УДК 517.9

Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенец, А.А. Чикрий

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ В ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ

Ключевые слова: дескрипторная система, дифференциально-алгебраическое уравнение, квадратичный функционал качества, интенсивности импульсов, моменты приложения импульсов, оптимальное импульсное управление, сопряженное состояние, двухточечная краевая задача, радиотехнический фильтр, переходной режим.

Введение

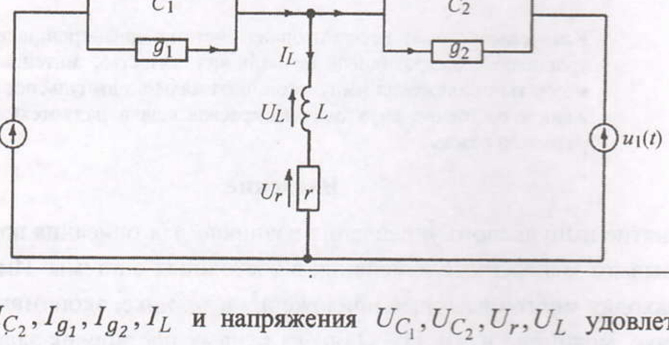
Понятие импульсного управления возникло для описания воздействий, которые вызывают мгновенные изменения в состояниях системы. Импульсное управление находит многочисленные приложения в технике, экономике, финансах, информатике, медицине и т.д. [1]. Одни из первых постановок задач оптимального импульсного управления приводятся в [2, 3]. Методы исследования игровых задач из [4, 5] успешно применялись в [6–8] для изучения динамических игр в системах с управлениями импульсного типа, а в [9] — в системах, претерпевающих импульсные возмущения в дискретные моменты времени. В [10, 11] решалась задача об оптимальном импульсном управлении стохастической системой.

Исследование задачи оптимального импульсного управления мы иллюстрируем на примере радиотехнической системы — электрического четырехполюсника. Динамика подобных систем в общем случае описывается дифференциально-алгебраическими уравнениями и поэтому эти системы относятся к классу дескрипторных систем. Такие сосредоточенные системы хорошо известны в теории управления [12–15] (см. также библиографию в этих работах). Конечномерные дескрипторные системы управления можно использовать для аппроксимации бесконечномерных систем управления типа Соболева или неявных систем, например [16–18].

Введем обозначения: $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$ — пространство вектор-функций со значениями в $\mathbf{R}^n$, суммируемых с квадратом нормы на $[0,T]$; $W_2^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ — пространство Соболева порядка k вектор-функций из $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$, у которых обобщенные производные до порядка k включительно принадлежат $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$. Функции из $W_2^1(0,T;\mathbf{R}^n)$ будем считать непрерывными на $[0,T]$, изменив их, если необходимо, на множестве нулевой меры. Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\|\cdot\|$ обозначают скалярное произведение и норму в соответствующих пространствах, символ E обозначает единичную матрицу надлежащей размерности, транспонированную матрицу к матрице K обозначаем K', сопряженный оператор к оператору Ψ обозначаем Ψ^*. Если 0 — квадратная нулевая матрица, то полагаем $0^0 = E$.

1. Постановка задачи для электрической цепи

Для демонстрации предлагаемого метода исследования оптимального импульсного управления рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рисунке. Цепь имеет два источника напряжения: $e(t)$ и $u_1(t)$; $e(t)$ — заданная функция от времени, $u_1(t)$ — управляемый источник напряжения. Параллельно с емкостями C_1, C_2 включены проводимости g_1, g_2. На внутренней ветви расположены индуктивность L и сопротивление r.



Токи $I_{C_1}, I_{C_2}, I_{g_1}, I_{g_2}, I_L$ и напряжения $U_{C_1}, U_{C_2}, U_r, U_L$ удовлетворяют законам Кирхгофа

$$I_{C_1} + I_{g_1} = I_{C_2} + I_{g_2} + I_L, \ U_{C_1} + U_L + U_r = e, \ U_{C_1} + U_{C_2} + u_1 = e \tag{1}$$

и уравнениям

$$U_L = L\frac{d}{dt}I_L, \ U_r = rI_L, \ I_{C_j} = C_j\frac{d}{dt}U_{C_j}, \ I_{g_j} = g_jU_{C_j}, \ j = 1,2, \tag{2}$$

где L, r, C_j, g_j — положительные постоянные. Состояние электрической цепи характеризуется вектором

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_L(t) \\ U_{C_1}(t) \\ U_{C_2}(t) \end{pmatrix},$$

состоящим из «энергетических» компонент, которые отвечают инерционным элементам. С помощью (1), (2) получаем систему трех дифференциально-алгебраических уравнений относительно «энергетических» компонент:

$$\begin{gathered} L\frac{d}{dt}I_L + U_{C_1} + rI_L = e(t), \\ C_1\frac{d}{dt}U_{C_1} - C_2\frac{d}{dt}U_{C_2} - I_L + g_1U_{C_1} - g_2U_{C_2} = 0, \\ U_{C_1} + U_{C_2} = e(t) - u_1(t). \end{gathered} \tag{3}$$

Перепишем систему уравнений (3) в векторной форме относительно вектора состояний $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t) + K_1 u_1(t), \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 \\ -1 & g_1 & -g_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \\ e(t) \end{pmatrix},\ K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Как и в [19], допускаем, что в модели электрической системы рассматривается идеализированное устройство, способное мгновенно создавать или разрушать путь для прохождения электрического тока. Это влечет за собой возникновение переходного процесса. Идеализаций такого типа является источник импульсных воздействий. Для цепи, изображенной на рисунке, предполагаем, что ток $I_L(t)$ регулируется импульсными воздействия в моменты времени $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N \in [0, T]$:

$$\Delta I_L(t)\big|_{t=\tau_k} = I_L(\tau_k + 0) - I_L(\tau_k - 0) = w_k,\ k = 1, ..., N. \tag{6}$$

Здесь $w_1, ..., w_N$ — интенсивности или веса, отвечающие моментам импульсных воздействий. Математически импульсы описываются с помощью δ-функции Дирака $\delta(t)$ (распределение или обобщенная функция). Регулирование системой (4) с помощью импульсных воздействий (6) реализуется в виде импульсного управления

$$u_2 = \sum_{k=1}^{N} w_k \delta(t - \tau_k). \tag{7}$$

С помощью импульсного управления (7) и матрицы K_2 при импульсном управлении

$$K_2 = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

система (4) с импульсными воздействиями (6) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t) + K_1 u_1(t) + K_2 u_2. \tag{9}$$

Равенства и операции в (9) понимаются в смысле теории распределений или обобщенных функций. Это означает, что вместо уравнения (9) мы рассматриваем уравнение (4) для $t \neq \tau_k$, а в точках τ_k рассматриваем импульсные воздействия:

$$(Ax)(\tau_k + 0) - (Ax)(\tau_k - 0) = K_2 w_k,\ k = 1, ..., N.$$

Математическая модель электрической цепи с нелинейными сосредоточенными элементами, когда токи и напряжения подвергаются импульсным воздействиям, описана в [20]. В этой работе изучались переходные процессы в электрической цепи, импульсное управление не рассматривалось.

Регулирование системы (9) осуществляется с помощью управления $u = \{u_1(t), u_2\}$, в котором $u_1(t)$ — «обычное управление», в дальнейшем называемое измеримым управлением, а u_2 — чисто импульсное управление с весами w_k и моментами приложения импульсов τ_k. Задача оптимального импульсного управления в системе (3) состоит в выборе входного (управляющего) напряжения $u_1(t)$ и импульсного управления u_2 (7), реализующих минимум «энергетического» квадратичного функционала с импульсными интенсивностями:

Правая часть формулы (29) содержит $m+2$ неизвестных величин $p_1(t_j)$, $j=0,1,\ldots,m$, и $p_2(0)$. Напомним, что здесь моменты $\{t_j\}_{j=0}^{m}$ — различные моменты импульсов из $\{\tau_k\}_{k=1}^{N}$, расположенные в возрастающем порядке. Указанные неизвестные можно найти из системы $m+2$ линейных алгебраических уравнений, которая получится, если в третьем соотношении в (29) положить $t=t_j$ для $j=1,\ldots,m$, в четвертом положить $t=t_{m+1}=T$, а моменты импульсов τ_k выразить через моменты t_j. Эта система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение в силу существования и единственности решения двухточечной краевой задачи (27).

Заключение

Рассмотрена задача оптимального импульсного управления дескрипторной системой, заключающаяся в нахождении минимума квадратичного функционала качества с импульсными интенсивностями. Динамика подобных систем описывается дифференциально-алгебраическими уравнениями, не разрешенными относительно производной. Основное предположение при исследовании поставленной задачи состоит в регулярности характеристического пучка матриц, отвечающего уравнению. Это предположение позволяет представить решение импульсного дифференциально-алгебраического уравнения в виде формулы вариации постоянных и гарантировать существование и единственность решения поставленной задачи оптимального импульсного управления. Через решение сопряженной двухточечной краевой задачи строятся оптимальное импульсное управление и оптимальная траектория системы.

Предложенный метод исследования проиллюстрирован на примере оптимального импульсного управления переходными режимами одного радиотехнического фильтра с энергетическим функционалом качества. С помощью формулы вариации постоянных описаны переходные режимы фильтра при импульсных возмущениях токов и напряжений. Предложенный в работе метод исследования задачи оптимального импульсного управления позволил построить оптимальное импульсное управление и отвечающий ему оптимальный переходной режим радиотехнического фильтра.

Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенець, А.О. Чикрій

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ ІМПУЛЬСНЕ КЕРУВАННЯ В ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ

Вивчаємо задачу оптимального імпульсного керування з квадратичним функціоналом якості для дескрипторної системи. Еволюція системи описується диференційно-алгебраїчним рівнянням, що не розв'язне відносно похідної стану. Керування системою здійснюється шляхом зміни вимірного керування та чисто імпульсного керування. Чисто імпульсне керування характеризується інтенсивностями імпульсів та моментами прикладання імпульсів. Основне обмеження полягає в тому, що характеристичний жмуток матриць, що відповідає рівнянню станів, є регулярним. У термінах характеристичного матричного жмутка встановлюються умови існування і єдиності оптимального керування та відповідного оптимального стану. Оптимальне керування та оптимальний стан будуються за допомогою спряженого стану, що є розв'язком спряженої двоточкової крайової задачі. Результати ілюструються на прикладі дескрипторної системи, що описує перехі-

дні режими у радіотехнічному фільтрі. Для цієї системи розглядається енергетичний функціонал якості з імпульсними інтенсивностями, що характеризує енергію інерційних елементів та вхідної напруги фільтру, а також інтенсивності та моменти прикладання імпульсів. Перехідні режими при імпульсних збуреннях струмів і напруг описуються за допомогою формули варіації сталих для імпульсної дескрипторної системи.

Ключові слова: дескрипторна система, диференціально-алгебраїчне рівняння, квадратичний функціонал якості, інтенсивності імпульсів, моменти прикладання імпульсів, оптимальне імпульсне керування, спряжений стан, двоточкова крайова задача, радіотехнічний фільтр, перехідний режим.

L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, V.V. Semenets, A.A. Chikrii

ON THE OPTIMAL IMPULSE CONTROL IN DESCRIPTOR SYSTEMS

We study the optimal impulse control problem with quadratic perfomance functional for a descriptor system. The system evolution is described by a linear differential-algebraic equation not solved with respect to the derivative of the state. The system is controlled by changing the measurable control and the pure impulse control. The pure impulse control is characterized by impulse intensities and moments of impulse applications. The main restriction is that the characteristic matrix pencil corresponding to the state equation is regular. In terms of the characteristic matrix pencil, we establish the conditions for the existence and uniqueness of the optimal control and the corresponding optimal state. The optimal control and the optimal state are constructed by using the adjoint state, which is a solution to the adjoint two-point boundary value problem. The results are illustrated on an example of descriptor system that describes transient states in a radio technical filter. For this system, we consider an energetic perfomance functional with impulse intensities characterizing the energy of inertial elements and input voltage of the filter and also moments of impulse applications. Transient states under impulsive perturbations of currents and voltages are described by using the formula of variation of constants for the impulsive descriptor system.

Keywords: descriptor system, differential algebraic equation, quadratic performance functional, impulse intensities, moments of impulse applications, optimal impulse control, adjoint state, two-point boundary value problem, radio technical filter, transient state.

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства. М. : Наука, 1987. 600 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М. : Наука, 1968. 476 с.
3. Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем. М. : Наука, 1977. 320 с.
4. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht : Springer Science and Business Media, 2013. 424 p. http://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7.
5. Chikrii A.A. An analytical method in a dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. **271**, N 1. P. 69–85. http://doi.org/10.1134/S0081543810040073
6. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. К. : Наук. думка, 2005. 220 с.
7. Chikrii A.A., Matichin I.I. Differential games with impulse control of players. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Suppl.).* 2005. Suppl. 1. P. S68–S81. https://mathscinet.ams.-org/mathscinet-getitem?mr=2156250.
8. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Chikrii K.A. Differential games with impulse control. Advances in dynamic game theory. Vol. 9. of Annals of the International Society of Dynamic Games. Boston : Birkhäuser, 2007. P. 37–55. http://doi.org/10.1007/978-0-8176-4553-3_2
9. Matychyn I., Chikrii A., Onyshchenko V. Conflict-controlled processes involving fractional differential equations with impulses. *Mathematica Balkanica.* 2012. **26**, N 1–2. P. 159–168. http://-www.mathbalkanica.info/

10. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Stochastic impulse control of parabolic systems of Sobolev type. *Differential Equations.* 2011. **47**, N 10. P. 1498–1507. http://doi.org/10.1134/S0012266111100132.
11. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2013. **45**, N 9. P. 66–76. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60.
12. Dai L. Singular control systems. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo : Springer-Verlag, 1989. 332 p. http://doi.org/10.1007/Bfb0002475.
13. Kurina G.A., März R. On linear quadratic optimal control problems for time-variables descriptor systems. *SIAM J. Control Optim.* 2004. **42**, N 6. P. 2062–2077. http://doi.org/10.1137/S0363012900380991.
14. Duan G.R. Analysis and design of descriptor linear systems. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010. 494 p. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-6397-0.
15. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V. Sequential composition and decomposition of descriptor control systems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 9. P. 60–75. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.50.
16. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On the optimal control of systems described by implicit evolution equations. *Differential Equations.* 2009. **45**, N 3. P. 429–438. http://doi.org/10.1134/S0012266109030124.
17. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. The method of resolving functionals for a dynamic game in a Sobolev system. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. **46**, N 7. P. 1–11. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i7.10.
18. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Differential Equations.* 2015. **51**, N 6. P. 798–807. http://doi.org/10.1134/S0012266115060117.
19. Розенфельд А.С., Яхинсон Б.И. Переходные процессы и обобщенные функции. М. : Наука. 1966. 440 с.
20. Vlasenko L.A., Perestyuk N.A. On the solvability of impulsive differential-algebraic equations. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2005. **57**, N 4. P. 551–564. http://doi.org/10.1007/s11253-005-0209-4.
21. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Samoilenko A.M. Problem of impulsive regulator for one dynamical system of the Sobolev type. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2008. **60**, N 8. P. 1200–1209. http://doi.org/10.1007/s11253-009-0135-y.
22. Vlasenko L.A., Samoilenko A.M. Optimal control with impulsive component for systems described by operator differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2009. **61**, N 8. P. 1250–1263. http://doi.org/10.1007/s11253-010-0274-1.
23. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М. : Мир, 1972. 415 с.

Получено 22.02.2019