МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Подгорный А.Р.

Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,

тел. (057) 702-14-36), e-mail: alexdweller@mail.ru

This paper presents, which describes a problem of mathematical design of phase transformations. The main point of the paper is about transformation the solid body in a liquid. For the modeling of this process the classic model of Stephen is used. The problem is solved by using the Galerkin method. Also, some examples of using Stephen model in daily life are designated.

К необходимости решения задачи Стефана часто приходят при теоретическом моделировании процессов тепло-массопереноса, сопровождающихся изменением агрегатного состояния среды, в первую очередь ее плавлением или затвердеванием [1].

Рассмотрим основные подходы к решению задач типа Стефана с выделением границы фазового перехода на примере простейшей одномерной однофазной задачи Стефана. Рассмотрим отрезок $\Omega = (0,\, l)$, который точкой $x = \xi(t)$ (граница фазового перехода), $\xi(0) > 0$ разбивается на две подобласти:

$$\Omega^+(t) = \{x \mid 0 < x < \xi(t)\},$$

$$\Omega^-(t) = \{x \mid \xi(t) < x < l\}.$$

Будем считать температуру фазового перехода равной нулю $(u^* = 0)$, поэтому в твердой фазе, которая занимает область Ω^-, положим $u(x,t) < 0$, а в жидкой (область Ω^+) – $u(x,t) > 0$. Для определения температуры в жидкой фазе рассматривается уравнение теплопроводности (однородная среда)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \Omega^+(t), \quad 0 < x < \xi(t), \tag{1}$$

а для определения температуры в твердой фазе рассматривается уравнение теплопроводности вида (однородная среда)

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \Omega^-(t), \quad \xi(t) < t \le l. \tag{2}$$

Дополним уравнение (1) начальным условием:

$$u\big|_{t=0} = u_0 < 0, \tag{3}$$

Пусть левый и правый концы поддерживаются при заданной температурах:

$$u_1\big|_{x=0} = u_c, \quad u_2\big|_{x=l} = u_0, \tag{4}$$

На границе фазового перехода выполнены следующие условия:

$$u_1\big|_{x=\xi-0} = u_2\big|_{x=\xi+0}, \qquad \delta\frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi+0} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi-0} = \gamma\frac{d\xi}{dt}. \tag{5}$$

Постоянная γ связана с энтальпией фазового перехода.

Для решения данной задачи был применен метод Галёркина [3].

Сделаем в задаче (1) – (5) замену

$$u(x,t) = \varphi(x,t) + v(x,t),$$

где $v(x,t)$ – новая неизвестная функция; $\varphi(x,t)$ – функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi\big|_{x=0} = u_c, \ \ \varphi\big|_{x=l} = u_0, \ \ \varphi\big|_{x=\xi(t)} = 0.$$

Согласно методу Галеркина решение задачи будем искать в виде

$$v^{(n)}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi_k(x,t), \tag{7}$$

где $c_k(t)$, $k = 1, ..., n$, – неизвестные функции; $\varphi_k(x,t)$, $k = 1, ..., n$, – координатные функции. Функции $c_1(t), ..., c_n(t)$ найдем из условия ортогональности невязки функциям $\varphi_1(x,t), ..., \varphi_n(x,t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k(t)a_{kj}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)b_{kj}(x,t) = f_j(t), \quad j = 1, ..., n, \tag{8}$$

Начальные условия $c_k(0) = c_k^0$, $k = 1, ..., n$, для системы (8) получим, решив систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^0 g_{kj} = h_j, \ j = 1, ..., n, \tag{9}$$

где обозначено

$$g_{kj} = \int_0^l \varphi_k\varphi_j\big|_{t=0}\, dx,$$

$$h_j = \int_0^l \left(u_0 - \varphi\big|_{t=0}\right)\varphi_j\big|_{t=0}\, dx, \ \ k, \ j = 1, ..., n.$$

1. Прусаков Г.М. Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ. М.: Наука, 1993. – 144 с.

2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина.– М.: Мир, 1988. – 353 с.