не залежать від причин, які його породжують: з (5.15) випливає, що $\xi(t)$ залежить лише від $\overline{f}$ і ω, при цьому несуттєво, чим породжується сила $\overline{f}$, детермінованими або випадковими факторами. До цього ж висновку приходимо, використовуючи описаний вище метод усереднення для випадку кількох частинок, що рухаються в полі U і перетерплюють швидкі осциляції під впливом додаткової сили

$$\overline{f} = \sum_k f_{1k}\cos\omega_k t + f_{2k}\sin\omega_k t. \qquad (5.17)$$

Кожен член в (5.17) відповідає високочастотній осциляції з частотою ω_k. При отриманні рівнянь для осциляційних зсувів кожної частинки усереднення необхідно робити послідовно для кожної ω_k.

5.6. Застосування зондувальних графів під час дослідження динаміки формування фармакологічних сиропів

Описані вище методи впливу на вихідну фармакологічну масу, що мають своєю метою прискорення природно протікаючого процесу, найчастіше повторюються багаторазово. При цьому фармакологічний сироп на різних етапах його виготовлення доводиться піддавати зондуванню для того, щоб переконатися в однорідності його властивостей і відсутності в ньому домішок, наявність яких не відповідає паспортним даним. До таких домішок відносяться, зокрема, макромолекули протилежної орієнтації по відношенню до нормальної орієнтації основної маси макромолекул сиропу, що отримані при завершенні діючого технологічного режиму. Найчастіше виявлення молекул протилежної орієнтації і їхнє видалення з фармакологічної маси являє досить складну технічну задачу. Разом з тим присутність таких молекул (поряд з нормальними молекулами) у готовій лікарській формі може помітно знизити її фармакологічні властивості.

Останнім часом при контрольному зондуванні фармакологічного сиропу застосовують спроби використання зондувальних графів (ЗГ). Так називають графи, ребра яких є провідниками, що допускають поширення уздовж них електричних імпульсів, які поширюються в них або в обох напрямках, або в одному з них, а вершинами є мініатюрні конденсатори, на обкладки яких можуть «натікати» заряди, що перебувають у фармакологічному сиропі. За допомогою такого графа, розміщеного в сиропі, можна простежити за розподілом у ньому електричних зарядів і динамікою зміни їхньої щільності в часі.

У фармакологічному сиропі в процесі його обробки виникають електростатичні або квазістаціонарні електричні поля, наявність яких впливає на формування лікарської форми. Наявність таких полів призводить до зміни термодинамічних залежностей між компонентами фармакологічної суміші й зміни її діелектричних властивостей. За допомогою ЗГ, розміщених у різних ділянках робочого простору, у якому формується лікарська форма, можна виявити наявність зазначених полів і зафіксувати їх характеристики в різних точках простору і їх еволюцію в часі. Найчастіше ЗГ закріплюють у певних точках робочого простору. Використовуються й ЗГ, що вільно мігрують у фармакологічній масі або, що переміщуються в ній лише на незначні відстані.

За допомогою ЗГ фіксуються перепади потенціалу поля, що виникає в сиропі між точками, у яких розташовані вершини ЗГ. Коли різниця потенціалів між сусідніми вершинами (тобто вершинами, з'єднаними провідним ребром) досягає граничного рівня відбувається розряд: від вершини A до вершини B (з меншим, ніж в A, потенціалом) поширюється порція заряду (імпульс). Його влучення у вершину B може призвести до того, що потенціал у B перевищуватиме граничний рівень відносно потенціалів вершин C, D, ..., які з'єднані ребрами з B. Тоді імпульси з B поширюватимуться з B в C, D, ... (або хоча б в одну із цих вершин). Цей процес триватиме доти, доки різниця потенціалів між всіма вершинами графа не стане нижчою граничного рівня. Так триватиме доти, доки нові порції зарядів, що притікають із фармакологічного сиропу на конденсатори вершин ЗГ, не порушать цю рівновагу. Описаний процес досягнення граничних рівнів і поширення імпульсів у ЗГ носить випадковий характер. Цей процес є неоднорідним марковським процесом і крім часу залежить і від розміщення точок, у яких знаходяться вершини ЗГ. Ті варіанти неоднорідних випадкових блукань на графах, які розглянуті, при відповідній їхній адаптації до конкретного процесу можуть використовуватися для зондування фармакологічної маси. При цьому можуть використовуватися розроблені алгоритми й програми для дослідження процесів випадкових блукань на графах.

Лабораторні випробування, проведені на основі цих програм, дали позитивні результати.

6 СИНТЕЗ МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ЗА ФРАГМЕНТАМИ

Під час дослідження фізичних і економічних процесів як математична модель часто використовують марковські процеси. Зазвичай марковський процес вибирається таким чином, щоб його розподіл імовірностей у кожен момент часу відповідав параметрам, що характеризують розглянуту систему. Матриця перехідних імовірностей описує еволюцію системи в часі.

Метод синтезу, що полягає в побудові моделі досліджуваного об'єкта за моделями його частин, для систем марковського типу означає відновлення матриці перехідних імовірностей марковського процесу за матрицями перехідних імовірностей її підсистем – фрагментів.

6.1 Розбиття марковського процесу на фрагменти

На неперервній або дискретній множині T, що відіграє роль часу, задамо марковський процес $x(t)$, що приймає значення із множини $I=\{1,2,\ldots,n\}$, яке надалі називатимемо множиною станів. Через $p_j(t)$ позначатимемо ймовірність знаходження системи в стані j в момент часу t. Поведінка процесу визначається ймовірностями переходу між станами i, j

$$p_{ij}(s,t)=P\{x(t)=j\,/\,x(s)=i\},\, i,\, j\in I.$$

Матриця $P(s,t)=\left\|p_{ij}(s,t)\right\|$, розмірності $n\times n$, що складається з перехідних імовірностей, називається перехідною (або стохастичною) матрицею марковського процесу. В подальшому опускатимемо залежність матриці від часу й позначати її P. Розглянемо подію B, яка полягає в тому, що в момент часу t процес знаходитиметься в класі станів $\{1,2,\ldots,n-1\}$, який є підмножиною всієї множини можливих станів I:

$$B=\left(x(t)\in\{1,2,\ldots,n-1\}\right).$$

Розглядатимемо тільки такі події B, імовірність яких відмінна від нуля: $P(B)>0$. Це дозволяє ввести на вихідному імовірнісному просторі $\langle\Omega,F,P\rangle$ умовні ймовірності $P_B(A)=P(A/B)\quad\forall A\in F$ [37, 51] і, тим самим, перейти до простору $\langle \Omega, F, P_B \rangle$. Перевіримо, що функція $P(A)$, що задає ймовірність (міру) на F, дійсно відповідає всім вимогам імовірності:

1. $P_B(A) = P(AB)/P(B) \ge 0$ для будь-якої події $A \in F$;
2. $P_B(\Omega) = P(\Omega B)/P(B) = P(B)/P(B) = 1$;
3. $P_B(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)B)/P(B) =$

$$= (P(A_1 B) + P(A_2 B) + \ldots + P(A_m B))/P(B) = P_B(A_1) + P_B(A_2) + \ldots + P_B(A_m)$$

для будь-яких попарно несумісних подій $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \ne j$.

Тоді умовні перехідні ймовірності приймуть вигляд:

$$P_B(x(t) = j / x(t-1) = i) = P(x(t) = j / B, x(t-1) = i) =$$

$$= \frac{P(x(t) = j, B, x(t-1) = i)}{P(B, x(t-1) = i)} = \frac{P(x(t) = j, x(t-1) = i)}{P(x(t-1) = i) P(B / x(t-1) = i)} =$$

$$= \frac{P(x(t) = j / x(t-1) = i)}{P(B / x(t-1) = i)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_{ik}},\ i, j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким чином, ми можемо побудувати стохастичну матрицю P' розмірності $(n-1)\times(n-1)$, що отримана з вихідної виключенням стану n. Аналогічно, можна виключати будь-який стан k, $1 \le k \le n$, або групу станів. При цьому зі стохастичної матриці виключаються рядки й стовпці, що відповідають вилученим станам, а потім кожен з рядків нормується. Таким чином, ми знову отримаємо стохастичну матрицю, але вже меншої розмірності.

Введемо наступні позначення. Нехай, як і раніше, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множина станів. Під матрицею P^{I_1}, $I_1 \subset I$, розумітимемо стохастичну матрицю, отриману з вихідної стохастичної матриці P шляхом виключення тих рядків і стовпців, індексів яких немає в I_1, з наступним діленням елементів рядка, що залишилися, на їх суму.

Дослідимо, у яких випадках можна за заданою системою фрагментів відновити стохастичну матрицю P вихідного марковського процесу.

6.2 Синтез процесу за двома фрагментами

Для розв'язку задачі про синтез стохастичної матриці за її фрагментами розглянемо спочатку об'єднання двох фрагментів, а потім узагальнимо отримані результати та встановимо необхідні й достатні умови зазначеного синтезу.

Нехай дані два фрагменти P^{I_1} й P^{I_2}, $I_1 \subset I, I_2 \subset I$. Припустимо, що $I_1 \bigcap I_2 = I_0 \neq \varnothing$, $I_1 \bigcup I_2 = I$.

У такому випадку ми можемо обчислити елементи рядків матриці P, що мають номери з множини I_0 (рис. 6.1). Покажемо, як це можна зробити.

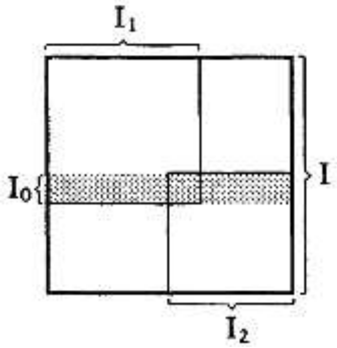


Рисунок 6.1 – Відновлення рядків з перерізу фрагментів

Для кожного рядка $i \in I_0$ позначимо

$$S'_{1i} = \sum_{j \in I_1 \setminus I_0} p_{ij} ,$$

$$S'_{2i} = \sum_{j \in I_2 \setminus I_0} p_{ij} ,$$

$$S_{1i} = \sum_{j \in I_1 \setminus I_0} p_{ij}^{I_1} , \tag{6.1}$$

$$S_{2i} = \sum_{j \in I_2 \setminus I_0} p_{ij}^{I_2} . \tag{6.2}$$

Оскільки

$$p_{ij}^{I_1} = \frac{p_{ij}}{1 - S'_{2i}}, \quad j \in I_1, \tag{6.3}$$

$$p_{ij}^{I_2} = \frac{p_{ij}}{1 - S'_{1i}}, \quad j \in I_2, \tag{6.4}$$

то, просумувавши рівності (6.3) по $j \in I_1 \setminus I_0$ й (6.4) по $j \in I_2 \setminus I_0$, отримаємо таку систему

$$S_{1i} = \frac{S'_{1i}}{1 - S'_{2i}},$$

$$S_{2i} = \frac{S'_{2i}}{1 - S'_{1i}}.$$

Це система рівнянь відносно S'_{1i} й S'_{2i}. Розв'язавши її, знайдемо

$$S'_{1i} = S_{1i} \frac{1 - S_{2i}}{1 - S_{1i} S_{2i}},$$

$$S'_{2i} = S_{2i} \frac{1 - S_{1i}}{1 - S_{1i} S_{2i}}.$$

Тоді перехідні ймовірності синтезованої матриці знаходяться з (6.3) – (6.4):

$$p_{ij} = p_{ij}^{I_1} \frac{1 - S_{2i}}{1 - S_{1i} S_{2i}}, \quad i \in I_0, \ j \in I_1, \tag{6.5}$$

$$p_{ij} = p_{ij}^{I_2} \frac{1 - S_{1i}}{1 - S_{1i} S_{2i}}, \quad i \in I_0, \ j \in I_2, \tag{6.6}$$

де S_{1i}, S_{2i} визначені в (6.1) – (6.2). Таким чином, за формулами (6.5) – (6.6) можна обчислити елементи рядків I_0 матриці P.

Зауваження 1. Для елементів p_{ij}, $i \in I_0$, $j \in I_0$, формули (6.5) – (6.6) мають давати однаковий результат, тобто фрагменти P^{I_1} й P^{I_2} не є незалеж-ними:

$$p_{ij}^{I_1}\left(1-S_{2i}\right)=p_{ij}^{I_2}\left(1-S_{1i}\right),\ i\in I_0,\ j\in I_0. \tag{6.7}$$

Це означає, що ij-й елемент достатньо задати тільки в одному із фрагментів $P^{I_1}, P^{I_2}, i\in I_0,\ j\in I_0$ (блоки $I_0\times I_0$ матриць P^{I_1} і P^{I_2} можуть бути відомі не повністю). Фрагменти P^{I_1} й P^{I_2} будуть незалежними тоді й тільки тоді, коли множина $I_0=I_1\bigcap I_2$ містить усього один елемент. У цьому випадку умова узгодження (6.7) завжди виконуватиметься.

Зауваження 2. У визначенні елементів рядків I_0 матриці P брали участь тільки елементи рядків I_0 фрагментів P^{I_1} і P^{I_2}, причому для знаходження i-го рядка матриці P використовуються елементи того ж рядка фрагментів P^{I_1} і P^{I_2}.

Зауваження 3. Якщо $I_1\bigcup I_2=I_3\neq I$, то, провівши аналогічні міркування, за формулами (6.5) – (6.6) знайдемо елементи рядків I_0 матриці P^{I_3}.

Лема 6.1. Якщо $I_2\subset I_1$, то за матрицею P^{I_1} можна знайти P^{I_2}.

Доведення.

Елементи фрагмента P^{I_1} отримано з P так:

$$p_{ij}^{I_1}=\frac{p_{ij}}{1-S_i},\ \ i,j\in I_1,$$

де $S_i=\sum\limits_{k\in I\setminus I_1} p_{ik}, i\in I_1.$

Позначимо $S_i'=\sum\limits_{k\in I_1\setminus I_2} p_{ik}^{I_1}=\sum\limits_{k\in I_1\setminus I_2}\frac{p_{ik}}{1-S_i}.$

Тепер для кожного $i,j\in I_2$ розглянемо відношення

$$\frac{p_{ij}^{I_1}}{1-S_i'}=\frac{\dfrac{p_{ij}}{1-S_i}}{1-\dfrac{\sum\limits_{k\in I_1\setminus I_2} p_{ik}}{1-S_1}}=\frac{p_{ij}}{1-S_i-\sum\limits_{k\in I_1\setminus I_2} p_{ik}}=\frac{p_{ij}}{1-\sum\limits_{k\in I\setminus I_1} p_{ik}-\sum\limits_{k\in I_1\setminus I_2} p_{ik}}.$$

Оскільки $I_2\subset I_1\subset I$, те$\left(I\setminus I_1\right)\bigcup\left(I_1\setminus I_2\right)=I\setminus I_2$, тоді

$$\sum_{k\in I\setminus I_1} p_{ik} + \sum_{k\in I_1\setminus I_2} p_{ik} = \sum_{k\in I\setminus I_2} p_{ik}.$$

Отже, $\dfrac{p_{ij}^{I_1}}{1-S_i'} = p_{ij}^{I_2}$, що й було потрібно довести.

Відзначимо, що в знаходженні елементів матриці P^{I_1} беруть участь тільки елементи рядків I_1 матриці P^{I_2}.

6.3 Необхідні й достатні умови синтезу

Нехай дані множини станів $I_1, I_2, \ldots, I_m$. Позначимо через I_Σ їх об'єднання: $I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$. Введемо множину

$$B_k = \{i : k \in I_i, 1 \le i \le m\}. \tag{6.8}$$

У цій множині містяться номери i тих множин I_i, які мають індекс k (тобто номери тих фрагментів, які містять стан k).

Лема 6.2. Якщо для кожної пари станів i, j існує фрагмент I_r, що містить їх одночасно, $\forall i, j \in I_\Sigma\ \exists r : i, j \in I_r$, $1 \le r \le m$, і, крім того, $I_r \ne I_\Sigma$, $r = 1, 2, \ldots m$, то кожна з множин B_k, $k \in I_\Sigma$, містить не менше двох елементів.

Доведення.

Оскільки $k \in I_\Sigma$, то існує деяка множина I_r, що містить k. Тоді $r \in B_k$. Оскільки $I_r \ne I_\Sigma$, то існують стан j із множини $I_\Sigma \setminus I_r$, а також фрагмент I_s, що містить стани j і k одночасно: $\exists j \in I_\Sigma \setminus I_r\ \exists s : j, k \in I_s$.

Отже, множина B_k містить також і елемент s.

Лему доведено.

Нехай умови леми виконані, і множина B_k містить не менше двох елементів. Тоді існує його власна підмножина A_k:

$$A_k \subset B_k, \quad A_k \ne B_k, \quad A_k \ne \varnothing. \tag{6.9}$$

При зроблених у лемі припущеннях вона існує, оскільки B_k містить не менше двох елементів. Розглянемо об'єднання множин $\bigcup\limits_{i \in A_k} I_i$, в яке входитимуть ті множини I_i, номери i яких є в множині A_k. Відзначимо, що кожна з множин, що потрапили в об'єднання, містить, принаймні, елемент k. Те ж саме справедливо й для об'єднання множин виду $\bigcup\limits_{i \in B_k \setminus A_k} I_i$. Тоді їх переріз

$$M_{A_k} = \left(\bigcup_{i \in A_k} I_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in B_k \setminus A_k} I_i \right). \qquad (6.10)$$

також міститиме елемент k.

Знайдемо необхідні й достатні умови того, що за фрагментами $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$ можна виконати синтез матриці P^{I_Σ}, де $I_\Sigma = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$.

Припускатимемо, що $I_r \neq I_\Sigma$, $r = 1, 2, \ldots m$, тобто жоден фрагмент не співпадає з шуканою матрицею, інакше задача виявиться вже розв'язаною.

Теорема 6.1. Нехай $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m = I_\Sigma$. Для того, щоб за фрагментами $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$ можна було виконати синтез матриці P^{I_Σ}, необхідне й достатнє виконання таких умов:

1) будь-які два фрагменти, що перетинаються (у тому числі будь-які фрагменти, які виникають із вихідних шляхом синтезу), мають погоджуватися, тобто для них має виконуватися умова узгодження (б.7);

2) кожен ij-й елемент відновлюваної матриці P^{I_Σ} має знаходитися хоча б в одному із фрагментів $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$: $\forall i, j \in I_\Sigma \ \ \exists k : i, j \in I_k$, $1 \le k \le m$;

3) у перерізі фрагментів має знаходитися хоча б один ненульовий елемент: $\forall k \in I_\Sigma \forall A_k \subset B_k \ \exists j \in M_{A_k} \ \ p_{kj}^{I_r} > 0, r \in B_k$, де A_k, B_k визначені в (6.9) –(6.8).

Доведення.

Необхідність.

1. Необхідність першої умови очевидна. Як було показано вище, фрагменти, взагалі кажучи, не є незалежними.

2. Умову 2 доведемо від протилежного.

Припустимо, що $\exists r, s \in I_\Sigma \forall I_k \ r \notin I_k \vee s \notin I_k$. Позначимо $I_0 = \{r, s\}$.

Введемо довільну стохастичну матрицю

$$P^{I_0} = \begin{bmatrix} p_{rr}^{I_0} & p_{rs}^{I_0} \\ p_{sr}^{I_0} & p_{ss}^{I_0} \end{bmatrix}.$$

Умова узгодження виконується для будь-якого фрагмента P^{I_0}, оскільки переріз I_0 з будь-якою іншою множиною з набору $I_1, I_2, \ldots, I_m$ матиме не більше одного елемента. З іншого боку, фіксованій матриці P^{I_Σ} відповідає єдина матриця P^{I_0}. Отже, припущення неправильне, і умова 2 теореми є необхідною.

3. Умову 3 доведемо від протилежного. Припустимо, синтез виконати можна, але умова 3 не виконується, тобто

$$\exists k \in I_\Sigma \ \exists A_k \subset B_k \ \forall j \in M_{A_k} \ p_{kj}^{I_r} = 0, r \in B_k.$$

Позначимо $M = \bigcup\limits_{i \in A_k} I_i,\ N = \bigcup\limits_{i \in B_k \setminus A_k} I_i,\ M \bigcap N = M_{A_k}$.

Тоді елементи k-го рядка матриці P^{I_Σ} мають вигляд:

$$p_{kj}^{I_\Sigma} = \alpha p_{kj}^{M},\ j \in M,$$

$$p_{kj}^{I_\Sigma} = (1 - \alpha)\, p_{kj}^{N},\ j \in N,$$

де α – будь-яке число з відрізка $[0;1]$. Таким чином, однозначно визначити k-й рядок матриці P^{I_Σ} не вдається. Отримане протиріччя доводить необхідність 3-ї умови.

Достатність.

Знайдемо k-й рядок матриці P^{I_Σ}. Множина B_k, через умову 2 теореми й леми, містить не менше двох елементів. Візьмемо $r \in B_k$ й розглянемо множину

$$M_1 = I_r \bigcap \left(\bigcup_{i \in B_k \setminus \{r\}} I_i \right).$$

Відповідно до умови 3, існує $p_{kj}^{I_s} > 0,\ j \in M_1,\ s \in B_k \setminus \{r\}$.

Оскільки $k \in I_r \bigcap I_s$, то ми можемо визначити k-й рядок матриці $P^{I_r \bigcup I_s}$ за формулами (6.5) – (6.6).

Якщо $I_r \bigcup I_s \neq I_{\sum}$, то $\{r, s\}$ є власною підмножиною множини B_k, оскільки існує $j \in I_{\sum} \setminus (I_r \bigcup I_s)$ та, в силу умови 2, існує множина $I_t : k, j \in I_t$.

Тоді $t \in B_k, t \neq r, t \neq s$.

Розглянемо множину

$$M_2 = (I_r \bigcup I_s) \bigcap \left(\bigcup_{i \in B_k \setminus \{r, s\}} I_i \right).$$

Відповідно до умови 3, існує $p_{kj}^{I_q} > 0,\ j \in M_2,\ q \in B_k \setminus \{r, s\}$.

Оскільки $k \in (I_r \bigcup I_s) \bigcap I_q$, то ми можемо визначити k-й рядок матриці $P^{I_r \bigcup I_s \bigcup I_q}$ за формулами (6.5) – (6.6).

Продовжуємо ці дії доти, доки не виявиться $I_r \bigcup I_s \bigcup \ldots = I_{\sum}$. Це означатиме, що ми повністю знайшли k-й рядок матриці $P^{I\Sigma}$. Аналогічним чином знайдемо й інші рядки.

Доведення завершене.

Відзначимо, що доведення достатності дає метод синтезу матриці $P^{I\Sigma}$ за її фрагментами.

Пояснимо умови теореми.

Підкреслимо, що умова 1 теореми поширюється й на будь-які фрагменти, які виникають протягом синтезу. Узгодженості одних лише вихідних фрагментів виявляється недостатньо, що показує наступний приклад, запропонований Олександром Лобасом (рис. 6.2). Порожні клітинки означають, що даний стан не ввійшов в розглянутий фрагмент.

	1	2	3	4
1	0,5	0,2		0,3
2	0,4	0,3		0,3
3				
4	0,75	0,25		0

а)

	1	2	3	4
1	0,1		0,8	0,1
2				
3	0,3		0,3	0,4
4	0,25		0,75	0

б)

	1	2	3	4
1				
2		0,5	0,2	0,3
3		0,3	0,3	0,4
4		0,75	0,25	0

в)

Рисунок 6.2 – Фрагменти марковського процесу, що містять стани:
а) $I_1 = \{1,2,4\}$; б) $I_2 = \{1,3,4\}$; в) $I_3 = \{2,3,4\}$

Спробуємо відновити елементи рядка 4. Нескладно перевірити, що умови 2 і 3 для нього виконуються: система фрагментів повністю покриває рядок 4, і в перерізі фрагментів є відмінні від нуля елементи. Попарна узгодженість також має місце. Водночас синтез фрагментів P^{I_1} і P^{I_2} дає четвертий рядок у вигляді (0,231 0,077 0,692 0), який вже не буде узгодженим із фрагментом P^{I_3}.

Умова 2 говорить про те, що кожен ij-й елемент має знаходитися хоча б в одному із фрагментів $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$, інакше кажучи, система фрагментів має повністю покривати синтезовану матрицю. В попередньому прикладі (рис. 6.2) система фрагментів повністю покривала матрицю – будь-яка клітинка ij належить хоча б одному із фрагментів. У наступному ж прикладі (рис. 6.3) перший елемент четвертого рядка й четвертий елемент першого рядка не містяться в жодному із фрагментів. Через це вдається провести лише синтез рядків 2 і 3, рядки ж 1 і 4 матриці $P^{I_1 \cup I_2}$ не відновлюються.

	1	2	3	4
1	0,75	0	0,25	
2	0,3	0,3	0,4	
3	0,5	0,3	0,2	
4				

а)

	1	2	3	4
1				
2		0,15	0,2	0,65
3		0,45	0,3	0,25
4		0,4	0,4	0,2

б)

Рисунок 6.3 – Фрагменти марковського процесу, що містять стани:
а) $I_1 = \{1,2,3\}$; б) $I_2 = \{2,3,4\}$

	1	2	3	4
1	0,3	0,2	0,5	
2	0,3	0,3	0,4	
3	0,75	0,25	0	
4				

а)

	1	2	3	4
1				
2				
3			0	1
4			0,4	0,6

б)

Рисунок 6.4 – Фрагменти, що містять стани:
а) $I_1 = \{1,2,3\}$; б) $I_2 = \{3,4\}$

Умова 3 теореми пов'язана з тим, що в перерізі фрагментів мають існувати відмінні від нуля елементи. Невиконання цієї умови ілюструє такий приклад (рис. 6.4).

Об'єднання фрагментів P^{I_1} і P^{I_2} не дає можливості однозначно відновити рядок 3 фрагменти $P^{I_1 \cup I_2}$ через те, що P^{I_1} й P^{I_2} перетинаються нульовим елементом.

Наслідок. Для того, щоб за фрагментами $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$ можна було зробити синтез матриці P, необхідно й достатньо, щоб виконувалися всі умови доведеної вище теореми й $I_{\sum} = \{1,2,\ldots,n\}$.

6.4 Невиконання умови узгодження фрагментів

Розглянемо докладніше випадок, коли умова 1 теореми про необхідні й достатні умови синтезу не виконується, а умови 2, 3 виконуються. Це можливо в тому випадку, коли у фрагменти $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots, P^{I_m}$ були внесені помилки, пов'язані, наприклад, з похибками вимірів. Шукатимемо таку матрицю P, яка б у деякому сенсі мінімально відхилялася від своїх фрагментів.

Знайдемо k-й рядок матриці P. В подальшому опускатимемо індекс рядка k й позначатимемо

$x_j = p_{kj}$ – шукані елементи k-го рядка матриці P;

$p_j^{I_i} = p_{kj}^{I_i}$ – задані елементи k-го рядка фрагмента P^{I_i}.

Введемо множину $B_{kj} = B_k \cap B_j = \{i : k, j \in I_i, 1 \le i \le m\}$. Ця множина містить номери i тих множин I_i, які містять у собі індекси k, j одночасно.

Зазначимо, що умова 2 теореми еквівалентна тому, що $B_{kj} \neq \varnothing$ для будь-яких $k, j \in I_{\sum}$.

Якби умова узгодження виконувалася, то елементи k-го рядка i-го фрагмента були б пропорційні відповідним елементам k-го рядка вихідної матриці:

$$x_j = \beta_i p_j^{I_i}, \ i \in B_{kj}, \ \ j = 1, 2, \ldots n,$$

де

$$\beta_i = \sum_{j \in I_i} x_j, i \in B_k.$$

Шукатимемо такі x_j, сума квадратів відхилень яких від величин $\beta_i p_j^{I_i}$ була б мінімальною.

Це призводить до задачі мінімізації:

$$y(x, \beta) = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i} \left(x_j - \beta_i p_j^{I_i} \right)^2 \to \min_{x, \beta}; \tag{6.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1; \tag{6.12}$$

$$\sum_{j \in I_i} x_j = \beta_i, \ i \in B_k; \tag{6.13}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.14}$$

Це є задача квадратичного програмування. Вона має єдиний розв'язок, який завжди можна знайти. Цільова функція (6.11) за обмежень (6.12) – (6.14) має єдиний і притому глобальний мінімум. Функція (6.11) невід'ємна при будь-якому значенні x_j. Очевидно, що у випадку, коли умова узгодження виконується, розв'язок задачі мінімізації x^* співпадатиме з розв'язком x^{**}, знайденим за методом, наведеним в доведенні теореми. Дійсно, x^{**} перетворює цільову функцію (6.11) у нуль, що є, в силу властивостей цільової функції, глобальним мінімумом.

У задачі (6.11) – (6.14) тимчасово заберемо умову (6.14): $x_j \geq 0$. Вона буде виконуватиметься в більшості випадків. Тоді отримана задача матиме обмеження тільки у вигляді рівностей і для (6.11) – (6.13) можемо записати функцію Лагранжа:

$$L(x,\beta,\lambda,\mu) = \sum_{i\in B_k}\sum_{j\in I_i}\left(x_j - \beta_i p_j^{I_i}\right)^2 + \lambda\sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{i\in B_k}\mu_i\left(\beta_i - \sum_{j\in I_i} x_j\right) \to \min_{x,\beta}.$$

Необхідною умовою екстремуму є рівність нулю частинних похідних за x, β від функції Лагранжа L:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 2\sum_{i\in B_{kj}}\left(x_j - \beta_i p_j^{I_i}\right) + \lambda - \sum_{i\in B_{kj}}\mu_i = 0,\ j = 1,2,\ldots,n;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_i} = -2\sum_{j\in I_i} p_j^{I_i}\left(x_j - \beta_i p_j^{I_i}\right) + \mu_i = 0,\ i \in B_k.$$

Позначимо через $\left|B_{kj}\right|$ – кількість елементів, що знаходяться в множині B_{kj}, і отримаємо систему лінійних рівнянь відносно x, β, λ, μ.

$$x_j\left|B_{kj}\right| - \sum_{i\in B_{kj}} p_j^{I_i}\beta_i + \sum_{i\in B_{kj}}\mu_i + \lambda = 0,\ \ j = 1,2,\ldots,n; \tag{6.15}$$

$$\sum_{j\in I_i} p_j^{I_i} x_j - \sum_{j\in I_i}\left(p_j^{I_i}\right)^2\beta_i - \mu_i = 0,\ i \in B_k; \tag{6.16}$$

$$\sum_{j\in I_i} x_j - \beta_i = 0,\ i \in B_k; \tag{6.17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{6.18}$$

Це є необхідна умова мінімуму; вона ж є й достатньою через опуклість цільової функції й обмежень. Скоротимо кількість рівнянь. Виразимо β_i з (6.17) і підставимо в (6.15):

$$x_j \left|B_{kj}\right| - \sum_{i \in B_{kj}} p_j^{I_i} \sum_{m \in I_i} x_m + \sum_{i \in B_{kj}} \mu_i + \lambda = 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.19}$$

Тепер підставимо β_i в (6.16)

$$\sum_{j \in I_i} p_j^{I_i} x_j - \sum_{j \in I_i} \left(p_j^{I_i}\right)^2 \sum_{m \in I_i} x_m - \mu_i = \sum_{j \in I_i} x_j \left(p_j^{I_i} - \sum_{m \in I_i} \left(p_m^{I_i}\right)^2 \right) - \mu_i = 0.$$

З отриманого співвідношення виразимо μ_i й підставимо в (6.19):

$$x_j \left|B_{kj}\right| - \sum_{i \in B_{kj}} p_j^{I_i} \sum_{m \in I_i} x_m + \sum_{i \in B_{kj}} \sum_{r \in I_i} x_r \left(p_r^{I_i} - \sum_{m \in I_i} \left(p_m^{I_i}\right)^2 \right) + \lambda =$$

$$= x_j \left|B_{kj}\right| - \sum_{i \in B_{kj}} \left[p_j^{I_i} \sum_{r \in I_i} x_r + \sum_{r \in I_i} x_r \left(p_r^{I_i} - \sum_{m \in I_i} \left(p_m^{I_i}\right)^2 \right) \right] + \lambda = 0.$$

Остаточно отримаємо систему $(n+1)$ лінійних рівнянь відносно $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$:

$$x_j \left|B_{kj}\right| - \sum_{i \in B_{kj}} \sum_{r \in I_i} x_r \left(p_j^{I_i} + p_r^{I_i} - \sum_{m \in I_i} \left(p_m^{I_i}\right)^2 \right) + \lambda = 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, n; \tag{6.20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{6.21}$$

Якщо виконуватимуться умови 2, 3 теореми про необхідні й достатні умови синтезу, то, розв'язавши систему, знайдемо елементи k-го рядка матриці P. Якщо ж хоча б одна з цих умов не виконуватиметься, то однозначно відновити k-й рядок буде неможливо, і система матиме нескінченно багато розв'язків. Таким чином, отримана система рівнянь матиме єдине розв'язання тоді й тільки тоді, коли виконуватимуться умови 2, 3 теореми.

Оцінимо складність обчислень. Для синтезу матриці розмірності $n \times n$

необхідно розв'язати n лінійних систем розмірності $n \times n$. Розв'язок шукаємо методом Гаусса, складність якого має порядок n^3. Таким чином, загальний час обчислень зростає пропорційно n^4.

В більшості випадків розв'язок системи рівнянь (6.20) – (6.21) даватиме розв'язок задачі (6.11) – (6.14), тобто нерівність (6.14) виконуватиметься. Може, однак, виявитися, що ми отримаємо деякі $x_j < 0$. Тоді застосовуватимемо загальний підхід до розв'язку задачі (6.11) – (6.14). Для розв'язку можуть використовуватися такі методи умовної оптимізації, як метод Келі, штрафних функцій, проекцій градієнта, модифікованих функцій Лагранжа [145], але через квадратичність функції цілі й лінійності обмежень, доцільно застосовувати спеціальні методи розв'язку задач квадратичного програмування [69, 145]. Для знаходження оптимального розв'язку задачі квадратичного програмування застосовуватимемо диференціальний алгоритм [69], що є модифікацією методу покоординатного спуску. Інший підхід, заснований на розв'язку двоїстої задачі, наведений в [145]. Однак, його недоліком є більш складна організація обчислень.

Нехай x_q – залежна змінна, а x_r – незалежні змінні $\left(r = 1, 2, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n\right)$.

Тоді з (6.12) маємо

$$x_q = 1 - \sum_{r \neq q} x_r.$$

Запишемо частинні похідні мінімізувальної функції $y\left(x, \beta\right)$ за незалежними змінними x_r, розглядаючи їх як похідні складної функції $y\left(x, x_q\left(x\right), \beta\left(x\right)\right)$, де $x = \left(x_1, \ldots, x_{q-1}, x_{q+1}, \ldots x_n\right)$ – вектор незалежних змінних. При цьому врахуємо, що

$$\partial x_q / \partial x_r = -1,$$

$$\partial \beta_i / \partial x_r = \begin{cases} 1, & i \in B_{kr}; \\ 0, & i \notin B_{kr}. \end{cases}$$

Тоді умовні похідні [69] матимуть вигляд:

$$\delta y / \delta x_r = \partial y / \partial x_r + \sum_{i=1}^{m} \left(\partial y / \partial \beta_i\right)\left(\partial \beta_i / \partial x_r\right) + \left(\partial y / \partial x_q\right)\left(\partial x_q / \partial x_r\right);$$

$$\delta y / \delta x_r = \partial y / \partial x_r + \sum_{i \in B_{kr}} \partial y / \partial \beta_i - \partial y / \partial x_q, \ r \neq q. \qquad (6.22)$$

Аналогічно, можемо отримати співвідношення для другої умовної похідної $(r \neq q)$:

$$\delta^2 y / \delta x_r^2 = 2|B_{kr}| - 2 \sum_{i \in B_{kr}} \left(2 p_r^{I_i} - \sum_{j \in I_i} \left(p_j^{I_i} \right)^2 \right) + 4 \sum_{i \in B_{kr}} p_q^{I_i} + 2|B_{kq}|.$$

В [69] показано, що необхідною умовою мінімуму для задачі (6.11) – (6.14) є рівність нулю умовних похідних (6.22) за додатними незалежними змінними (умова Куна-Такера):

$$\partial y / \partial x_r = 0, \text{ якщо } x_r > 0, r \neq q,$$

$$\partial y / \partial x_r \geq 0, \text{ якщо } x_r = 0, r \neq q.$$

Крім того, через опуклість цільової функції й області обмежень, для будь-якого допустимого розв'язку необхідні умови будуть також і достатніми. Це означає, що якщо виконується умова Куна-Такера й $x_q \geq 0$, то отриманий розв'язок x є оптимальним.

Диференціальний алгоритм відноситься до ітераційних методів і полягає в тому, що на k-му кроці змінюється тільки одна з незалежних змінних:

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \Delta x_r^{(k)},$$

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}, \ j \neq r, i \neq q.$$

Причому значення $\Delta x_r^{(k)}$ вибирається з аналізу умов Куна-Такера. Порушення цих умов у точці $x^{(k)}$ відбуватиметься за двома причинами:

1) якщо $(\delta y / \delta x_r)^{(k)} > 0, \ x_r > 0,$

то вважатимемо $\Delta x_r^{(k)} = \max\left\{ -x_r ; -(\delta y / \delta x_r)^{(k)} / \left(\delta^2 y / \delta x_r^2 \right)^{(k)} \right\};$

2) якщо $\left(\delta y / \delta x_r\right)^{(k)} < 0$,

то вважатимемо $\Delta x_r^{(k)} = \min\left\{x_q; -\left(\delta y / \delta x_r\right)^{(k)} / \left(\delta^2 y / \delta x_r^2\right)^{(k)}\right\}$.

Обчислюємо нові значення незалежної й залежної змінних:

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \Delta x_r^{(k)},$$

$$x_q^{(k+1)} = x_q^{(k)} - \Delta x_r^{(k)}.$$

Якщо значення $\Delta x_r^{(k)}$ вибиралося з міркувань перетворення до нуля незалежної змінної x_r або умовної похідної за нею, то система залежних і незалежних змінних залишається попередньою, у протилежому випадку незалежна змінна x_r й залежна x_q міняються ролями. Після цього переходимо до $(k+1)$ ітерації. Алгоритм завершується, якщо умови Куна-Такера виконані, або після якогось наперед заданого числа ітерацій (в [69] наведено приклади, коли застосування даного алгоритму призводить до послідовності точок $x^{(k)}$, що асимптотично наближується до оптимального розв'язку x^*, але не досягає його). Як правило, умови Куна-Такера виконуються через скінченне число кроків. Перевагою методу є й те, що всі точки послідовності $x^{(k)}$ належать області допустимих розв'язків.

Таким чином, для розв'язку задачі (6.11) – (6.14) ми спочатку розв'язуємо систему лінійних рівнянь (6.20) – (6.21) і, якщо отриманий розв'язок не є допустимим, то вважаємо від'ємні елементи рівними нулю:

$$x_r' = x_r \text{, якщо } x_r \geq 0, r = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_r' = 0 \text{, якщо } x_r < 0, r = 1, 2, \ldots, n.$$

А потім застосовуємо диференціальний алгоритм квадратичного програмування, беручи як початкова точка $x^{(0)}$:

$$x_r^{(0)} = \frac{x'_r}{\sum\limits_{j=1}^{n} x'_j},\ r = 1, 2, \dots, n.$$

Ми не застосовуємо алгоритм квадратичного програмування відразу, оскільки, як правило, оптимальний допустимий розв'язок вдається знайти з лінійної системи (6.20) – (6.21).

6.5 Вірогідність синтезованої матриці

Після того, як знайдений розв'язок x_j, $j = 1, 2, \dots, n$, виникає питання про те, наскільки істотним є відмінність від нуля цільової функції (6.11), інакше кажучи, чи є насправді стохастичні матриці $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$ фрагментами деякого марковського процесу чи ні. Адже розв'язок задачі (6.11) – (6.14) можна знайти для будь-яких вихідних даних $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$, що не обов'язково є фрагментами деякого марковського процесу. Для відповіді на це запитання побудуємо статистичний критерій.

Нехай спостережувані значення фрагментів $p_j^{I_i}$, що підставляються в задачу мінімізації (6.11) – (6.14), є реалізацією нормально розподілених випадкових величин $\xi_j^{I_i}$ з невідомим математичним сподіванням $a_j^{I_i} = M\xi_j^{I_i}$ і відомою дисперсією $\left(\sigma_j^{I_i}\right)^2$. Припускатимемо також, що наші спостереження незміщені: величини $a_j^{I_i}$ співпадають зі справжніми значеннями відповідних елементів стохастичних матриць фрагментів.

Висунемо гіпотезу, яка полягає в тому, що спостережувані нами значення $p_j^{I_i}$ є реалізаціями елементів матриць P^{I_i}, які є фрагментами деякого марковського процесу P. Перевіримо цю гіпотезу. Розглянемо випадкові величини

$$\zeta_{ij} = \left(\frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right) / \sigma_j^{I_i}.$$

Випадкові величини ζ_{ij} нормально розподілені. Знайдемо їхні математичні сподівання й дисперсії.

$$M\zeta_{ij} = \left(\frac{p_j}{\beta_i} - a_j^{I_i} \right) / \sigma_j^{I_i}.$$

Відмітимо, що $\frac{p_j^{I_i}}{\beta_i} - a_j^{I_i} = 0$, оскільки підстановка $a_j^{I_i}$ в задачу мінімізації (6.11) – (6.14) дає розв'язок p_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, причому $y(p, \beta, a) = 0$ через те, що $a_j^{I_i}$ – точні значення фрагментів. Рівність $y(p, \beta, a) = 0$ досягається тоді й тільки тоді, коли

$$p_j - \beta_i a_j^{I_i} = 0,\ j \in I_i,\ i \in B_k.$$

Отже, $M\zeta_{ij} = 0$. Дисперсія ζ_{ij} дорівнює $D\zeta_{ij} = 1$.

Позначимо через m_i кількість елементів, що містяться в множині I_i й розглянемо питання про незалежність випадкових величин ζ_{ij}. Величини ζ_{ij} і ζ_{kl} є незалежними при $i \neq k$, оскільки належать різним фрагментам. Серед випадкових величин ζ_{ij}, $j \in I_i$, що належать одному фрагменту I_i тільки $m_i - 1$ випадкових величин будуть незалежними. Дійсно, для кожного рядка стохастичної матриці фрагмента виконується рівність

$$\sum_{j \in I_i} \xi_j^{I_i} = 1,\ i \in B_k,$$

а, отже, і величини ζ_{ij} також будуть лінійно залежними. З кожного набору ζ_{ij}, $j \in I_i$, викинемо елемент ζ_{ir_i}, щоб члени, які залишилися, були незалежними, і побудуємо суму:

$$\eta = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i \setminus \{r_i\}} \zeta_{ij}^2. \qquad (6.23)$$

Ми маємо справу із сумою незалежних нормально розподілених випадкових величин з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією. В цьому випадку побудована нами випадкова величина η має χ^2 розподіл зі $N-1$ ступенями свободи [123], де N – число доданків у сумі (6.23):

$$N = \sum_{i \in B_k} (m_i - 1).$$

Таким чином, слідуючи наведеному вище алгоритму, ми зможемо знайти критичне значення $\chi_{кр}^2$, що відповідає розподілу χ^2 з $N-1$ ступенями свободи й обраній довірчій ймовірності p_0, і, порівнявши його зі значенням, обчисленим за формулою (6.23), перевірити гіпотезу про те, що спостережувані нами величини є фрагментами деякого марковського процесу. Якщо $\eta < \chi^2$, то висунута гіпотеза приймається. Якщо ж $\eta \geq \chi^2$, то гіпотеза відхиляється. Це говорить про те, що, або ζ_{ij} не є елементами фрагментів деякого марковського процесу, або похибки спостережень занадто великі.

Приклади обробки конкретних даних наведено в додатку А. В 1-му прикладі ілюструється випадок, коли не виконується умова 1 (умова узгодження) теореми про необхідні й достатні умови синтезу. Для цього у вихідні дані вносилися нормально розподілені помилки з нульовим математичним сподіванням і дисперсією $\sigma^2 = 0{,}01$. Значення функції цілі склало $F = 0{,}0004$. Перевірка гіпотези про те, чи є вихідні дані фрагментами деякого марковського процесу, показала, що для обраної довірчої ймовірності $p = 0{,}95$ експериментальні дані не суперечать висунутій гіпотезі.

На прикладі 2 показано випадок невиконання умов 2 і 3 теореми про необхідні й достатні умови синтезу. Для рядків 1, 6 не виконувалася 2-а умова – не було повної інформації з усіх станів (за наявними даними, наприклад, для рядка 1 можна відновити лише відповідний рядок фрагмента $\{1, 2, ... 5\}$). Для рядків 3,4 не виконувалася 3-я умова теореми – система фрагментів виявилася недостатньою для проведення синтезу. В результаті вдалося успішно відновити тільки рядки 2, 5 синтезовані матриці P.

В прикладі 3 розглянуто випадок виконання необхідних і достатніх умов синтезу. Розв'язок задачі мінімізації, отриманий з лінійної системи, дає те саме значення, що й безпосереднє застосування методу, викладеного в доведенні теореми. Це видно з того, що цільова функція $F = 0$. В цьому також можна переконатися безпосереднім розкладанням синтезованої матриці на фрагменти.

6.6 Синтез процесу зі зліченим числом станів

Запропонований вище підхід до синтезу марковського процесу за фрагментами застосуємо й для випадку зліченого числа станів. Припускатимемо, що фрагменти можуть містити злічене число станів, і що для кожного рядка сума рядка з її елементів дорівнює 1. Якщо виконані всі умови теореми про необхідні й достатні умови синтезу, то ми можемо провести синтез всієї матриці (можливо, за злічене число кроків), застосовуючи алгоритм, описаний вище. При цьому кінцевий фрагмент ми можемо отримати за скінченне число кроків.

Послідовність елементів, що знаходяться на тому самому місці фрагментів, «що розширюються», (послідовність $p_{ij}^{I_1}, p_{ij}^{I_1 \cup I_2}, p_{ij}^{I_1 \cup I_2 \cup I_3} \ldots$) завжди збігається до деякої границі p_{ij}^{∞}, оскільки ця послідовність монотонно не зростає (при синтезі елементи не зростають) і обмежена знизу $\left(p_{ij} \geq 0 \right)$.

Припустимо, стан i міститься у зліченій множині фрагментів. Відновимо елементи i-го рядка стохастичної матриці, що відповідає всьому процесу.

Якщо виконуються всі умови теореми про необхідні й достатні умови синтезу, то, використовуючи метод, наведений у її доведенні, можемо побудувати послідовність фрагментів, що розширюються, для кожного ij-го елемента i-го рядка. Відмінність від скінченного випадку полягає в тому, що виникаючі суми будуть нескінченними (це будуть підряди абсолютно збіжних рядів з рівною 1 сумою).

При цьому можливі випадки, коли отримувані граничні значення p_{ij}^{∞} не даватимуть розв'язок. Наприклад, i-й рядок може мати вигляд

$$p_i^{\{1,2,\ldots,n\}} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right).$$

Такий рядок можна отримати при синтезі фрагментів скінченної розмірності, в яких елементи i -го рядка однакові:

$$p_i^k = \left(\frac{1}{|I_k|}, \frac{1}{|I_k|}, \ldots, \frac{1}{|I_k|} \right),$$

де $|I_k|$ – розмірність кінцевого фрагмента. У цьому випадку граничні значення $p_{ij}^{\infty} = 0$ для всіх елементів i -го рядка.

Тому для синтезу марковських процесів зі зліченим числом станів є необхідною наступна додаткова умова.

Якщо в i -му рядку існує скінченна або нескінченна множина елементів, що збігаються до додатних границь

$$\lim_{m \to \infty} p_{ij}^{I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m} = p_{ij}^{\infty} > 0,$$

$$\sum_{j: p_{ij}^{\infty} > 0} p_{ij}^{\infty} = 1,$$

то рядок можна відновити повністю. В протилежному випадку, можна знайти тільки ті елементи, границі яких додатні. При цьому втрачається зміст стохастичності матриці.

Зазначимо, що якщо стан i міститься лише в скінченному числі фрагментів, то i -й рядок синтезованої матриці буде повністю відновленим за скінченне число кроків, а сума його елементів дорівнюватиме 1. Отже, у такій ситуації зазначена вище умова завжди виконуватиметься.

6.7 Марковські процеси в широкому сенсі

Розглянемо марковський процес у широкому змісті, заданий у фазовому просторі $\{X, \mathrm{B}\}$ з імовірностями переходу

$$P(s,x,t,B) = P\{\xi(t) \in B / \xi(s) = x\}, x \in X, B \in \mathrm{B}, s < t,$$

де B – борелівська σ-алгебра [49]. Надалі опускатимемо залежність від s, t і писати $P(x,B)$. Нехай $A, B \in \mathrm{B}$, позначимо $P^A(x,B)$ – імовірність переходу з x

у B за умови, що процес залишається в A:

$$P^{A}(x,B)=P\big(x,B/\xi(t)\in A\big)=\frac{P(x,B\cap A)}{P(x,A)},\ x\in A.$$

Випадковий процес у фазовому просторі $\{A,\mathcal{A}\}$, що описується перехідною функцією $P^{A}(x,B)$, $B\in\mathcal{A}$, називатимемо фрагментом вихідного марковського процесу $P(x,B)$. Відзначимо, що отриманий фрагмент не є марковським процесом, оскільки для нього, загалом кажучи, співвідношення Чепмена-Колмогорова [49] може й не виконуватися. Вивчимо питання про те, у якому випадку вдається провести синтез усього процесу за його фрагментами, тобто відновити (повністю або частково) імовірності переходу $P(x,B)$ у фазовому просторі $\{X,\mathcal{B}\}$. Міркування, що наводяться нижче, спираються на аналогічні, проведені для марковських процесів зі скінченним або зліченим числом станів [10].

Знайдемо стохастичне ядро $P(x,B)$ [50], якщо відомі стохастичні ядра $P^{A_1}(x,B)$ й $P^{A_2}(x,B)$, де

$$A_1\cup A_2=X,\ A_1\cap A_2\neq\varnothing.$$

Введемо позначення

$$S_1=P(x,A_1\setminus A_2)=\int\limits_{A_1\setminus A_2}P(x,dy),$$

$$S_2=P(x,A_2\setminus A_1)=\int\limits_{A_2\setminus A_1}P(x,dy),$$

$$S_1'=P^{A_1}(x,A_1\setminus A_2)=\int\limits_{A_1\setminus A_2}P^{A_1}(x,dy),$$

$$S_2'=P^{A_2}(x,A_2\setminus A_1)=\int\limits_{A_2\setminus A_1}P^{A_2}(x,dy),\ x\in A_1\cap A_2.$$

Тоді

$$P^{A_1}(x,B)=\frac{P(x,B\cap A_1)}{1-P(x,A_2\setminus A_1)}=\frac{P(x,B\cap A_1)}{1-S_2}, \tag{6.24}$$

$$P^{A_2}(x,B)=\frac{P(x,B\cap A_2)}{1-P(x,A_1\setminus A_2)}=\frac{P(x,B\cap A_2)}{1-S_1}. \tag{6.25}$$

Підставляючи замість множини B частинну множину dy, отримаємо

$$P^{A_1}(x,dy)=\frac{P(x,dy)}{1-S_2},\ dy\in A_1;$$

$$P^{A_2}(x,dy)=\frac{P(x,dy)}{1-S_1},\ dy\in A_2.$$

Проінтегрувавши першу рівність за $A_1\setminus A_2$, а другу за $A_2\setminus A_1$, матимемо

$$S_1'=\frac{S_1}{1-S_2},\qquad S_2'=\frac{S_2}{1-S_1}.$$

Виражаючи звідси S_1 й S_2 і підставляючи в (6.24) – (6.25), знаходимо перехідні ймовірності синтезованого процесу:

$$P(x,dy)=P^{A_1}(x,dy)\frac{1-S_2'}{1-S_1'S_2'},\ dy\in A_1,$$

$$P(x,dy)=P^{A_2}(x,dy)\frac{1-S_1'}{1-S_1'S_2'},\ dy\in A_2,$$

$$P(x,B)=P(x,B\cap A_1)+P\big(x,B\cap(A_2\setminus A_1)\big)=$$

$$=\frac{P^{A_1}(x,B\cap A_1)(1-S_2')+P^{A_2}\big(x,B\cap(A_2\setminus A_1)\big)(1-S_1')}{1-S_1'S_2'}. \tag{6.26}$$

Тут $x\in A_1\cap A_2$. Таким чином, ми можемо відновити значення стохастичного ядра для $x \in A_1 \bigcap A_2$. Якщо $A_1 \bigcap A_2 \neq X$, то провівши аналогічні міркування, ми знайдемо значення стохастичного ядра $P^{A_1 \bigcup A_2}(x, B)$.

Відзначимо, що фрагменти P^{A_1}, P^{A_2} не є незалежними – для того, щоб синтезоване стохастичне ядро було відновлене однозначно, необхідним є виконання умови узгодження:

$$P^{A_1}(x, B)(1 - S_2') = P^{A_2}(x, B)(1 - S_1'), \tag{6.27}$$

де $x \in A_1 \bigcap A_2$, $B \subset A_1 \bigcap A_2$.

Далі застосовні всі ті підходи й результати, що й для ланцюгів Маркова зі скінченним або зліченим числом станів, які викладені вище. Нехай є скінченна або злічена система множин: $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ така, що $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_{\sum}$.

Введемо множину

$$V_x = \{i : x \in A_i, i = 1, 2, \ldots, m, \ldots\}. \tag{6.28}$$

У цю множину входять номери фрагментів, що містять точку x. Припускатимемо, що для будь-яких двох точок x, y існує множина A_i, що містить ці точки одночасно. Тоді, як було показано в лемі 2, множина V_x містить не менше двох елементів. Нехай U_x – власна підмножина множини V_x:

$$U_y \subset V_y, U_x \neq V_x, U_x \neq \varnothing. \tag{6.29}$$

При зроблених вище припущеннях вона існує. Позначимо

$$M_{U_x} = \left(\bigcup_{i \in U_x} A_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{i \in V_x \setminus U_x} A_i \right).$$

З визначення випливає, що $y \in M_{U_x}$. Дійсно, якщо виконується (6.29), то кожне об'єднання складається з множин, що містять, принаймні, точку x. Має місце наступна теорема про необхідні й достатні умови синтезу за фрагментами марковського процесу в широкому значенні.

Теорема 6.2. Для того, щоб за фрагментами $P^{A_1}, P^{A_2}, \ldots, P^{A_m}, \ldots$ можна було провести синтез процесу P^{A_Σ}, необхідно й достатньо, щоб:

1) для будь-яких двох фрагментів, що перетинаються, виконувалася умова узгодження: $P^{A_1}(x,B)(1-S_2') = P^{A_2}(x,B)(1-S_1'), x \in A_1 \cap A_2, \; B \subset A_1 \cap A_2$, у тому числі й для будь-яких фрагментів, що виникають під час синтезу;

2) для будь-яких двох точок $x, y \in A_\Sigma$ існувала множина A_k із сукупності $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$, що містить ці точки одночасно;

3) $\forall x \in A_\Sigma \; \forall U_x \subset V_x \int\limits_{y \in M_{U_x}} P^{A_r}(x, dy) > 0, r \in V_x$, де U_x, V_x визначені в (6.28) – (6.29).

Доведення теореми збігається з доведенням для випадку дискретного числа станів, наведеного вище, тільки тепер перехідні ймовірності процесу обчислюються з використанням формули (6.26). При цьому стохастичне ядро вдається синтезувати за скінченне число кроків.

Припустимо, є злічена система фрагментів $P^{A_1}, P^{A_2}, \ldots, P^{A_m}, \ldots$ і $A_\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Якщо виконуються всі умови теореми про необхідні й достатні умови, то ми можемо синтезувати процес зі стохастичним ядром P^{A_Σ} (можливо за злічене число кроків). Послідовність елементів, які знаходяться на тому самому місці «фрагментів, що розширюються», (послідовність $P^{A_1}(x,B), P^{A_1 \cup A_2}(x,B), \ldots$ для будь-яких фіксованих x, B), монотонно не зростає в силу (6.24) і обмежена знизу через невід'ємність імовірності. Отже, існує границя

$$\lim_{m \to B} P^{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}(x,B) = P^{\infty}(x,B).$$

Якщо виникаючі граничні ймовірності відповідають рівності

$$\int\limits_{y \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} P^{\infty}(x, dy) = 1,$$

то ймовірності переходу із точки x вдається відновити повністю. Якщо ж значення інтеграла виявляється меншим одиниці, то порушується закон повної ймовірності й це означає, що фрагменти $P^{A_1}, P^{A_2}, \ldots, P^{A_m}, \ldots$ не є фрагментами того самого процесу, тобто вони не узгоджені.

6.8 Процес блукання на графах

Під час дослідження випадкових процесів часто використовують відповідним чином обрані процеси випадкових блукань на графі [25, 123]. Це є узагальненням процесу випадкового блукання на прямій з деякими точками скидання. Якщо відомі лише розрізнені дані про процес, початкове завдання полягає в тому, щоб за ними відновити процес. При переході до процесу блукань на графі задача полягає у відновленні графа за його підграфами. Часто даних для її розв'язування недостатньо; разом з тим за ними можна знайти деякі важливі характеристики процесу блукань, а, виходить, і відповідні їм характеристики вихідного процесу. В зв'язку з цим виникає задача про відшукання вектора розподілу фінальних імовірностей процесу блукань на графі за деякою системою його підграфів.

Розглянемо процес випадкових блукань частинки на зв'язному графі без циклів (дереві). Розташуємо граф таким чином, щоб його корінь був ліворуч, а гілки йшли зліва направо (рис. 6.5). Припускатимемо, що зміщення частинки відбувається в дискретні моменти часу, які, загалом кажучи, можуть мати точки згущення. На кожному кроці частинка може зміщуватися лише в ті вершини графа, потрапити в які можна, ідучи ребрами тільки вліво або тільки вправо; інакше кажучи, рух не може змінитися на протилежний. Наприклад, з вершини i_4 частка за один крок може перейти у вершини i_1, i_5, i_6, але не може потрапити в i_2 або i_3 (рис. 6.5). Вершина i_1 (корінь дерева) є точкою скидання, тобто з кожної вершини з деякою ймовірністю частинка може потрапити в i_1. Можлива також ситуація, коли деякі інші вершини графа будуть точками скидання. У цьому випадку на кожному кроці частинка з деякою ймовірністю попадатиме в найближчу зліва точку скидання. Наприклад, якщо i_2 – точка скидання, то із i_3 частинка може перейти в i_2, але не може за один крок потрапити в i_1 (рис. 6.5).

Такі блукання являють неоднорідний марковський процес із дискретним часом і числом станів, що дорівнює кількості вершин розглянутого графа.

Занумеруємо вершини графа натуральними числами, і під станом k

розумітимемо знаходження частки у вершині з номером k.

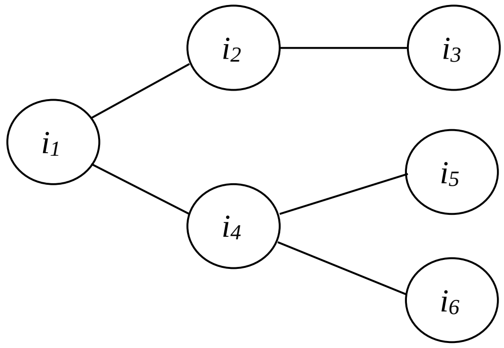


Рисунок 6.5 – Блукання частинки на графі

Спочатку розглянемо випадок, коли з кореня дерева виходить тільки дві гілки. Нехай стан m відповідає кореню дерева. Тоді матриця перехідних імовірностей матиме структуру (6.30). Відзначимо, що якщо за один крок частинка при зміщенні вліво не може пройти далі точки розгалуження (кореня гілки, на якій вона знаходиться), то лівий верхній й правий нижній блоки матриці матимуть ту ж структуру, що й вся матриця (6.30). Така ситуація виникає за наявності кількох точок скидання в графі.

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,m-1} & p_{1,m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m-1,1} & \cdots & p_{m-1,m-1} & p_{m-1,m} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,m-1} & p_{m,m} & p_{m,m+1} & \cdots & p_{m,n} \\ 0 & \cdots & 0 & p_{m+1,m} & p_{m+1,m+1} & \cdots & p_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n,m} & p_{n,m+1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}. \qquad (6.30)$$

Розглянемо окремо верхнє піддерево, що відповідає лівому верхньому блоку матриці P. Для цього поставимо відбиваючі екрани у тих точках нижнього піддерева, в які частинка може потрапити з кореня дерева. Це означає, що замість того, щоб іти на нижнє піддерево, частинка залишатиметься в корені дерева – стані m. Позначимо через I_1 множину, що містить номери вершин, які входять у верхнє піддерево. Марковський процес, що протікає на піддереві, яке складається із множини станів I_1, і отриманий з вихідного шляхом встановлення відбиваючих екранів у тих вершинах дерева, які мають загальне ребро з вершиною піддерева I_1, називатимемо фрагментом вихідного марковського процесу, заданого на всій множині станів I. Нехай $P^{I_1} = \left\| p_{ij}^{I_1} \right\|$ – матриця перехідних імовірностей, $i, j, m \in I_1$.

Очевидно, що

$$p_{ij}^{I_1} = p_{ij}, i, j \in I_1 \setminus \{m\},$$

$$p_{mm}^{I_1} = 1 - \sum_{i \in I_1 \setminus \{m\}} p_{im}^{I_1}.$$

Відповідно до теореми Перона, матриці P й P^{I_1} мають максимальне власне число, що дорівнює 1, і відповідні невід'ємні власні вектори p^* й p^{*I_1}. Якщо пронормувати ці власні вектори, то вони являтимуть фінальні розподіли марковських процесів, що відповідають фрагментам I_1, I_2.

Лема 6.3. Одиничні власні вектори фрагмента P^{I_1} й матриці P пов'язані співвідношенням

$$p_j^{*I_1} = \alpha p_j^*, \; j \in I_1, \alpha = 1 / \sum_{j \in I_1} p_j^*.$$

Доведення. Покажемо, що $p_j^{*I_1}$ є одиничний власний вектор фрагмента P^{I_1}. При $k \neq m$:

$$\sum_{j \in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = \alpha \sum_{j \in I_1} p_j^* p_{jk}.$$

Оскільки $p_{jk} = 0$ при $j \notin I_1, k \in I_1 \setminus m$, то

$$\alpha \sum_{j \in I_1} p_j^* p_{jk} = \sum_{j=1}^{n} p_j^* p_{jk} = \alpha p_k^* = p_j^{*I_1}.$$

При $k = m$ маємо $p_{jm}^{I_1} = 1 - \sum_{k \in I_1 \setminus \{m\}} p_{jk}^{I_1}$. Тоді

$$\sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jm}^{I_1} = \sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1}\left(1-\sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} p_{jk}^{I_1}\right) = \sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} - \sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} \sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} p_{jk}^{I_1} =$$

$$=1-\sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} \sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1}.$$

Як було сказано вище, при $k\in I_1\setminus\{m\}$ має місце рівність:

$$\sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = p_k^{I_1}.$$

Звідси випливає, що $\sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jm}^{I_1} = 1-\sum_{k\in I_1\setminus\{m\}} p_k^{*I_1} = p_m^{*I_1}$.

Таким чином, $\sum_{j\in I_1} p_j^{*I_1} p_{jk}^{I_1} = p_k^{I_1}$, $k\in I_1$, що й *доводить лему*.

Розглянемо *обернену задачу*. Нехай є два фрагменти P^{I_1} й P^{I_2}, $I_1\bigcup I_2=\{1,2,\ldots n\}$ з фінальними розподілами p^{*I_1} й p^{*I_2} відповідно. Відновимо за ними фінальний розподіл усього процесу P в цілому.

$$p_i^* = x\, p_i^{*I_1},\ i\in I_1, \tag{6.31}$$

$$p_i^* = y\, p_i^{*I_1},\ i\in I_2. \tag{6.32}$$

Оскільки $I_1\bigcap I_2=\{m\}$, то $x\, p_i^{*I_1} = y\, p_i^{*I_2}$.

З іншого боку,

$$1=\sum_{i=1}^{n} p_i^* = \sum_{i\in I_1} p_i^* + \sum_{i\in I_2} p_i^* - p_m^* = x\sum_{i\in I_1} p_i^{*I_1} + y\sum_{i\in I_2} p_i^{*I_2} - x p_m^{*I_1} = x+y-x p_m^{*I_1}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, знаходимо

$$x=\frac{p_m^{*I_2}}{p_m^{*I_1}+p_m^{*I_2}-p_m^{*I_1}p_m^{*I_2}},$$

$$y = \frac{p_m^{*I_1}}{p_m^{*I_1} + p_m^{*I_2} - p_m^{*I_1} p_m^{*I_2}}.$$

Звідси за формулами (6.31) – (6.32) можемо знайти фінальний розподіл p^*. Відзначимо, що для розв'язування цієї задачі нам достатньо лише знання одиничних власних векторів, а не фрагментів повністю.

Якщо з кореня дерева виходить k ребер, то ми можемо розбити марковський процес на k фрагментів $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots P^{I_k}$, $I_1 \bigcup I_2 \bigcup \ldots \bigcup I_k = \{1, 2, \ldots n\}$, $I_i \bigcap I_j = \{m\}$, $i \neq j$, де m – номер кореневої вершини графа. Для кожного із фрагментів одиничний власний вектор p^{*I_i} матиме вигляд

$$p_j^{*I_i} = p_j^* / \alpha_i, \ \ j \in I_i,$$

$$\alpha_i = \sum_{j \in I_i} p_j^*, \ \ i = 1, 2, \ldots k.$$

Навпаки, маючи одиничні власні вектори фрагментів $P^{I_1}, P^{I_2}, \ldots P^{I_k}$, можна відновити одиничний власний вектор усього процесу P. Розглядаючи спочатку фрагменти P^{I_1} й P^{I_2}, знаходимо одиничний власний вектор $p^{*I_1 \cup I_2}$, що відповідає об'єднанню фрагментів $P^{I_1 \cup I_2}$. Потім з $p^{*I_1 \cup I_2}$ і p^{*I_3} знаходимо власний вектор $p^{*I_1 \cup I_2 \cup I_3}$ і т.д. Нарешті отримаємо одиничний власний вектор p^* марковського процесу P, що описує блукання частинки по всьому дереву.

Якщо в кожному із фрагментів є збіжність до фінального розподілу за скінченний або нескінченний проміжок часу, то і весь процес характеризуватиметься збіжністю до фінального розподілу ймовірностей.

Відзначимо, що поняття фрагмента для процесів блукання частинки на графі було введено трохи інакше, ніж для марковських процесів загального вигляду, розглянутих вище. Викладений підхід до розбиття процесу на фрагменти, що дає можливість обчислити фінальний розподіл усього процесу за фінальними розподілами його фрагментів, істотно використовував наявність точок скидання в деяких вершинах графах. У загальному випадку встановити зв'язок виду (6.31) – (6.32) між фінальними розподілами виявляється неможливим.

Приклад обчислення фінального розподілу ймовірностей при блуканні на графі за фінальними розподілами на його підграфах наведений у додатку В. Обрано граф з 18 вершин і матриця, що описує ймовірності переходу між ними. Як точка скидання вибрано вершину 10. Всі розрахунки виконано в пакеті Mathcad 8.0.

7 ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Дифузійні процеси становлять клас випадкових процесів, для яких характерні такі властивості: марковість, неперервність траєкторії, існування локальних характеристик – вектора переносу й матриці дифузії. Можна виділити два основних методи теорії дифузійних процесів: аналітичний і ймовірнісний.

Під час дослідження дифузійних процесів у рідинах і газах часто виникає задача про існування стаціонарного розподілу для дифузанта й збіжності до нього. Її аналіз спрощується при заміні неперервного процесу дискретним. Точність такого наближення можна підвищити, збільшуючи число станів. Тоді як модель дифузії зручно вибрати марковський процес зі скінченним числом станів.

7.1 Власний розподіл дифузійного процесу

Розглянемо дифузійний процес, що заданий на відрізку $\left[r_1, r_2\right]$ і має щільності $\varphi\left(x,t\right)$, де $x \in \left[r_1, r_2\right], t \in \left[0, \infty\right)$. Тут r_1, r_2 можуть приймати й нескінченні значення. Припускатимемо, що щільність $\varphi\left(x,t\right)$ відповідає прямим рівнянням Колмогорова [123]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(x,t\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(x,t\right)\varphi\left(x,t\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2\left(x,t\right)\varphi\left(x,t\right)\right], \tag{7.1}$$

де $a\left(x,t\right)$ – коефіцієнт зносу; $\sigma^2\left(x,t\right)$ – коефіцієнт дифузії.

Оскільки дифузія протікає на просторовому відрізку $\left[r_1, r_2\right]$, то природним є припущення про сталість загальної кількості дифузанта в даній області простору:

$$\int_{r_1}^{r_2} \varphi\left(x,t\right)dx = 1,\ t \in \left[0, \infty\right).$$

Позначимо через $\mu\left(t\right)$ загальну кількість дифузанта: $\mu\left(t\right) = \int_{r_1}^{r_2} \varphi\left(x,t\right)dx$.

Оскільки $\mu(0)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\varphi(x,0)dx=1$, то умова $\mu(t)\equiv 1$ є еквівалентною $\frac{\partial\mu}{\partial t}\equiv 0$.
Виходячи із цього, знайдемо відповідні крайові умови.

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dx=\int\limits_{r_1}^{r_2}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\varphi(x,t)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)\right]\right)dx=$$

$$=\left(-a(x,t)\varphi(x,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)\right]\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}. \tag{7.2}$$

Тоді тотожність $\frac{\partial\mu}{\partial t}\equiv 0$ виконуватиметься, якщо задати крайові умови у вигляді

$$\left(-a(x,t)\varphi(x,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)\right]\right)\Bigg|_{x=r_i}=0,\ i=1,2. \tag{7.3}$$

В окремому випадку, при $a(x,t)=0,\ \sigma^2(x,t)=const$, крайові умови (7.3) перетворюються в $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=r_i}=0$, а вихідна задача переходить у задачу теплопровідності.

Нульовим власним розподілом дифузійного процесу називатимемо такий розподіл зі щільністю $\varphi^*(x,t)$, що перетворює рівняння

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\varphi^*(x,t)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(x,t)\varphi^*(x,t)\right]=0 \tag{7.4}$$

у тотожність. Загальний розв'язок рівняння (7.4) запишемо у вигляді:

$$\varphi^*(x,t)=\frac{2}{\sigma^2(x,t)}\frac{1}{R(x,t)}\left[c_1+c_0\int\limits_{r_1}^{x}R(v,t)dv\right].$$

Тут $R(x,t)=\exp\left\{-\int\limits_{r_1}^{x}\frac{2a(z,t)}{\sigma^2(z,t)}dz\right\}$, коефіцієнти c_1, c_0 знаходяться з крайових умов (7.3) або з більш загальних (7.2).

Знайдемо c_0:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)\right]=2\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[c_1+c_0\int\limits_{r_1}^{x}R(v,t)dv\right]\Big/R(x,t)\right)=$$

$$=2c_0-2\frac{R'(x,t)}{R^2(x,t)}\left(c_1+c_0\int\limits_{r_1}^{x}R(v,t)dv\right)=$$

$$=2c_0+\frac{4a(x,t)}{\sigma^2(x,t)}\frac{1}{R(x,t)}\left(c_1+c_0\int\limits_{r_1}^{x}R(v,t)dv\right).$$

Отриманий вираз підставимо в крайову умову:

$$-a(x,t)\varphi(x,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma^2(x,t)\varphi(x,t)\right]=-\frac{2a(x,t)}{\sigma^2(x,t)}\frac{1}{R(x,t)}\left(c_1+c_0\int\limits_{r_1}^{x}R(v,t)dv\right)+$$

$$+2\frac{c_0}{2}+\frac{2a(x,t)}{\sigma^2(x,t)}\frac{1}{R(x,t)}\left(c_1+c_0\int\limits_{r_1}^{x}R(v,t)dv\right)=c_0.$$

Отже, $c_0=0$ і $\varphi(x,t)=\frac{2}{\sigma^2(x,t)}\frac{c_1}{R(x,t)}$.

Параметр c_1 вибираємо так, щоб $\int\limits_{r_1}^{r_2}\varphi(x,t)dx=1$. Тоді нульовий власний розподіл є

$$\varphi^*(x,t)=\frac{1}{\sigma^2(x,t)R(x,t)}\Bigg/\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dx}{\sigma^2(x,t)R(x,t)}. \tag{7.5}$$

У випадку однорідного процесу, коли коефіцієнти зносу й дифузії не залежать від часу, нульовий власний розподіл буде стаціонарним і щільність розподілу дифузійного процесу прагнутиме до нього, незалежно від розподілу в початковий момент часу.

Покажемо, що це дійсно так. Ми можемо без втрати спільності вважати коефіцієнт зносу рівним нулю, оскільки в однорідному випадку відповідним перетворенням координат [123] $\tilde{x} = \varphi(x)$, таким що

$$\varphi'(x) = R(x) = \exp\left\{ -\int_{r_1}^{x} \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)} dz \right\},$$

будь-який дифузійний процес можна привести до вигляду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sigma^2(x) \varphi \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Введемо позначення

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \varphi(x,t), \tag{7.6}$$

$$\rho(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)}. \tag{7.7}$$

Отримуємо рівняння параболічного типу [146]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \tag{7.8}$$

з крайовою умовою другого роду:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x = r_i} = 0. \tag{7.9}$$

У цьому випадку розв'язок задачі (7.8) – (7.9) подамо у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n(x)e^{-\lambda_n t}, \tag{7.10}$$

де $\Phi_n(x)$ – власні функції, а λ_n – власні значення задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\lambda\rho(x)\Phi(x)=0,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=r_i}=0.$$

Коефіцієнти ряду Фур'є c_n знаходять зі співвідношення

$$c_n\frac{(\varphi_0,\Phi_n)_\rho}{(\Phi_n,\Phi_n)_\rho},$$

де $(f,g)_\rho=\int_{r_1}^{r_2}f(x)g(x)\rho(x)dx$. Відповідно до теореми Стєклова, побудований за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля ряд Фур'є (7.10) збігається абсолютно й рівномірно. Через симетричність диференціального оператора задачі, всі власні числа невід'ємні. Оскільки розглянута задача (7.8) – (7.9) є крайовою задачею другого роду, то є власне значення $\lambda_0=0$ й відповідна йому власна функція $\Phi_0(x)=const$. Тоді ряд (7.10) можна подати як

$$u(x,t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Phi_n(x)e^{-\lambda_n t}, \lambda_n>0. \tag{7.11}$$

Розглянемо поведінку $u(x,t)$ при $t\to\infty$, беручи квадрат відстані в просторі L_2 з вагою ρ:

$$\left\|u-c_0\right\|_\rho^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Phi_n(x)e^{-\lambda_n t}\right\|_\rho^2=\int_{r_1}^{r_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Phi_n(x)e^{-\lambda_n t}\right)^2\rho(x)dx.$$

Через ортогональність в просторі з вагою ρ власних функцій Φ_n задачі Штурма-Ліувілля, після розкриття дужок залишається тільки сума квадратів, а кожен з попарних добутків дорівнює нулю:

$$\left\|u-c_0\right\|_\rho^2=\int_{r_1}^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\Phi_n^2(x)e^{-\lambda_n t}\rho(x)dx. \tag{7.12}$$

В [104] показано, що послідовність власних чисел задачі Штурма-Ліувілля може мати згущення тільки на нескінченності. Як відзначалося вище, $\lambda_n>0$ при $n>0$, отже, існує $\lambda_{\min}=\min\limits_{n>0}\{\lambda_n\},\lambda_{\min}>0$. Через невід'ємність кожного з доданків в (7.12), маємо

$$\int_{r_1}^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\Phi_n^2(x)e^{-\lambda_n t}\rho(x)dx\le e^{-2\lambda_{\min}t}\int_{r_1}^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\Phi_n^2(x)\rho(x)dx.$$

Зазначимо, що в початковий момент часу $t=0$

$$\left\|u-c_0\right\|_\rho^2=\int_{r_1}^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\Phi_n^2(x)\rho(x)dx.$$

Тоді $\left\|u-c_0\right\|_\rho^2\le\left\|u(0)-c_0\right\|_\rho^2 e^{-2\lambda_{\min}t}$.

Оскільки $\lambda_{\min}>0$, то при $t\to\infty$ $e^{-2\lambda_{\min}t}\to 0$ й , отже, $\left\|u-c_0\right\|_\rho^2\to 0$, що означає збіжність до граничного розподілу $u(x,t)\to c_0$, при $t\to\infty$. Тоді,

$$\varphi(t,x)\to\frac{c_0}{\sigma^2(x)/2},t\to\infty.$$

Постійну c_0 визначаємо з умови $\int\limits_{r_1}^{r_2} \varphi(x,t)dx = 1$, тоді

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \Bigg/ \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{\sigma^2(x)}.$$

Отриманий граничний розподіл збігається зі стаціонарним розподілом (7.5). Отже, для однорідного в часі процесу має місце збіжність до стаціонарного розподілу при $t \to \infty$.

Для того, щоб для однорідного процесу існував стаціонарний розподіл (7.5), необхідною й достатньою умовою є збіжність інтеграла в знаменнику:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{\sigma^2(x)R(x)} < \infty.$$

7.2 Апроксимація дифузійного процесу марковським процесом зі скінченним числом станів

Наведені нижче результати були відомі раніше [8, 118]. Ми наводимо їх у зв'язку з труднощами посилання й для розуміння подальших викладок.

Розглянемо дифузійний процес $\xi(t)$, заданий на відрізку $[r_1, r_2]$, $-\infty \le r_1 < r_2 \le \infty$, щільність розподілу ймовірностей $\varphi(t,x)$ якого відповідає прямому рівнянню Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(t,x)\varphi(t,x)\right], \qquad (7.13)$$

де $\sigma^2(t,x)$ – коефіцієнт дифузії, $t \in [0,T], T \le \infty$.

Як відзначалося вище, в однорідному випадку ми без втрати спільності вважатимемо коефіцієнт зносу рівним нулю, оскільки відповідним перетворенням координат будь-який дифузійний процес можна привести до вигляду (7.13). Якщо ж процес неоднорідний, то, розбивши часовий відрізок на досить малі відрізки, ми можемо на кожному з них апроксимувати вихідний процес деяким однорідним процесом.

Якщо коефіцієнт дифузії не залежить від часу $\sigma^2(t,x)=\sigma^2(x)$ й

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dx}{\sigma^2(x)}<\infty,$$

то при $t\to\infty$ щільність розподілу ймовірностей дифузійного процесу збігається до стаціонарного розподілу

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma^2(x)}\Bigg/\int_{r_1}^{r_2}\frac{dx}{\sigma^2(x)}.$$

Таким чином, для заданого стаціонарного розподілу $\varphi^*(x)$ завжди можна вказати коефіцієнт дифузії $\sigma^2(x)$ однорідного процесу, при якому матиме місце збіжність до $\varphi^*(x)$. Відзначимо, що збіжність матиме місце й при $\alpha\sigma^*(x)$, де $\alpha>0$. Параметр α впливає на швидкість збіжності.

Лема 7.1. Нехай $\varphi(x,t)$ – розв'язок рівняння дифузії з коефіцієнтом $\sigma^2(x)$, $\varphi_\alpha(x,t)$ – розв'язок рівняння з коефіцієнтом дифузії $\alpha\sigma^2(x)$. Тоді $\varphi_\alpha(x,t)=\varphi(x,\alpha t)$.

Доведення.

Припустимо, $\varphi(x,t)$ задовольняє рівняння дифузії

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2(x)\varphi(x,t)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t), \tag{7.14}$$

а $\varphi_\alpha(x,t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha\sigma^2(x)\varphi_\alpha(x,t)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi_\alpha(x,t). \tag{7.15}$$

Покажемо, що $\varphi(x,\alpha t)$ задовольняє рівняння (7.15). Для цього перевіримо, що $\varphi(x,\alpha t)$ перетворює (7.15) у тотожність.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha\sigma^2(x)\varphi_\alpha(x,\alpha t)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,\alpha t).$$

Введемо заміну $\alpha t=\tau$, тоді

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2(x)\varphi(x,\tau)\right)=\alpha\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,\tau).$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2(x)\varphi(x,\tau)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,\tau).$$

Оскільки $\varphi(x,t)$ перетворює рівняння (7.14) у тотожність, то остання рівність саме й доводить лему.

Таким чином, параметр α означає масштабування по осі часу t. Зазначимо, що аналогічні співвідношення мають місце й для марковського процесу. Дійсно, нехай $p(t)$ – розв'язок рівняння $\frac{dp}{dt}=p\Lambda$, а $p_\beta(t)$ – розв'язок рівняння $\frac{dp}{dt}=p(\beta\Lambda)$, тоді

$$p_\beta(t)=p(\beta t). \tag{7.16}$$

Побудуємо марковський процес зі скінченним числом станів, що апроксимує заданий дифузійний. Розіб'ємо відрізок $[r_1,r_2]$ на частинні півінтервали $\left[a_j,a_{j+1}\right),\ j=0,1,\ldots,n,\ a_0=r_1,\ a_n=r_2$. Розглядатимемо їх як стани марковского процесу з неперервним часом, вважаючи, що процес знаходиться в стані j, якщо частинка, що дифундує, належить півінтервалу $\left[a_{j-1},a_j\right)$. Імовірність того, що в момент часу t процес знаходиться в стані j, є

$$p_j(t) = \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t,x)\,dx.$$

Випишемо інфінітезимальну матрицю розглянутого марковського процесу. За визначенням дифузійного процесу

$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x,s+\Delta t,dy) = o(\Delta t),$$

отже, імовірність переходу між не сусідніми станами за малий проміжок часу Δt $p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$. Тоді інтенсивність переходу з i в j дорівнює

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = 0, |i-j| > 1.$$

Таким чином, інфінітезимальна матриця $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ є тридіагональною матрицею, в якої в кожному рядку елементи, що не лежать на головній діагоналі, рівні між собою в силу рівності нулю коефіцієнта зносу.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & & \dots & \dots \\ \lambda_2/2 & -\lambda_2 & \lambda_2/2 & \dots & \dots \\ & \lambda_3/2 & -\lambda_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\lambda_n \end{bmatrix}.$$

Невідомі параметри λ_i виберемо так, щоб отриманий марковський процес мав стаціонарний розподіл $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$, де p_i^* визначаються через стаціонарний розподіл дифузійного процесу:

$$p_i^* = \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(x)\,dx.$$

Це означає, що вектор $p^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*\right)$ має бути нульовим власним вектором для інфінітезимальної матриці Λ^T:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* \lambda_{ij} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.17}$$

Розв'язуючи систему (7.17) щодо елементів інфінітезимальної матриці, знаходимо їх з точністю до постійного множника:

$$\lambda_1 = \beta,$$

$$\lambda_2 = 2\beta p_1^* / p_2^*,$$

$$\lambda_3 = 2\beta p_1^* / p_3^*,$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\lambda_n = 2\beta p_1^* / p_n^*,$$

де β – довільна додатна константа. Її величина впливає на швидкість збіжності процесу до стаціонарного розподілу, тобто є масштабом по осі часу t (7.16).

Визначимо невідомий параметр β так, щоб швидкість збіжності марковського процесу була тією ж, що й відповідного дифузійного процесу.

Розглянемо $\int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t, x)\, dx$ – імовірність знаходження частинки, що дифундує, у півінтервалі $\left[a_{j-1}, a_j\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t, x)\, dx = \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx = \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2(x)\varphi(t, x)\right) dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma^2(x)\varphi(t, x)\right)\Bigg|_{a_{j-1}}^{a_j}.$$

Це миттєва швидкість зміни ймовірності стану j в момент часу t. З іншого боку, з диференціальних рівнянь Колмогорова

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Провівши розрахунки для однакових початкових умов, можемо оцінити швидкості зміни ймовірності знаходження частинки в стані j і підібрати відповідний коефіцієнт β [8]. Збільшуючи число станів процесу, ми можемо досягти як завгодно точного наближення дифузійного процесу марковським процесом зі скінченним числом станів.

Отримані результати безпосередньо узагальнюються на процеси, коли коефіцієнт дифузії $\sigma^2(x,t)$ є функцією часу. В цьому випадку ми проводимо зазначені вище міркування для кожного моменту часу t й отримуємо коефіцієнт $\beta(t)$ й інфінітезимальну матрицю неоднорідного марковського процесу $\Lambda(t)$, що залежить від часу.

Таким чином, за заданим дифузійним процесом ми можемо побудувати марковський процес з неперервним часом і скінченним числом станів, близький йому в сенсі граничних властивостей. Це дозволяє до дифузійних процесів застосувати теореми про збіжність до стаціонарного розподілу [41, 147].

Запропонований підхід дозволяє використовувати марковські процеси для моделювання дифузійних процесів і їх аналізу

7.3 Збіжність розподілів дифузійних процесів

Розглянемо умови, за яких матиме місце стабілізація фінальних імовірностей. Нехай $\tilde{\varphi}(t,x)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(x)\varphi(t,x)). \tag{7.18}$$

Знайдемо розв'язок рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(F(t)\sigma^2(x)\varphi(t,x)). \tag{7.19}$$

з тими ж крайовими й початковими умовами. Розв'язок шукатимемо у вигляді

$$\varphi_F(t,x) = \tilde{\varphi}(G(t),x).$$

Запишемо похідну за t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(G(t),x) = \frac{\partial}{\partial G}\tilde{\varphi}(G,t)\frac{\partial G}{\partial t}$$

і підставимо в (7.18)

$$\frac{\partial}{\partial G}\tilde{\varphi}(G,x)\frac{\partial G}{\partial t} = F(t)\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(x)\tilde{\varphi}(G,x)).$$

Оскільки $\tilde{\varphi}(t,x)$ перетворює (7.18) у тотожність, то $\dfrac{\partial G}{\partial t} = F(t)$ й

$$G(t) = \int_0^t F(s)ds + C. \tag{7.20}$$

Таким чином, наявність параметра $F(t)$ призводить до перетворення (7.20) часової координати, й розв'язок рівняння (7.19) можна записати у вигляді

$$\varphi_F(t,x) = \tilde{\varphi}(\int_0^t F(s)ds, x),$$

де $\tilde{\varphi}(t,x)$ – розв'язок рівняння (7.18). Постійну C вибираємо так, щоб $G(0) = 0$, тобто $\tilde{N} = 0$. У цьому випадку при $F(t) = const$ перетворення (7.20) призводить до масштабування по осі часу, як це було показано раніше.

Лема 7.1. Якщо в рівнянні (7.19) функція $F(t)$ має неінтегровану особливість у точці t_0: $\int_0^{t_0} F(s)ds = \infty$, то має місце збіжність до стаціонарного розподілу:

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t,x)=\varphi^*(x)=\frac{1}{\sigma^2(x)}\Bigg/\int_{r_1}^{r_2}\frac{dz}{\sigma^2(z)}.$$

Доведення.

Як було показано вище, рівняння (7.19) подамо через розв'язок рівняння (7.18) так:

$$\varphi_F(t,x)=\tilde{\varphi}\left(\int_0^t F(s)ds,x\right).$$

При $t\to t_0$ $G=\int_0^t F(s)ds\to\infty.$ Оскільки $\tilde{\varphi}(G,x)$ прагне до деякого стаціонарного розподілу $\varphi^*(x)$ при $G\to\infty,$ то, отже, і $\varphi_F(t,x)$ збігається до того ж стаціонарного розподілу $\varphi^*(x)$ при $t\to t_0$. *Лему доведено.*

Наведений результат узагальнюється на випадок довільного неоднорідного процесу дифузії.

Теорема 7.1 (про збіжність до стаціонарного розподілу). Нехай є процес, що має нульовий коефіцієнт зносу й коефіцієнт дифузії $\sigma(t,x),$ $x\in[r_1,r_2],$ $t\in[0,t_0],$ що записується у вигляді

$$\sigma(t,x)=M(t)\sigma_0(t,x),$$

де $\int_0^{t_0} M(s)ds=\infty;$ $\sigma_0(t,x)>0,$ обмежена й неперервна на $[0,t_0]\times[r_1,r_2]$ й при $t\to t_0$ рівномірно збігається до $\sigma^*(x)>0.$ Тоді для будь-якого початкового розподілу, заданого в точці $t=0$, щільність розподілу ймовірностей процесу при $t\to t_0$ збігається до граничного розподілу

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t,x)=\varphi^*(x)=\frac{1}{\sigma^2(x)}\Bigg/\int_{r_1}^{r_2}\frac{dz}{\sigma^{*2}(z)}.$$

Доведення.

Відзначимо, що в силу рівномірної збіжності $\sigma_0(t,x)$ до $\sigma^*(x)$ гранична функція $\sigma^*(x)$ також буде неперервною й обмеженою на відрізку $[r_1, r_2]$.

Візьмемо довільну точку $t' \in (0, t_0)$. Розіб'ємо відрізок $[0, t']$ точками $t_1, t_2, ..., t_m$ ($t_1 = 0$, $t_m = t'$) й замінимо $\sigma_0(t,x)$ кусково-постійною функцією $\sigma_{0k}(x) = \sigma_0(t_k, x)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$. Завжди можемо вибрати систему точок розбиття настільки густого, щоб функції $M(t)\sigma_0(t,x)$ й $M(t)\sigma_{0k}(x)$ відрізнялися на як завгодно малу величину. В силу неперервної залежності розв'язку диференціального рівняння (7.18) від параметрів, система точок може бути підібрана й так, щоб розв'язок рівнянь із коефіцієнтами дифузії $M(t)\sigma_0(t,x)$ й $M(t)\sigma_{0k}(x)$ відрізнялися б як завгодно мало на відрізку $[0, t']$. Розв'язок рівняння дифузії з коефіцієнтом $M(t)\sigma_{0k}(x)$ на $(0, t']$ складається з окремих розв'язків на півінтервалах $(t_k, t_{k+1}]$. Як було показано вище, наявність функції $M(t)$ призводить до перетворення часу

$$G_2 = \int_0^{t_2} M(s)ds, \ t \in [0, t_2],$$

$$G_3 = \int_{t_2}^{t_3} M(s)ds + G_2 = \int_0^{t_3} M(s)ds, \ t \in [t_2, t_3],$$

$$\dots$$

$$G_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} M(s)ds + G_{k-1} = \int_0^{t_k} M(s)ds, \ t \in [t_{k-1}, t_k],$$

після чого достатньо розглянути рівняння

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial G} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{0k}(x)\varphi_k(G,x)), G \in (G_k, G_{k+1}), \ k = 1, 2, ..., m.$$

Зазначимо, що $G_k \to \infty$ при $t' \to t_0$ в силу розбіжності інтеграла від $M(t)$. Провівши заміну (7.6)–(7.7), перейдемо до послідовності рівнянь:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = \rho_k(x)\frac{\partial u_k}{\partial t}, \ t \in (G_k, G_{k+1}), \ k = 1, 2, ..., m, \tag{7.21}$$

з початковими умовами $u_k(G_k) = u_{k-1}(G_k)$ й крайовими умовами другого роду

$$\left.\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|_{x=r_i} = 0. \tag{7.22}$$

Оскільки $\sigma_{0k} > 0$, неперервні, обмежені й рівномірно збігаються до $\sigma^*(x)$ при $t' \to t_0$, то $\rho_k(x) = \dfrac{1}{\sigma_{0k}(x)}$ також додатні, неперервні, обмежені й рівномірно збігаються до $\rho^*(x)$ при $t' \to t_0$. Для кожного з рівнянь (7.21) – (7.22) розглянемо відповідну задачу Штурма-Ліувілля

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial x^2} + \lambda \rho_k(x)\Phi^{(k)}(x) = 0, \qquad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=r_i} = 0.$$

Розв'язок кожного з рівнянь (7.21) – (7.22) розкладається в ряд Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля

$$u_k = c_0^{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \Phi_n^{(k)}(x) e^{-2\lambda_n^{(k)}(G - G_{k-1})}. \tag{7.23}$$

Оскільки послідовність власних чисел задачі може мати згущення тільки на нескінченності, то можна занумерувати їх так, щоб

$$\lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k)} < ... < \lambda_n^{(k)} < ... \ .$$

Виділимо всі підпослідовності власних чисел $\lambda_{n_k}^{(k)}$, збіжні до нуля при $k \to \infty$ (якщо такі є). У силу неперервності залежності розв'язку від параметра, можна виділити підпослідовності власних функцій $\Phi_{n_k}^{(k)} \to \Phi^*$, $k \to \infty$, відповідним зазначеним власним числам. Розглянемо власну функцію

$\Phi_0 = const,$ що відповідає нульовому власному числу. Власні функції, що відповідають різним власним числам ортогональні: $(\Phi_{n_k}^{(k)}, \Phi_0)_{\rho_k} = 0,$ але тоді й гранична функція Φ^* також буде ортогональною $(\Phi^*, \Phi_0) = 0.$ Це означає існування ще одного розв'язку задачі

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \tag{7.24}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=r_i} = 0. \tag{7.25}$$

Через рівномірну збіжність $\rho_k(x)$ до $\rho^*(x)$ й збіжності $\lambda_{n_k}^{(k)}$ до нуля при $k \to \infty$, граничний розв'язок Φ^* також має бути неперервним, тобто $\Phi^* = 0$ (щоб Φ^* задовольняла задачі (7.22) – (7.24) і виконувалася умова ортогональ-ності). Розглянемо функцію

$$F_k(x, G) = \sum_i c_i \Phi_i^{(k)}(x) e^{-2\lambda_i^{(k)}(G - G_{k-1})},$$

складену з тих доданків розкладання (7.23), в яких власні значення $\lambda_i^{(k)}$ знаходяться в збіжних до нуля підпослідовностях $\lambda_{nk}^{(k)}$.

Оцінимо квадрат норми $F_k(x,t)$ в просторі з вагою ρ_k :

$$\|F_k\|_{\rho_k}^2 \le \int_{r_1}^{r_2} \sum_i c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) e^{-2\lambda_i^{(k)}(G - G_{k-1})} \rho_k(x) dx \le$$

$$\le \int_{r_1}^{r_2} \sum_i c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) \rho_k(x) dx = \sum_i \int_{r_1}^{r_2} c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) \rho_k(x) dx.$$

З нерівності Бесселя й обмеженості функцій u_k випливає обмеженість коефіцієнтів $c_i^{(k)}$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(k)^2} \le M.$$

Тоді остання сума прагнутиме до нуля при $\Phi_i^{(k)2} \to 0$. Це означає, що $\|F_k\|_{\rho_k}^2 \to 0$ при $k \to \infty$.

Розглянемо тепер норму різниці розв'язків і побудованих функцій $F_k(x,t)$

$$\|u_k - c_0 - F_k\|_{\rho_k}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \sum_i c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) e^{-2\lambda_i^{(k)}(G-G_{k-1})} \rho_k(x) dx.$$

Тут сума береться за всіма i, для яких послідовності $\lambda_i^{(k)}$ при $k \to \infty$ збігається до позитивних границь (ті значення i, яким відповідають збіжні до нуля $\lambda_i^{(k)}$ ввійшли до складу функцій $F_k(x,G)$). Тоді існує таке натуральне число k_0 й додатне a, що для всіх $k > k_0$ виконуватиметься нерівність

$$e^{-2\lambda_i^{(k)}(G-G_{k-1})} \le e^{-2\alpha(G-G_{k-1})}.$$

Отже,

$$\|u_k(G_k) - c_0 - F_k(G_k)\|_{\rho_k}^2 \le \int_{r_1}^{r_2} \sum_i c_i^{(k)2} \Phi_i^{(k)2}(x) \rho_k(x) dx e^{-2\alpha(G_k - G_{k-1})} =$$

$$= \|u_k(G_{k-1}) - c_0 F_k(G_{k-1})\|_{\rho_k}^2 \, e^{-2\alpha(G_k - G_{k-1})}.$$

Таким чином, на кожному з відрізків $[G_{k-1}, G_k]$ зазначений квадрат норми спадає. Оскільки $\rho_k(x)$ рівномірно збігається до позитивної й обмеженої граничної функції $\rho(x)$, а $\sum_{i=1}^{k} (G_i - G_{i-1}) = G_k - G_0 \to \infty, k \to \infty$, то

$$\|u_k(G_k) - c_0 - F_k(G_k)\|_{\rho_k}^2 \to 0, k \to \infty.$$

Вважаючи, що $\|F_k\|^2_{\rho_k} \to 0$ при $k \to \infty$, отримуємо збіжність $u_k(G,x) \to c_0$. Проводячи заміну, обернену (7.6) – (7.7), матимемо, що $\varphi(t,x) \to \varphi^*(x)$ при $t \to \infty$, $\varphi^*(x) = \frac{1}{\sigma^{*2}(x)} \Big/ \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dz}{\sigma^{*2}(z)}$, що й було потрібно довести.

Відзначимо, що якщо інтеграл $\int\limits_0^{t_0} M(s)ds$ збігається, але приймає досить велике значення, то ми матимемо справу з частинним фокусуванням.

Аналогічну ситуацію для марковських процесів зі скінченним числом станів розглянута в [147].

7.4. Чисельний розв'язок рівняння дифузії

Побудуємо скінченнорізницеве рівняння, що апроксимує рівняння дифузії (7.1). Для цього розіб'ємо часовий інтервал точками $t_1, t_2, ..., t_m$, де $t_0 = 0$, і фазовий простір точками $x_0, x_1, ..., x_n$, де $x_0 = r_1$, $x_n = r_2$.

Вважатимемо точки розбиття рівновіддаленими одна від одної з інтервалами Δt й Δx відповідно. В регулярних точках x_j, $j = 1, 2, ..., n-1$ вибираємо такі наближення для похідних:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_j} \approx \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2\Delta x},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_j} \approx \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1})}{\Delta x^2},$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=t_k} \approx \frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{\Delta t}.$$

Позначимо $\varphi_{kj} = \varphi(t_k, x_j)$, $a_{kj} = a(t_k, x_j)$, $\sigma^2_{kj} = \sigma^2(t_k, x_j)$. Тоді в регулярних точках диференціальне рівняння (7.1) заміниться скінченнорізницевим рівнянням

$$\frac{\varphi_{kj}-\varphi_{k-1j}}{\Delta t}=-\frac{a_{kj+1}\varphi_{jk+1}-a_{kj-1}\varphi_{jk-1}}{2\Delta x}=\frac{\sigma_{kj+1}^2\varphi_{kj+1}-2\sigma_{kj}^2\varphi_{kj}+\sigma_{kj-1}^2\varphi_{kj-1}}{2\Delta x^2}.$$

Для граничних точок запишемо крайові умови

$$-a_{k0}\varphi_{k0}+\frac{\sigma_{k1}^2\varphi_{k1}-\sigma_{k0}^2\varphi_{k0}}{2\Delta x}=0, \tag{7.27}$$

$$-a_{kn}\varphi_{kn}+\frac{\sigma_{kn}^2\varphi_{kn}-\sigma_{kn-1}^2\varphi_{kn-1}}{2\Delta x}=0. \tag{7.28}$$

Для кожного моменту часу t_k розв'яжемо систему рівнянь (7.26) – (7.28). Це лінійна система щодо φ_{kj}, $k=0,1,...,n$. Значення $\varphi_{(k+1)j}$ беремо з розв'язку, отриманого на попередньому кроці в точці t_{k-1}. Зазначимо, що в кожне з рівнянь системи (7.26), крім невідомого φ_{kj}, входять тільки невідомі $\varphi_{(k+1)j}$ й $\varphi_{(k+1)j}$, тобто матриця системи рівнянь є тридіагональною. Це дозволяє розв'язувати дану систему рівнянь методом прогону [56]. Цей метод має складність обчислень порядку n (n – число рівнянь) і, отже, є більш ефективним, ніж, наприклад, метод Гаусса, що вимагає обчислень порядку n^3.

Приклади знаходження щільностей розподілу для конкретних дифузійних процесів наведено в додатку. Сірим (червоним) кольором зображений графік стаціонарного розподілу, а чорним – щільності розподілу ймовірностей. В прикладі 1 розглянуто найпростіший випадок, коли при незмінному в часі власному розподілі спостерігається збіжність до стаціонарного розподілу

$$\varphi^*(x)=\frac{1}{(1-x)^2+0{,}1}\Bigg/\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2+0{,}1},$$

На прикладі 2 проілюстрований випадок, описаний у теоремі про збіжність до стаціонарного розподілу. Дійсно, коефіцієнт дифузії подамо у вигляді

$$\sigma^2(t,x)=\left(\frac{1}{2-t}+t\right)(x+1)+xt=\frac{1}{2-t}((1+t(2-t))(x+1)+x(2-t)t),$$

де вираз у дужках при $t \to 2$ рівномірно збігається до $\sigma^{*2}(x) = x+1$, точно додатного на розглянутому відрізку [0, 2].

Якщо ж функція $\sigma^{*2}(x)$ перетворюється в нуль у деяких точках, то збіжність може мати місце, але граничний розподіл $\varphi^{*}(x)$ тотожно дорівнюватиме нулю всюди, за винятком нулів функції $\sigma^{*2}(x)$, в яких $\varphi^{*}(x)$ перетворюється в нескінченність (приклад 3),

$$\sigma^{*2}(x) = \lim_{t \to 2}\left(\left(\frac{1-x}{2-t}\right)^2 + (x+1)t + 0{,}1\right)(2-t)^2 = (1-x)^2.$$

Тут з імовірністю 1 частинка, що дифундує, у момент часу $t=2$, знаходитиметься в точці $x=1$. Отже,

$$\sigma^{*2}(x) = \lim_{t \to 2}\frac{0{,}1(2-t)}{(1-x)^2 + 2 - t} = \begin{cases} 0{,}1, x=1 \\ 0, x \neq 1 \end{cases}.$$

У цьому випадку збіжності до будь-якого граничного розподілу немає: щільність розподілу ймовірностей у кінцевий момент часу залежить від початкового розподілу.

8 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СИНТЕЗУ ПРОЦЕСУ ЗА ФРАГМЕНТАМИ

Сьогодні одним з найважливіших методів хімічної технології є екстракція. Екстракція є процесом поділу суміші твердих або рідких речовин за допомогою розчинників з високою вибірковістю (екстрагентів). На частку екстракції припадає близько 20% всіх витрат хімічної промисловості [27]. Широке поширення отримали методи рідинної екстракції у фармацевтичній, харчовій, нафтопереробній, атомній промисловостях.

Фізична сутність екстракції полягає в переході компонента, що виділяється, з однієї фази (рідкої або твердої) у фазу рідкого екстрагента при їх взаємному зіткненні [114]. Екстрагуючі компоненти переходять із вихідного розчину в розчинник внаслідок різниць концентрацій, тому даний процес відноситься до числа дифузійних. Процес екстракції проводиться звичайно у двофазних системах: «тверде тіло-рідина» або «рідина-рідина».

Необхідність системи «рідина-рідина» виникає, наприклад, у фітохімії, коли екстракція з рослинної сировини може проводитися водою, а на наступній стадії відбувається екстракція діючих речовин з водної витяжки органічним розчинником. Основною перевагою процесу екстракції є висока вибірковість і низька робоча температура, що особливо важливо для органічних речовин рослинного походження [113].

Дифузія в рідинах обумовлена процесами багаточастинної взаємодії пробної частинки із частинками рідини. У зв'язку із цим теоретичне визначення коефіцієнта дифузії в рідинах є досить важким і, як правило, джерелом інформації є експеримент [87, 88, 124].

8.1 Процеси екстрагування

На практиці екстракція проводиться з матеріалів, що мають, як правило, капілярно-пористу структуру. Такі матеріали широко застосовують і в інших дифузійних процесах хімічної технології, що протікають за участю твердої фази: сушіння, десорбція. При екстрагуванні з капілярно-пористого матеріалу міграція речовини, що розподіляється, у твердій фазі здійснюється за допомогою молекулярної дифузії. Щільність дифузійного потоку в матеріалі, віднесену до одиниці його поверхні, описують рівнянням Фіка з використанням ефективного коефіцієнта дифузії D_e (коефіцієнта масопровідності) [98]:

$$i = -D_e gradC, \tag{8.1}$$

де i – вектор щільності дифузійного потоку з розрахунку на повний переріз матеріалу; D_e – ефективний коефіцієнт молекулярної дифузії, що залежить від структурних параметрів матеріалу; C – концентрація дифузанта в пористому середовищі.

Ефективний коефіцієнт дифузії D_e залежить від характеристик пористої структури, температури й концентрації речовини, що розподіляється, у порах. У порівнянних умовах (та сама речовина, що розподіляється, однакова температура й концентрація) вплив структури матеріалу проявляється в зміні коефіцієнта дифузії на порядок [126].

У загальному випадку вплив пористої структури матеріалу на ефективний коефіцієнт дифузії проявляється так [127]:

– подовжується шлях дифузійного потоку внаслідок звивистості капілярів;

– відбувається його механічне блокування елементами скелета твердого тіла;

– потенційне поле стінок пор впливає на прилягаючі шари рідини, що в ряді випадків призводить до утворення граничної фази й адсорбційного шару молекул дифузанта.

За наявності адсорбційного шару молекул дифузанта перенос його в капілярно-пористому матеріалі відбувається за рахунок молекулярної дифузії в об'ємі пор і поверхневої дифузії в адсорбційному шарі. У більшості випадків виявляється можливим зневажити поверхневою дифузією в порівнянні з об'ємною.

Залежність ефективного коефіцієнта дифузії D_e, що входить в (8.1), від параметрів пористої структури характеризується співвідношенням:

$$D_e = D\varepsilon\Pi = Dm,$$

де D – коефіцієнт дифузії в гомогенному середовищі (у чистій рідині); Π – коефіцієнт дифузійної проникності; $m = \varepsilon\Pi$ – параметр, що залежить від пористості структури й являє собою коефіцієнт, на який різняться між собою коефіцієнт дифузії в чистій рідині й провідність у пористому тілі.

Масообмін у рідині в поверхні твердого тіла є досить складним й поки маловивченим явищем. В інженерній практиці для того, щоб обійти труднощі під час розв'язування задач масовіддачі, використовують рівняння

$$dG = \beta(c_n - c')Sd\tau, \qquad (8.2)$$

де dG – кількість речовини, що дифундувала, за проміжок часу $d\tau$ через поверхню площею S; β – коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт масообміну); $c_ï$ – концентрація екстрагента у твердому тілі на межі з рідким середовищем; $\tilde{n}'$ – середня концентрація екстрагента в рідкій фазі – вектор щільності дифузійного потоку з розрахунку на повний переріз матеріалу;

Слід зазначити, що коефіцієнт масообміну β не є величиною постійною для даної речовини. На практиці для визначення коефіцієнта масообміну використовують спеціальні лабораторні установки.

8.2 Екстрактори промислового типу

Розглянемо основні процеси в системі «тверде тіло – рідина», що протікають у промислових екстракторах. В екстрактор надходить сировина, що містить екстрагент (речовина, яку необхідно виділити) і екстрагуюча рідина. З екстрактора виймають рідину з розчиненим у ній екстрагентом і перероблену сировину. Для промислових моделей характерним є неперервний процес подачі сировини й рідини і їхньої відкачки. У цьому випадку в нерухливій системі координат, пов'язаної з екстрактором, установлюється стаціонарний режим, тобто в будь-якому елементарному об'ємі dV концентрація із часом не змінюється $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$. Однією з особливостей реального процесу екстрагування є зміна фізичних умов вздовж довжини апарата. Зміна температури, концентрації, і пов'язану з цим зміну структури й фізико-хімічних властивостей твердих частинок призводить до зміни коефіцієнта дифузії. Так, наприклад, у рослинній тканині коефіцієнт дифузії може змінюватися на порядок.

Сучасна методологія дослідження масообміну в системі «тверде тіло-рідина» полягає в тому, що просторово-часовий розподіл відповідної субстанції розглядається тільки для області, зайнятій твердим тілом, а перенос у рідині або газі, що перебувають у контакті із твердим тілом, враховується завданням відповідних граничних умов [98]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right), \qquad (8.3)$$

з крайовою умовою на межі з рідкою фазою:

$$D\left(\frac{\partial c}{\partial n}\right)+\beta(c-c')=0, \tag{8.4}$$

де $c(x,y,z,t)$ – концентрація екстрагента у твердому тілі в точці (x,y,z) в момент часу t; $v=(v_x,v_y,v_z)$ – швидкість руху речовини; D – коефіцієнт дифузії.

Масообмінні процеси в промислових апаратах характеризуються зміною концентрації речовини, що розподіляється, у фазах вздовж довжини апарата. Оскільки коефіцієнт дифузії залежить від концентрації речовини, диференціальне рівняння дифузії, має нелінійний характер. Співвідношення рівноважних концентрацій у фазах, як правило, не підкоряється лінійному закону. Крім того, при зміні фізичних властивостей середовища й гідродинамічної обстановки вздовж довжини апарата, змінюється коефіцієнт масовіддачі, що спричиняється нелінійністю граничних умов дифузії. На коефіцієнти дифузії, масовіддачі, розподілу рівноважних концентрацій також впливає температурне поле. Це відбувається внаслідок того, що з метою інтенсифікації процесу екстрагування прагнуть проводити гарячим екстрагентом при підвищених температурах, при цьому взаємодіючі фази на вході в апарат мають різну температуру. Крім того, відбуваються втрати теплоти через стінки апарата, що також призводить до неізотермічності процесу.

З викладеного вище випливає, що для промислових умов масообміну властиві нелінійні задачі дифузії. Однак у багатьох випадках нелінійна постановка задачі дифузії пов'язана з надмірними труднощами в описі кінетики процесу, при цьому потрібна додаткова інформація про залежність кінетичних коефіцієнтів від параметрів процесу, що часто відсутня. Тому в інженерній практиці для кінетичного розрахунку масообмінних процесів широко використовують розв'язки лінійних дифузійних задач.

Для кінетичного розрахунку дифузійних процесів розроблені поінтервальні методи, що враховують зміну параметрів процесу вздовж довжини апарата. При цьому передбачається, що фізичні й хімічні умови однакові в будь-якому поперечному перерізі екстрактора. Експериментальні дослідження підтверджують правомірність такого наближення. В апараті неперервної дії внаслідок зміни концентрації речовини, що розподіляється, у фазах, гідродинамічній обстановці й температурі по робочому об'ємові його нерідко доводиться розбивати на окремі зони (ділянки) і вести позонний кінетичний розрахунок [126]. Так, наприклад, на апараті похилого двошнекового типу (*Dds*) проби відбираються на початку й кінці кожної секції (рис. 8.1). Ділянки занумеровані за допомогою арабських цифр, а контрольні точки – римськими.

Рисунок 8.1 – Схема похилого двошнекового екстракційного апарата

При зональному методі кінетичного розрахунку неперервно діючого апарата початковий розподіл концентрації по об'єму розглянутої дисперсної фази в другій і наступній зонах апарата не є рівномірним, а відповідає кінцевому розподілу концентрації дифузанта в частинці наприкінці попередньої зони. Аналогічним чином діють і при зональному кінетичному розрахунку апарата періодичної дії.

При описі перехідних процесів у дифузійних апаратах неперервної дії початкові розподіли концентрацій задають на основі розв'язків кінетичних задач, що описують поля концентрацій у робочому об'ємі апарата в момент початку перехідного процесу.

8.3 Здобування цукру з буряка

Розглянемо процес екстракції на прикладі здобування цукру з цукрового буряка. В екстрактор подаються подрібнена стружка цукрового буряка й вода.

Стружка, проходячи через апарат, віддає сахарозу в воду, що її оточує; вода ж, проходячи через екстрактор, навпаки, збагачується нею. Основна задача при проектуванні екстрактора полягає в такому виборі його параметрів, щоб досягти максимального витягу цукру із сировини.

Цукрова стружка, що подається в апарат, характеризується малим радіусом $R \approx 1 мм$. У такому випадку її бічна поверхня значно перевищує площу основ (більш, ніж в 100 разів). Це дозволяє при розгляді процесів переходу екстрагента в рідку фазу зневажити площею основ і розглядати процеси тільки на бічній поверхні. З математичної точки зору це означає, що ми розглядаємо стружку у вигляді нескінченно довгих циліндрів.

В існуючих апаратах застосовується два основних методи: прямотечійний і протитечійний (рис. 8.2).

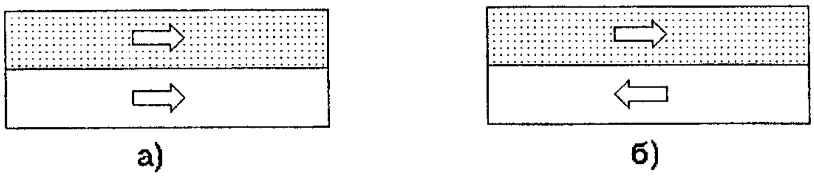


Рисунок 8.2 – Переміщення твердої й рідкої фаз в екстракторі:
а) у прямотечійному; б) у протитечійному

При прямотечійному процесі напрямки векторів швидкості рідини й сировини збігаються. При протитечійному – вони протилежні. Наприклад, екстракційний апарат, зображений на рис. 8.1, відноситься до протитечійного. Розділимо екстрактор по всій його довжині на n інтервалів (рис. 8.3).

Інтервали h_i мають бути достатньо великими в порівнянні з розмірами екстрагуючих часток, але водночас досить малими, щоб можна було прийняти фізичні умови процесу – коефіцієнт дифузії й коефіцієнт масопередачі – постійними в межах інтервалу. Циліндр розіб'ємо на m концентричних шарів, а шар $m+1$ – це рідина, що омиває циліндр (рис. 8.3). Припускатимемо, що вода рівномірно розподілена між стружкою, тобто на кожен з розглянутих циліндрів припадає води пропорційно його об'єму від загальної маси.

Частинка екстрагента, потрапивши в ділянку ij, може протягом малого проміжку часу Δt перейти в одну із сусідніх ділянок, або залишитися на місці. Тим самим ми приходимо до задачі про блукання частинки на решітці [140].

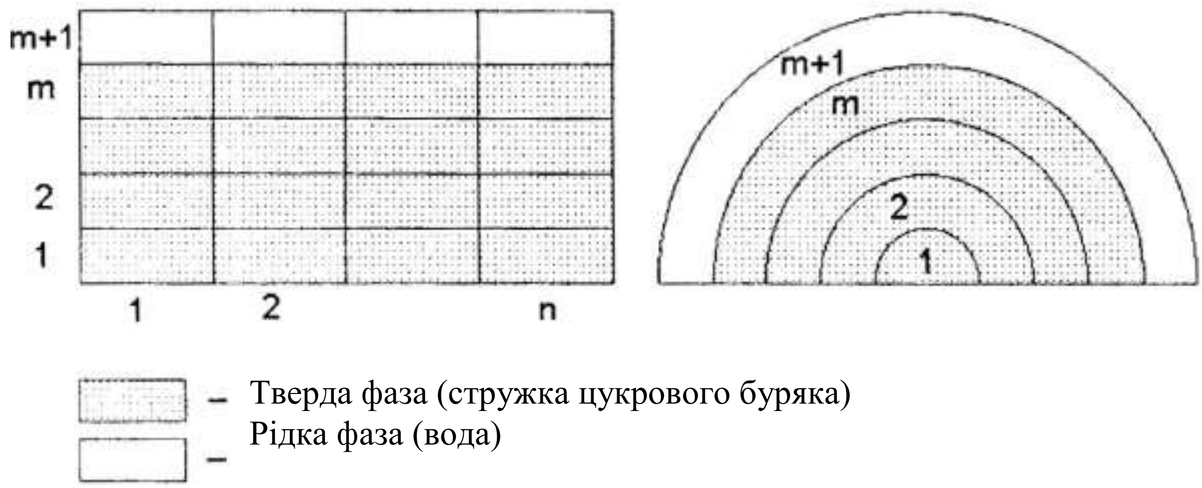


Рисунок 8.3 – Розбиття екстрактора на області з однаковими фізичними характеристиками

Введемо для частинки, що перебуває в ділянці ij, умовні ймовірності переходу по вертикалі за відсутності горизонтальних переміщень. Тим самим ми переходимо до нового імовірнісного простору, тобто приходимо до розбиття процесу на фрагменти. Фрагментами тут будуть групи станів, що складаються з ділянки ij й сусідніх з нею ділянок.

Розбиття процесу на фрагменти дозволяє спростити аналіз і перейти до розв'язку задачі дифузії для малих областей простору,в яких основні параметри дифузійного процесу можна вважати незмінними. Провівши потім синтез за фрагментами, зможемо знайти перехідні ймовірності для всіх ділянок.

Розглянемо умовні ймовірності переходу частинки в сусідні по горизонталі ділянки за відсутності переміщення по горизонтальній осі. Ці ймовірності переходів визначаються коефіцієнтом дифузії цукру в соці цукрового буряка $D = \frac{\sigma^2}{2}$ й коефіцієнтом зносу a (тобто швидкістю руху стружки в апараті для шарів $1, 2, ..., m$ і води для шару $m+1$):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{8.5}$$

де $c(x,1)$ – концентрація цукру в точці x в момент часу t. У початковий момент часу частинка рівномірно розподілена по всьому об'єму ділянки:

$$c_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2]; \\ 0, & x \notin [x_1, x_2]. \end{cases} \tag{8.6}$$

Відзначимо, що при такому завданні початкових умов концентрація відіграватиме роль щільності ймовірності знаходження частинки в точці x в момент часу t.

Розв'язок задачі (8.5) – (8.6) шукатимемо у вигляді

$$c(x,t) = u(x,t)e^{\mu x + \lambda t},$$

де

$$\mu = \frac{a}{2D}, \quad \lambda = -\frac{a^2}{4D}. \tag{8.7}$$

Тоді $u(x,t)$ можна знайти як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

з тими ж початковими умовами (8.6) [146]. У відсутності крайових умов (нескінченний стрижень) $u(x,t)$ подамо у вигляді

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi,$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}.$$

Тоді

$$c(x,t) = e^{\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} c_0(\xi)e^{\mu(x-\xi)}d\xi.$$

Знайдемо ймовірність того, що частинка за період часу Δt зміститься вліво (тобто знаходитиметься лівіше точки x_1). Введемо такі позначення.

Для частинки, що знаходиться в ділянці ij, позначимо $p_{ij}^{(-1,0)}$, $p_{ij}^{(1,0)}$ –

умовні ймовірності переходів у ліву й праву ділянки відповідно за умови відсутності переміщення по вертикалі; $p_{ij}^{(0,-1)}, p_{ij}^{(0,1)}$ – умовні ймовірності переходів у нижню (внутрішній шар) і верхню (зовнішній шар) ділянку відповідно за відсутності переміщень по горизонталі.

$$p_{ij}^{(-1,0)} = \int\limits_{-\infty}^{x_1} c(x,\Delta t)dx = \frac{1}{x_2 - x_1}\frac{e^{\lambda\Delta t}}{4\sqrt{\pi D\Delta t}}\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D\Delta t}+\mu(x-\xi)}d\xi dx.$$

Провівши перетворення під знаком інтеграла й підставивши значення μ й λ з (8.7), отримаємо

$$p_{ij}^{(-1,0)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x_1-\xi}{2\sqrt{D\Delta t}}-\frac{a}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}} e^{-z^2}dzd\xi.$$

Відмітимо, що внутрішній інтеграл є інтегралом помилок

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2}dz, \quad \Phi(+\infty) = 1.$$

Міркуючи аналогічно для ймовірності зміщення вправо, знайдемо

$$p_{ij}^{(1,0)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{\frac{x_2-\xi}{2\sqrt{D\Delta t}}-\frac{a}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}}^{\infty} e^{-z^2}dzd\xi =$$

$$= 1 - \frac{1}{x_2 - x_1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x_2-\xi}{2\sqrt{D\Delta t}}-\frac{a}{2}\sqrt{\frac{t}{D}}} e^{-z^2}dzd\xi.$$

Імовірність того, що частинка не покине ділянки ij протягом часу Δt, є, відповідно,

$$p_{ij}^{(0,0)} = 1 - p_{ij}^{(1,0)} - p_{ij}^{(-1,0)}.$$

Розглянемо тепер умовні ймовірності переходів частинки з ділянки ij в сусідні по вертикалі за умови, що переміщення по горизонталі відсутні. Переміщення між шарами усередині циліндра визначатимуться коефіцієнтом дифузії D:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial c}{\partial y^2}\right).$$

Загальний розв'язок подамо у вигляді [152]

$$c(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4Dt}} d\xi d\eta,$$

де $B(x, y) = c_0(x, y)$ – початкова умова при $t = 0$.

Враховуючи кругову симетрію циліндра, зробимо заміну

$$\xi = \rho\cos\varphi, \quad x = r\cos\theta,$$

$$\eta = \rho\sin\varphi, \quad y = r\sin\theta.$$

Початкові умови задамо у вигляді

$$c_0(r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}, & r \in [r_1, r_2]; \\ 0, & r \notin [r_1, r_2]. \end{cases}$$

Відзначимо, що при такому завданні початкової умови концентрація відіграє роль в щільності ймовірності того, що частинка, яка дифундує, у момент t часу знаходитиметься в точці з координатами (r, θ). Тоді

$$c(r,\theta,t)=\frac{1}{4\pi Dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}c_0(\rho,\varphi)\rho e^{-\frac{(r\cos\theta-\rho\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi-\rho\sin\theta)}{4Dt}}d\rho d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4\pi Dt}\frac{1}{\pi(r_2^2-r_1^2)}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\rho e^{-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)}{4Dt}}d\rho d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4\pi Dt}\frac{1}{\pi(r_2^2-r_1^2)}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\rho e^{-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)}{4Dt}}d\rho d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4\pi Dt}\frac{1}{\pi(r_2^2-r_1^2)}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\rho e^{-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}{4Dt}}d\rho d\varphi.$$

Знайдемо ймовірність того, що частинка перейде у внутрішній шар:

$$p^{(0,-1)}=\int_0^{r_1}2\pi rc(r,t)dr=\frac{1}{2Dt}\frac{1}{\pi(r_2^2-r_1^2)}\int_0^{r_1}\int_{r_1}^{r_2}r\rho\int_0^{2\pi}e^{-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}{4Dt}}d\varphi dr d\rho=$$

$$=\frac{1}{Dt}\frac{1}{(r_2^2-r_1^2)}\int_0^{r_1}\int_{r_1}^{r_2}r\rho\int_0^{\pi}e^{-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}{4Dt}}d\varphi dr d\rho.$$

Виконавши заміну змінних під знаком інтеграла

$$r=x2\sqrt{Dt},\qquad \rho=y2\sqrt{Dt},$$

отримаємо

$$p_{ij}^{(0,-1)}=\frac{16Dt}{\pi(r_2^2-r_1^2)}\int_0^{r_1/2\sqrt{Dt}}\int_{r_1/2\sqrt{Dt}}^{r_2/2\sqrt{Dt}}xy\int_0^{\pi}e^{-x^2-y^2+2xy\cos\varphi}d\varphi dx dy,$$

$$p_{ij}^{(0,-1)}=\frac{4}{\pi(R_2^2-R_1^2)}\int_0^{R_1}\int_{R_1}^{R_2}xy\int_0^{\pi}e^{-x^2-y^2+2xy\cos\varphi}d\varphi dx dy,$$

де $R_1 = r_1 / 2\sqrt{Dt},\ \ R_2 = r_2 / 2\sqrt{Dt}$.

Оскільки інтервал часу t, за який відбуваються розглянуті переходи між шарами, досить малий, то вважатимемо, що ймовірності переходу у внутрішній шар і в зовнішній шар відносяться як площі їх меж. Тобто для внутрішнього шару j:

$$\frac{p_{ij}^{(0,-1)}}{p_{ij}^{(0,1)}} = \frac{\pi R^2 \left(\dfrac{j-1}{m} \right)^2}{\pi R^2 \left(\dfrac{j}{m} \right)^2} = \left(\frac{j-1}{j} \right)^2 .$$

Тоді для шарів $j = 2,...,t-1$ імовірність переходу в зовнішній шар обчислюватимемо як

$$p_{ij}^{(0,1)} = p_{ij}^{(0,-1)} \left(\frac{j}{j-1} \right)^2 .$$

Для шару $j = 1$:

$$p_{i1}^{(0,1)} = \frac{4}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_2}^{\infty} \int_{R_1}^{R_2} xy \int_0^{\pi} e^{-x^2 - y^2 + 2xy\cos\varphi} d\varphi dx dy.$$

Ми не користуємося такою формулою для інших шарів, оскільки на практиці чисельне інтегрування по нескінченному інтервалу виявляється більш трудомістким, ніж інтегрування в скінченних межах.

Розглянемо тепер обмінні процеси зовнішнього шару з навколишньою рідкою фазою. Перетворюючи (8.2), знайдемо масу екстрагента Δm, що залишив тверду фазу:

$$\Delta m = \beta(c_n - c')\Delta t \Delta S \rho,$$

де Δt – проміжок часу, за який відбувається масообмін; ΔS – площа поверхні, через яку відбувається масообмін; ρ – щільність твердої фази.

Нехай маса всього екстрагента в шарі, що розглядається, дорівнює m, тоді відносну частину екстрагента, який залишив поверхневий шар $\frac{\Delta m}{m}$, можемо інтерпретувати як імовірність виходу частинки, що дифундує, із твердої фази в рідку.

$$p_{вих} = \frac{\Delta m}{m} = \frac{\beta}{m}(c_n - c')\Delta t \Delta S \rho.$$

При розгляді однієї частинки концентрація в рідкій фазі дорівнює нулю: $c' = 0$.

$$p_{вих} = \frac{\beta}{m} c_n \Delta t \Delta S \rho.$$

Оскільки $c_n = \frac{m}{M} = \frac{m}{\rho V}$, де M, V відповідно маса й об'єм зовнішнього шару, то

$$p_{вих} = \frac{\beta}{\rho V}\Delta t \Delta S \rho = \frac{\beta \Delta t}{R^2\left(1 - \left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right)\pi h} 2\pi R h = \frac{2\beta \Delta t m^2}{R(2m-1)}.$$

Якщо ж частинка перебуває в рідкій фазі, то ймовірність влучення у тверду фазу є

$$p_{вх} = \frac{\Delta m}{m'} = \frac{\beta}{m'}\frac{m'}{M'}\Delta t \Delta S \rho = \frac{\beta}{M'}\Delta t \Delta S \rho,$$

де m' – маса екстрагента в рідині; M' – маса цієї рідини; q – відношення витрати води до витрати сировини; $\Delta S = 2\pi R h$ – площа бічної поверхні.

Як відзначалося вище, кожен з нескінченних циліндрів взаємодіє з пропорційним йому об'ємом рідини, тобто $M' = qM$, де M – маса циліндра з твердої фази висотою h:

$$M = V\rho = \pi R^2 h \rho.$$

Тоді

$$p_{вх} = \frac{\beta}{\pi R^2 h \rho q}\Delta t 2\pi R h \rho = \frac{2\beta}{Rq}\Delta t.$$

Знаючи умовні перехідні ймовірності й проводячи синтез процесу за фрагментами, як це описано в розділі 2, знайдемо ймовірності переходів частинки з кожної ділянки в сусідні з нею. Введемо такі позначення:

$$S_1 = p_{ij}^{(-1,0)} + p_{ij}^{(1,0)};$$

$$S_2 = p_{ij}^{(0,-1)} + p_{ij}^{(0,1)}.$$

Тоді

$$\tilde{p}_{ij}^{(-1,0)} = p_{ij}^{(-1,0)} \frac{1 - S_2}{1 - S_1 S_2};$$

$$\tilde{p}_{ij}^{(1,0)} = p_{ij}^{(1,0)} \frac{1 - S_2}{1 - S_1 S_2};$$

$$\tilde{p}_{ij}^{(0,-1)} = p_{ij}^{(0,-1)} \frac{1 - S_1}{1 - S_1 S_2};$$

$$\tilde{p}_{ij}^{(0,1)} = p_{ij}^{(0.1)} \frac{1 - S_1}{1 - S_1 S_2};$$

$$p_{ij}^{(0,0)} = 1 - p_{ij}^{(0,-1)} - p_{ij}^{(0,1)} - p_{ij}^{(-1,0)} - p_{ij}^{(1,0)}.$$

Викладений підхід, заснований на розбивці процесу на фрагменти і їхній наступний синтез, дозволяє спростити аналіз дифузійних процесів, що відбуваються в екстракторі. З його допомогою можна досліджувати як процеси до виходу на стаціонарний режим, так і знаходити сталий стаціонарний розподіл.

8.4 Стаціонарний режим

Найбільш важливим у теоретичному й практичному відношенні є сталий процес масообміну, що протікає в промислових екстракторах. При заданому режимі роботи екстрактора частинки рухаються уздовж апарата в протитечію рідини, в одному напрямку з нею або комбінованим чином, так що в кожному поперечному перерізі апарата концентрація рідини й середня концентрація часток, що екстрагують, залишаються незмінними. Якщо система координат пов'язана з апаратом, то процес буде квазістаціонарним. Істотною є тільки швидкість у напрямку однієї з осей координат, оскільки всі інші переміщення частинок не впливатимуть на концентрацію.

У промислових екстракторах неперервної дії [99] постійно подаються сировина та вода й відбираються гніт (відпрацьовані залишки стружки цукрового буряка) і водяний розчин цукру. Нехай за проміжок часу t подається маса ΔM сировини (з розрахунку на кожен з розглянутих нескінченних циліндрів):

$$\Delta M = Svt = \pi R^2 vt\rho,$$

де v – швидкість руху цукрової стружки вздовж апарата. Маса ΔM рівномірно розподілена між шарами й подається вектором $\Delta p = p_0 \Delta M,$ де p_0 – початковий розподіл між ділянками.

Введемо t поглинаючих станів, у які попадатиме стружка й вода з розчиненим у ній цукром і з яких відбувається їхній відбір. Складемо матрицю P з імовірностей переходів зі всіх ділянок, крім поглинаючих. Відмітимо, що ця матриця не буде стохастичною, оскільки в деяких рядках сума елементів буде меншою 1.

Нехай p^* – розподіл маси цукру при стаціонарному режимі. Тоді

$$P^T p^* + \Delta p = p^*$$

$$p^* = \left(E - P^T\right)^{-1} \Delta p,$$

$$p^* = \left(E - P^T\right)^{-1} p_0 \Delta M.$$

У початковий момент цукор рівномірно розподілений між шарами (пропорційно їхньому об'єму):

$$p_{0i} = \frac{\pi\left(\left(\frac{R}{m}i\right)^2 - \left(\frac{R}{m}(i-1)\right)^2\right)}{\pi R^2} = \frac{2i-1}{m^2}.$$

Як приклад розглянемо дифузійний апарат DdS [98] протиточного типу.

Довжина апарата – $H = 20,5$ м.

Швидкість руху стружки вздовж апарата – $v = 11,592$ м/год.

Відношення витрат твердої й рідкої фаз – $q = 1,38$.

Наведений радіус стружки – $R = 1,88 \cdot 10^{-3}$ м.

Розділимо екстрактор вздовж довжини на $n = 11$ ділянок по $h = 1,86$ м кожна. Циліндри, що апроксимують стружку, розіб'ємо на $t = 5$ шарів. Коефіцієнти дифузії сахарози в буряку D й масовіддачі β наведені в табл. 8.1.

Таблиця 8.1 – **Коефіцієнти дифузії й масопередачі сахарози в апараті**

Номер ділянки	Коефіцієнт дифузії сахарози в буряку, $D \cdot 10^5$, м/год	Коефіцієнт масовіддачі β, м/год
1	0,280	1,83
2	0,420	0,38
3	0,415	1,85
4	0,380	2,59
5	0,365	3,07
6	0,363	0,59
7	0,323	0,35
8	0,282	2,15
9	0,250	0,13
10	0,229	0,4
11	0,225	0,19

Провівши розрахунки за викладеним вище методом, отримаємо наступні значення концентрації сахарози (табл. 8.2). Порівняння результатів розрахунку з дослідними даними, наведеними в [98], говорить про застосовність запропонованого методу для розрахунку стаціонарного режиму дифузійного апарата, що є основною задачею під час проектування й аналізу роботи промислових екстракторів неперервної дії. Водночас, використання марковського процесу для моделювання екстракції дозволяє проводити дослідження обмінних процесів не тільки в стаціонарному режимі, але й до виходу на нього.

Запропоновані в розділі методи розрахунку концентрації досить складні для ручних обчислень, у зв'язку з чим доцільною є їх програмна реалізація. Мовою програмування був обраний Borland Delphi. Причинами такого вибору послугували висока швидкість і можливість побудови зручного користувальницького інтерфейсу. Основна форма програми слугує для введення вихідних даних – коефіцієнтів дифузії в кожній зоні екстрактора, коефіцієнтів масовіддачі й т.д. Результатами розрахунку є таблиця, що містить імовірності переходів частинки в сусідні ділянки й розподіл концентрації вздовж робочого об'єму екстрактора.

Таблиця 8.2 – **Концентрація цукру в соці цукрового буряка й воді**

Номер ділянки	Середня концентрація цукру, %	
	В соці буряка	У воді
1	19,5	13,5
2	17,9	14,1
3	16,7	14,5
4	15,8	12,9
5	15,0	10,8
6	14,3	8,4
7	13,7	6,8
8	12,8	5,4
9	12,7	3,3
10	12,2	2,6
11	11,6	0,9

ВИСНОВОК

На численних модельних прикладах зроблений чисельний аналіз екстрагента явищ фокусування й стабілізації. З цією метою розглянуто неоднорідні марковські процеси, інфінітезимальні матриці яких отримували збурення, що мають різні порядки зростання. Вперше поставлено й розв'язано задачу про стабілізацію розподілу ймовірностей неоднорідних марковських процесів зі змінним числом станів.

Обґрунтовано застосовність методу збурень інфінітезимальних матриць при стабілізації розподілів марковських процесів з континуальною множиною станів. Запропонований при цьому підхід дозволяє робити дослідження таких процесів за допомогою відповідним чином обраних марковських процесів зі скінченним числом станів.

Уперше зроблено детальний аналіз процесів випадкових блукань на графах різних видів (графи, для окремих компонент яких можлива їх часткова стабілізація, графи зі змінним числом станів, багатошарові графи, графи, що містять зони Саргасса). Досліджено задачу про стабілізацію процесу блукань на графах перерахованих типів. Зазначено умови, під час виконання яких, така стабілізація можлива.

В роботі вдосконалено методи стабілізації розподілу ймовірностей неоднорідних марковських процесів в околі заданої функції часу, що відіграє роль розподілу ймовірностей як для фіксованого, так і для довільного початкового розподілу. Отримані результати використовуються для дослідження швидкості збіжності до фінального розподілу й оцінки точності σ-фокусування. Вони також можуть використовуватися для керування марковським процесом шляхом цілеспрямованого впливу на інфінітезимальну матрицю процесу.

Запропонований спосіб керування процесом, що протікає в рідкій суміші за допомогою напрямних збурень, які впливають на рідку суміш через малі проміжки часу. Сумарний ефект, що виникає за рахунок таких впливів, призводить до стабілізації процесу на заданому часовому проміжку.

Розроблено методику відновлення перехідних імовірностей марковського процесу за перехідними імовірностями його фрагментів. Сформульовано й доведено теорему про необхідні й достатні умови такого синтезу. Розроблено алгоритм оцінювання стохастичної матриці марковського процесу для випадку, коли фрагменти містять випадкові помилки, заснований на мінімізації деякої додатньо визначеної квадратичної форми. Проведено програмну реалізацію запропонованих алгоритмів.

Для випадку нормально розподілених помилок у перехідних імовірностях фрагментів побудовано статистичний критерій, що дозволяє оцінити вірогідність синтезованої матриці процесу. Даний критерій використовується для перевірки гіпотези про те, чи дійсно вихідні дані є фрагментами деякого марковського процесу.

Знайдено достатні умови, під час виконання яких має місце збіжність щільності розподілу ймовірностей дифузійного процесу до граничної щільності за скінченний проміжок часу. Отримані результати можуть використовуватися для оцінки часу виходу процесу на сталий режим.

Запропонований метод розрахунку екстракційних процесів щодо здобування цукру із цукрового буряка. Розроблена методика і її програмна реалізація корисні на етапі проектування екстракційних апаратів у таких випадках: для аналізу процесу екстракції до його виходу на стаціонарний режим і оцінки необхідного для цього часу; для визначення виходу готового продукту (цукру) після досягнення стаціонарного режиму.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Аксельруд Г.А., Лысянский В.М. Экстрагирование. Система твердое тело – жидкость. – Л.: Химия, Лен, отд., 1974. – 254 с.

2. Алгоритмы фокусировки дискретных марковских систем на заданное стационарное распределение / Герасин С.Н., Дикарев В.А., Числив Н.И.; ХТУРЭ. – Харьков, 1996. – 9с.– Рус. – Деп. в. ГНТБ Украины 12.08.96, № 1710 – Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ /ДНТБ України, №1, 1997.

3. Анисимов В.А. Асимптотическое укрупнение неоднородных марковских и полумарковских систем с произвольным пространством состояний // ДАН УССР, 1981 А, – № 12. – С. 3–6.

4. Антонец В.А., Антонец М.А., Кудряшов А.В. О влиянии коллективных эффектов на течение крови в сети мелких сосудов // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пущино. – 1982. – С. 108–118.

5. Балабудкин М.А. Совершенствование технологии изготовления лекарств путем применения роторно-пульсационных аппаратов. // Хим.– форм. журнал. – 1978. – №5. – С.114–117.

6. Балабудкин М.А., Леквеишвили М.В. Усовершенствование процесса экстракции в диффузорах. // Хим.–фарм. журнал. – 1977. – № 8.– С. 62–64.

7. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 511 с.

8. Басманов А.Е. Исследование диффузии с помощью марковских процессов // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 2. – С. 53–54.

9. Басманов А.Е. Оценка марковского процесса по его фрагментам. // Радиоэлектроника и информатика. – 1998.– № 1.– С. 72–73.

10. Басманов А.Е. Синтез марковских процессов в широком смысле // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 2. – С. 64–67.

11. Басманов А.Е. Синтез марковского процесса по его фрагментам // 1-й Международный молодежный форум "Электроника и молодежь в XXI веке": Тез. докл. –Харьков: ХТУРЭ. – 1997. – С. 79.

12. Басманов А.Е., Герасин С.Н., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Фокусировка распределений марковских процессов в широком смысле // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 3. – С. 15–16.

13. Басманов А.Е., Дикарев В.А. Стабилизация марковского процесса в окрестности распределения, заданного на конечном временном промежутке // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 8. – С. 69–71.

14. Басманов А.Е., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Восстановление дискретной цепи Маркова по ее фрагментам // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 7. – С. 93–95.

15. Басманов А.Е., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Приложение условных вероятностей к марковским процессам // Сб. Автоматизированные системы управления. ХТУРЭ. – 1998. – N 107. – С. 17–21.

16. Басманов Є.І., Басманов О.Є. Аналіз структури відтворення населения // Вісник Харківського національного університету. – 1999. – № 455. – С. 90–92.

17. Басманов Є.І, Басманов О.Є. Моделювання розміщення продуктивних сил // Сборник научных трудов Харьковского института социального прогресса. – 1999. – Выпуск 4. – С. 51–54.

18. Басманов Є.І, Басманов О.Є. Моделювання та прогнозування вікової структури населения // Захист довкілля від антропогенного навантаження. – 1999. – № 1. – С. 101–105.

19. Бережная Л.А., Пшуков Ю.Г., Куянцева А.М. О производстве извлечения травы горицвета экстрагированием с измельчением сырья в водной среде // Фарм. журнал. – 1979.– № 1. – С. 59–62.

20. Бобылев Р.В. Об экстрагировании растительного сырья в турбулентном потоке экстрагента. // Биофармацевтические аспекты получения и назначения лекарств. – М.: 1971. – С. 46–50.

21. Бондаренко М.Ф., Басманов А.Е. Восстановление финального распределения вероятностей для процесса блуждания на графе // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 8. – С. 87–90.

22. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Кириллов А.Б., Коваленко Е.И., Крюков В.И. Об оценке синаптических весов нейронных схем при многомерном анализе импульсной активности. // Взаимодействующие марковские процессы и их применение в биологии. Пущино. – 1979. С. 152–177.

23. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Кириллов А.Б., Коваленко Е.И., Крюков В.И. Кратковременная память как метастабильное состояние. Диффузионная аппроксимация // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пущино. – 1982. – С. 88–98.

24. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, – М.: Наука, 1972. – 428 с.

25. Боровков А.А. Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 432 с.

26. Браверман Э.М. О восстановлении коэффициентов дифференциальных уравнений //Автоматика и телемеханика. – 1966.– № 3. – С. 17–22.

27. Броунштейн Б.И., Железняк А.С. Физико-химические основы жидкостной экстракции. – М: Химия, 1966. –252 с.

28. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. – 464 с.

29. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974.– 415 с.

30. Валеев К.Г., Насимов Х.А. Необходимые и достаточные условия эргодичности конечного неоднородного процесса Маркова // Киев. ин-т народн. х-ва. – Киев, 1991. 9 с. – Деп. в УкрНИИНТИ. 04.04.91, № 437 – Ук 91.

31. Валеев К.Г., Насимов Х.А. Необходимые и достаточные условия эргодичности конечнозначных неоднородных цепей Маркова // Киев. ин-т народн. х-ва. – Киев, 1991. 9 с. – Деп. в УкрНИИНТИ. 04.04.91, № 438 – Ук 91.

32. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990. –376 с.

33. Васильев А.В. Описание стационарных вероятностей некоторых марковских систем взаимодействия // Проблемы передачи информации, вып. 4. – 1975. – С. 109–112.

34. Васильев Н.Б., Добрушин Р.Л., Пятецкий-Шапиро И.И. Марковские процессы на бесконечном произведении дискретных пространств.// Советско-японский симпозиум по теории вероятностей. Хабаровск. – 1969. – С. 3–28.

35. Васильев Н.Б.. Митюшин Л.Г., Пятецкий-Шапиро И.И., Тоом А.Л. Операторы Ставской. Препринт ИПМ, № 12, 1973.

36. Вентцель А.Д., Фрейндлин М.И. О малых случайных возмущениях динамических систем // УМН – 1970. – Т. 25. – В. 1. – С. 3–55.

37. Вентцель Е.С., Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1958. – 423 с.

38. Веприк А.Е., Герасин С.Н., Дикарев В.А. Методы и алгоритмы фокусировки распределений марковских процессов. – Харьков: ХТУРЭ, 1997. – 160 с.

39. Виноградова О.С. Гиппокамп и память. – М.: Наука, 1975. – 332 с.

40. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

41. Герасин С.Н. Проблемы стабилизации распределений неоднородных марковских систем // Ин-т содержания и методов обучения. – Харьков: ХТУРЭ, 1999. – 212 с.

42. Герасин С.Н., Дикарев В.А., Родзинский А.А. Расщепление процесса на несвязанные фрагменты с одновременной фокусировкой в каждом из них // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 3. – С. 111–114.

43. Герасин С.Н., Дикарев В.А., Числив Н.И. Существование предельных вероятностей для конечных процессов Маркова с убывающими к нулю временными промежутками перехода // Доповіді Національної академії наук України. – 1998. – № 7 – С. 15–19.

44. Герасин С.Н., Дикарев В.А., Слипченко Н.И. Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов. //Доповіді Національної академії наук України. –2000. – № 8. – С. 90–93.

45. Герасин С.Н., Кириченко Л.О., Родзинский А.А. Анализ эргодического режима бесконечных марковских цепей методом редукции // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 1999. – Вып. 109. – С. 61–66.

46. Герасин С.Н., Кириченко Л.О., Родзинский А.А. Применение Марковских моделей фармакинетики при анализе стабильности лекарственных форм // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 2. – С. 107–109.

47. Герасин С.Н., Родзинский А.А. Моделирование динамики нейронной структуры, обладающей свойством кратковременной памяти // Сборник науч. трудов 4-й Межд. конф. «Теория и техника передачи, приема и обработки информации», Харьков. – 1998.– С. 157–158.

48. Герасин С.Н., Четвериков Г.Г. Марковские модели взаимодействующих информационных систем // Друга Українська конференція з автоматичного керування. – Львів. – 1995. – Т.4. – С. 50–51.

49. Гихман И. И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

50. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук, думка, 1968. – 354 с.

51. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 237 с.

52. Гончаренко Г.К. Экстракция лекарственных веществ из растительного сырья. – Харьков, 1972. – 50 с.

53. Грановский М.Г., Лавров И.С., Смирнов О.В. Электрообработка жидкостей. – Ленинград: Химия, 1976. – 216с.

54. Гуревич Б.М. Конечные аппроксимации бесконечных неотрицательных матриц и сходимость равновесных распределений // Доклады РАН, 1996. – Т. 347, № 6. – С. 732–735.

55. Демиденко Н.Д. Моделирование и оптимизация тепломассобменных процессов в химической технологии. – М.: Наука, 1991. – 239 с.

56. Демидович Б.П., Марон М.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

57. Дикарев В.А. Локальные возмущения и фокусировка распределений марковских процессов // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 2. – С. 23–25.

58. Дикарев В.А. Расщепление марковских процессов на несвязанные фрагменты // Харьк. техн. ун-т радиоэлектроники. – Харьков, 1996. – 11с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 14.02.96, № 524 – Ук96.

59. Дикарев В.А. Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 3. – С. 134–136.

60. Дикарев В.А. Стабилизация распределений марковского процесса в широком смысле // Радиоэлектроника и информатика. 1999. – № 4. – С. 104–107.

61. Дикарев В.А. Стабилизация марковского процесса при возмущениях его континуальных компонент // Доповіді Національної академії наук України. – 2003. – № 5.

62. Дикарев В.А. Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей // Харьк. техн. ун-т радиоэлектроники.– Харьков, 1995. – 9 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95, № 526 – Ук95.

63. Дикарев В.А. Точки эргодичности и сходимость к финальным вероятностям // Харьк. техн. ун-т радиоэлектроники. – Харьков, 1994. – 7 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 17.10.94, № 2017 – Ук94.

64. Дикарев В.А. Условия фокусировки. Расщепление марковского процесса на невзаимодействующие фрагменты // Радиоэлектроника и информатика. – 1998.–№ 4. – С. 97–100.

65. Дикарев В.А. Фокусировка распределений марковских процессов. // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 11. – С. 100–103.

66. Дикарев В.А. Фокусировка распределений марковских процессов в широком смысле. // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – №2.

67. Добрушин Р.Л. Обобщение уравнений Колмогорова марковских процессов с конечным числом возможных состояний // Математ. сборник, 1953. – Т. 33 (75). – С. 567–596.

68. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 753 с.

69. Евдокимов А.Г. Минимизация функций и её приложения к задачам автоматизированного управления инженерными сетями. – Харьков: Вища шк. Изд-во при Харьк. Ун-те, 1985. – 288 с.

70. Залесская Е.В., Кириченко Л.О., Сидоров М.В. Оценка величины σ-фокусировки неоднородного марковского процесса с помощью алгоритма ε-сети // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. Сер. Новые решения в современных технологиях. – 2000. – Вып. 80. – С. 33–35.

71. Захаров В.П., Либизов Н.И., Асланов Х.А. Лекарственные вещества из растений и способы их производства. – Ташкент: Фан, 1980. – 232 с.

72. Зейфман А.И. О квазиэргодичности устойчивости некоторых неоднородных марковских процессов // Сиб. математ. журнал. – 1989. – Т. 30, № 2. – С. 85–90.

73. Зейфман А.И. Об асимптотическом поведении решений прямой системы Колмогорова // Укр. математ. журнал – 1983 – № 5. – С. 621– 624.

74. Зейфман А.И. Об устойчивости неоднородных марковских цепей с непрерывным временем // Известия вузов. Математика. – 1991. – №7. – С. 33–37.

75. Зубов В.И. Дифференциальные уравнения вероятностных распределений // Дифференциальные уравнения – 1979. – Т. 15. – №2. – С. 351–352.

76. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: Сов. радио, 1973. – 231 с.

77. Карпелевич Ф.И. О корнях матриц с неотрицательными элементами // Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (1951). – С. 361–383.

78. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.– 740 с.

79. Киржниц Д.А. Экстремальные состояния вещества // Успехи физ. наук. – 1971. – Т. 104. Вып. 3. – С. 489–509.

80. Коваленко Е.И., Крюков В.И., Борисюк Р.М., Борисюк Г.Н., Кириллов А.Б. Нейронная память: имитационная модель поля CA_3 гиппокампа // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пущино. – 1982. – С. 77–107.

81. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория очередей. – М.: Мир, 1966. – 276 с.

82. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967. – 299 с.

83. Колмогоров А.Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи математических наук. – 1938. – №5. – С. 54.

84. Колмогоров А.Н. Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний // Бюллет. МГУ. – 1937. – № 3. – С. 1–16.

85. Комаров А.С. Марковские поля и растительные сообщества // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пущино. – 1979. – С. 6–25.

86. Комаров А.С. Об элементарных структурах растительного покрова, устойчивых к внешним нарушениям // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. – Пущино. – 1982. – С. 136 –144.

87. Копырин А.А. Теоретические основы экстракционных процессов. – Л.: ЛТИ, 1979. – 81 с.

88. Копырин А.А., Прудникова Э.В. Комплексообразование и экстракция редкоземельных элементов. – Л.: ЛТИ, 1980. – 87 с.

89. Королюк В.С. Стохастичні моделі систем. – К.: Либідь, 1993. – 135 с.

90. Котов Ю.П., Пятецкий-Шапиро И.И., Ставская О.П., Тоом А.Л. Однородные системы из формальных нейронов. // Модели нейронных структур. М.: Наука. –1970.

91. Кохонен Т. Ассоциативная память. М.: Мир. – 1980.

92. Крюков В.И. Марковские процессы взаимодействия и нейронная активность // Взаимодействующие марковские процессы в биологии. Пущино, 1977. – С. 127–145.

93. Кузнецов П.С, Петунии Ю.И. Исследования случайного блуждания в нервных сетях и математическое моделирование некоторых нейрофизиологических процессов. // Стохастическая электрофизиология. Материалы симпозиума по статистической электрофизиологии. Вильнюс, Изд-во Вильн. ун-та. – 1968. Ч. 1. – С. 315–324.

94. Кузнецов С.Е. Неоднородные марковские процессы // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. – 1982. – Т. 20. –321 с.

95. Кузнецов С.Е. Правые (неоднородные) марковские процессы и их связь с однородной теорией // ДАН СССР. – 1980. – Т. 250, №2. – С. 276–280.

96. Курочкина М.И. Экстрагирование и выщелачивание твердых веществ. – Ленинград: Химия, 1978. С. 39–40.

97. Лебедев Е.А., Лакашук А.И. Оценка максимального правдоподобия инфинитезимальной матрицы цепи Маркова с непрерывным временем // Докл. АН УССР. – Сер. А., 1986. – № 1. – С. 12–14.

98. Лысянский В.М. Процесс экстракции сахара из свеклы. Теория и расчет. – М.: Пищ. пром., 1973. – 224 с.

99. Лысянский В.М., Гребенюк СМ. Экстрагирование в пищевой промышленности. – М.: Агропромиздат, 1987. – 187 с.

100. Максимизация стационарных вероятностей одного типа однородных марковских процессов / Басманов А.Е.; ХТУРЭ. – Харьков, 1995. – 5 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 09.01.96, № 207–Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, № 1, 1997.

101. Марков А.А. Известия физико-математического общества Казанского университета. – 1906. – Т. 15, № 4. – С. 135–156.

102. Мелвин-Хьюз Э.А. Физическая химия. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. –540 с.

103. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1955. –291с.

104. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.

105. Молчанов Г.И. Интенсивная обработка лекарственного сырья. – М.: Медицина, 1981. – 205 с.

106. Молчанов Г.И. Ультразвук в фармации. М.: Медицина, 1980. – 202 с.

107. Моргалов Ю.Н., Демченко И.Г. Пространственное распределение кровотока и $P0_2$ в коре головного мозга // Физиол. журн. СССР. – 1970. – Т. 65, № 7. – С. 985–990.

108. Москаленко Ю.Е. Функциональная устойчивость системы мозгового кровообращения // Физиол. журн. СССР. – 1978. – Т. 64, № 5. – С. 589–597.

109. Нагаев С. В. Об эргодической теореме для однородных цепей Маркова // ДАН СССР. – 1982. – Т. 263, вып. 1. – С. 27–30.

110. Нагаев С.В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова // Теор. вероятностей и ее применение. – 1957 – Т. 2, вып. 4. – С. 389–396.

111. Наугольных К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде (гидродинамическое описание). – М.: Наука, 1971. – 190 с.

112. Оптимизация траектории изменения инфинитезимальной матрицы неоднородного марковского процесса / Басманов А.Е.; ХТУРЭ. – Харьков, 1996.

– 6 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 12.08.96, № 1691–Ук96 // Ан-нот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, №2, 1997.

113. Основы жидкостной экстракции / Ягодин Г.А., Каган С.З., Тарасов В.В. и др. – М.: Химия, 1981. – 400 с.

114. Пассет Б.В., Воробьева Е.Я. Технология химико-фармацевтических препаратов и антибиотиков. – М.: Медицина, 1977. – 430 с.

115. Петунии Ю.И. Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине. – Киев: Наукова думка, 1981.

116. Пирогов С.А., Синай Я.Г. Фазовые переходы первого рода для малых возмущений модели Изинга // Функцион. анализ и его прилож. – 1974. – Т. 8, вып. 1. – С. 25–31.

117. Пономарев В.Д. Экстрагирование лекарственного сырья. – М.: Медицина, 1976. – 125 с.

118. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. – 494 с.

119. Решение системы уравнений Колмогорова с медленно меняющимися параметрами / Герасин С.Н.; ХТУРЭ. – Харьков, 1996. – 6 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 12. 08. 96, № 1708 – Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, №1, 1997.

120. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. – М.: Сов. Радио, 1966. – 321 с.

121. Рогов И.А., Горбатов А.В. Физические методы обработки пищевых продуктов. М.: Пищевая промышленность, 1976. – 212 с.

122. Родзинский А.А. Марковские процессы с изменяющимся числом состояний // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 1. – С. 73–75.

123. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика: Учебник для вузов. – М: Наука, 1985. – 320 с.

124. Романков П.Г., Фролов В.Ф. Массообменные процессы химической технологии. – Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1990. – 383 с.

125. Рудобашта С.П. Зональный метод расчета непрерывнодействующих массообменных аппаратов для систем с твердой фазой // Теоретические основы химической технологии. – 1978. – Т. 8. – № 1 – С. 22–24.

126. Рудобашта С.П. Массоперенос в системах с твердой фазой. – М.: Химия, 1980.– 248 с.

127. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. – М.: Химия, 1993. – 208 с.

128. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания с применениями. – М.: Сов. радио, 1965. –209 с.

129. Сарымсаков Т.А. Об эргодическом принципе для цепей Маркова // ДАН СССР. – 1953. Т. 40, № 1. – С. 25–28.

130. Сбитнев В.И., Гуляев А.А., Брагин А.Г. Динамические модели функциональной организации гиппокампа. // Механизмы памяти и обучения. – М.: Наука, 1981.

131. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. –228 с.

132. Севастьянов Б.А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложения к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. – 1957. – Т.2. Вып. 1. – С. 106–115.

133. Сенченко Д.В. О характеристиках неоднородных марковских процессов с конечным числом состояний // Теория вероятностей и ее приложения. – 1968. – №3. – С. 548–555.

134. Сенченко Д.В. Об однозначном определении марковских процессов с конечным числом состояний // Математ. сборник. – 1966.– Т. 71 (113), № 1. – С. 30 – 42.

135. Сенченко Д.В. Финальная σ–алгебра неоднородной марковской цепи с конечным числом состояний // Математические заметки.– 1972.– Т. 12, № 3. – С 295–302.

136. Синтез стохастической матрицы по системе ее фрагментов / Басманов А.Е., Дикарев В.А.; ХТУРЭ. – Харьков, 1997. – 8 с. – Рус. – Деп. в УкрИН–ТЭИ 23.01.97, № 76–УI97 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, №1, 1998.

137. Современная математика для инженеров // Под редакцией Э.Ф. Беккенбаха. – М.:ИЛ, 1959. – 229 с.

138. Современные методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

139. Сонин И.М. Разделение струй и обобщение на неоднородный случай теоремы о разложении конечной однородной марковской цепи на эргодические компоненты // ДАН СССР. – 1989. – Т. 304, № 1. – С. 36 – 40.

140. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969. – 472 с.

141.Ставская О.Н., Пятецкий-Шапиро И.И. О некоторых свойствах однородных сетей из спонтанно активных элементов // Проблемы кибернетики. – 1968. – Т. 20. – С. 91–106.

142. Ставская О.П., Пятецкий-Шапиро И.И. Об однородных сетях из спонтанно активных элементов // Проблемы передачи информации. – 1975. – № 11. – С. 91–106.

143. Стохастические уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных марковских процессов // Проблемы передачи информации. – 1966. – № 3. – С. 1–22.

144. Стратанович Р.Л. Условные марковские и их применения к теории оптимального управления. – М.: Изд-во МГУ. – 1966. – 380 с.

145. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Фёдоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 382 с.

146. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. –736 с.

147. Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей / Дикарев В.А. – ХТУРЭ. – Харьков, 1995. – 11с – Рус – Дел. в ГНТБ Украины 28.02.95 № 526 – Ук 95.

148. Точки фокусировки и стабилизации неоднородных марковских процессов / Дикарев В.А. – ХТУРЭ. – Харьков, 1995. – 9 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 2.03.95 № 533 – Ук 95.

149. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.

150. Федосов А.А. Вероятностный анализ популяции, обитающей в сложной стохастической среде // Моделир. и диагност, упр. систем / АН УССР. Ин-т прикл. мат. и мех. – Киев, 1991. – С. 13–135.

151. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. – М.: Мир. – Т. 1, 1984. – 528 с.

152. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1937. – 987 с.

153. Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа. – М.: ИЛ, 1956. – 320 с.

154. Хинчин А.Я. Асимптотические законы теории вероятностей. – М.: Л., ОНТИ, 1936. – 95 с.

155. Ходаков Г.С. Физика измельчения. – М.: Наука, 1972. – 307 с.

156. Цирельсон Б.С. Надежное хранение информации в системе из локально взаимодействующих ненадежных элементов. // Взаимодействующие марковские процессы в биологии. – Пущино, 1977. – С. 24–38.

157. Четаев А.Н. Нейронные сети и цепи Маркова. – М.: Наука, 1985. – 126 с.

158. Численное моделирование неоднородных марковских процессов, инфинитезимальные матрицы которых имеют особенности / Веприк А.Е.,

Дикарев В.А., Забелин В.И.; ХТУРЭ. – Харьков, 1996. – 10 с – Рус – Деп. в ГНТБ Украины, № 529 – Ук96 // Аннот. в ж. Депоновані наукові роботи: РЖ / ДНТБ України, № 1, 1997.

159. Шнирман М.Г. О неединственности в некоторых однородных средах. // Взаимодействующие марковские процессы в биологии. – Пущино, 1977. – С. 38 – 44.

160. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова. – М.: Паука, 1989. – 336 с.

161. Экклс Дж. Физиология синапсов. М.: ИЛ, 1966.

162. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.

163. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.

164. Andersen P. Long-lasting facilitation of synaptic transmission. // Functions of the septo-hippocampal system. – Ciba, Elsevier, 1978.

165. Bachelier L. Ann. scient. Ecole norm. super. – 1907. – V. 17. – P. 21–26.

166. Bartolomew D.J. Stochastic Models for Social Processes. – Chichester: John Wiley & Sons, 1982. – 238 p.

167. Basmanov A. E., Dikarev V. A., Rodzinsky A. A. Behavior analyze the economic system based on indicators its regions // 3 Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ–98), – Новосибирск, 1998.

168. Basmanov A.E., Dikarev V.A., Gerasin S.N. Focusing and stabilization of distribution of Markov processes in wide sence // Proc. 3–rd Ukrainian–Scandinavian Conference in Prob. theory and Math. Stat. – Kyiv, Ukraine, 1999. – P. 22.

169. Carette Ph. Characterizations of embeddable 3x3 stochastic matrices with a negative eigenvalue // New York Journal of Mathematics. – 1991. – № 1. – P. 120 –129.

170. Chen A., Renshaw E. Existence and unique criteria for conservative uni–instantaneous denumerable Markov processes // Probab. Theory and relat. Fields. – 1993. – № 4. – P. 427– 456.

171. Chung K.L. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, second ed., X. Y., Springer, 1967. – 205 p.

172. Cox D.R. The statistical analysis of dependencies in point processes. // Stochastic point processes. – Ed Lewis P.A.W. N.Y., Willey, 1972.

173. Dikarev V.A., Gerasin S.N., Rodzinsky A.A. Stabilization of process of random walks on graphs // 3 Ukrainian–Scandinavian conf. in Probability Theory and Mathematical Statistics, Kiev, Ukraine, 1999. P. 39.

174. Dikarev V.A., Veprik A.I., Zabelin V.I. Modeling of disintegrating economy by Markov processes // 2 International conference on "Computing in economics and finance", Geneva, 1996. – p. 170–171.

175. Frydman H. The embedding problem for Markov chains with three states. // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1980 – № 87 – P. 285–294.

176. Gilpin Michael. Demographic stochasticity: a Markovian approach // J. Theor. Biol. – 1992. – № 1. – P. 1–8.

177. Huang Ying, Veriot Arthur F. Markov branching decision chains with interest–rate–dependent rewards // Prob. Eng. and Inf. Sci. – 1995. – № 1. – P. 99–121.

178. Kawasaki K. Kinetics of Ising models. // Phase transition and critical phenomena. – Cd. Domb C. and Green M., V. 2. Academic Press, 1972.

179. Kendall D.G., Renter G.E.H. The calculation of the Ergodic Projection for Markov Chains and processes with countable infinity of states // Acta Math. – 1957.– V. 97. – P. 103–144.

180. Kingman J.F.C. Continuouse time Markov processes // Proc. London Math. Soc. – 1963. – № 52. – P. 359–604.

181. Kingman J.F.C. The imbedding problem for finite Markov chains. // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. – 1962. –№ I. – P. 345–351.

182. Lederman W., Laida S. On a problem in population structure // Linear Algebra and Appl. – 1992. – № 166. – P. 97–113.

183. Little W.A. The existence of persistent states in the brain. – Math. Biosci., 1974. V. 19. – P. 101–120.

184. Marr D. A theory of cerebellar cortex. – J. Physiol., 1969. V. 202. – P. 437–470.

185. Mc. Clean Sally. Manpower planning models and their estimation // Eur. J. Oper. Res. – 1991. – № 2. – P. 179–187.

186. Mechata K.M., Duraiswamy S. A parity dependent immigration-birth-death-emigration process. // Math. Biosci. – 1992. – № 2. – P. 177–199.

187. Morgan Byron I.T. Expected size distributions in models of group dynamics // J. App. Probab. – 1993, –№ 1 – P. 1–16.

188. Rising W. Applications of generalized inverses to Markov chains // Adv. Appl. Probab. – 1991. – № 2. – P. 293–302.

189. Schwartz D. On hitting probabilities for an annihilating particle model. – Ann. Probab. – 1978. – V. 6, № 3. – P. 398–403.

190. Shaw G.L.. Vasudevan R. Persistent states of neural networks and the random nature of synaptic transmission. – Math. Biosci., 1974.

191. Singer B., Spilerman S. Fitting stochastic models to longitudinal survey data – some examples in the social sciences // Bull. Int. Statist. Inst. – 1977. – №3 (47). – P. 283–300.

192. Subelman E.J. On the class of Markov chains with finite convergence time // Stochastic Processes and their application. – 1976. – № 4. – P. 253–259.

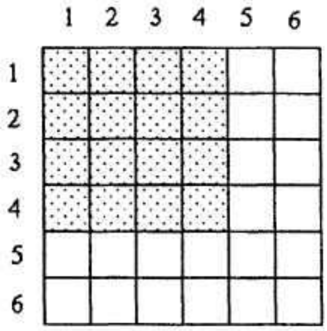
193. Wang Jianqiong, Yang Fcngxiang. Study on the death law of population // Math. Appl. – 1995 – № 1. – P. 14–19.

194. Wilson H.W., Cowan J.D. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. – Biophys. J., 1972. V. 12. – P. 1–24.

Додаток А

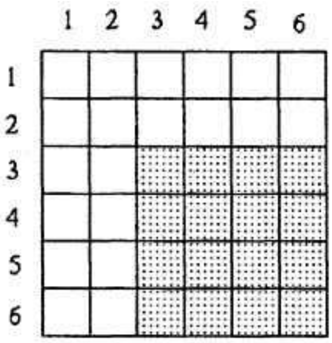
Синтез марковського процесу за його фрагментами

Приклад 1.



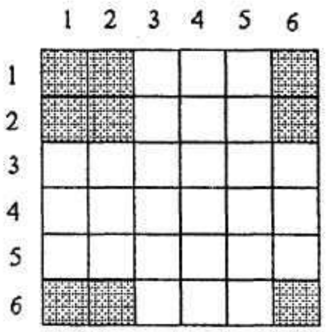
Фрагмент, що містить стани {1,2,3,4}

0.3363	0.1126	0.2640	0.2871
0.0857	0.2604	0.3306	0.3233
0.4669	0.3460	0.0259	0.1612
0.3086	0.3097	0.3023	0.0794



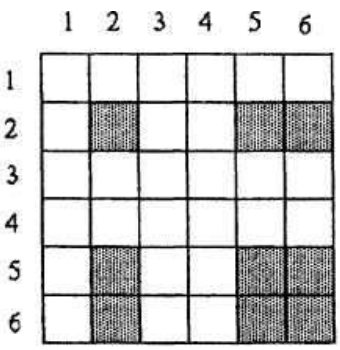
Фрагмент, що містить стани {3,4,5,6}

0.0281	0.1861	0.3981	0.3877
0.4683	0.0810	0.0743	0.3764
0.2385	0.0578	0.2655	0.4382
0.1910	0.2354	0.1781	0.3956



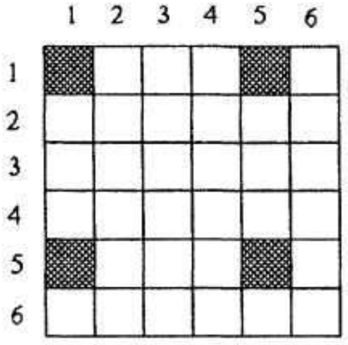
Фрагмент, що містить стани {1,2,6}

0.6461	0.1983	0.1556
0.1836	0.5031	0.3133
0.4554	0.0954	0.4492



Фрагмент, що містить стани {2,5,6}

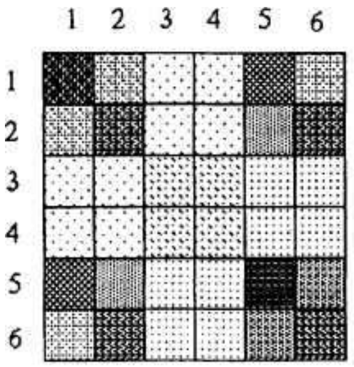
0.3661	0.4221	0.2118
0.3635	0.2363	0.4002
0.1191	0.2669	0.6141



Фрагмент, що містить стани {1,5}

0.6819 0.3181

0.7840 0.2160



Результати синтезу станів {1,2,3,4,5,6}

0.2733	0.0876	0.2137	0.2324	0.1275	0.0655
0.0614	0.1774	0.2267	0.2217	0.2066	0.1063
0.2775	0.2056	0.0150	0.0960	0.2056	0.2003
0.2404	0.2413	0.2378	0.0515	0.0362	0.1928
0.4055	0.1702	0.1013	0.0246	0.1117	0.1867
0.2711	0.0544	0.1291	0.1591	0.1184	0.2680

Сума квадратів відхилень від вихідних даних $F = 0.0004$

Перевіримо гіпотезу про те, чи є спостережувані значення фрагментами деякого марковського процесу, задаючи довірчу ймовірність p_0=0,95.

Таблиця А.1 – **Перевірка гіпотези для рядка** 1 ($\chi^2_{кр} = 12,6$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\dfrac{p_j}{\beta_i}$	$\left\lvert \dfrac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert$	$\dfrac{\left\lvert \dfrac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert}{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
1	0,8070	0,3386	0,0023	0,023	0,000529
		0,1086	0,0040	0,040	0,0016
		0,2648	0,0008	0,008	0,000064
3	0,4264	0,6409	0,0052	0,052	0,0027
		0,2054	0,0071	0,071	0,005
5	0,4008	0,6819	0	0	0
Разом, η	-	-	-	-	0,009893

Таблиця А.2 – **Перевірка гіпотези для рядка 2** ($\chi^2_{кр} = 14{,}1$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left\lvert \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert$	$\frac{\left\lvert \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert}{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
1	0,6872	0,0893	0,0036	0,036	0,0013
		0,2581	0,0023	0,023	0,0005
		0,3300	0,0006	0,006	0,000036
3	0,3451	0,1779	0,0057	0,057	0,0032
		0,5141	0,0110	0,110	0,0121
4	0,4903	0,3618	0,0043	0,043	0,00185
		0,4213	0,0008	0,008	0,000064
Разом, η	-	-	-	-	0,01905

Таблиця А.3 – **Перевірка гіпотези для рядка 3** ($\chi^2_{кр} = 12{,}6$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left\lvert \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert$	$\frac{\left\lvert \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert}{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
1	0,5941	0,4671	0,0002	0,002	0,000004
		0,3461	0,0001	0,001	0,000001
		0,0252	0,0007	0,007	0,000049
2	0,5169	0,0290	0,0009	0,009	0,000081
		0,1857	0,0004	0,004	0,000016
		0,3978	0,0003	0,003	0,000009
Разом, η	-	-	-		0,000160

Таблиця А.4 – **Перевірка гіпотези для рядка 4** ($\chi^2_{кр} = 12,6$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left\lvert \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert$	$\frac{\left\lvert \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert}{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
1	0,7710	0,3118	0,0032	0,032	0,001024
		0,3129	0,0032	0,032	0,001024
		0,3084	0,0039	0,039	0,001521
2	0,5183	0,4588	0,0095	0,095	0,009025
		0,0994	0,0184	0,184	0,033856
		0,0698	0,0045	0,045	0,002025
Разом, η	-	-	-	-	0,048475

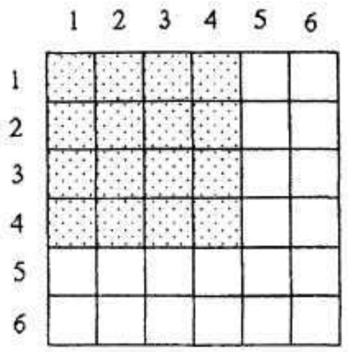
Таблиця А.5 – **Перевірка гіпотези для рядка 5** ($\chi^2_{кр} = 12,6$)

Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left\lvert \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert$	$\frac{\left\lvert \frac{p_j}{\beta_i} - \zeta_j^{I_i} \right\rvert}{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
2	0,4243	0,2387	0,0002	0,002	0,000004
		0,0580	0,0002	0,002	0,000004
		0,2633	0,0022	0,022	0,000484
4	0,4686	0,3632	0,0003	0,003	0,000009
		0,2384	0,0021	0,021	0,000441
5	0,5172	0,7840	0	0	0
Разом, η	-	-	-	-	0,000942

Таблиця А.6 – **Перевірка гіпотези для рядка** 6 ($\chi^2_{кр} = 14,1$)

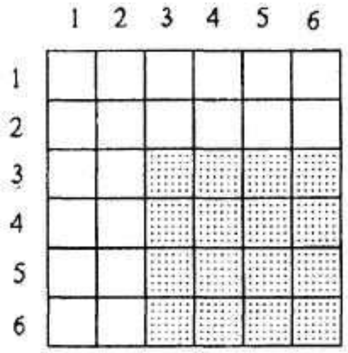
Номер фрагмента, i	β_i	$\frac{p_j}{\beta_i}$	$\left\lvert\frac{p_j}{\beta_i}-\zeta_j^{I_i}\right\rvert$	$\frac{\left\lvert\frac{p_j}{\beta_i}-\zeta_j^{I_i}\right\rvert}{\sigma_j^{I_i}}$	ζ_{ij}^2
2	0,6476	0,1914	0,0004	0,004	0,000016
		0,2358	0,0004	0,004	0,000016
		0,1755	0,0026	0,026	0,000676
3	0,5935	0,4568	0,0014	0,014	0,000196
		0,0917	0,0037	0,037	0,001369
4	0,4408	0,1234	0,0043	0,043	0,001849
		0,0015	0,0015	0,015	0,000225
Разом, η	-	-	-	-	0,004347

Приклад 2



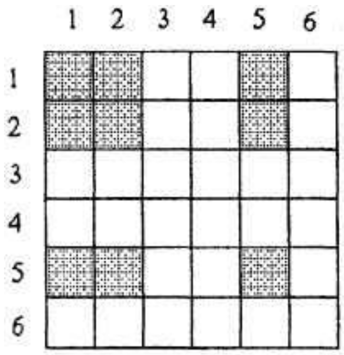
Фрагмент, що містить стани {1,2,3,4}

0.1083 0.4849 0.4059 0.0009
0.1082 0.3180 0.1637 0.4101
0.6476 0.3524 0.0000 0.0000
0.5169 0.4831 0.0000 0.0000

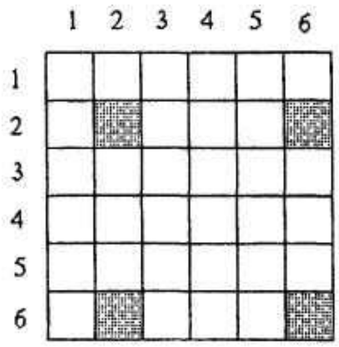


Фрагмент, що містить стани {3,4,5,6}

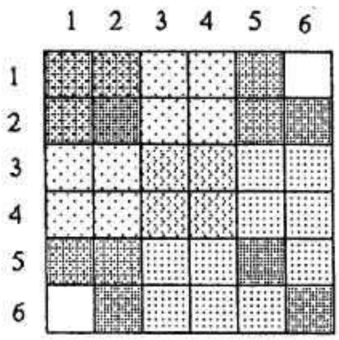
0.0000 0.0000 0.8577 0.1423
0.0000 0.0000 0.5372 0.4628
0.3922 0.0609 0.3412 0.2057
0.0129 0.4036 0.4767 0.1068



Фрагмент, що містить стани {1,2,5}
0.1639   0.7341   0.1020
0.0723   0.2126   0.7150
0.1809   0.2446   0.5745



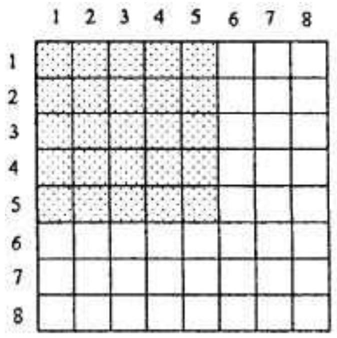
Фрагмент, що містить стани {2,6}
0.2534   0.7466
0.3921   0.6079



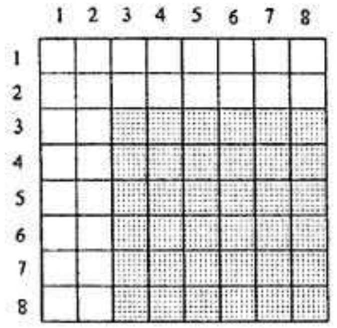
Результати синтезу станів {1,2,3,4,5,6}
У рядку 1 не було повної інформації про всі стани
0.0360   0.1058   0.0545   0.1364   0.3557   0.3117
Фрагменти, що містять стан 3, перетинались нульовими елементами.
Фрагменти, що містять стан 4, перетинались нульовими елементами.
0.0858   0.1160   0.3131   0.0486   0.2724   0.1642
У рядку 6 не було повної інформації про всі стани.

Сума квадратів відхилень від вихідних даних $F = 0.0000$.

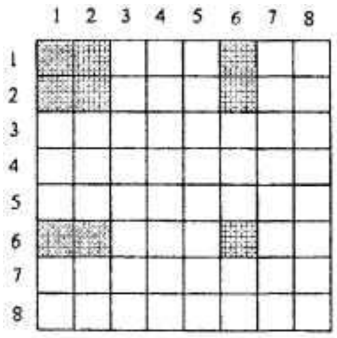
Приклад 3



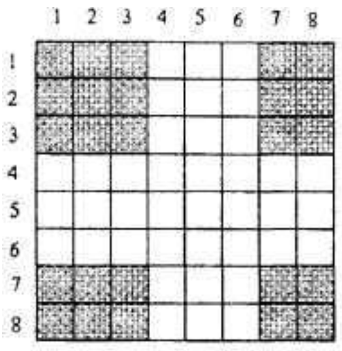
Фрагмент, що містить стани {1,2,3,4,5}
0.2507 0.2254 0.1504 0.0954 0.2781
0.0049 0.0968 0.2974 0.3367 0.2643
0.1294 0.0173 0.3138 0.3014 0.2382
0.2113 0.1306 0.2676 0.2106 0.1800
0.1944 0.2542 0.1460 0.1517 0.2538



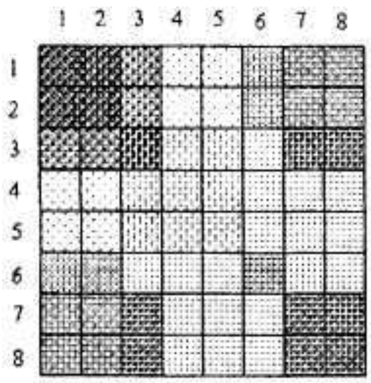
Фрагмент, що містить стани {3,4,5,6,7,8}
0.2739 0.2631 0.2079 0.0470 0.1978 0.0104
0.2295 0.1806 0.1544 0.0845 0.1691 0.1819
0.1145 0.1189 0.1989 0.1921 0.1830 0.1926
0.0778 0.2220 0.0219 0.2812 0.1925 0.2046
0.4202 0.2020 0.0075 0.1853 0.1645 0.0205
0.2060 0.0198 0.3769 0.1061 0.0099 0.2813



Фрагмент, що містить стани {1,2,6}
0.3813   0.3428   0.2759
0.0138   0.2705   0.7157
0.5660   0.2626   0.1713



Фрагмент, що містить стани {1,2,3,7,8}
0.2090 0.1879 0.1253 0.2767 0.2011
0.0060 0.1181 0.3630 0.4239 0.0890
0.1852 0.0247 0.4490 0.3242 0.0170
0.1845 0.2919 0.3635 0.1423 0.0178
0.2746 0.2199 0.2095 0.0100 0.2860



Результати синтезу станів {1.2,3,4,5,6,7,8}

0.1429	0.1284	0.0857	0.0544	0.1585	0.1034	0.1892	0.1375
0.0029	0.0577	0.1774	0.2009	0.1577	0.1527	0.2072	0.0435
0.1001	0.0134	0.2428	0.2332	0.1843	0.0417	0.1753	0.0092
0.1401	0.0866	0.1775	0.1397	0.1194	0.0653	0.1308	0.1406
0.1127	0.1474	0.0847	0.0880	0.1472	0.1422	0.1354	0.1425
0.3936	0.1827	0.0330	0.0941	0.0093	0.1192	0.0816	0.0867
0.1375	0.2176	0.2710	0.1303	0.0048	0.1195	0.1061	0.0132
0.1817	0.1455	0.1386	0.0133	0.2536	0.0714	0.0066	0.1893

Сума квадратів відхилень від вихідних даних $F = 0,0000$.

Додаток Б

Збіжність щільності розподілу ймовірностей дифузійного процесу до граничної щільності

Приклад 1

Коефіцієнт зносу – $a(t,x)=0$;

коефіцієнт дифузії – $\sigma^2(t,x)=(1-x)^2+0{,}1$;

початковий розподіл – $\phi(0,x)=0{,}5$.

Графіки щільності розподілу ймовірностей (суцільна лінія) і нульового власного розподілу (штрихова лінія) у різні моменти часу наведені нижче (рис. Б.1 – Б.5).

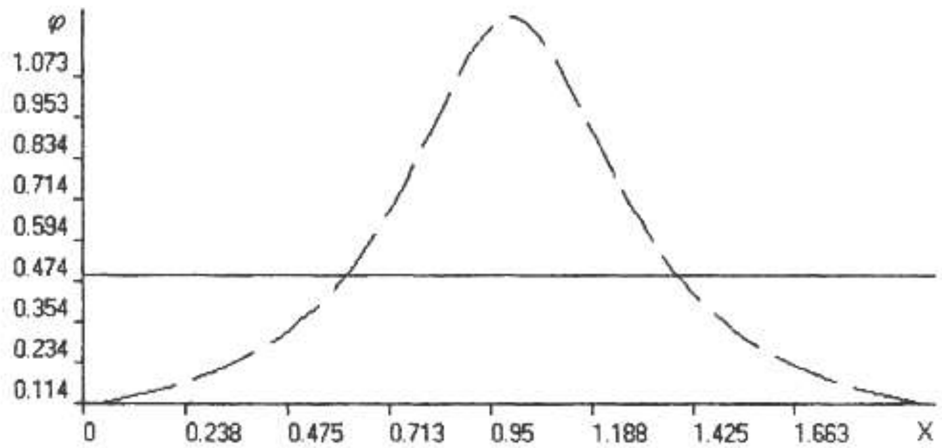


Рисунок Б.1 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=0$

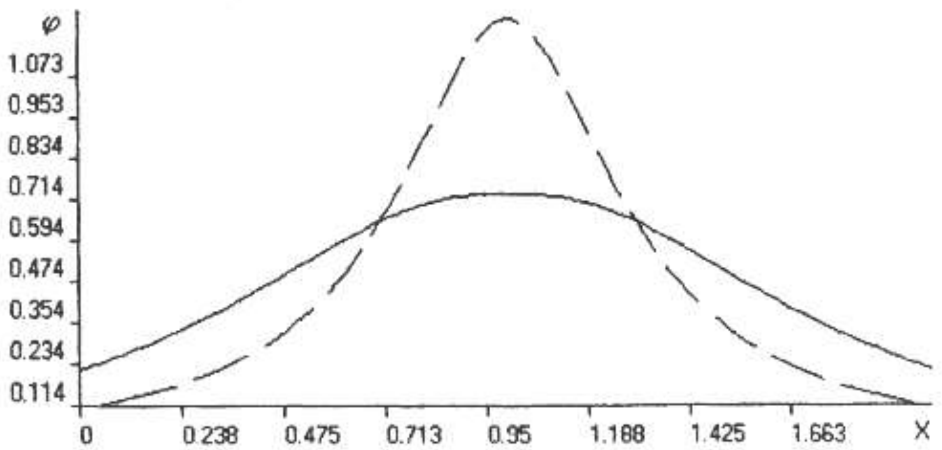


Рисунок Б.2 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=0{,}4$

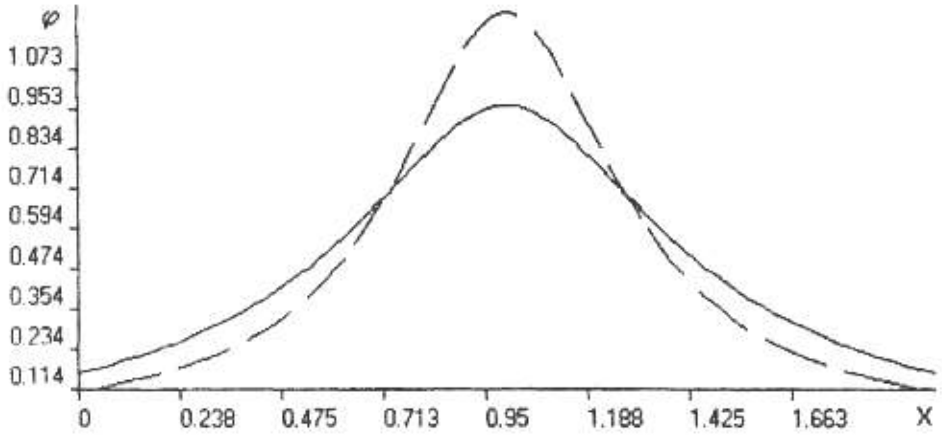


Рисунок Б.3 – Щільність розподілу ймовірностей при $t = 0,8$

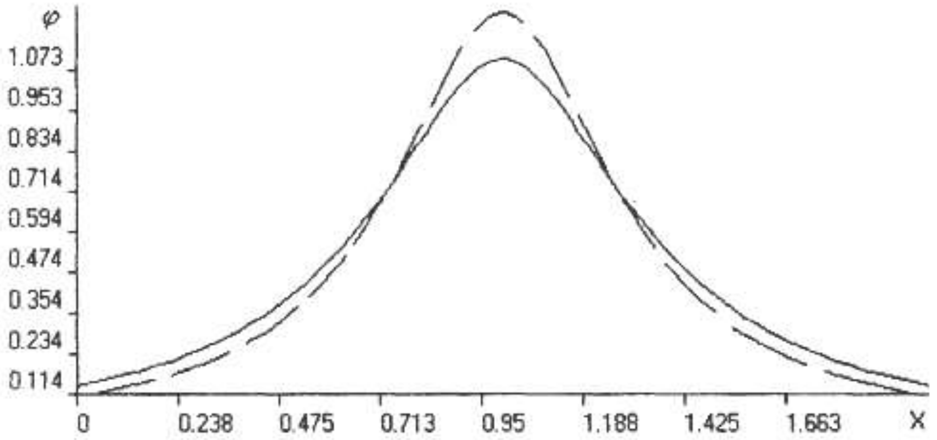


Рисунок Б.4 – Щільність розподілу ймовірностей при $t = 1,2$

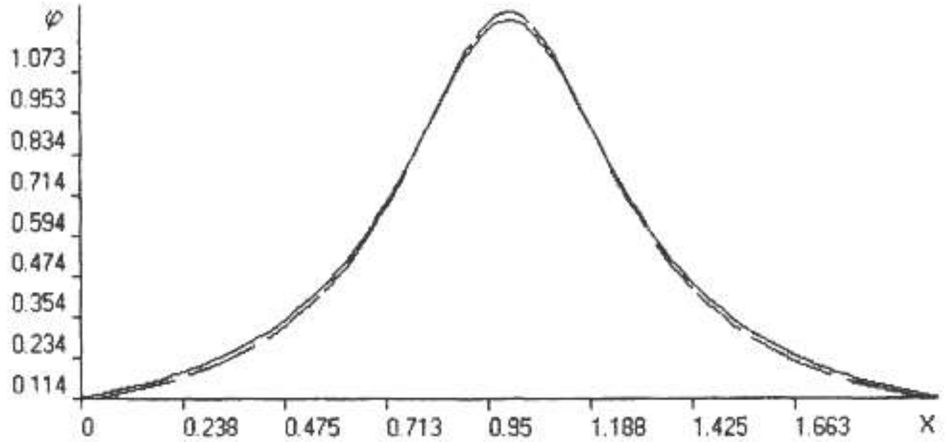


Рисунок Б.5 – Щільність розподілу ймовірностей при $t = 2$

Приклад 2

Коефіцієнт зносу – $a(t,x)=0$;

коефіцієнт дифузії – $\sigma^2(t,x)=\left(\dfrac{1}{2-t}+t\right)^2(x+1)+xt;$

початковий розподіл $-\phi(0,x)=0,5.$

Графіки щільності розподілу ймовірностей (суцільна лінія) і нульового власного розподілу (штрихова лінія) у різні моменти часу наведені нижче (рис. Б.6 – Б.10).

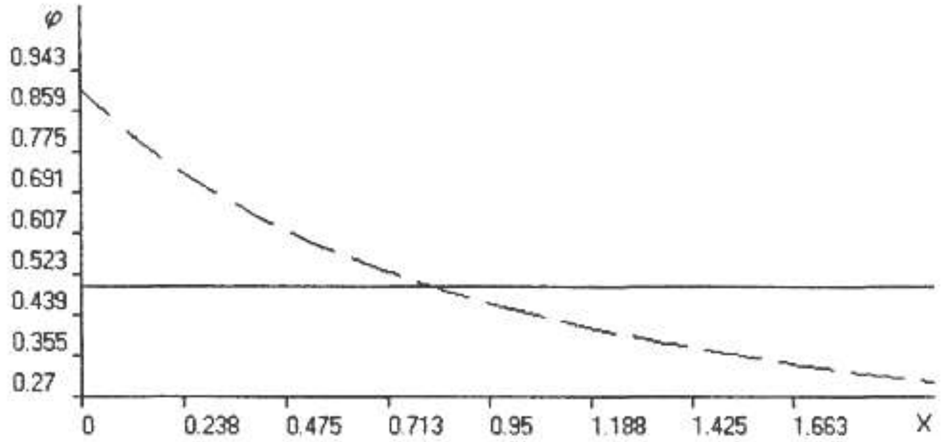


Рисунок Б.6 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=0$

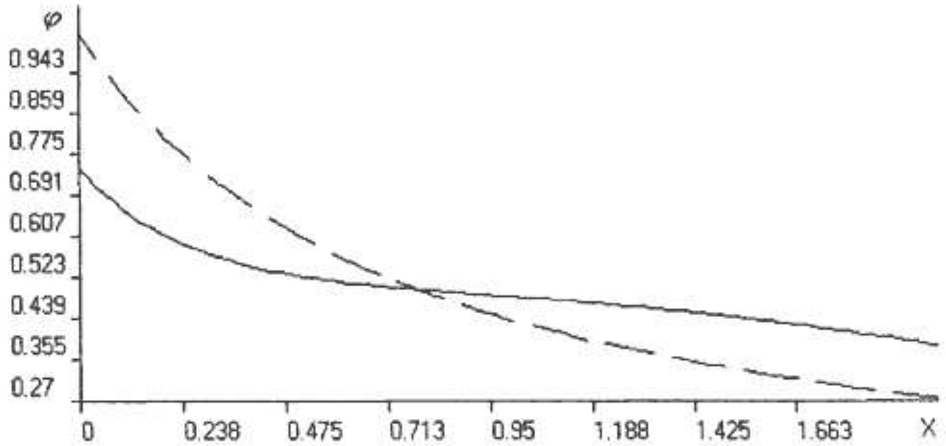


Рисунок Б.7 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=0,3$

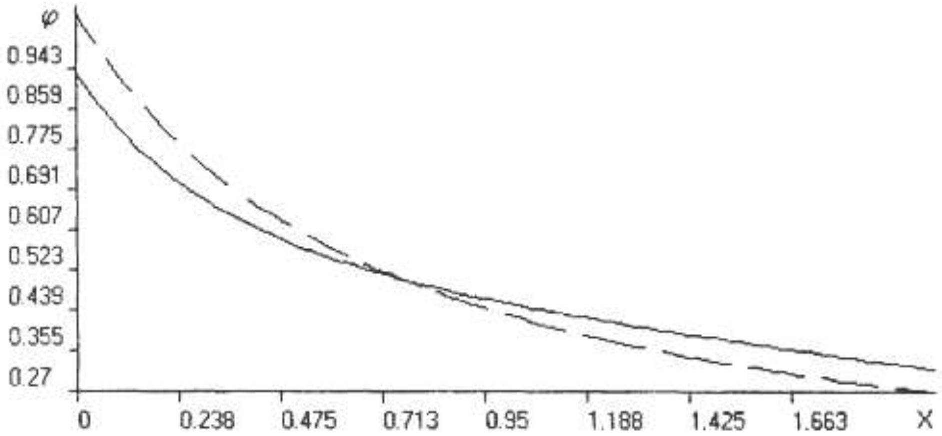


Рисунок Б.8 – Щільність розподілу ймовірностей при $t = 0,6$

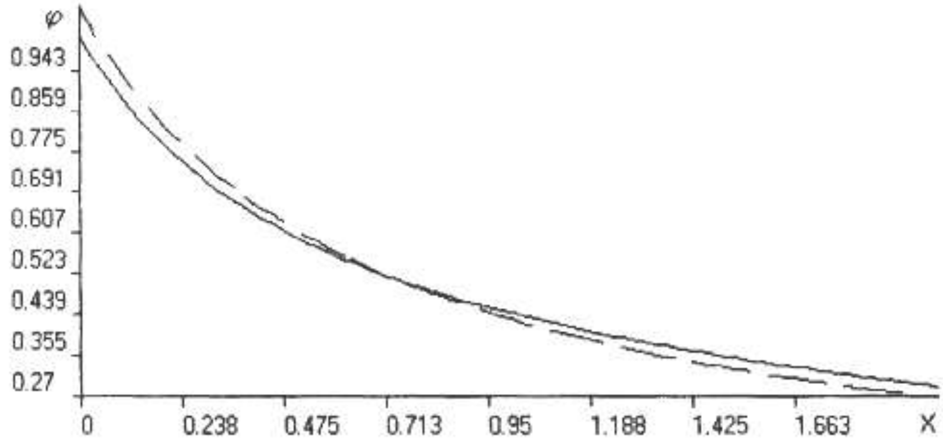


Рисунок Б.9 – Щільність розподілу ймовірностей при $t = 0,8$

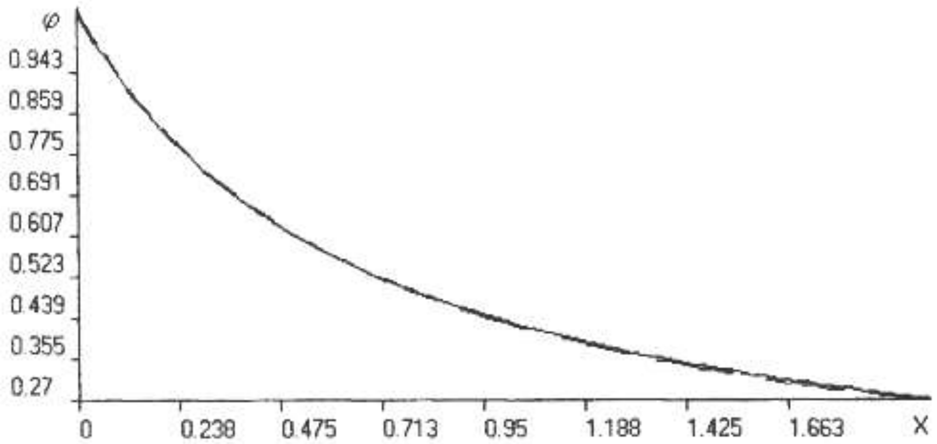


Рисунок Б.10 – Щільність розподілу ймовірностей при $t = 1,1$

Приклад 3

Коефіцієнт зносу – $a(t,x)=0$;

коефіцієнт дифузії – $\sigma^2(t,x)=\left(\dfrac{1-x}{2-t}\right)^2+(x+1)t+0{,}1$;

початковий розподіл – $\phi(0,x)=0{,}5$.

Графіки щільності розподілу ймовірностей (суцільна лінія) і нульового власного розподілу (штрихова лінія) у різні моменти часу наведені нижче (рис. Б.11 – Б.15).

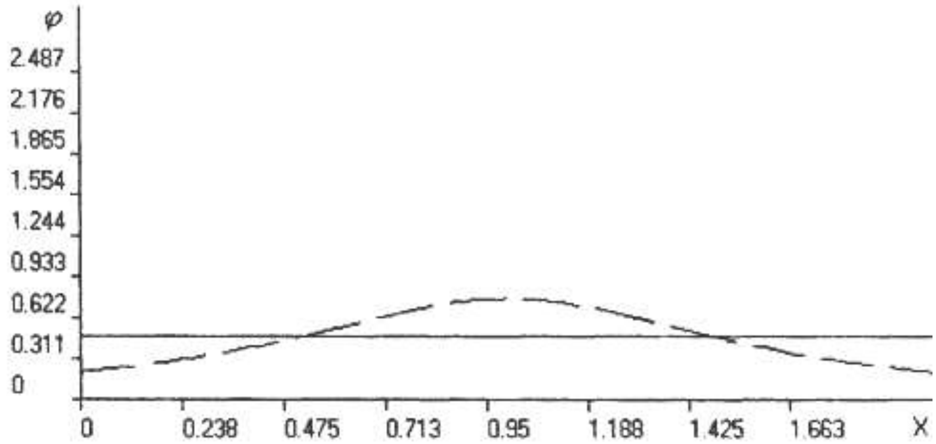


Рисунок Б.11 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=0$

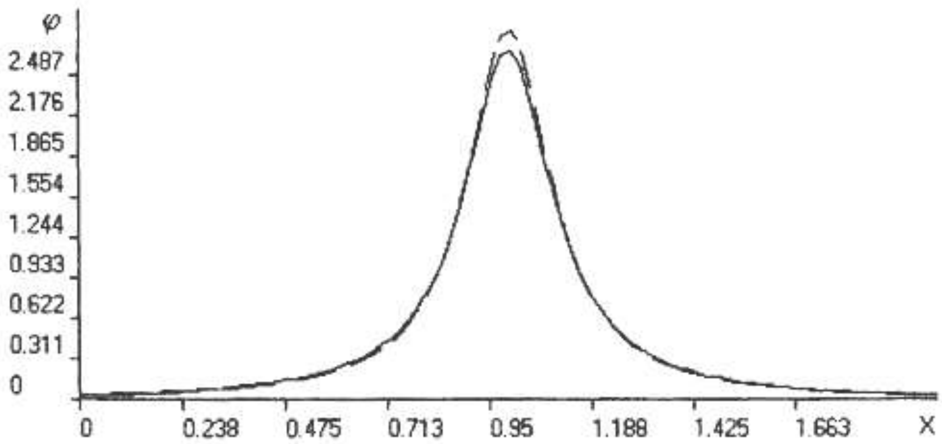


Рисунок Б.12 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=1{,}94$

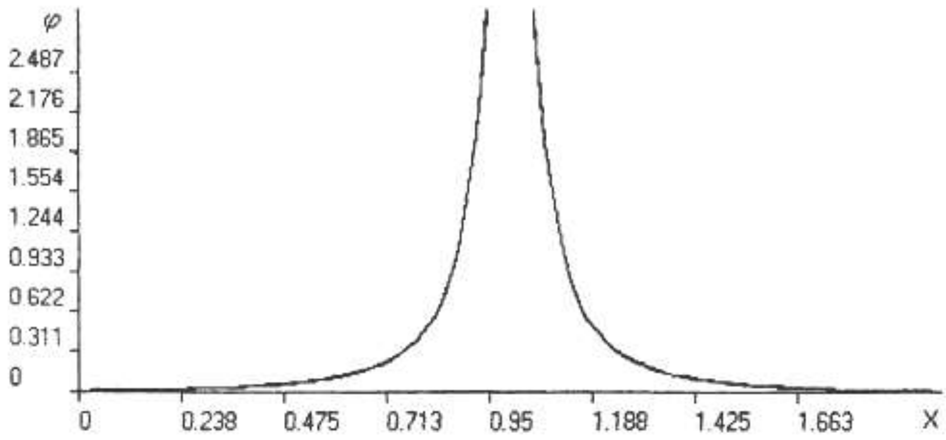


Рисунок Б.13 – Щільність розподілу ймовірностей при $t = 1{,}97$

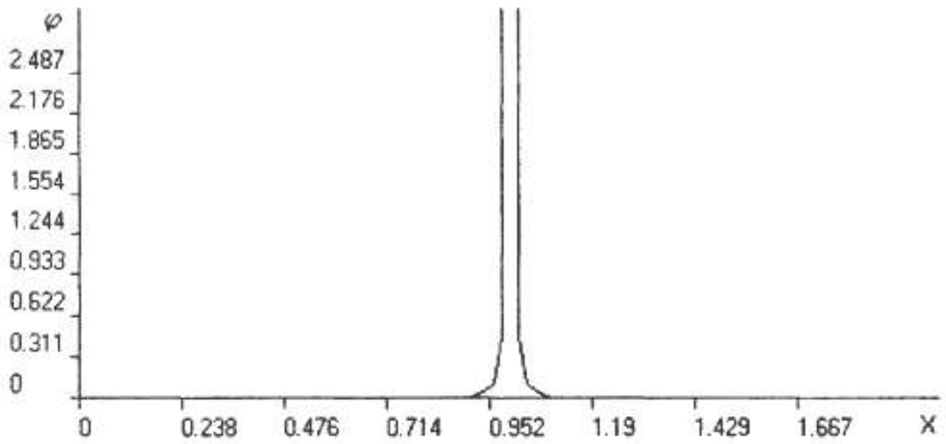


Рисунок Б.14 – Щільність розподілу ймовірність при $t = 1{,}999$

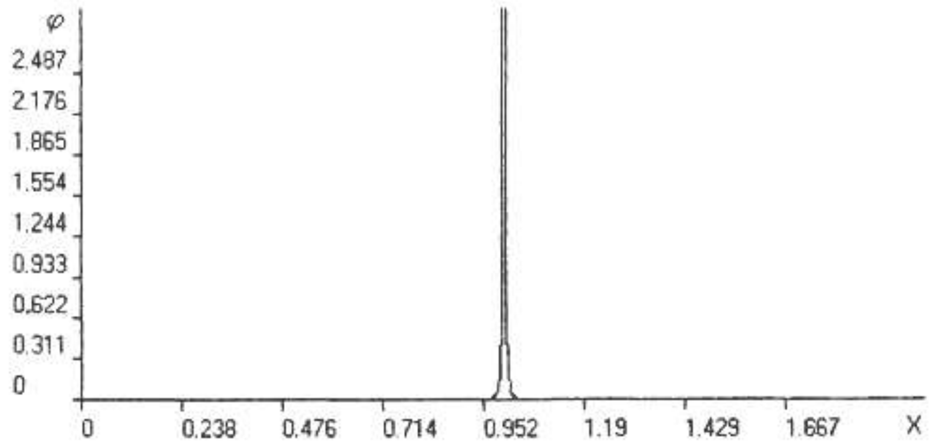


Рисунок Б.15 – Щільність розподілу ймовірностей при $t = 1{,}9999$

Приклад 4

Коефіцієнт зносу – $a(i,x)=0$;

коефіцієнт дифузії – $\sigma^2(t,x)=\dfrac{0{,}1}{(1-x)^2+2-t}$.

Графіки щільності розподілу ймовірностей (суцільна лінія) і нульового власного розподілу (штрихова лінія) для початкового розподілу $\phi(0,x)=0{,}5$. наведені на рис. Б.16, Б.17.

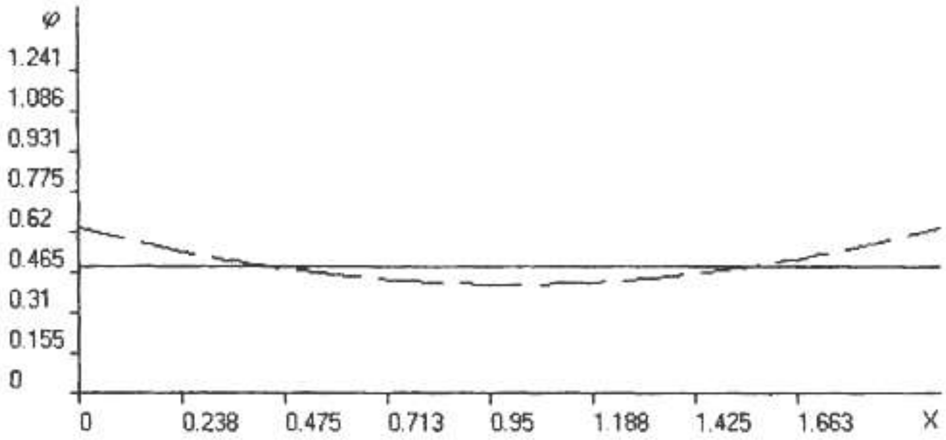


Рисунок Б.16 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=0$

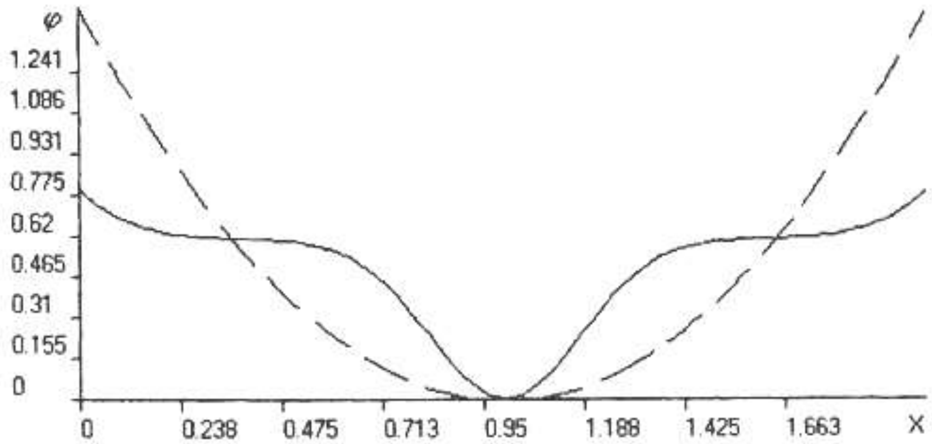


Рисунок Б.17 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=1{,}999$

Графіки щільності розподілу ймовірностей (суцільна лінія) і нульового власного розподілу (штрихова лінія) для початкового розподілу $\phi(0,x)=0,5.$ наведені на рис. Б.18, Б.19.

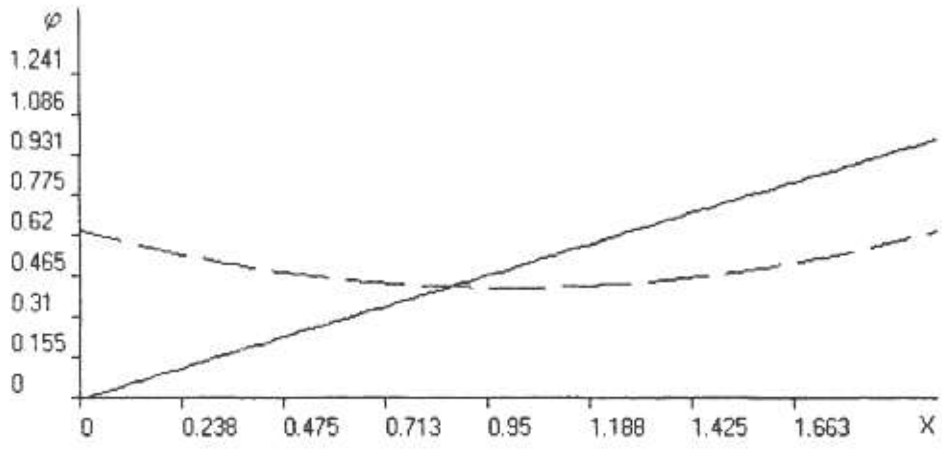


Рисунок Б.18 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=0$

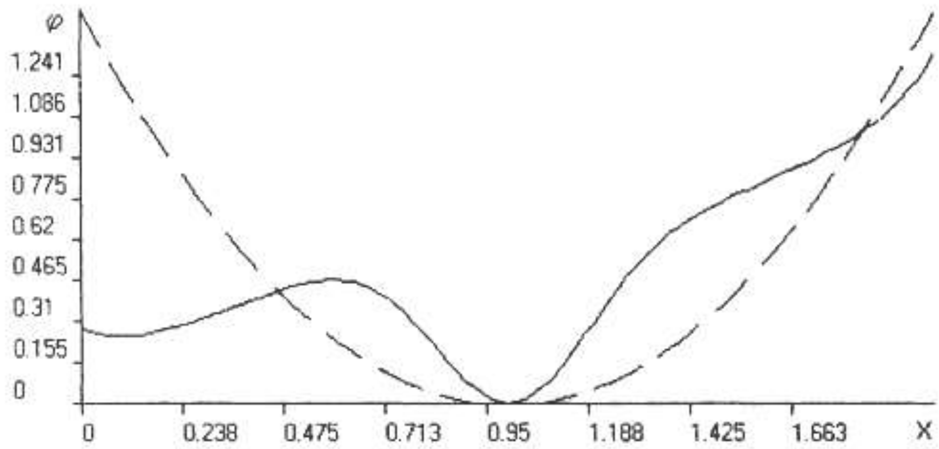


Рисунок Б.19 – Щільність розподілу ймовірностей при $t=1,999$

Додаток В

Випадкові блукання на графах

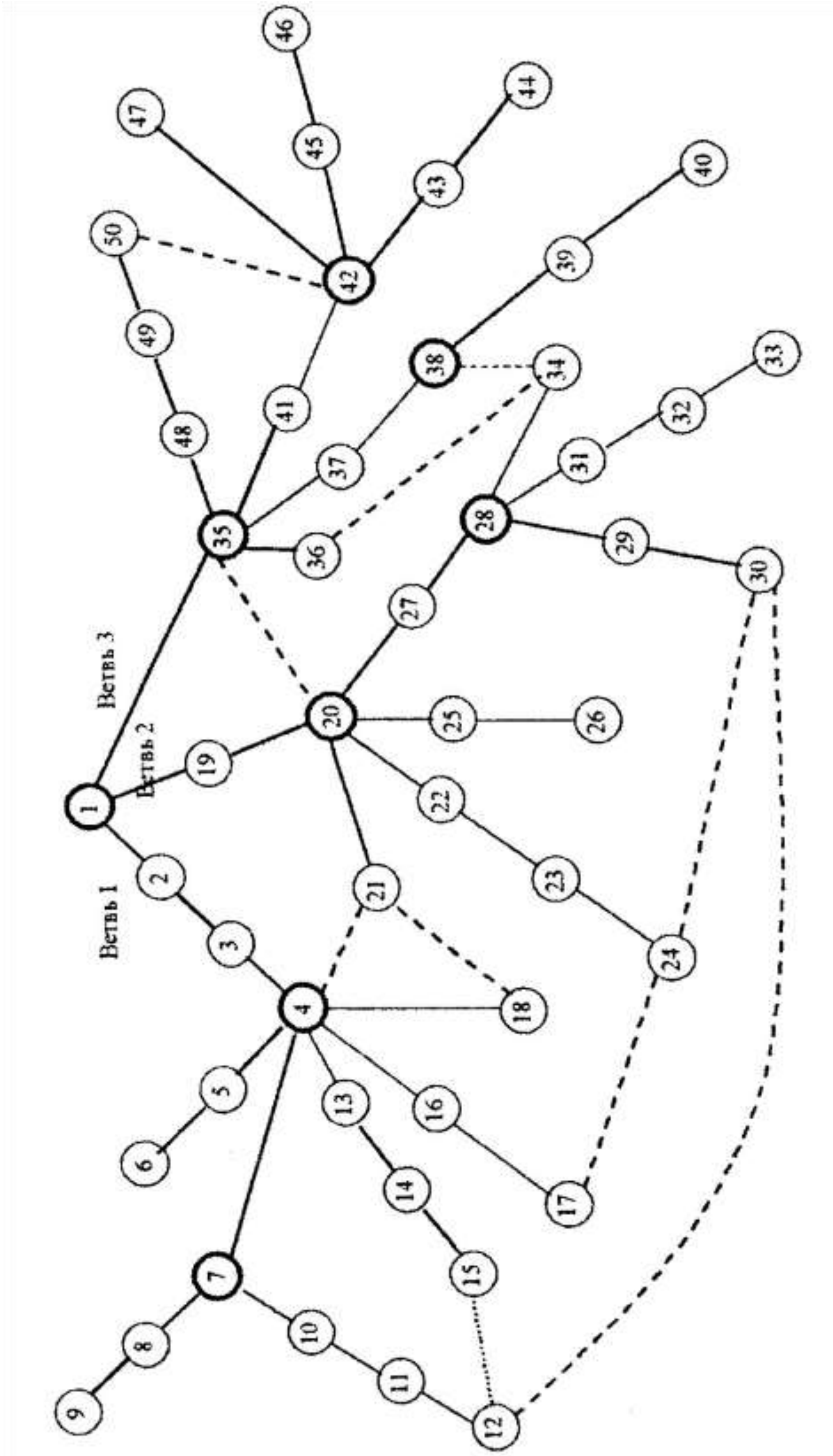


Рисунок В.1 – Граф $Г_1$

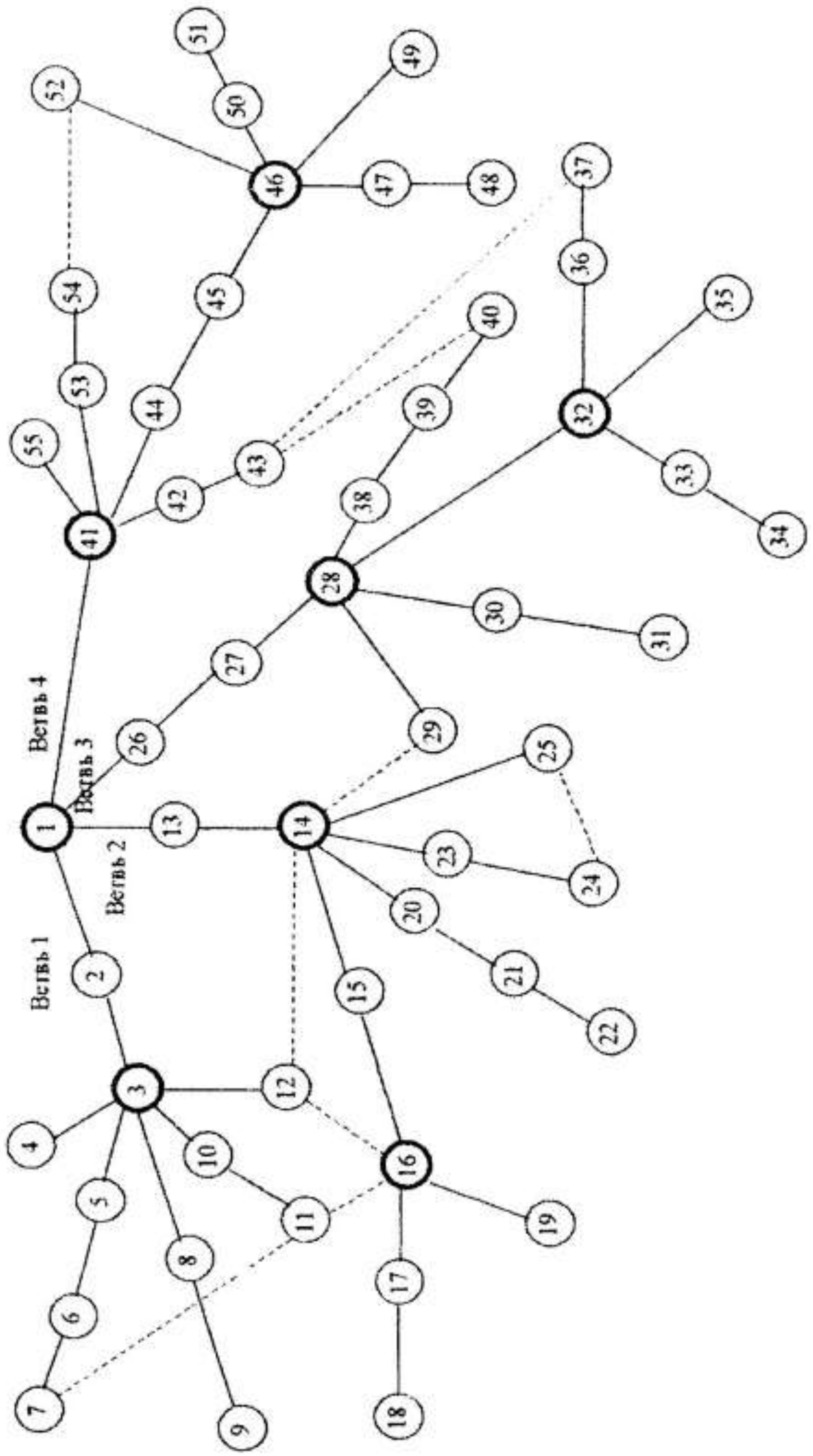


Рисунок В.2 – Граф $Г_2$

Для нотаток

План 2009 р. (ІІ півріччя), поз. 37.

Підп. до друку 13.07.09. Формат 60x84 1/16. Спосіб друку – ризографія.
Умов. друк. арк. 14,3. Облік. вид. арк. 12,1. Тираж 100 прим.
Зам. № 1-37. Ціна договірна.

ХНУРЕ, 61166, Харків, просп. Леніна, 14

Віддруковано в навчально-науковому
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Леніна, 14