

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Колосова С.В., Сидоров М.В.

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОСТРОЕНИЕМ
ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Сборник статей VII Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов
«Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных
и социальных проблем»

(Россия, г. Пенза, ПГУ, 28 – 31 мая 2013 г.). – С. 52 – 58.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОСТРОЕНИЕМ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Колосова С.В., Сидоров М.В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков
mac_sim@list.ru

1. Введение и постановка задачи. В современной науке наблюдается большой интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Математическими моделями таких процессов обычно являются нелинейные краевые задачи математической физики. В связи с этим актуальным является построение методов конструктивного решения таких задач.

Целью работы является рассмотрение некоторых подходов к построению последовательных приближений к положительному решению краевой задачи вида

$$-\Delta u = e^{-u} \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) возникает, например, при математическом моделировании течения проводящей среды в цилиндре с непроницаемыми стенками [1] и математическом моделировании теплового самовоспламенения химически активной смеси газов в сосуде [7].

2. Построение двусторонних приближений. Известно [2], что задача (1), (2) в классе непрерывных функций эквивалентна интегральному уравнению

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-u(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad (3)$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функция Грина оператора Лапласа $-\Delta$ для первой краевой задачи в области Ω , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$.

На конусе K неотрицательных в $C(\Omega)$ функций введем в рассмотрение нелинейное операторное уравнение $u = Tu$, где $Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-u(\mathbf{s})} d\mathbf{s}$.

Используя методы теории нелинейных операторных уравнений в полупорядоченных пространствах [2, 4], нами доказана следующая лемма.

Лемма. Оператор T обладает следующими свойствами:

1) оператор T антитонный на конусе K , то есть для всех $u, v \in K$ таких, что $u \leq v$, выполнено $Tu \geq Tv$;

2) существует конусный отрезок $\langle v_0, u_0 \rangle$ такой, что

$$T \langle v_0, u_0 \rangle \subset \langle v_0, u_0 \rangle,$$

где $v_0(\mathbf{x}) \equiv 0$, $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$;

3) оператор T вполне непрерывен на K ;

4) оператор A псевдovoгнутый на $K(u_0)$.

Для уравнения (3) с антитонным оператором T строим итерационный процесс по схеме

$$u^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-u^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Взяв в качестве начального приближения $u^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$, получим

$$u^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = u_0(\mathbf{x}),$$

причем $u^{(0)} \leq u^{(1)} = u_0$.

Поскольку оператор T антитонный, то получим $u^{(2)} = Tu^{(1)} \leq u^{(1)} = Tu^{(0)}$, то есть $u^{(2)} \leq u^{(1)}$. Таким образом, $u^{(0)} \leq u^{(2)} \leq u^{(1)}$. Снова действуя оператором T , получим $u^{(0)} \leq u^{(2)} \leq u^{(3)} \leq u^{(1)}$. Продолжая этот процесс, получим

$$u^{(0)} \leq u^{(2)} \leq \dots \leq u^{(2k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq u^{(2k+1)} \leq \dots \leq u^{(3)} \leq u^{(1)},$$

где $u^* \in \langle v_0, u_0 \rangle$ – точное решение задачи (1), (2).

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема. Задача (1), (2) в $C(\Omega)$ имеет единственное положительное решение, которое можно построить по схеме (4) с двусторонними приближениями, равномерно сходящимися к решению.

3. Метод квазифункций Грина. Знание функции Грина позволяет от нелинейной краевой задачи (1), (2) перейти к эквивалентному интегральному уравнению (3). Однако построение функции Грина в замкнутом виде возможно лишь для некоторых конкретных достаточно простых областей. Нами предлагается приближенный метод решения задачи (1), (2), основанный на использовании квазифункции Грина, которая строится с помощью конструктивного аппарата теории R -функций.

Пусть $\omega(\mathbf{x}) = 0$ – нормализованное до первого порядка уравнение границы $\partial\Omega$ области Ω , т.е. функция $\omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{а) } \omega(\mathbf{x}) > 0 \text{ в } \Omega; \quad \text{б) } \omega(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \partial\Omega; \quad \text{в) } \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = 1 \text{ на } \partial\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ – внутренняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Если граница $\partial\Omega$ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых (без точек возврата), каждая из которых допускает аналитическое задание с помощью элементарной функции, то такая $\omega(\mathbf{x})$ может быть построена практически для любой Ω методом R -функций в виде элементарной функции [6].

Следуя [6], нами доказано, что решение задачи (1), (2), принадлежащее $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, также является решением нелинейного интегрального уравнения

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) e^{-u(\xi)} d\xi + \int_{\Omega} u(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi, \quad (5)$$

где

$$G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r} - q(\mathbf{x}, \xi) \right], \quad q(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2} \ln [r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)],$$

$$r = |\mathbf{x} - \xi|, \quad K(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\xi} q(\mathbf{x}, \xi).$$

Применяя к интегральному уравнению (5) метод последовательных при-

ближений, сводим его к последовательности линейных интегральных уравнений

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} u^{(k)}(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi = \int_{\Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) e^{-u^{(k-1)}(\xi)} d\xi, \quad (6)$$

$k = 2, 3, \dots$, где положили $u^{(1)}(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Приближенное решение уравнения (6) на каждом шаге итерационного процесса предлагается находить методом Бубнова-Галеркина [3], что позволяет получить результат в аналитическом виде.

Приближенное решение каждого из уравнений (6) ищем в виде

$$u_n^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} \varphi_j(\mathbf{x}),$$

что приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $c_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_j^{(2)} \left[\int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint_{\Omega \Omega} K(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\xi) \varphi_i(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x} \right] = \\ = \iint_{\Omega \Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) \varphi_i(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n c_j^{(k)} \left[\int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint_{\Omega \Omega} K(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\xi) \varphi_i(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x} \right] = \\ = \iint_{\Omega \Omega} G_{\text{кв.}}(\mathbf{x}, \xi) e^{-u_n^{(k-1)}(\xi)} \varphi_i(\mathbf{x}) d\xi d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

где $\{\varphi_i(\mathbf{x})\}$ – координатная последовательность.

4. Результаты вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент в задаче (1), (2) был проведен для двух областей: круга радиуса R и прямоугольника со сторонами a и b .

Для случая, когда область Ω представляет собой круг радиуса R функция Грина и квазифункция Грина задачи (1), (2) совпадают. Кроме того, для $R=1$ известно (см. [5]) точное решение задачи из $C(\Omega)$ $u^*(\mathbf{x}) = \ln(8k) - \ln(1 - k\rho^2)^2$, где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $k = 5 - 2\sqrt{6}$.

В таблице 1 приведены значения $u^{(2)}(\mathbf{x})$, $u^{(3)}(\mathbf{x})$ и $u^*(\mathbf{x})$ на луче $\varphi = 0$ при различных значениях ρ (ρ , φ – полярные координаты точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$).

Таблица 1

ρ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$u^{(3)}$	0,21392	0,21181	0,20570	0,19561	0,18121	0,16231	0,13956	0,11200	0,07961	0,04239
u^*	0,21299	0,21097	0,20489	0,19472	0,18040	0,16183	0,13890	0,11146	0,07931	0,04225
$u^{(2)}$	0,20777	0,20574	0,19988	0,19019	0,17633	0,15812	0,13614	0,10942	0,07790	0,04156

Как видно из таблицы 1, точное решение $u^*(\mathbf{x})$ задачи (1), (2) на луче

$\varphi = 0$ заключено в «вилку», образованную функциями $u^{(2)}(\mathbf{x})$ и $u^{(3)}(\mathbf{x})$. Норма разности между приближениями $u^{(2)}(\mathbf{x})$ и $u^{(3)}(\mathbf{x})$ составила

$$\|u^{(2)}(\mathbf{x}) - u^{(3)}(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} = 0,62 \cdot 10^{-2}.$$

На рис. 1 приведены поверхность и линии уровня приближения $u^{(3)}(\mathbf{x})$.

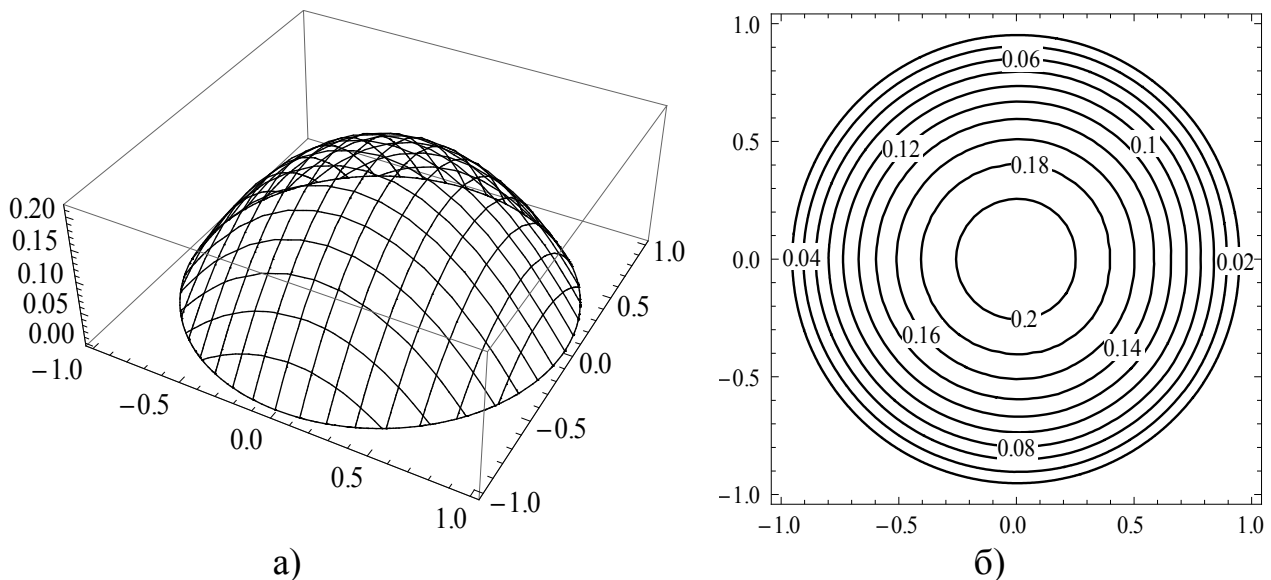


Рис. 1. Поверхность (а) и линии уровня (б) приближения $u^{(3)}(\mathbf{x})$.

Для случая, когда область Ω представляет собой прямоугольник со сторонами a и b , функция Грина не совпадает с квазифункцией Грина и точное решение задачи (1), (2) неизвестно.

Вычисления были проведены для $a = b = 1$. В таблице 2 приведены значения $u^{(2)}(\mathbf{x})$ и $u^{(3)}(\mathbf{x})$, построенных по схеме (4), при $x_2 = \frac{1}{2}$ и различных x_1 .

Норма разности между приближениями $u^{(2)}(\mathbf{x})$ и $u^{(3)}(\mathbf{x})$ составила

$$\|u^{(2)}(\mathbf{x}) - u^{(3)}(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} = 0,13 \cdot 10^{-3}.$$

В таблице 3 приведены значения $u_{21}^{(4)}(\mathbf{x})$, построенные по схеме (6), в тех же точках, что и в таблице 2. На рис. 2 приведены поверхность и линии уровня приближения $u_{21}^{(4)}(\mathbf{x})$.

Таблица 2

x_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$u^{(3)}$	0,02800	0,04738	0,06043	0,06756	0,07004	0,06756	0,06043	0,04738	0,02800
$u^{(2)}$	0,02797	0,04731	0,06033	0,06744	0,06991	0,06744	0,06033	0,04731	0,02797

Таблица 3

x_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$u_{21}^{(4)}$	0,02791	0,04756	0,06031	0,06751	0,06984	0,06751	0,06031	0,04755	0,02791

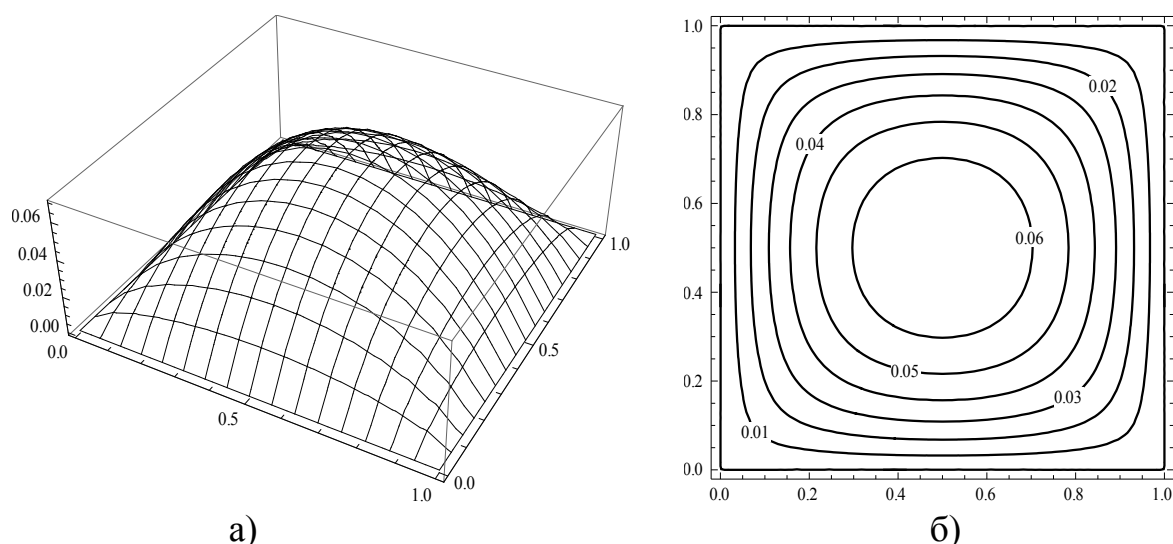


Рис. 2. Поверхность (а) и линии уровня (б) приближения $u_{21}^{(4)}(\mathbf{x})$.

Как видно, полученные двумя методами приближенные решения хорошо согласуются.

5. Заключение. В работе исследована возможность построения приближенных методов решения задачи (1), (2). Один из методов основан на использовании точной функции Грина, что позволяет получить двусторонние приближения к решению рассматриваемой задачи. Другой метод использует квази-функцию Грина, которая строится, используя конструктивный аппарат теории R -функций, что позволяет приближенно решить задачу (1), (2) в областях практически произвольной геометрии, для которых функция Грина либо неизвестна, либо сложна в построении. Предлагаемые методы могут быть использованы при решении прикладных задач, математическими моделями которых служат краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений.

Библиографический список

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968. — 183 с.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962. — 394 с.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
4. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Моск. матем. общества. — Т. 36, 1978. — С. 237 – 273.
5. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник нелинейные уравнения математической физики: точные решения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 432 с.
6. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 552 с.
7. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Интеллект, 2008. — 408 с.