

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ «СВЕРХРАЗРЕШАЮЩИХ» МЕТОДОВ ПЕЛЕНГАЦИИ ИСТОЧНИКОВ ШУМОВЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ ПРИ КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ

Д. И. ЛЕХОВИЦКИЙ

Сравнивается эффективность некоторых «сверхразрешающих» методов оценивания в АР пространственного спектра гауссовских шумовых излучений при конечном объеме обучающей выборки в максимально правдоподобных оценках их корреляционных матриц. Сравнение базируется на анализе точных или эмпирических законов распределения случайных параметров, определяющих разрешающую способность соответствующих методов по статистическим и нестатистическим критериям. Показаны существенные различия этих законов, в силу которых выводы о сравнительных достоинствах различных методов, основанные на анализе их асимптотических свойств, могут меняться на противоположные в реальных условиях выборок малого объема. Устанавливаются причины этих отличий и вытекающие из их анализа возможности повышения «быстродействия» адаптивных методов пеленгации источников шумовых излучений.

The paper presents the comparison of effectiveness of some «superresolution» methods for spatial spectrum estimation of Gaussian noise radiation in an antenna array at a finite number of a learning sample, given by the maximum likelihood estimations of their correlation matrices. The comparison is based on the analysis of exact or empirical laws of random parameters distribution determining resolution capabilities of these methods by statistical and non-statistical criteria. Essential differences of these laws are shown due to which conclusions on comparative merits of different methods based on the analysis of their asymptotic properties may change to opposite ones in real conditions of small samplings. The paper examines the reasons of the differences and possibilities to improve performance of the adaptive noise emitter location methods resulting from the analysis of these differences.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Практические потребности в «сверхразрешающих» разрешении источников шумовых излучений и повышении точности измерения их угловых координат стимулировали разработку большого числа «сверхразрешающих» методов пеленгации в АР [1-19 и др.]. Принципиальная возможность, смысл и предельные характеристики «сверхразрешения» для различных применений были впервые установлены Я. Д. Ширманом [20, 21, 34, 35]. Важную роль в развитии этого направления сыграли работы Д. П. Берга [24] и Д. Кейпона [36]. Последовавший затем поток публикаций на эту тему, в том числе обзорного характера, далеко выходит за рамки работ, приведенных в библиографическом списке данной статьи.

Достоинства «сверхразрешающих» методов обеспечиваются оптимизацией обработки (по тем или иным критериям), опирающейся на **статистические характеристики** (многомерные плотности распределения) выходных сигналов АР. В типичных для практики условиях параметрической априорной неопределенности в синтезированных алгоритмах вместо априори неизвестных истинных значений параметров распределений используются те или иные их **оценки**, формируемые по обучающим выборкам **конечного объема**. Обусловленная этим **случайность** оценок приводит и к случайности параметров, характеризующих эффективность используемых методов. Поэтому их статистически корректное сравнение должно базироваться на анализе **законов распределения** соответствующих случайных параметров.

Статистическому исследованию «сверхразрешающих» методов пространственно-временного спектрального анализа (**ПВ СА**), в том числе для решения задач пеленгации точечных источников шумовых излучений в АР, уделено большое внимание в литературе [1-16, 22, 26 и др.]. Тем не менее в связи с многочисленностью методов, решаемых ими задач и используемых критериев, эти исследования ни в коей мере нельзя считать завершенными. В данной статье в развитие [15-19] анализируются **точные** или **эмпирические** (по результатам моделирования) законы распределения спектральных функций (**СФ**) некоторых известных методов **ПВ СА** при конечном объеме обучающей выборки в максимально правдоподобной (**МП**) оценке корреляционной матрицы (**КМ**) гауссовских шумовых излучений на выходах АР.

Помимо самостоятельного значения этот анализ позволяет обосновать простые модификации рассматриваемых методов, существенно улучшающие их статистические свойства [33].

Статья организована следующим образом. В п. 2 формулируются исходные модели и допущения. В п. 3 рассматриваются потенциальные возможности разрешения-обнаружения гауссовских шумовых (по времени) квазигармонических (по пространству) сигналов при оптимальной по критерию Неймана-Пирсона обработке в гипотетических условиях полной априорной определенности. В п. 4 после краткого описания методики приводятся точные плотности распределения случайных **СФ** некоторых методов **ПВ СА** при различных объемах обучающей выборки в

МП оценках **КМ**. На этой основе сравнивается их разрешающая способность по статистическому (п. 5) и нестатистическому (п. 6) критериям. В п. 7 вскрываются причины отличий и вытекающие из них способы улучшения статистических свойств рассматриваемых методов **ПВ СА**.

2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, МОДЕЛИ И ДОПУЩЕНИЯ

Случайные спектральные функции (**СФ**) $\hat{S}(\alpha) = S(\alpha, \hat{\Psi})$ рассматриваемых методов **ПВ СА** имеют вид

$$\hat{S}_1(\alpha) = (\mathbf{X}^*(\alpha) \cdot \hat{\Psi} \cdot \mathbf{X}(\alpha))^{-1}, \quad (\text{МД})$$

$$\hat{S}_2(\alpha) = \hat{\omega}_{mm} |\mathbf{e}_m^* \cdot \hat{\Psi} \cdot \mathbf{X}(\alpha)|^{-2}, \quad m \in 1, M, \quad (\text{ЛП})$$

$$\hat{S}_3(\alpha) = \frac{\hat{\omega}_{mm} \mathbf{X}^*(\alpha) \cdot \hat{\Psi} \cdot \mathbf{X}(\alpha)}{|\mathbf{e}_m^* \cdot \hat{\Psi} \cdot \mathbf{X}(\alpha)|^2}, \quad m \in 1, M, \quad (\text{МАК}) \quad (1)$$

$$\hat{S}_4(\alpha) = \frac{\mathbf{X}^*(\alpha) \cdot \hat{\Psi} \cdot \mathbf{X}(\alpha)}{\mathbf{X}^*(\alpha) \cdot \hat{\Psi}^2 \cdot \mathbf{X}(\alpha)}, \quad (\text{БЛ})$$

$$\hat{S}_5(\alpha) = (\mathbf{X}^*(\alpha) \cdot \hat{\Psi}^2 \cdot \mathbf{X}(\alpha))^{-1}. \quad (\text{ТШ})$$

СФ $\hat{S}_1(\alpha)$ характеризует метод «минимальной дисперсии (МД)» Кейпона [1-6, 14, 22, 25], $\hat{S}_2(\alpha)$ — метод «линейного предсказания (ЛП)» Берга [1, 2, 6, 24, 27], $\hat{S}_3(\alpha)$ — одну из разновидностей «модифицированного алгоритма Кейпона (МАК)» [16-19], $\hat{S}_4(\alpha)$ — метод Борджотти-Лагунаса (БЛ) [3, 6], $\hat{S}_5(\alpha)$ — метод «теплового шума (ТШ)» [6, 14, 27].

Во всех **СФ** $\mathbf{X}(\alpha) = \{x_l(\alpha)\}_{l=1}^M$ — неслучайный M -мерный вектор фазирования (**поиска**) в «направлении» α , зависящий от пространственного расположения и характеристик M приемных элементов (модулей) **АР**. В частности, для линейной эквидистантной **АР** из идентичных изотропных элементов (**ЛЭАР**)

$$\mathbf{X}(\alpha) = \left\{ \exp(j(l - (M + 1)/2) \alpha) \right\}_{l=1}^M, \quad (2)$$

$$\alpha = 2\pi d \sin \theta / \lambda,$$

где θ — отсчитываемое от нормали **АР** направление поиска, d — расстояние между ее смежными элементами, λ — длина волны.

Через $\mathbf{e}_m$ в (1) обозначен m -й ($m \in 1, M$) столбец единичной $M \times M$ матрицы $\mathbf{I}_M$ (M -мерный вектор с единственным ненулевым (m -м) элементом, равным единице), $(*)$ — знак эрмитового сопряжения.

Статистические свойства параметров **СФ** (1) определяются свойствами случайной $M \times M$ матрицы

$$\hat{\Psi} = \{\hat{\omega}_{ij}\}_{i,j=1}^M = \hat{\Phi}^{-1}, \quad (3)$$

обратной используемой оценке $\hat{\Phi} = \{\hat{\varphi}_{ij}\}_{i,j=1}^M$ априори неизвестной пространственной **КМ**

$$\Phi = \{\varphi_{ij}\}_{i,j=1}^M = \overline{\mathbf{Y}_l \cdot \mathbf{Y}_l^*} \quad (4)$$

M -мерных случайных векторов комплексных амплитуд $\mathbf{Y}_l = \{y_i^{(l)}\}_{i=1}^M$ выходных сигналов **АР** в l -й ($l \in 1, L$) дискретный момент времени.

Эти векторы, как обычно [3-14], будем полагать нормальными (гауссовскими) взаимно независимыми с нулевыми средними значениями и одинаковой **КМ** (4):

$$\mathbf{Y}_l \sim N_c(0, \Phi), \quad \overline{\mathbf{Y}_l} = 0, \quad (5)$$

$$\overline{\mathbf{Y}_l \cdot \mathbf{Y}_m^*} = \Phi \delta_{lm}, \quad l, m \in 1, L.$$

Здесь δ_{lm} — символ **Кroneкера**, черта сверху, как и в (4) — знак статистического усреднения по ансамблю.

Сформированная по выборке $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_l\}_{l=1}^L$ объема $L \geq 1$ случайная матрица

$$\hat{\Phi} = \{\hat{\varphi}_{ij}\}_{i,j=1}^M = \frac{1}{L} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^* = \frac{1}{L} \mathbf{A}, \quad (6)$$

в условиях (5), как хорошо известно, является **МП** оценкой неизвестной **КМ** (4). Именно ее использование в (3) предполагается ниже при анализе статистических свойств методов (1). Анализ существенно опирается на известное свойство оценки (6), связанное с тем, что определяющая ее случайная $M \times M$ матрица

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^M = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^* = \sum_{l=1}^L \mathbf{Y}_l \mathbf{Y}_l^*, \quad (7)$$

при $L \geq M$ имеет **комплексное** распределение **Уишарта** [22, 23, 29] с плотностью

$$p(\mathbf{A}; \Phi, \delta) = I^{-1}(\Phi) |\mathbf{A}|^\delta \exp\{-tr(\Phi^{-1} \mathbf{A})\}, \quad (8)$$

$$\delta = L - M \geq 0.$$

Здесь $|\mathbf{C}|$ и $tr(\mathbf{C})$ — детерминант и след матрицы $\mathbf{C}$, $I(\Phi) = \pi^{M(M-1)/2} |\Phi|^{M+\delta} \prod_{i=1}^M \Gamma(M + \delta + 1 - i)$ — нормирующий множитель, $\Gamma(x)$ — гамма-функция [31], для целого $x = m \geq 1$ равная $\Gamma(m) = (m-1)!$.

Напомним, что под плотностью $p(\mathbf{C})$ комплексной матрицы $\mathbf{C} = \{c_{il}\}$, $c_{il} = \text{Re} c_{il} + j \text{Im} c_{il}$ понимается **совместная плотность** реальных ($\text{Re} c_{il}$) и мнимых ($\text{Im} c_{il}$) частей определяющих ее случайных комплексных элементов [29]. Тем самым (8) фактически описывает совместную плотность $p(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{MM}, \text{Re} a_{il}, \text{Im} a_{il})$, $i \in 1, M-1$; $l \in i+1, M$ M^2 действительных случайных величин, образованных из M действительных диагональных и $M(M-1)$ реальных и мнимых частей комплексных наддиагональных элементов эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ (7), полностью ее определяющих.

Параметрами плотности (8) являются значения $\delta = L - M \geq 0$ («**эффективный объем выборки**») и истинная **КМ** Φ (4), что отражено обозначением $p(\mathbf{A}; \Phi, \delta)$.

Для истинной **КМ** мы будем считать допустимым представление [4-14, 19]

$$\begin{aligned}\Phi &= \mathbf{I}_M + \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{X}(\beta_i) \mathbf{X}^*(\beta_i) = \mathbf{I}_M + \mathbf{G} \mathbf{h} \mathbf{G}^*, \\ \mathbf{G} &= \{ \mathbf{X}(\beta_i) \}_{i=1}^n, \quad \mathbf{X}(\beta_i) = \{ x_l(\beta_i) \}_{l=1}^M, \\ \mathbf{h} &= \text{diag} \{ h_i \}_{i=1}^n.\end{aligned}\quad (9)$$

Оно предполагает взаимную **независимость** собственных шумов M приемных элементов с **одинаковой** (принятой за единицу) дисперсией (мощностью) и **некоррелированность** излучений n внешних источников с относительными (по отношению к уровню собственных шумов элементов) уровнями (**ОСШ**) h_i ($i \in 1, n$). M -мерные векторы-столбцы $\mathbf{X}(\beta_i)$ $M \times n$ матрицы $\mathbf{G}$ (9) описывают амплитудно-фазовое распределение по апертуре излучений с «направлений» β_i ($i \in 1, n$). В частности, для **ЛЭАР** они имеют вид (см.(2))

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\beta_i) &= \left\{ \exp(j(l - (M+1)/2)\beta_i) \right\}_{l=1}^M, \\ \beta_i &= 2\pi d \sin \theta_i / \lambda, \quad i \in 1, n,\end{aligned}\quad (10)$$

где θ_i — отсчитываемое от нормали **АР** направление на i -й источник.

Матрица Ψ , обратная Φ (9), равна

$$\Psi = \{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^M = \Phi^{-1} = \mathbf{I}_M - \mathbf{G}(\mathbf{h}^{-1} + \mathbf{G}^* \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^*. \quad (11)$$

Последнее равенство в (5), а также (9), (10) отражают **шумовой по времени** и **квазигармонический по пространству** характер сигналов точечных источников, в связи с чем далее для краткости они называются **шумовыми квазигармоническими**. Кроме того, в силу однозначной связи истинных (θ) и «обобщенных» (α, β) направлений далее без оговорок и кавычек используются только **последние**.

3. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ РАЗРЕШЕНИЯ-ОБНАРУЖЕНИЯ ШУМОВЫХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Развитая в работах [20, 21, 34] статистическая теория Я.Д. Ширмана рассматривает различные виды и критерии разрешения. Здесь используются понятия теории квазиполного разрешения-обнаружения, в соответствии с которой n сигналов в шуме считаются разрешенными, если статистические характеристики обнаружения (условные вероятности ложной тревоги (ВЛТ) F и правильного обнаружения (ВПО) D) каждого из них, поочередно выступающих в роли полезного, в присутствии $(n-1)$ -го остальных, выступающих в роли мешающих, остаются не хуже допустимого предела.^{1*)}

В такой постановке процедура пространственного разрешения сводится к проверке гипотез H_1 о **наличии** или H_0 — об **отсутствии** источника

в последовательно или параллельно проверяемых **сигнальных** направлениях $\alpha \in \alpha_n, \alpha_k$ из выбранного сектора (α_n, α_k) . Потенциальные возможности разрешения-обнаружения обеспечиваются **оптимальной** обработкой принятой реализации в гипотетических условиях **полной априорной определенности**.

Применительно к моделям п. 2 последнее означает знание зависящих от направления поиска α **КМ** Φ_0 и Φ_1 векторов $\mathbf{Y}_l$ (5) по гипотезам H_1 и H_0 . С **КМ** Φ (9) они связаны равенствами

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0 = \Psi_0^{-1}, & \alpha \neq \beta_l, \\ \Phi_1 = \Phi_0 + h_l \mathbf{X}(\beta_l) \mathbf{X}^*(\beta_l), & \alpha = \beta_l, \end{cases} \quad l \in 1, n \quad (12)$$

Оптимальная по критерию **Неймана-Пирсона** обработка K -мерной реализации (выборки) $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_l\}_{l=1}^K$ в этом случае сводится к **формированию статистики** [18, 34]

$$\xi(\alpha) = \mathbf{R}_0^*(\alpha) \hat{\Phi} \mathbf{R}_0(\alpha) = \frac{1}{K} z(\alpha), \quad (13)$$

$$z(\alpha) = \mathbf{R}_0^*(\alpha) \mathbf{A} \mathbf{R}_0(\alpha), \quad \mathbf{R}_0(\alpha) = \Psi_0 \mathbf{X}(\alpha),$$

и **сравнению ее с порогом** $v_0(\alpha)$, обеспечивающим заданную ВЛТ

$$F = \int_{v_0(\alpha)}^{\infty} p_{\xi_0}(x) dx = \int_{K v_0(\alpha)}^{\infty} p_{z_0}(x) dx. \quad (14)$$

Здесь $p_{\xi_0}(x)$ и $p_{z_0}(x)$ — плотности распределения статистик $\xi(\alpha)$ и $z(\alpha)$ по гипотезе $H = H_0$ **отсутствия** источника в анализируемом направлении α .

Используя (8) при $M=1$ и $L=K$ и учитывая (12), нетрудно убедиться [19], что $p_{z_0}(x) = p_z(x, \sigma_0^2)$, где

$$p_z(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2 (K-1)!} \left(\frac{x}{\sigma^2} \right)^{K-1} \exp \left\{ -\frac{x}{\sigma^2} \right\} \quad (15)$$

плотность **гамма распределения** с целым параметром формы K (распределение **Эрланга** [30]) и масштаба

$$\begin{aligned}\sigma^2(\alpha) &= \overline{\xi(\alpha)} = \mathbf{R}_0^*(\alpha) \Phi \mathbf{R}_0(\alpha) = \\ &= \begin{cases} \sigma_0^2(\alpha) = \mathbf{R}_0^* \Phi_0 \mathbf{R}_0 = \mathbf{X}^*(\alpha) \Psi_0 \mathbf{X}(\alpha), & \alpha \neq \beta_l, \\ \sigma_1^2(\alpha) = \sigma_0^2(1 + \mu_l), & \alpha = \beta_l, l \in 1, n \end{cases} \quad (16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_l &= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} = h_l \mathbf{X}^*(\beta_l) \Psi_0 \mathbf{X}(\beta_l), \\ &\alpha = \beta_l, \quad l \in 1, n\end{aligned}\quad (17)$$

Из (14)-(16) следует, что требуемый пороговый уровень равен

$$v_0(\alpha) = x_0 \sigma_0^2(\alpha) / K, \quad (18)$$

где x_0 — корень уравнения $F = \varphi(x_0)$, а функция

$$\varphi(x) = \int_x^{\infty} p_z(x, 1) dx = e^{-x} \sum_{i=0}^{K-1} x^i / i! \quad (19)$$

представляет собой **«функцию выживания** [30]» распределения **Эрланга** с $\sigma^2 = 1$. При этом ВПО

^{1*)} Широкий круг исследований последних лет [2, 4, 7-14 и др.], в которых разрешение увязывается с точностью оценивания угловых координат (степенью близости ошибок оценивания к границе **Крамера-Рао**), с позиций теории [20, 21, 34] относится к квазиполному **разрешению-измерению**.

полезного (с направления поиска α) сигнала при $\alpha = \beta_l$

$$D = D(\mu_l) = \int_{K \nu_0(\alpha)}^{\infty} p_z(x, \sigma_1^2) dx = \varphi\left(\frac{x_0}{1 + \mu_l}\right), \quad (20)$$

$$l \in 1, n$$

полностью определяется параметром **обнаружения** μ_l (17). Он имеет очевидный смысл «оптимального» **ОСП** (**ООСП**) — отношения мощности «полезного» сигнала к мощности помехи (смеси «мешающих» сигналов (с направлений $\beta_l \neq \alpha$) и шумов каналов приема) **после** оптимальной обработки. Его удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \mu_l &= q_l k_3, \quad q_l = r h_l, \\ k_3 &= \mathbf{X}^*(\beta_l) \Psi_0 \mathbf{X}(\beta_l) / r, \\ r &= \mathbf{X}^*(\beta_l) \mathbf{X}(\beta_l), \quad l \in 1, n \end{aligned} \quad (21)$$

где q_l — **ООСП** в отсутствие «мешающих» сигналов (при наличии только собственного шума), которое мы далее называем **ООСП** (чтобы подчеркнуть отличие от **ОСП** h_l в элементах **АР**), $k_3 \leq 1$ — коэффициент использования энергии «**полезного**» сигнала [20], характеризующий его потери из-за наличия «**мешающих**».

В частности, для **ЛЭАР** при $n=2$ и $\alpha = \beta_l$, когда, в силу (9)-(12),

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{X}(\beta_2), \quad r = M, \\ \Psi_0 &= \mathbf{I}_M - h_2 / (1 + q_2) \mathbf{X}(\beta_2) \mathbf{X}^*(\beta_2) \end{aligned} \quad (22)$$

из (21) получим [18-21, 34]

$$\begin{aligned} \mu_1 &= q_1 k_3, \quad k_3 = 1 - \frac{q_2}{1 + q_2} |\rho|^2, \\ q_i &= M h_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\rho = \mathbf{X}^*(\beta_1) \mathbf{X}(\beta_2) / r \approx \sin \pi \Delta / \pi \Delta - \quad (24)$$

коэффициент пространственной корреляции «полезного» и «мешающего» сигналов, зависящий от **относительного** углового расстояния

$$\Delta = (\beta_2 - \beta_1) / \Delta_0, \quad \Delta_0 = 2\pi / M \quad (25)$$

между ними, Δ_0 — полуширина синфазной диаграммы направленности (ДН) M — элементной **ЛЭАР** по уровню **первых нулей**. Приближенное равенство в (24) справедливо в условиях $M \gg 1$ и $\Delta \leq 1$, представляющих основной интерес для дальнейшего.

На рис. 1а показаны рассчитанные по (20), (19) семейства зависимостей $D = D(\mu)$, $\mu = q k_3$, $q = q_l$ для различных значений F и объемов K выборки $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_l\}_{l=1}^K$, а на рис. 1б — зависимости $k_3(\Delta)$ (23)-(25) для набора значений **ООСП** $q_M = q_2$ «мешающего» сигнала. Они позволяют определить статистические характеристики **обнаружения** (F, D) полезного сигнала с **ООСП** q в зависимости от углового расстояния $\Delta \leq 1$ между ними и, тем самым — возможности их **углового разрешения-обнаружения**.

Пусть, например, $q = 20$ (13 дБ), $K = 5$, а ВПО должна быть не ниже значения $D \geq D_{\text{доп}} = 0,5$ при ВЛТ $F = 10^{-6}$. Как следует из рис. 1а, для этого требуется значение $\mu \geq 4$ и, следовательно, $k_3 \geq 0,2$ (−7 дБ). В соответствии с рис. 1б, для $q_M = 10$ дБ такое значение k_3 обеспечивается при $\Delta \geq 0,19$, для $q_M = 15$ дБ — при $\Delta \geq 0,22$. При $\Delta \geq 0,23$ оно обеспечивается и для $q_M \rightarrow \infty$. Соответствующая нижняя граница $\Delta = \Delta_{\min}$, как видно из приведенных примеров и было показано еще в [20], может быть **меньше** рэлеевского предела $\Delta = \Delta_p \approx 1$. Эта граница обеспечивается только в гипотетических условиях полной априорной определенности при оптимальной обработке (13) сигналов, описанных в п. 2, и потому характеризует **потенциальные** возможности их разрешения-обнаружения.

«**Сверхрэлеевское**» разрешение «покупается» **увеличением** пороговой энергии полезного сигнала в $q/\mu = k_3^{-1}$ раз. Однако при оптимальной обработке (13) затраты энергии (21), (23) **минимальны**

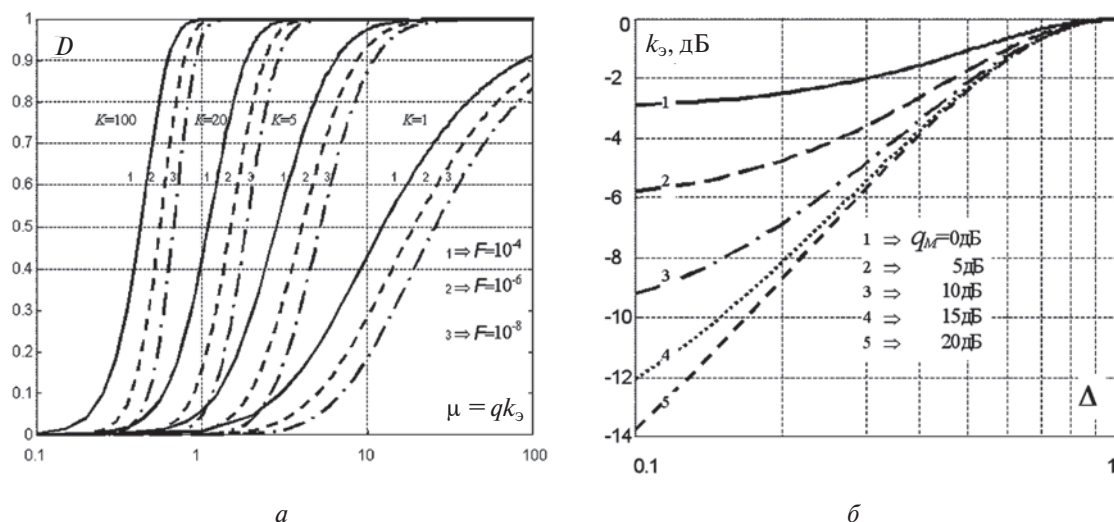


Рис. 1

или, что эквивалентно, максимально эффективно используются для **разрешения**. Так, в тестовой ситуации двух ($n = 2$) равномошных сигналов ЛЭАР значение $\Delta_{\min}$ **обратно** пропорционально $\sqrt{q}$ при «малых» и q — при «больших» объемах выборки K . Граница между «малыми» и «большими» объемами определяется требуемыми значениями D и F [18, 19]. В частности, при $D = 0,5$ и $F = 10^{-6}$

$$\begin{aligned} \Delta_{\min} &\approx 1/\sqrt{q} \text{ при } K \leq 5 \text{ и} \\ \Delta_{\min} &\leq 0,577/q \text{ при } K \geq 35. \end{aligned} \quad (26)$$

Обработка в реальных условиях априорной неопределенности неизбежно связана с **дополнительными** затратами энергии полезного сигнала и (или) с **ростом требований** к объему выборки (интервалу наблюдения). Эти затраты и требования, выступающие «пропуском» тех или иных методов к работе в соответствующих условиях, определяются **законами распределения формируемых ими статистик**. Ниже в роли этих статистик выступают случайные **СФ** методов (1), в которых вместо неизвестных **КМ** (9), (11) используются их **МП** оценки (6), (3).

4. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В «ТОЧКЕ»

Составным этапом процедуры оптимального разрешения-обнаружения является сравнение статистики (13) в точках анализа $\alpha \in (\alpha_n, \alpha_k)$ с порогом (18). (19) (мы **пока** (до п. 6) полагаем, что необходимые пороги могут быть сформированы). Статистические характеристики пороговой обработки случайных **СФ** $\hat{S}(\alpha)$ (1) определяются законами распределения их значений в этих точках.

При выводе этих законов мы полагаем, что **МП** оценки (6), (3) сформированы по обучающей выборке $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^N$ объема $N \geq M$ векторов $\mathbf{Y}_i$ со свойствами (5) и, следовательно, матрица $\mathbf{A}$ (7) имеет распределение **Уишарта** (8):

$$p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}; \Phi, \delta), \quad \delta = N - M \geq 0. \quad (27)$$

Не имея возможности привести здесь достаточно сложные и громоздкие выкладки, мы ограничимся изложением только **методики** и результатов **точного** вычисления плотности распределения первых **трех СФ** (1), зависящих непосредственно от матрицы $\hat{\Psi}$. Плотности **двух** последних, зависящих от **квадрата** этой матрицы, автору неизвестны. Их эмпирические законы распределения получены далее с помощью математической модели, предварительно **тестированной по точным** результатам.

Сущность методики заключается в следующем. Введем эрмитову $k \times k$ матрицу

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}} = \{\hat{q}_{ij}\}_{i,j=1}^k &= \mathbf{Z}^* \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Z} = N^{-1} \cdot \mathbf{Z}^* \cdot \hat{\Psi} \cdot \mathbf{Z}, \\ \mathbf{Z} = \{\mathbf{Z}_i\}_{i=1}^k, \quad k &\leq M, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\mathbf{A}$ — случайная матрица (27), $\mathbf{Z}$ — неслучайная матрица полного столбцевого ранга (с $k \leq M$ линейно независимыми M -мерными столбцами $\mathbf{Z}_i$, $i = 1, k$).

Как показано в [15], $k \times k$ случайная матрица

$$\hat{\mathbf{R}} = \{\hat{r}_{ij}\}_{i,j=1}^k = \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \quad (29)$$

в условиях (27) имеет распределение **Уишарта**

$$\begin{aligned} p(\hat{\mathbf{R}}) &= d^{-1} \cdot |\hat{\mathbf{R}}|^{\delta} \exp\{-tr(\Omega \cdot \hat{\mathbf{R}})\}, \\ d &= \pi^{\frac{k(k-1)}{2}} |\Omega^{-1}|^{\delta+k} \prod_{i=1}^k \Gamma(k + \delta - i + 1) \end{aligned} \quad (30)$$

с неслучайной $k \times k$ матрицей параметров Ω^{-1} ,

$$\Omega = \{\Omega_{ij}\}_{i,j=1}^k = \mathbf{Z}^* \cdot \Psi \cdot \mathbf{Z}. \quad (31)$$

При $k = M$ и $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_M$, когда

$$\Omega = \Psi, \quad \Omega^{-1} = \Phi, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}^{-1}$$

и, следовательно, $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{A}$, распределение (30) переходит в (8).

Пусть $k = 1$ и $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}(\alpha)$. При этом матрицы (28)-(30) преобразуются в скаляры

$$\begin{aligned} \Omega &= S_1^{-1}(\alpha), \quad \Omega^{-1} = S_1(\alpha), \\ d &= \delta! \cdot S_1(\alpha)^{\delta+1}, \quad \hat{Q} = (N \cdot \hat{S}_1(\alpha))^{-1}, \\ \hat{R} &= N \cdot \hat{S}_1(\alpha), \end{aligned}$$

а распределение (30) — к виду

$$p(\hat{R}) = (\delta! S_1(\alpha))^{-1} (\hat{R}/S_1(\alpha))^{\delta} \exp\{-\hat{R}/S_1(\alpha)\}.$$

Поэтому плотность распределения **СФ**

$$\hat{S}_1(\alpha) = \hat{R}/N$$

метода **МД** Кейпона равна

$$\begin{aligned} P_{\hat{S}_1}(x) &= \frac{1}{\delta!} \cdot \frac{1}{S_1(\alpha)/N} \cdot \left(\frac{x}{S_1(\alpha)/N} \right)^{\delta} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{x}{S_1(\alpha)/N}\right\}, \quad \delta = N - M \end{aligned} \quad (32)$$

где $S_1(\alpha)$ — «истинное» значение этой **СФ** (при $\hat{\Psi} = \Psi$).

При этом более удобная для последующего анализа «**нормированная**» **СФ**

$$v = \hat{S}(\alpha)/S(\alpha) \quad (33a)$$

с плотностью распределения

$$p_v(x) = S(\alpha) \cdot p_{\hat{S}}(S(\alpha) \cdot x), \quad (33b)$$

для метода **МД** равна

$$p_v(x) = p_{v_1}(x) = (\delta!)^{-1} N (Nx)^{\delta} \exp\{-Nx\}. \quad (34)$$

Плотности (32), (34) впервые получены еще в [22] и затем «перевыведены» в [23]. В [19, 28]

они получены и для МП оценок **персимметричных КМ**, возможных, в частности, в **АР с центральной симметрией** расположения попарно идентичных приемных элементов (модулей) [3, 18]. Обсуждение особенностей, связанных с такой, а также другой спецификой **КМ**, является предметом отдельной публикации.

Пусть теперь $k=2$, а $\mathbf{Z}=\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\}$ — $M \times 2$ матрица со столбцами

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{Z}_2 = \mathbf{X}(\alpha), \quad m \in 1, M. \quad (35)$$

При этом плотность (30) 2×2 матрицы

$$\hat{\mathbf{R}} = \{ \hat{r}_{ij} \}_{i,j=1}^2$$

равна

$$p(\hat{\mathbf{R}}) = (\pi \delta! (\delta+1)!)^{-1} |\mathbf{\Omega}|^{\delta+2} |\hat{\mathbf{R}}|^{\delta} \times \exp \{ -tr(\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{Z}^* \cdot \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{Z}, \quad (36)$$

а первые три **СФ** (1) связаны с элементами 2×2 матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$ (28) равенствами

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= 1/(N \hat{q}_{22}), \quad \hat{S}_2 = \hat{q}_{11} / (N |\hat{q}_{12}|^2), \\ \hat{S}_3 &= \hat{q}_{11} \hat{q}_{22} / |\hat{q}_{12}|^2 \end{aligned} \quad (37)$$

(для простоты обозначений мы пока опускаем аргумент α этих **СФ**).

Тем самым решаемая задача сводится к решению двух подзадач:

- а) отысканию плотности 2×2 матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$ (28) по плотности (36) матрицы $\hat{\mathbf{R}}$ (29);
- б) вычислению плотностей распределения функций (37) элементов $\hat{\mathbf{Q}}$.

Для решения **первой** из них достаточно учесть, что якобиан преобразования (29) равен $|\hat{\mathbf{Q}}|^{2k}$ и, следовательно, при $k=2$

$$p(\hat{\mathbf{Q}}) = (\pi \delta! (\delta+1)!)^{-1} |\mathbf{\Omega}|^{\delta+2} |\hat{\mathbf{Q}}|^{-(\delta+4)} \times \exp \{ -tr(\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}) \}. \quad (38)$$

Вторая задача существенно **сложнее**. Она требует достаточно нетривиальных преобразований, вычислений их якобианов и интегралов, содержащих специальные функции, которые, впрочем, сводятся к справочным [31].

Опуская подробности, приведем «финальную» **совместную** плотность величин, полностью определяющих искомые случайные **СФ** $\hat{S}_2$ и $\hat{S}_3$ (37):

$$p_c(v_2, v_3) = d_{23} \exp \left\{ -\frac{N v_2}{v_3} \right\} \exp \left\{ -\frac{N v_2}{1 + C_3 v_3} \right\} \times L_{\delta+1} \left\{ -\frac{N v_2}{C_3 v_3 (1 + C_3 v_3)} \right\}, \quad (39a)$$

$$d_{23} = (\delta! \cdot C_3 \cdot v_3^2)^{-1} N^{\delta+2} v_2^{\delta+1} (C_3 / (1 + C_3 \cdot v_3))^{\delta+2}.$$

Здесь $L_n(\bullet)$ — полином **Лагерра** степени n [31],

$$v_2 = \hat{S}_2 / S_2, \quad v_3 = \hat{C}_3 / C_3, \quad \hat{C}_3 = \hat{S}_3 - 1 \quad (39b)$$

соответствующие **СФ**, **нормированные** к их «истинным» значениям.

Интегрируя (39a) от 0 до ∞ по $v_2(v_3)$, получим плотности $p_v(x)$ **нормированных СФ** $v=v_3$ ($v=v_2$). Интеграл по v_2 записывается при этом в виде

$$p_v(x) = p_{v_3}(x) = C^{\delta+1} (\delta+1) \sum_{n=0}^{\delta+1} \frac{a_n}{C^n} \frac{x^{\delta}}{(1+(1+C)x)^{\delta+2+n}}, \quad (40)$$

$$a_n = \frac{(\delta+1+n)!}{(n!)^2 (\delta+1-n)!},$$

$$C = C_3 = C_3(\alpha) = S_3(\alpha) - 1.$$

Получить явное выражение для интеграла

$$p_v(x) = p_{v_2}(x) = \int_0^{\infty} p_c(x, y) dy \quad (41)$$

не удастся, поэтому плотность $p_{v_2}(x)$ методов **ЛП** определялась методами численного интегрирования.

Проводимый в п. 5 анализ разрешающей способности методов (1) по статистическим критериям разрешения-обнаружения базируется на **точных** формулах (34), (40), (41) и **эмпирических** законах распределения в «точке» **СФ** $\hat{S}_4(\alpha)$ и $\hat{S}_5(\alpha)$ методов **БЛ** и **ТШ**, полученных на моделях, тестированных по точным формулам.

5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ КРИТЕРИЯМ РАЗРЕШЕНИЯ-ОБНАРУЖЕНИЯ

А. Будем полагать, что решение об обнаружении сигнала с направления поиска $\alpha \in (\alpha_n, \alpha_k)$ принимается по результатам **сравнения с порогом** $v(\alpha)$ случайных **СФ** $\hat{S}(\alpha)$ методов (1). Их разрешающая способность в этом случае определяется ВЛТ F и ВПО D :

$$F = \int_{v(\alpha)}^{\infty} p_{\hat{S}}(x, S_0) dx = \int_{x_0}^{\infty} p_v(x, S_0) dx, \quad (42)$$

$$D = \int_{v(\alpha)}^{\infty} p_{\hat{S}}(x, S_C) dx = \int_{x_0/(S_C/S_0)}^{\infty} p_v(x, S_C) dx_1,$$

где $S_0 = S_0(\alpha)$ и $S_C = S_C(\alpha)$ — значения истинных **СФ** $S(\alpha)$ в точке анализа α при отсутствии и наличии источника в направлении α , $x_0 = v(\alpha)/S_0(\alpha)$ — скаляр, определяющий превышение порогового уровня

$$v(\alpha) = x_0 \cdot S_0(\alpha) \quad (43)$$

над значением $S_0(\alpha)$, необходимое для обеспечения заданной ВЛТ F . Вторые равенства в (42) являются прямым следствием (33).

Нетрудно показать, что входящее в нижний предел второго интеграла в (42) отношение $S_C/S_0 = S_C(\alpha)/S_0(\alpha)$ для методов (1) **одинаково** и в направлениях $\alpha = \beta_l$ ($l \in 1, n$) расположения источников равно (см. (17), (21))

$$S_C/S_0 = S_C(\beta_l)/S_0(\beta_l) = 1 + \mu_l, \quad (44)$$

$$\mu_l = q_l k_3, \quad l \in 1, n,$$

т.е. определяется тем же **ООСП** μ_l , что и при оптимальной обработке в условиях полной априорной определенности (п. 3).

Б. Начнем с анализа разрешающей способности метода **Кейпона**. Как следует из сравнения (34) с (15), для этого метода, в соответствии с (42),

$$F = f_\delta(Nx_0), \quad D = f_\delta(Nx_0/(1 + \mu_l)), \quad l \in 1, n, \quad (45)$$

где $f_\delta(x)$ — функция «выживания» распределения **Эрланга** с единичным параметром масштаба, но, в отличие от (19), с параметром формы $\delta + 1$.

В сочетании с (20) это означает, что метод **Кейпона** в условиях (6), (3) теоретически обеспечивает в **точности те же** статистические характеристики разрешения-обнаружения, что и **оптимальная** обработка (13) K -мерной выборки $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^K$, если объем N обучающей выборки в **МП** оценке (27) удовлетворяет условию $\delta = K - 1 = N - M$, то есть при

$$N = K + \varepsilon, \quad \varepsilon = M - 1. \quad (46)$$

Значение ε определяет «плату» за априорное незнание **КМ Ф** (4), которая требуется при использовании метода **Кейпона** на основе **МП** оценок (6), (7), (27). В частности, на ε следует увеличить значения K на рис. 1а, чтобы определить статистические характеристики этого метода в **ЛЭАР** при $n = 2$ и $\alpha = \beta_l$ ($l \in 1, n$).

В. Соответствующая «плата» других методов (1) может быть **существенно выше**. Мы проиллюстрируем это вначале на примере **МАК** с **СФ** $\bar{C}(\alpha) = \bar{S}(\alpha) - 1$ с плотностью (40) и истинными значениями $C(\alpha) = C_0$ при $\alpha \neq \beta_l$ и $C(\alpha) = C_1$ при $\alpha = \beta_l$ ($l \in 1, n$).

Можно показать, что в этом случае пороговая константа x_0 (43) является корнем уравнения

$$F = (C_0/(1 + C_0))^{\delta+1} (\delta+1) \sum_{n=0}^{\delta+1} a_n I_n(x_0, C_0)/C_0^n, \quad (47)$$

а **ВПО** сигнала источника, действующего с направления $\alpha = \beta_l$ ($l \in 1, n$), равна

$$D = (C_1/(1 + C_1))^{\delta+1} (\delta+1) \times \sum_{n=0}^{\delta+1} a_n I_n(x_0/(1 + \mu_l), C_1), \quad C_1 = C_0/(1 + \mu_l), \quad (48)$$

где через $I_n(x, c)$ обозначен интеграл [31]

$$I_n(x, c) = \int_0^{z(x, c)} t^n (1-t)^\delta dt = z^{n+1}(x, c) \sum_{k=0}^{\delta} (-1)^k \binom{k}{\delta} z^k(x, c)/(n+1+k), \quad (49)$$

$$z(x, c) = (1 + (1+c)x)^{-1},$$

а через $\binom{m}{n}$ — число сочетаний из n по m .

Рассмотрим вначале ситуацию выборки «**мало**» эффективного объема δ , когда

$$(\delta+1)(\delta+2) < C_0, \quad \delta = N - M. \quad (50)$$

Как показывает анализ, в этом случае определяющий вклад в суммы в (47), (48) вносят **только первые** слагаемые, так что

$$F \approx (C_0/(1 + C_0))^{\delta+1} (\delta+1)/(1 + (1 + C_0)x_0), \quad (51)$$

$$D \approx ((1 + C_0)(1 + \mu_l)/(1 + C_0(1 + \mu_l)))^{\delta+1} F.$$

Из первого равенства следует, что в условиях (50), когда $\delta \ll C_0$,

$$x_0 \approx F^{-1}(\delta+1)/(1 + C_0). \quad (52)$$

Это значение x_0 для представляющих основной интерес вероятностей $F < 10^{-3}$ может оказаться значительно больше, чем значение x_0 в (45) для метода **Кейпона**, что свидетельствует о существенно более «**тяжелых хвостах**» распределения (40), чем (34).

Из второго равенства в (51) видно, что при малых значениях **ООСП** $\mu_l < 1$ $D \approx F$, что вполне естественно. Однако в условиях (50) даже при сколь угодно больших $\mu_l \rightarrow \infty$ вероятность правильного обнаружения

$$D \approx (1 + 1/C_0)^{\delta+1} F \approx (1 + (\delta+1)/C_0) \cdot F \leq (1 + 1/(\delta+2)) \cdot F, \quad (53)$$

т.е. **не более чем** в 1,5 раза превосходят вероятность ложной тревоги F .

Формальное объяснение этому парадоксальному на **первый** взгляд эффекту можно дать, анализируя трансформацию плотности (40) в условиях (50) при изменении **ООСП** $\mu = \mu_l$. На рис. 2а приведено семейство зависимостей

$$g(x, C_1) = \sqrt{p_v(x, C_1)}, \quad {}^{2*)} C_1 = C_0(1 + \mu)$$

для набора значений

$$\mu = 0, 1, 9, 99 \quad (C_1 = C_0, 2 \cdot C_0, 10 \cdot C_0, 100 \cdot C_0)$$

при $C_0 = 15$ и $\delta = 2$, когда условия «малой выборки» (50) выполняются.

^{2*)} Использование корня из $p_v(x, C_1)$ продиктовано только стремлением к наглядности изображения, которое в противном случае оказывается неудобным для одновременного наблюдения существенно «разновеликих» кривых. С этой же целью по оси x использован логарифмический масштаб, позволяющий наблюдать функции $p_v(x, C_1)$, существенно различающиеся по ширине при различных значениях C_1 .

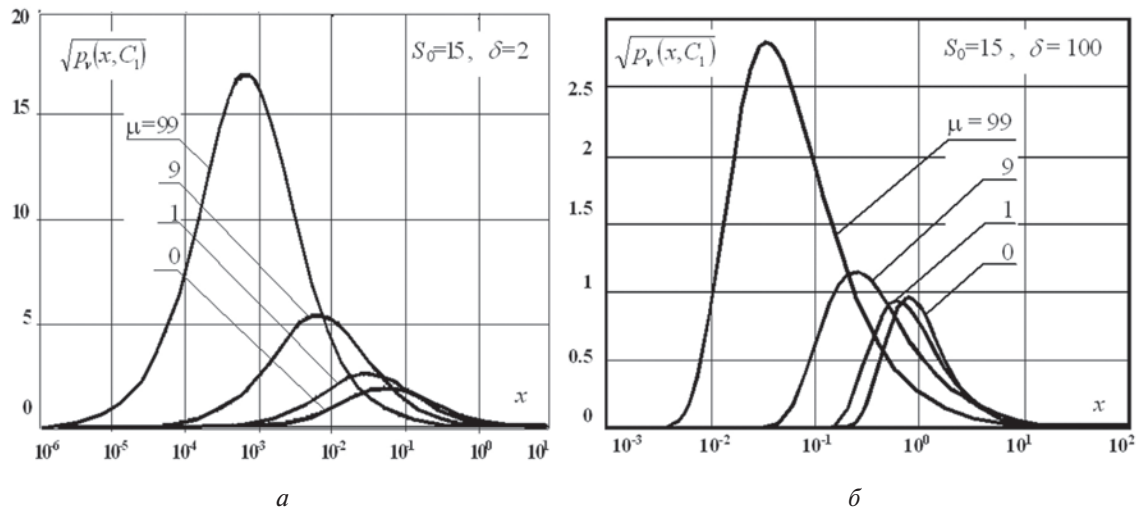


Рис. 2

Как хорошо видно, по мере роста μ плотность $p_v(x, C_1)$ смещается в область **все меньших** значений x , в связи с чем **вероятность** получить значения $v \geq 1$ уменьшается. В силу (33а), (39б), (40) это означает, что вероятность получить значения случайных **СФ** $\hat{C}_3(\alpha)$ ($\hat{S}_3(\alpha)$), близких к их истинным значениям $C_3(\alpha)$ ($S_3(\alpha)$), тем **меньше**, чем эти истинные значения **больше**. При этом из-за указанного **«смещения влево»** площадь под кривой $p_v(x, C_1)$ правее точки $x = x_0 / (1 + \mu)$, определяющая D (см. (42), (44)), остается практически **такой же**, как площадь под кривой $p_v(x, C_0)$ правее точки $x = x_0$, определяющая F . В этом состоит принципиальное отличие **МАК** от метода **МД** Кейпона, плотность (34) нормированной **СФ** (33а) которого от абсолютного уровня истинной **СФ** $S(\alpha)$ **не зависит** (последнее обстоятельство было отмечено еще в [22, 23]).

По мере роста объема выборки δ (нарушения условий (50)) **«смещение влево»** плотностей $p_v(x, C_1)$ (40) с ростом μ уменьшается, что наглядно видно из рис. 2б, где $\delta = 100$. В этих условиях рост μ **сопровождается** ростом **ВПО** D , однако весьма медленным, причем для каждого δ существует **граничное** значение $\mu = \mu_{\text{гр}}$, превышение которого уже практически **не увеличивает** значение $D = D_{\text{гр}}$. Они связаны неравенством

$$(\delta + 1)(\delta + 2) < C_1 = C_0(1 + \mu), \quad (54)$$

при выполнении которого основной вклад в сумму (48) вносит первое слагаемое, а вкладом остальных можно пренебречь. В этом случае

$$D = D_{\text{гр}} \leq 1 - (C_0 x_0 / (1 + C_0 x_0))^{\delta+1}. \quad (55)$$

В частности, в условиях примера рис. 2б при $F = 10^{-4}$ ($x_0 = 100$) значение $D_{\text{гр}} \leq 0,06$ **при любых** $\mu \rightarrow \infty$.

В связи с этим требования к объему выборки для **МАК** могут быть **существенно выше**, чем для метода **МД**. Наглядное представление о них дают характеристики обнаружения **МАК**, показанные на рис. 3. Сравнивая их с аналогичными кривы-

ми рис. 1а при $\delta = K - 1$, нетрудно убедиться, что в приведенных примерах характеристики, обеспечиваемые методом Кейпона уже при $\delta = 0, 4, 19$, обеспечиваются **МАК** при $\delta > 200, 400, 1000$ соответственно.

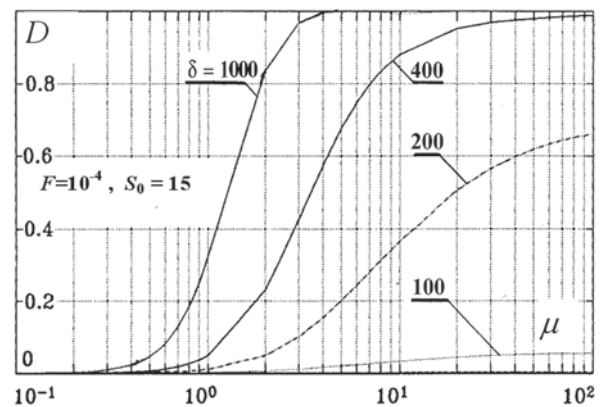


Рис. 3

Г. На рис. 4а, б показаны аналогичные рис. 2а, б семейства плотностей метода **ЛП**, рассчитанные по (39), (41), а на рис. 5 а, б — полученные на математической модели эмпирические функции распределения нормированных (33а) **СФ** (1) методов **БЛ** и **ТПШ** в условиях рис. 2-4. Видно, что эффект **«смещения влево»** с ростом μ в той или иной мере присущ плотностям (функциям) распределения нормированных **СФ** **всех** этих методов. Поэтому требования к объему выборки δ для них, как и для **МАК**, оказываются **существенно выше**, чем для метода **МД**. Физические причины этих различий обсуждаются в п. 7.

Д. Установленные достоинства метода **МД** Кейпона по сравнению с другими методами (1) могли бы стать решающим доводом при выборе метода пеленгации в реальных условиях априорной неопределенности, если бы в этих условиях могла быть реализована **практически** процедура сравнения случайных **СФ** (1) с порогом $v(\alpha)$ во всех точках анализа $\alpha \in (\alpha_n, \alpha_k)$. Этот порог, как следует из (43), определяется значением истинной **СФ** $S_0 = S_0(\alpha)$ соответствующего метода,

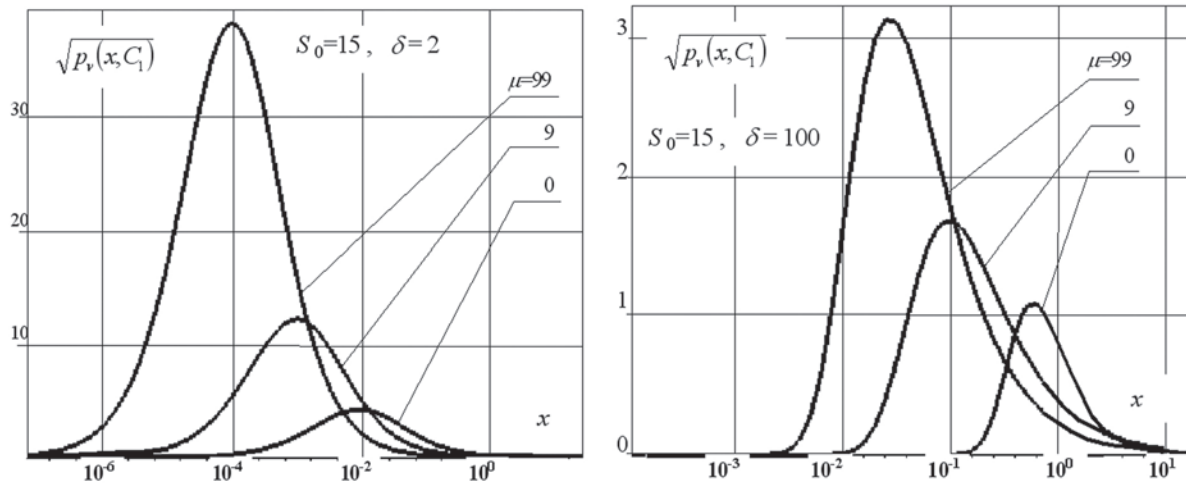


Рис. 4

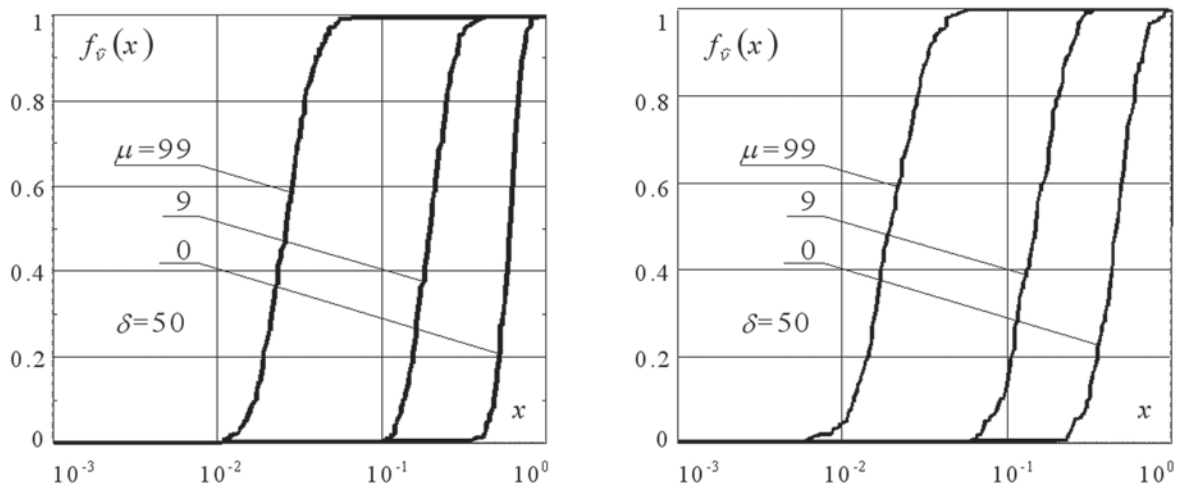


Рис. 5

т.е. ее значением при отсутствии источника в направлении анализа α . Сравнение только с таким порогом обеспечит «рекордные» (с минимальной «платой» ε (46)) статистические характеристики обнаружения метода Кейпона при наличии источника в анализируемом направлении α .

Но значение S_0 определяется КМ Φ_0 (12), которая априори **неизвестна** и вместо которой реально должна использоваться та или иная ее оценка. Но, в отличие от оценки (6) КМ Φ (4), (9) **в целом**, получить оценку $\hat{\Phi}_0$ КМ Φ_0 для всех $\alpha \in (\alpha_n, \alpha_k)$, в том числе и при $\alpha = \beta_l$ ($l \in 1, n$), располагая только **неклассифицированной** при $\alpha = \beta_l$ обучающей выборкой $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_l\}_{l=1}^N$, исключительно сложно или даже невозможно. Именно этим можно объяснить широкое распространение на практике других (**нестатистических**) процедур и критериев разрешения, в частности, критерия **Рэлея**, не связанных с **пороговой обработкой** СФ $\hat{S}(\alpha)$ во всех точках α интервала анализа. Ниже проводится статистический анализ разрешающей способности методов (1) по широко распространенному (нестатистическому) критерию **Рэлея**.

6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПО КРИТЕРИЮ РЕЛЕЯ

А. Процедуры пеленгации (анализа пространственного спектра) источников излучений методами (1) обычно предполагают формирование в точках α из выбранного сектора (α_n, α_k) соответствующих **СФ** $\hat{S}(\alpha)$ и последующий поиск их локальных **максимумов**. Число максимумов далее отождествляется с **числом** n источников в этом секторе, а их **координаты** α_l и **значения** $\hat{S}(\alpha_l)$ ($l \in 1, n$) – с **направлениями** и **относительными интенсивностями** источников [1, 5, 6, 14, 25]. Разрешающая способность по критерию **Рэлея** определяется в **тестовой** ситуации двух ($n=2$) равномошных ($q_1 = q_2 = q$) источников, которые считаются разрешенными, если «**глубина провала**» между максимумами $\hat{S}(\alpha_l)$, $l=1, 2$, характеризуемая параметром

$$\tilde{\gamma} = \hat{S}(\alpha_l) / \hat{S}(\alpha_{cp}), \quad l \in 1, 2, \quad \alpha_{cp} = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2, \quad (56)$$

превышает априори выбранный порог γ_0 (обычно $\gamma_0 = (1-3)$ дБ) [1, 14, 25].

Целью последующего анализа является сравнение разрешающей способности методов (1) на основе МП оценок (27), (6), (3) по критерию (56).

Б. Отметим прежде всего, что (**вынужденный**) переход от статистически оптимальных процедур и критериев к нестатистическим неизбежно порождает **дополнительные** энергетические затраты на разрешение. Эти затраты **различны** для методов (1). Они минимальны в гипотетических условиях обучающих выборок **бесконечного** объема $N \rightarrow \infty$, когда случайные **СФ** $\hat{S}(\alpha)$ можно считать совпадающими с **истинными СФ** $S(\alpha)$ (в силу асимптотической несмещенности и состоятельности МП оценок (27), (6), (3)).

Как показано в [16-19], в этих условиях «**лучшим**» из методов (1) является **МАК**, а «**худшим**» — метод **МД**. Асимптотическое (при $N \rightarrow \infty$) различие между ними количественно иллюстрируется рис.6, где показаны значения **ООСШ** q (23) каждого из двух равномошных источников с угловым расстоянием Δ (25) между ними, необходимое для их разрешение в **ЛЭАР**.

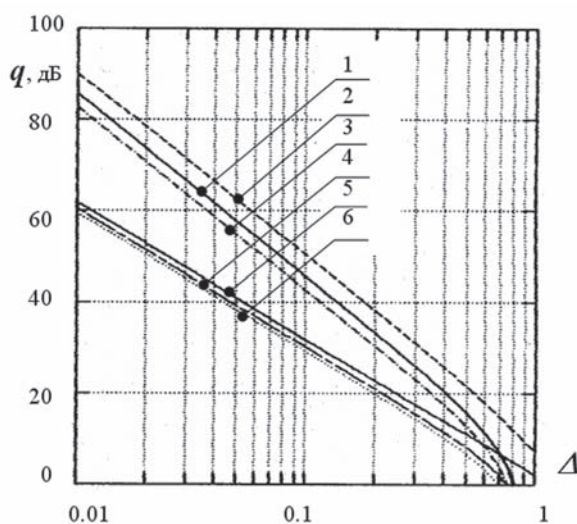


Рис. 6

Кривые 1, 2, 3 здесь относятся к методу **МД**, кривые 4, 5, 6 — к **МАК** при $\gamma=1$ (кривые 1, 4) и $\gamma=2$ (кривые 2, 5). Кривые 3, 6 задают **граничные** значения $q = q_{гр}$, при которых в точке $\alpha = \alpha_{ср}$ (56) равны нулю вторые производные $d^2 S(\alpha)/d\alpha^2$ соответствующих истинных **СФ** $S(\alpha)$ [25]. При $q \leq q_{гр}$ эти **СФ** имеют **единственный** максимум в точке $\alpha = \alpha_{ср}$ и, следовательно, по критерию (56) источники **не разрешаются**. Они «начинают разрешаться» при [16-19, 25]

$$\Delta \geq \begin{cases} \Delta_{гр} \approx 1,17/\sqrt[4]{q_{гр}} & \text{для метода МД,} \\ \Delta_{гр} \approx 0,95/\sqrt[3]{q_{гр}} & \text{для МАК.} \end{cases} \quad (57)$$

Значения $q_{гр}$ для остальных методов (1) несколько **выше**, чем $q_{гр}$ для **МАК**.

Из сравнения (57) с (26) видно, что при использовании критерия (56) **дополнительные**

энергетические затраты тем выше, чем меньше расстояние Δ между источниками. В частности, при малых $\Delta \leq 0,1$ они могут составить 10–20 и более дБ.

В реальной ситуации **конечных** N эти затраты еще больше из-за случайности параметра разрешения $\hat{\gamma}$ (56). Они зависят от его статистических свойств, **существенно различающихся** для методов (1). Об этом свидетельствуют точные и экспериментальные результаты, обсуждаемые ниже.

В. Для метода **МД** плотность $p_v(x)$ нормированного случайного параметра

$$\hat{v} = \hat{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2) / \gamma(\alpha_1, \alpha_2), \quad \hat{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2) = \hat{S}(\alpha_1) / \hat{S}(\alpha_2), \quad (58)$$

$$\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = S(\alpha_1) / S(\alpha_2)$$

при произвольных $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\delta \geq 0$ равна [15]

$$p_v(x) = \frac{\Gamma(2\delta+4)}{(\Gamma(\delta+2))^2} \left(1 - |\eta|^2\right)^{\delta+2} \times$$

$$\times \frac{x^{\delta+1} \cdot (1+x)}{((1+x)^2 - 4|\eta|^2 x)^{\delta+2,5}}, \quad \delta = N - M \geq 0. \quad (59)$$

Здесь через η обозначен «обобщенный» коэффициент пространственной корреляции излучений из направлений α_1 и α_2 :

$$\eta = \mathbf{X}^*(\alpha_1) \Psi \cdot \mathbf{X}(\alpha_2) \cdot (S_1(\alpha_1) \cdot S_1(\alpha_2))^{1/2}, \quad (60)^{3*}$$

$$S_1(\alpha_i) = (\mathbf{X}^*(\alpha_i) \Psi \cdot \mathbf{X}(\alpha_i))^{-1}, \quad i=1,2,$$

совпадающий с (24) при $\Phi = \Psi = \mathbf{I}_M$ и векторе $\mathbf{X}(\alpha)$ вида (2).

При $\delta \gg 1$ для среднего $\bar{\hat{v}}$ и дисперсии σ_v^2 параметра $\hat{v}$ (58) справедливы приближенные равенства

$$\bar{\hat{v}} \approx 1 + (1 - |\eta|^2) / \delta, \quad \sigma_v^2 \approx 2(1 - |\eta|^2) / \delta. \quad (61)$$

Пример плотностей (59) при $|\eta|=0,2$ и различных значениях δ приведен на рис. 7а.

Из анализа (59) следует **важное свойство** метода **МД**. Оно заключается в том, что при любых объемах выборки $\delta \geq 0$ и значениях $\alpha_1 \neq \alpha_2$ случайный параметр $\hat{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2)$ будет **не ниже** своего истинного значения $\gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ (58) с **фиксированной** вероятностью $P=0,5$. Это утверждение является следствием справедливого для (59) равенства

$$p_v(x) = x^{-2} p_v(x^{-1}), \quad (62)$$

означающего совпадение плотности (59) положительной случайной величины $\hat{v} > 0$ (58) и обратной ей $\hat{\chi} = 1/\hat{v}$. Оно означает также, что при любых $\alpha_1 \neq \alpha_2$ **медианой** плотности (59) является точка $x = x_0 = 1$, то есть

^{3*} Вид плотности (59) остается неизменным и при использовании МП оценок персимметричных КМ в центрально-симметричных АР, но в этом случае $\delta = N - (M+1)/2$ [16-19].

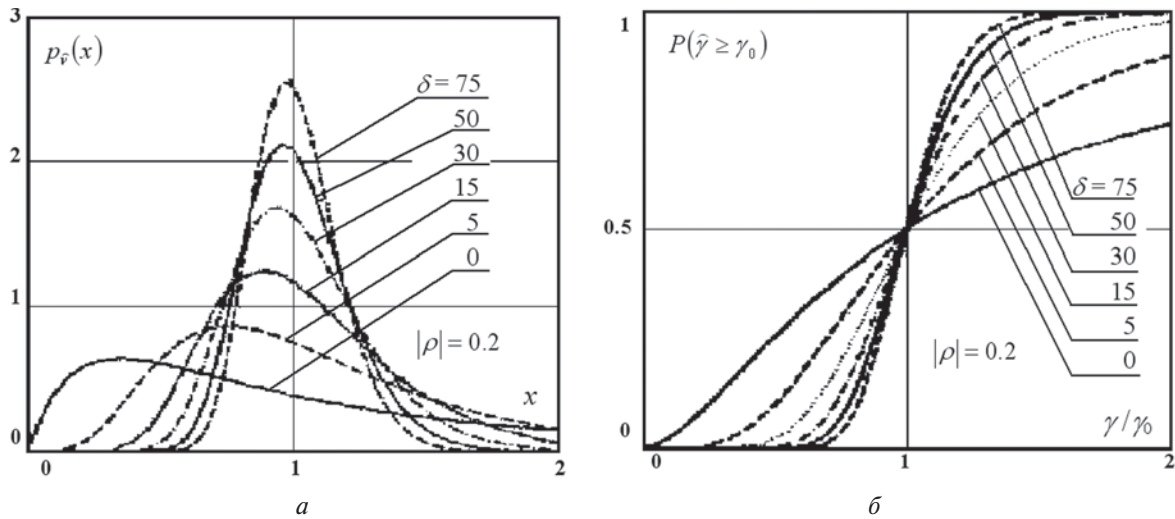


Рис. 7

$$\int_0^1 p_v(x) dx = \int_1^\infty p_v(x) dx = 1/2. \quad (63)$$

Действительно, по условию нормировки

$$\int_0^\infty p_v(x) dx = \int_0^{x_0} p_v(x) dx + \int_{x_0}^\infty p_v(x) dx = 1.$$

Но первое слагаемое этой суммы в силу (62) равно

$$\int_0^{x_0} 1/x^2 \cdot p_v(1/x) dx = \int_{1/x_0}^\infty p_v(x) dx$$

и, следовательно,

$$\int_{1/x_0}^\infty p_v(x) dx + \int_{x_0}^\infty p_v(x) dx = 1,$$

откуда сразу следует равенство (63). В сочетании с (58) оно означает, что в методе МД

$$P(\hat{v} \geq 1) = P(\hat{\gamma} \geq \gamma_0 = \gamma) = 0,5 \text{ при любых } \delta \geq 0. \quad (64)$$

Последнее соотношение является **математической формулировкой** описанного свойства метода МД. Оно иллюстрируется показанным на рис. 7б семейством функций распределения

$$f_v(\gamma/\gamma_0) = \int_0^{\gamma/\gamma_0} p_v(x) dx = \int_{\gamma/\gamma_0}^\infty p_v(x) dx = P(\hat{\gamma} \geq \gamma_0) \quad (65)$$

для плотностей $p_v(x)$ (рис. 7а).

В силу (62) эти функции распределения фактически описывают зависимость от отношения $\Gamma = \gamma/\gamma_0$ вероятности $P(\hat{\gamma} \geq \gamma_0)$ того, что случайный параметр $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2)$ (58) будет не ниже заданного порога γ_0 .

Как видно из рис. 7б, с увеличением объема выборки δ вероятность $P(\hat{\gamma} \geq \gamma_0)$ **растет** при $\gamma > \gamma_0$, остается **неизменной** и равной 0,5 при $\gamma = \gamma_0$ и **уменьшается** при $\gamma < \gamma_0$. Формальной причиной этого является трансформация плотности $p_v(x)$ (59) (рис. 7а), которая с ростом δ «стягивается» к точке $x_0 = 1$: ее среднее значение $\bar{\hat{v}}$ (61) стремится к медиане (распределение «симметризуется»

ся»), а дисперсия σ_v^2 уменьшается. Это означает, что с ростом δ реализации $\hat{\gamma}$ концентрируются во все более узкой окрестности истинного значения γ , что увеличивает (уменьшает) вероятность превышения значением $\hat{\gamma}$ порога γ_0 , меньшего (большого) γ . Если же $\gamma_0 = \gamma$, то значения $\hat{\gamma}$, флуктуируя в окрестности γ_0 с дисперсией (61), уменьшающейся с ростом δ , не меняют вероятности $P(\hat{\gamma} \geq \gamma_0 = \gamma) = 0,5$.

Отсюда следует, что если решение о разрешении в тестовой (двухсигнальной) ситуации принимается при условии, что в точках α_l максимумов **СФ** $S(\alpha)$ **хотя бы одно** из значений $\hat{\gamma}_l = \hat{S}(\alpha_l)/\hat{S}_{cp}(\alpha) \geq \gamma_0$ ($l=1,2$), то вероятность разрешения P_r по критерию (56) при $\gamma = \gamma_0$ будет равна

$$\begin{aligned} P_r &\leq P(\hat{\gamma}_1 \geq \gamma_0) \cdot P(\hat{\gamma}_2 < \gamma_0) + P(\hat{\gamma}_1 < \gamma_0) \times \\ &\times P(\hat{\gamma}_2 \geq \gamma_0) + P(\hat{\gamma}_1 \geq \gamma_0) \cdot P(\hat{\gamma}_2 \geq \gamma_0) = \\ &= P(\hat{\gamma} \geq \gamma_0) \cdot (2 - P(\hat{\gamma} \geq \gamma_0)) = 0,75, \end{aligned} \quad (66)$$

где учтены (64) и очевидные равенства

$$P(\hat{\gamma}_l < \gamma_0) = 1 - P(\hat{\gamma}_l \geq \gamma_0), \quad P(\hat{\gamma}_l \geq \gamma_0) = P(\hat{\gamma} \geq \gamma_0), \quad l=1,2.$$

Приближенный характер (66) связан с допущением о независимости событий $\hat{\gamma}_1 \geq \gamma_0$ и $\hat{\gamma}_2 \geq \gamma_0$, в общем случае (при малых $\Delta \ll 1$) несправедливым, и с неединичной вероятностью двух максимумов в **СФ** $\hat{S}_1(\alpha)$ при любых $\delta \geq 0$ даже при $q > q_{гр}$ (57). В этих условиях она близка к единице при «больших» $\delta \gg 1$.

Отсюда следует, что кривые 1, 2, 3 рис.6 определяют **не только** асимптотическую (при $\delta \rightarrow \infty$) разрешающую способность метода МД Кейпона, но и устанавливают требования к энергетике разнесенных на расстояние $\Delta < 1$ двух равномошных источников, которая при $\gamma_0 = \gamma$ обеспечит их разрешение этим методом по критерию **Рэлея** с вероятностью

$$0,5 \leq P_r < 0,75 \quad (67)$$

при любых $\delta \geq 0$.

Г. Следует ожидать, что в силу асимптотической несмещенности и состоятельности МП оценок (6), (3) аналогичные свойства (64), (67) при $\delta \rightarrow \infty$ будут иметь и другие методы (1), для которых подобные (59) точные плотности параметра $\hat{v}$ (58) пока не получены. Однако при конечных δ достижение «стартовой» вероятности P_r (67) на их основе возможно только при пороге $\gamma_0 < \gamma$. Физические причины этого обсуждаются в п. 7, здесь это утверждение иллюстрируется результатами математического моделирования.

На рис. 8а, б приведены семейства функций распределения

$$f_v(x) = \int_0^x p_v(y) dy \quad (68)$$

параметра $\hat{v}$ (58) методов ЛП, МАК и МД при $\delta = 0, 25, 50$ для экспериментально полученных плотностей распределения $p_v(y)$ этих методов.

Смоделирована ситуация двух ($n = 2$) равно-мощных источников с относительным расстоянием $\Delta = 0,1$ между ними при $q_1 = q_2 = q = 50,5$ (дБ). В этих условиях истинные значения γ равны 2 (3дБ) для метода МД и $\gamma > 10^3$ (30 дБ) для методов ЛП и МАК.

Наглядно видно, что для метода МД медиана параметра $\hat{v}$ (58) равна $x = x_0 = 1$ независимо от δ , что полностью согласуется с изложенной выше теорией. В то же время медианы функций распределения (67) методов ЛП и МАК расположены значительно левее точки $x_0 = 1$ ($x_0 \approx 5 \cdot 10^{-4}$ при $\delta = 2$ и $x_0 \approx 5 \cdot 10^{-3}$ при $\delta = 50$). Поэтому вероятность разрешения P_r (67) этими методами обеспечивается при выборе порога $\gamma_0 = x_0 \gamma \ll \gamma$ даже при $\delta \geq 50$. Близкие результаты дают и методы БЛ и ТП.

Отсюда следует, что асимптотические (при $\delta \rightarrow \infty$) энергетические выигрыши методов (1) по сравнению с методом МД, вытекающие из рис.6, отнюдь не гарантируют их более высокую, чем методом МД, вероятность разрешения по критерию Рэлея (56) в реальных условиях конечных δ .

Результаты экспериментального сравнения методов (1) в этих условиях приведены на рис. 9 в виде зависимостей $P_r(\delta)$ при $\Delta = 0,8$, $q = 10$ дБ и пороге разрешения $\gamma_0 = 1,5$ ($\approx 1,8$ дБ), совпадающем со значением γ метода МД. Значения γ остальных методов указаны в скобках под их названиями.

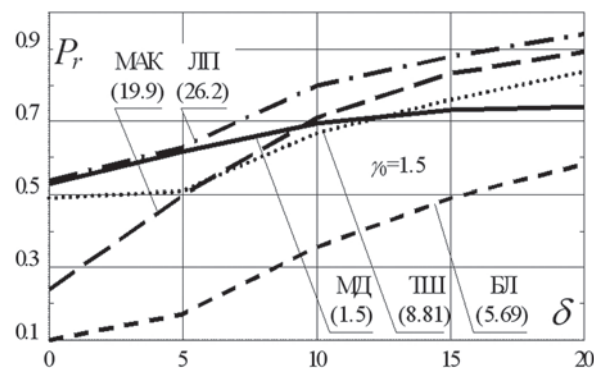


Рис. 9

Как видно из рисунков, в методе МД по мере роста δ вероятность разрешения монотонно увеличивается от $P_r \approx 0,5$ до $P_r \approx 0,75$, т.е. именно так, как она теоретически должна изменяться при $\gamma_0 = \gamma$. В то же время остальные методы при малых $\delta \leq 10$ либо весьма незначительно превосходят (ЛП), либо даже уступают методу МД по эффективности, хотя соответствующие им значения $\gamma > \gamma_0$.

Таким образом, при конечных δ все методы (1) имеют существенно худшие статистические свойства, чем метод МД Кейпона. Поэтому их реальная разрешающая способность как по статистическим (п. 5), так и нестатистическим (п. 6) критериям в этих условиях значительно ниже, чем асимптотическая (при $\delta \rightarrow \infty$).

Ниже обсуждаются причины этих различий и вытекающие из них способы повышения «робастности» методов (1).

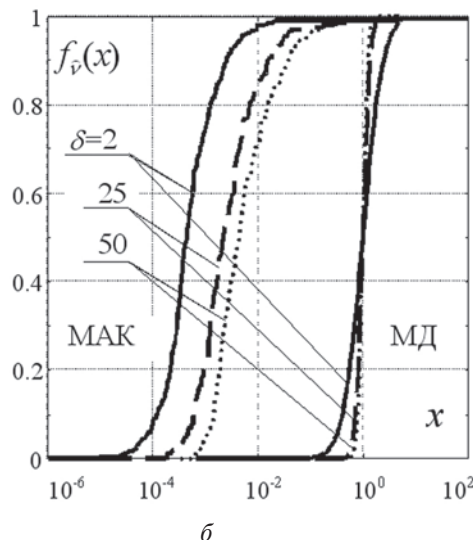
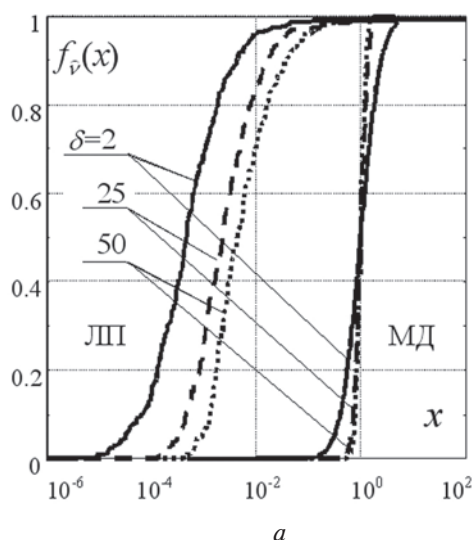


Рис. 8

7. ПРИЧИНЫ ОТЛИЧИЙ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И НАПРАВЛЕНИЯ ИХ УЛУЧШЕНИЯ

А. Установленное выше «особое» положение метода **МД Кейпона** среди методов (1) в условиях выборок конечного объема $\delta \geq 0$ можно объяснить, используя взаимосвязи между их **СФ**, а также специфическое свойство **СФ** самого метода **МД**. Эти взаимосвязи и свойство достаточно хорошо известны (см., например [1-6, 14, 27, 32 и др.]), однако, как правило, привлекались для объяснения различий соответствующих методов в гипотетических условиях **точной КМ Ф** (4), (9). Мы также начнем с этой ситуации, рассматривая вначале «истинные» **СФ** $S(\alpha)$, полученные заменой в случайных **СФ** $\hat{S}(\alpha)$ (1) матрицы $\hat{\Psi}$ (3) на «истинную» матрицу Ψ (11).⁴⁾

Б. Введем **СФ** метода **МД** m -го ($m \in 1, M$) порядка

$$S_1(\alpha, m) = \left(X_m^*(\alpha) \Psi_m X_m(\alpha) \right)^{-1}, \quad (69)$$

$$X_m(\alpha) = \{x_i(\alpha)\}_{i=1}^m, \quad \Psi_m = \Phi_m^{-1}, \quad \Phi_m = \{\phi_{ij}\}_{i,j=1}^m.$$

С **СФ** $S_1(\alpha) = S_1(\alpha, M)$ **СФ** $S_1(\alpha, M-1)$ связана равенством [1, 3, 17, 27, 32]

$$S_1^{-1}(\alpha, M) = S_1^{-1}(\alpha, M-1) + S_{M\Delta}^{-1}(\alpha), \quad (70)$$

$$S_{M\Delta}(\alpha) = \left| \Psi_m^*(\alpha) \Psi X_m(\alpha) \right|^2 = S_2(\alpha), \quad m = M,$$

где $S_{M\Delta}(\alpha)$ – **СФ** метода «максимальной энтропии (МЭ)» **Берга** [24, 32], совпадающая с **СФ** $S_2(\alpha)$ метода **ЛП** (1) при $m = M$.

Отсюда и из сопоставления первых трех **СФ** в (1) следует, что

$$S_{M\Delta}(\alpha) = S_3(\alpha) \cdot S_1(\alpha, M) = C_3(\alpha) \cdot S_1(\alpha, M-1) = S_2(\alpha), \quad m = M, \quad (71a)$$

$$S_3(\alpha) = \frac{S_1(\alpha, M-1)}{S_1(\alpha, M-1) - S_1(\alpha, M)}, \quad (71b)$$

$$C_3(\alpha) = \frac{S_1(\alpha, M)}{S_1(\alpha, M-1) - S_1(\alpha, M)} = S_3(\alpha) - 1.$$

Рассмотрим более подробно функции $S_3(\alpha)$ или $C_3(\alpha)$. Начнем с оценки их значений в точках $\alpha = \beta_l$ ($l \in 1, n$) **расположения источников**, когда вектор поиска $X(\alpha) = G e_l$ совпадает с l -м столбцом матрицы G (9). Как следует из (69), (11), в этом случае

$$S_1^{-1}(\beta_l, M) = e_l^* \cdot Q \cdot (I_n - T) \cdot e_l, \quad (72)$$

$$T = \left(I_n + (h \cdot Q)^{-1} \right)^{-1}, \quad Q = G^* \cdot G.$$

⁴⁾ Заметим, что здесь мы **впервые** используем в теоретическом рассмотрении специфические особенности структуры **КМ Ф** (9) и Ψ (11) (которые выше использовались только для количественных иллюстраций). Поэтому все аналитические результаты пп.4-6 справедливы не только для этих, но и для **произвольных КМ** гауссовских процессов (например, соответствующих **коррелированным** излучениям, **пространственно распределенным** источникам излучений (отражений) и т.д.).

Пусть максимальное собственное значение $\lambda_{\max}(W)$ матрицы $W = (h \cdot Q)^{-1}$ удовлетворяет условию

$$\lambda_{\max}(W) = \lambda_{\min}^{-1}(W^{-1}) = \lambda_{\min}^{-1}(h \cdot Q) \ll 1, \quad (73)$$

при котором для матрицы T справедливо приближенное равенство:

$$T \approx I_n - (h \cdot Q)^{-1}.$$

Тогда $S_1^{-1}(\beta_l, M) \approx e_l^* \cdot h^{-1} \cdot e_l$, так что в рассматриваемом случае независимых излучений (диагональной матрицы h (9))

$$S_1(\beta_l, M) \approx h_l, \quad l \in 1, n. \quad (74)$$

Равенство (74) неоднократно отмечалось в литературе, но его выполнение связывалось либо с наличием различных максимумов в **СФ** $S_1(\alpha)$ в окрестности точек β_l ($l \in 1, n$), либо с еще более жестким требованием $h_l \rightarrow \infty$ [6]. Существенно, однако, что оно справедливо и в «**доасимптотической**» области, т.е. при значениях **ООСШ** q_l **меньших**, чем требуется для появления этих максимумов в **СФ** $S_1(\alpha)$.

Покажем это на примере M -элементной **ЛЭАР** в тестовой ситуации ($n = 2$, $h = h \cdot I_2$, $q_1 = q_2 = q = M \cdot h$, $\Delta \leq 1$). В этом случае

$$\lambda_{\min}(h \cdot Q) = q \cdot (1 - \rho),$$

так что условие (73) эквивалентно условию $q \gg (1 - \rho)^{-1}$, которое можно считать выполненным уже при

$$q = M \cdot h = q_0 \geq 10 \cdot (1 - \rho)^{-1}, \quad (75)$$

$$\rho = \frac{\sin \pi \Delta}{\pi \Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (\pi \Delta)^{2i}}{(2i+1)!}.$$

Значение q_0 (75) тем больше, чем меньше Δ , но и при малых $\Delta < 0,5$, когда для ρ справедливы представления

$$\rho \approx 1 - \pi^2 \Delta^2 / 6 \approx 1 - 1,5 \Delta^2, \quad 1 - \rho \approx 1,5 \Delta^2, \quad (76)$$

требование (73), приводящее к равенству (74), выполняется при $q_0 \geq 7 / \Delta^2$. Это значение q_0 меньше значения $q_{\text{гр}}$ (57) метода **МД** примерно в $(2\Delta)^{-2}$ раз.

Рост **ООСШ** q выше «граничного» значения q_0 (15) практически не меняет значения $S(\beta_l)$, $l \in 1, n$ (74), так что нормированная **СФ** $S_1(\alpha, M) / h$ в точках $\alpha = \beta_l$ **расположения источников** равна

$$S_n(\beta_l) = S_1(\beta_l, M) / h \approx 1 \quad \text{при любых } q > q_0, \quad (77)$$

$$q_0 < q_{\text{гр}}.$$

На рис. 10а приведено семейство нормированных **СФ** (77) для тестовой ситуации в **ЛЭАР** при $\Delta = 0,1$, когда $q_0 \approx 700$ (28дБ). Параметром семейства служит значение $q \in [20, 56]$ дБ, положение источников показаны стрелками.

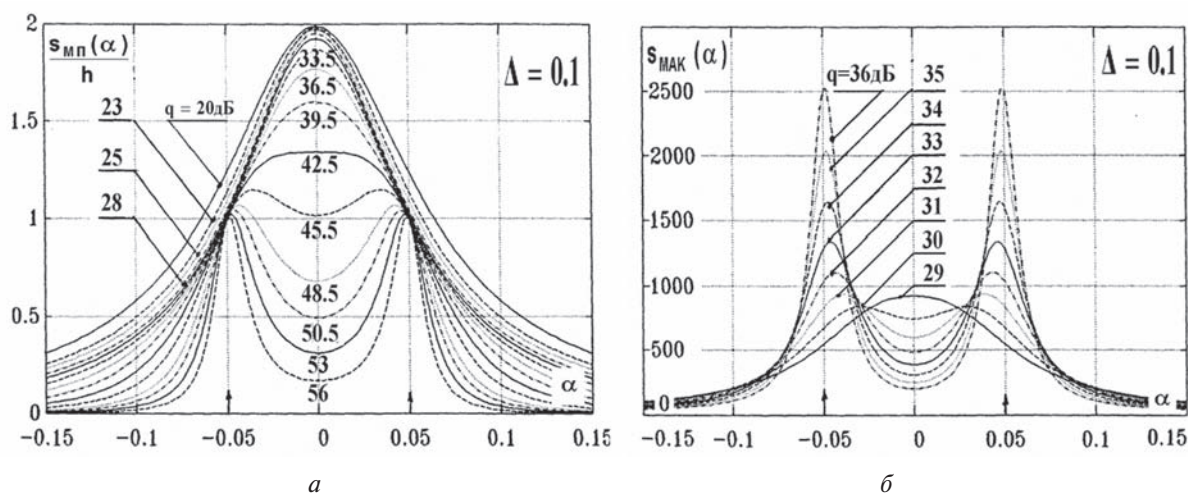


Рис. 10

Хорошо видно, что

$$S_n(\beta_l) > 1 \text{ при } q < q_0, q_0 < q_{\text{гр}}, \quad (78)$$

но по мере роста $q \geq q_0$ значения $S_n(\beta_l)$ приближаются «сверху» к единице («слипаются» в точках истинного расположения источников [17]) еще до того, когда в $S_n(\alpha)$ появятся «различимые» максимумы.

Обратим теперь внимание, что условие (73) и вытекающие из него равенства (74), (77), (78) формулируются для значения ООСШ q , но не для его сомножителей в (75) **порознь**. Поэтому даже при фиксированном значении ОСШ $h_l = h$ в точках $\alpha = \beta_l$ близки («слипаются») СФ методов МД всех порядков $m \leq M$, обеспечивающих выполнение равенства $q_m = m \cdot h \geq q_0$ (75).

Отсюда следует, что при $M \gg 1$ и справедливости (73), (75)

$$S_1(\alpha, M-1) - S_1(\alpha, M) \geq 0, \quad (79)$$

$$\alpha = \beta_l, \quad l \in 1, n, \quad q \geq q_0$$

и эта **положительная** разность тем ближе к нулю, чем больше значение $q \geq q_0$.

Именно наличие в условиях (79) **малой разности** в знаменателях СФ $S_3(\alpha)$ или $C_3(\alpha)$ МАК (71б) обеспечивает появление в них различных максимумов (разрешение по критерию (56)) при меньших значениях ООСШ q , чем требуется для этого у «**порождающих**» их СФ $S_1(\alpha)$ метода МД. Наглядное представление об этом дает сравнение показанных на рис. 10б семейств СФ $C_3(\alpha)$ (71б) с семейством рис. 10а, а также кривых 4, 5, 6 с кривыми 1, 2, 3 на рис. 6.

В силу равенств (71а), связывающих СФ МАК с СФ МЭ, последний в условиях **точной КМ** имеет близкие к МАК характеристики по критерию (56), существенно превосходящие характеристики «**порождающего**» метода МД. Кроме того, установленные в [27] связи СФ методов МЭ (ЛП) и ТШ показывают, что последний, незначительно уступая методу МЭ, в этих условиях может также существенно превосходить метод МД. То же относится и к методу БЛ, СФ $S_4(\alpha)$ которого в «связке»

$$S_5(\alpha) = S_4(\alpha) \cdot S_1(\alpha) \quad (80)$$

между СФ $S_5(\alpha)$ и $S_1(\alpha)$ методов ТШ и МД играет ту же роль, что и СФ $S_3(\alpha)$ или $C_3(\alpha)$ МАК в «связке» (71а).

Таким образом, в каждом из методов (1) в той или иной мере используется свойство (74), (77) «**слипания**» СФ $S_1(\alpha)$ метода МД порядков M и $M-1$ в точках расположения источников $\alpha = \beta_l$, $l \in 1, n$ в условиях (73), (75). Оно не используется только в самом методе МД, и именно поэтому в гипотетической ситуации точно известной КМ Ф (4), (9) он имеет «худшие» характеристики разрешения по критерию (56), чем остальные методы (см. п. 6.Б, рис. 6).

В. Однако в реальной ситуации оценочных КМ Ф (6), (27) и выборки конечного объема $\delta \geq 0$ тонкие эффекты «**слипания**» (79) могут быть **разрушены** случайными ошибками оценивания КМ. Эти «разрушения» могут быть двух видов.

Во-первых, случайная разность

$$\hat{S}_1(\alpha, M-1) - \hat{S}_1(\alpha, M) \geq 0, \quad (81)$$

оставаясь неотрицательной, с ненулевой вероятностью может быть **меньше** истинной (79) при **отсутствии** источника в направлении анализа α . Именно с этим связана «**затянутость хвостов**» распределения (40) и необходимость резкого увеличения пороговой константы x_0 для фиксации ВЛТ F при использовании как МАК, так и методов ЛП, БЛ, ТШ (п. 5.В, Г.).

Во-вторых, случайная разность (81), определяемая **ошибками** оценивания КМ, может быть **больше** истинной (79) и **не зависеть** от нее при произвольном уровне излучения в направлении анализа $\alpha = \beta_l$, ($l \in 1, n$). Этим объясняется «**смещение влево**» плотностей и функций распределения упомянутых методов (п. 5, п. 6), как и парадоксальное на первый взгляд при произвольно больших значениях μ **постоянство** уровня ВПО D в МАК, тем меньшего, чем меньше объем выборки $\delta \geq 0$ (п. 5.В.).

Именно поэтому метод МД Кейпона, в котором легко разрушаемые эффекты «слипания» **не**

используются, оказывается наиболее «робастным» в этих условиях.

Аналитические и экспериментальные результаты пп. 5,6 дают количественные характеристики описанных последствий «разрушений» условий (79), (74) в зависимости от объема выборки $\delta \geq 0$ для каждого из методов (1). Их учет и понимание описанного физического механизма позволяют предложить способы существенного улучшения статистических характеристик методов (1), основанные на уменьшении влияния эффекта «слипания» (79). Обоснованию и анализу этих способов посвящена статья [33].

Автор с благодарностью и теплотой вспоминает годы работы на кафедре радиолокации ВИРТА ПВО им. Л.А. Говорова, руководившейся Я.Д. Ширманом, от души поздравляет его с замечательным юбилеем, желает новых успехов и здоровья на долгие годы.

Литература.

- [1] *Марпл — мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. /Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — с.584.
- [2] *S. Haykin, J. Litva and T.J. Shepherd (eds).* Radar Array Processing. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] *P. Stoica and R. Moses.* Introduction to Spectral Analysis, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [4] *H. Krim and M. Viberg* «Two Decades of Array Signal Processing Research.» IEEE Signal Processing Magazine, July 1996.
- [5] *Дрогалин В. В., Меркулов В. И., Родзивилов В. А. и др.* Алгоритмы оценивания угловых координат источников излучения, основанные на методах спектрального анализа. //Радиолокация и радиометрия, 1999, №1, с.52-68.
- [6] *Мюнье Ж., Делиль Ж.Ю.* Пространственный анализ в пассивных локационных системах с помощью адаптивных методов. // ТИИЭР.-1987.-т.75. — N11. — с.21-37.
- [7] *P. Stoica and A. Nehorai* «MUSIC, maximum likelihood and Cramer-Rao Bound». IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol.37, May 1989, pp.720-741.
- [8] *P. Stoica and A. Nehorai* «MUSIC, maximum likelihood and Cramer-Rao Bound: Further results and Comparisons». IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol.38, May 1990, pp.2140-2150.
- [9] *P. Stoica and A. Nehorai* «Performance Study of Conditional and Unconditional Direction of Arrival Estimation». IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol.38, October 1990, pp.1783-1795.
- [10] *P. Stoica and K.S. Sharman* «Novel eigenanalysis Method for Direction Estimation». IEEE Processing. Vol.137,Pt.F.No1, February 1990.
- [11] *A.B. Gershman* «Pseudo-randomly generated estimator banks: a new tool for improving the threshold performance of direction finding». IEEE Trans. Signal Processing, SP-46 (May 1998) pp.1351-1364.
- [12] *A.B. Gershman, P. Stoica* «New MODE-based techniques for direction finding with an improved threshold performance» Signal Processing 76 (1999) 221-235.
- [13] *A.B. Gershman, P. Stoica* «On Unitary and Forward-Backward MODE» Digital Signal Processing 9 (1999), 67-75.
- [14] *Черемисин О.П.* Эффективность адаптивных методов пеленгации помех. // Радиотехника и электроника. — 1989. — т.34. — №9. — с.1850-1861.
- [15] *Леховицкий Д. И., Флексер П. М.* Статистический анализ разрешающей способности квазигармонического спектрального оценивания методом Кейпона. //Сборник докладов МНТК «Современная радиолокация». (выпуск первый), Киев, 1994, с.66-71.
- [16] *Леховицкий Д.И., Флексер П.М.* Статистический анализ разрешающей способности адаптивных алгоритмов спектрального оценивания. // Международная НТК «Современная радиолокация». Тезисы докладов. — Киев, 1994. — с.134.
- [17] *Леховицкий Д. И., Милованов С. Б., Пищухин В. М., Флексер П. М.* Модифицированный алгоритм Кейпона для задач гармонического спектрального анализа пространственно-временных случайных сигналов. /Тезисы V Всесоюзной школы-семинара «Проектирование автоматизированных систем контроля и управления сложными объектами», г.Туапсе, октябрь 1992.
- [18] *Ширман Я. Д., Манжос В. Н., Леховицкий Д. И.* Некоторые этапы развития и проблемы теории и техники разрешения радиолокационных сигналов. — //Радиотехника, 1997, №1, с.31-42.
- [19] *D.I. Lekhovitsky, D.V. Atamansky, I.G. Kirillov, P.M. Flexer* Problems and new results of spectral estimation and antenna arrays superresolution techniques. — Proc. of the 3rd International Conference Antenna Theory and Techniques, 8-11 September 1999, Sevastopol, Ukraine, p.62-68.
- [20] *Ширман Я. Д.* Теория обнаружения полезного сигнала на фоне гауссовых шумов и произвольного числа мешающих сигналов со случайными амплитудами и начальными фазами. // Радиотехника и электроника. — 1959. — т.4. — № 12.
- [21] *Ширман Я. Д.* Статистический анализ оптимального разрешения. //Радиотехника и электроника, 1961, т.6, №8, с.1232.
- [22] *Кейпон Дж., Гудмен Н.* Распределение вероятности оценок пространственно-временного спектра. // ТИИЭР. — 1970. — т.58. — №11.-с.82-84.
- [23] *Brennan L.E., Reed I.S.* An Adaptive array signal Processing Algorithm for Communications. // IEEE Trans on Aerosp. and Electr System, v.AES-18, N1, January 1982.
- [24] *Burg I.P.* Maximum Entropy Spectral Analysis. Proc. 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists. Oklahoma City, Okla., October 1967.
- [25] *Караваев В.В., Молодцов В.С.* Точностные характеристики сверхразрешающей антенны. // Радиотехника и электроника. — 1987. — т.32. — №1, с.22-26.
- [26] *Ермолаев В.Т., Родюшкин К.В.* Функция распределения максимального собственного числа выборочной корреляционной матрицы собственного шума

- элементов антенной решетки. // Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1999, т.XLII, №5, с.494-500.
- [27] Гершман А.Б., Ермолаев В.Т. Взаимосвязь спектральных оценок максимальной энтропии и «теплого шума». // Радиотехника. — М.: 1988. — № 9. — с. 39.
- [28] Леховицкий Д. И. К теории адаптивной обработки сигналов в системах с центральной симметрией каналов приема. — Харьков: Радиотехника, №100, 1996.
- [29] Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. — М.: Мир, 1990. — 536 с.
- [30] Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. — М.: Статистика, 1980.
- [31] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986. — 800 с.
- [32] Burg I.P. The Relationship between Maximum Entropy and Maximum likelihood Spectra-Geophysics, v.37, April 1972, p. 375-376.
- [33] Леховицкий Д.И., Атаманский Д.В., Кириллов И.Г. Разновидности «сверхразрешающих» анализаторов пространственно-временного спектра случайных сигналов на основе обеляющих адаптивных решетчатых фильтров // Антенны. — М., 2000. — Вып.2 (45). — С. 40-54.
- [34] Ширман Я.Д. Разрешение и сжатие сигналов. — М.: Сов. радио, 1974. — 360 с.
- [35] Радиоэлектронные системы: основы построения и теория. Справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп./ Под ред. Я.Д. Ширмана. — М.:Радиотехника, 2007. — 512 с.
- [36] Capon J. High Resolution Frequency — Wave number Spectrum Analysis. Proc. IEEE, 1969, 57, pp.1408-1418.

Поступила в редколлегию 24.09.2009



Леховицкий Давид Исаакович, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра Харьковского Национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов: адаптивная пространственно-временная обработка сигналов в информационных системах различного назначения.