

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ

ГИБКИНА Н.В., СИДОРОВ М.В.,
СТАДНИКОВА А.В.

Рассматривается задача оптимального граничного управления колебаниями однородной струны. Под оптимальным управлением в данной задаче понимается задание такого режима колебаний концов струны, при котором в конечный момент времени струна примет положение, наиболее близкое (в смысле среднеквадратической метрики) к желаемому.

Введение

Актуальность исследования. Дифференциальные уравнения в частных производных гиперболического типа описывают широкий класс физических процессов и явлений, в основе которых лежат колебания. С помощью уравнений этого типа можно моделировать поперечные колебания струны, мембраны, продольные колебания стержня, электрические колебания в проводах, акустические и электромагнитные колебания, колебания элементов стационарных конструкций, транспортных, авиационных и космических конструкций, элементов подвижных объектов, некоторые гидродинамические процессы [13].

Простейшее уравнение гиперболического типа – это одномерное волновое уравнение, которое описывает колебания струны. Использование волнового уравнения позволяет исследовать разнообразные прикладные задачи, среди которых одними из наиболее важных являются задачи управления рассматриваемыми процессами. Управляемые колебательные системы широко распространены в промышленности, технике, механике и других областях науки и производства. В частности, такие задачи связаны с гашением пульсаций потоков газа, жидкости, электричества в длинных трубопроводах, генерацией электромагнитных колебаний в волноводах и резонаторах, стабилизацией технических систем различной природы [1, 2].

Теоретическое исследование управляемости систем с распределенными параметрами, которые описываются уравнениями гиперболического типа, было проведено в [1, 6-9, 14].

Для решения этих задач используются принцип максимума [12], метод моментов [1], методы финитного управления [1], метод множителей Лагранжа [8], метод Фурье [3], метод падающих и отраженных волн [5] и другие методы.

РИ, 2016, № 2

Каждая из перечисленных работ содержит серьезные теоретические исследования и значимые результаты, которые могут быть использованы для решения задач оптимального управления колебательными процессами в различных постановках. В то же время основным недостатком большинства указанных методов является громоздкость предложенных схем решения, а иногда отсутствие их вычислительной реализации и примеров решения тестовых задач на ЭВМ.

Таким образом, разработка новых и усовершенствование существующих методов оптимального управления колебательными процессами является актуальной научной проблемой.

Цель и задачи исследования. Цель настоящего исследования – разработка математических методов оптимального управления процессом свободных колебаний однородной струны (без вынуждающей силы), которые позволят установить в конечный момент времени положение точек этой струны, наиболее близкое к заданному положению.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- сформулировать задачу оптимального управления процессом свободных колебаний однородной струны;
- используя метод Фурье, получить решение одномерного волнового уравнения при заданных краевых и начальных условиях;
- рассмотреть аппроксимацию управляющих воздействий в виде линейной комбинации полиномов Лежандра;
- провести вычислительные эксперименты для разных параметров процесса оптимального управления конечным положением точек струны.

1. Постановка задачи

Исследуются свободные колебания однородной струны $0 \leq x \leq L$ без воздействия на нее вынуждающей силы. Функция $u = u(x, t)$ характеризует отклонение от положения равновесия точки струны с координатой x в момент времени t . Отклонение $u|_{t=0} = \varphi(x)$ и скорость точек струны $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$ в начальный момент времени $t = 0$ считаются известными. Граничный режим для концов струны также известен.

Математическая модель описанного процесса свободных колебаний однородной струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3)$$

$$\left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=L} = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где a^2 , L , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 – заданные константы; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные функции из $L_2(0, L)$.

В уравнении (1) $a^2 = \frac{T}{\rho}$, где ρ – линейная плотность, характеризующая распределение масс в струне (для однородной струны $\rho = \text{const}$); T – натяжение в каждой точке струны ($T = \text{const}$ для всех x и t).

Требуется, управляя положением концов струны с течением времени $t \in [0, T]$, достигнуть к заданному моменту времени $T > 0$ такого положения струны, которое будет как можно более близким к заданному положению $y(x)$, $0 \leq x \leq L$. Формально это условие может быть записано в виде функционала качества:

$$J(\mu) = \|u(x, T; \mu) - y(x)\|_{L_2(0, L)}^2 = \int_0^L (u(x, T; \mu) - y(x))^2 dx \quad (6)$$

при условии, что $u = u(x, t) = u(x, t; \mu)$ является решением начально-краевой задачи (1) – (5).

Предполагается, что $\mu = (\mu_1(t), \mu_2(t))$ – управление, принадлежащее множеству

$$M = \{\mu = (\mu_1(t), \mu_2(t)) \in L_2(0, T) \times L_2(0, T), \mu_1^{\min} \leq \mu_1(t) \leq \mu_1^{\max}, \mu_2^{\min} \leq \mu_2(t) \leq \mu_2^{\max}\} \quad (7)$$

почти всюду на $[0, T]$, где $\mu_1^{\min} < \mu_1^{\max}$, $\mu_2^{\min} < \mu_2^{\max}$.

Возможны также и другие ограничения, накладываемые на управление μ исходя из физических ограничений задачи.

2. Построение оптимального управления

Первый этап решения задачи оптимального граничного управления процессом колебаний струны заключается в поиске решения задачи (1) – (5) методом Фурье в предположении, что краевые условия заданы. Сделаем замену

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (8)$$

где $v(x, t)$ – новая неизвестная функция, а

$$w(x, t) = \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(t) + \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(t). \quad (9)$$

Функция $w(x, t)$ выбрана так, чтобы удовлетворять неоднородным краевым условиям (4) – (5).

На основании соотношений (1) – (5) для новой неизвестной функции $v(x, t)$ получим начально-краевую задачу с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (12)$$

$$\left(-\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_1 v\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$\left(\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2 v\right)\Big|_{x=L} = 0, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где

$$f(x, t) = a^2 \left(\frac{2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(t) + \frac{2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(t) \right) - \left(\frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2''(t) + \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1''(t) \right), \quad (15)$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(0) - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(0), \quad (16)$$

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2'(0) - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1'(0). \quad (17)$$

Как известно [10], собственными значениями задачи

(10) – (14) являются $\lambda_n = \left(\frac{\zeta_n}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$, где ζ_n –

n -й положительный корень трансцендентного уравнения

$$\text{ctg } \zeta = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \zeta^2 - \beta_1 \beta_2 L^2}{(\alpha_1 \beta_2 L + \alpha_2 \beta_1 L) \zeta}, \quad (18)$$

а соответствующие им собственные функции $\Phi_n(x)$ имеют вид:

$$\Phi_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x + \theta_n\right), \quad (19)$$

где $\theta_n = \text{arctg} \frac{\alpha_1 \sqrt{\lambda_n}}{\beta_1}$.

При этом

$$\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2 = \frac{L}{2} \left\{ 1 + \frac{(\alpha_1 \alpha_2 \zeta_n^2 + \beta_1 \beta_2 L^2)(\alpha_1 \beta_2 L + \alpha_2 \beta_1 L)}{(\alpha_1^2 \zeta_n^2 + \beta_1^2 L^2)(\alpha_2^2 \zeta_n^2 + \beta_2^2 L^2)} \right\}.$$

Решение задачи (10) – (14) будем искать в виде ряда:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \Phi_n(x), \quad (20)$$

где $\Phi_n(x)$ имеет вид (19).

Подставив ряд (20) в уравнение (10) и начальные условия (11) – (12), получим, что функции $T_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, являются решением задач Коши:

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = f_n(t),$$

$$T_n(0) = \tilde{\varphi}_n,$$

$$T_n'(0) = \tilde{\psi}_n,$$

здесь

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{(\tilde{\varphi}, \Phi_n)_{L_2(0,L)}}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2}, \quad (21)$$

$$\tilde{\psi}_n = \frac{(\tilde{\psi}, \Phi_n)_{L_2(0,L)}}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2}, \quad (22)$$

$$f_n(t) = \frac{(f, \Phi_n)_{L_2(0,L)}}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2}, \quad (23)$$

и имеют вид:

$$T_n(t) = \tilde{\varphi}_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + \frac{\tilde{\psi}_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}t + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Подставляя в формулу (8) соотношения (9) и (20), где $T_n(t)$ определяется соотношением (24), а $\Phi_n(x)$ – соотношением (19), получаем решение начально-краевой задачи (1) – (5):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t \cdot \Phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}t \cdot \Phi_n(x) + \quad (25)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau) d\tau \cdot \Phi_n(x) + \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(t) + \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(t).$$

Аппроксимацию функций $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ будем искать в виде

$$\mu_1(t) = \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(t), \quad \mu_2(t) = \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(t), \quad (26)$$

где $\{Q_k\}$, $\{R_j\}$ – системы базисных функций в $L_2(0,T)$.

В этом случае

$$\begin{aligned} f(x,t) = & a^2 \left(\frac{2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(t) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(t) \right) - \\ & - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j''(t) - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k''(t), \\ \tilde{\varphi}(x) = & \varphi(x) - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(0) - \\ & - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(0), \\ \tilde{\psi}(x) = & \psi(x) - \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j'(0) - \\ & - \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k'(0). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_n(t) = & \frac{1}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \left(\sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(t) \frac{2a^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \cdot \eta_n^{(1)} + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(t) \frac{2a^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \cdot \eta_n^{(1)} - \\ & - \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j''(t) \frac{1}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \cdot \eta_n^{(2)} - \\ & \left. - \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k''(t) \frac{1}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \cdot \eta_n^{(3)} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\tilde{\Phi}_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \left(\int_0^L \varphi(\xi) \Phi_n(\xi) d\xi - \sum_{j=1}^{m_2} r_j \frac{R_j(0)}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \cdot \eta_n^{(2)} - \right. \quad (28)$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} q_k \frac{Q_k(0)}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \cdot \eta_n^{(3)} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{\Psi}_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \left(\int_0^L \psi(\xi) \Phi_n(\xi) d\xi - \sum_{j=1}^{m_2} r_j \frac{R'_j(0)}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \cdot \eta_n^{(2)} - \right. \quad (29)$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} q_k \frac{Q'_k(0)}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \cdot \eta_n^{(3)} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\eta_n^{(1)} = \int_0^L \Phi_n(x) dx, \quad \eta_n^{(2)} = \int_0^L x^2 \Phi_n(x) dx,$$

$$\eta_n^{(3)} = \int_0^L (x-L)^2 \Phi_n(x) dx.$$

Подставив (27) – (29) в (25) и вычислив полученную функцию при $t = T$, получим, что фактическое положение точек струны в конечный момент времени описывается соотношением

$$u(x, T) = \sum_{k=1}^{m_1} q_k A_k(x) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j B_j(x) + C(x), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} A_k(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \times \\ &\times \frac{1}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \left[-Q_k(0) \cos a\sqrt{\lambda_n} T \cdot \eta_n^{(3)} + \right. \\ &\quad \left. - Q'_k(0) \frac{\sin a\sqrt{\lambda_n} T}{a\sqrt{\lambda_n}} \cdot \eta_n^{(3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \left(2a^2 \eta_n^{(1)} \int_0^T Q_k(\tau) \sin[a\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)] d\tau - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta_n^{(3)} \int_0^T Q'_k(\tau) \sin[a\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)] d\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} Q_k(T) \right], \quad k = \overline{1, m_1}, \\ B_k(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \times \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{1}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \left[-R_k(0) \cos a\sqrt{\lambda_n} T \cdot \eta_n^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. - R'_k(0) \frac{\sin a\sqrt{\lambda_n} T}{a\sqrt{\lambda_n}} \cdot \eta_n^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \left(2a^2 \eta_n^{(1)} \int_0^T R_k(\tau) \sin[a\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)] d\tau - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta_n^{(2)} \int_0^T R'_k(\tau) \sin[a\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)] d\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} R_k(T) \right], \quad k = \overline{1, m_1}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\|\Phi_n\|_{L_2(0,L)}^2} \times \left(\cos(a\sqrt{\lambda_n} T) \int_0^L \varphi(\xi) \Phi_n(\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin a\sqrt{\lambda_n} T}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^L \psi(\xi) \Phi_n(\xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, задача оптимального управления колебаниями концов однородной струны (1) – (7) сводится к задаче оптимизации:

$$\begin{aligned} J(\mu) &= \int_0^L \left(\sum_{k=1}^{m_1} q_k A_k(x) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j B_j(x) + C(x) - y(x) \right)^2 dx = \\ &= \sum_{k=1}^{m_1} q_k^2 \delta_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^2 \delta_j^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} q_k r_j \gamma_{kj} + \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{m_1} q_k \sigma_k^{(1)} + 2 \sum_{j=1}^{m_2} r_j \sigma_j^{(2)} + \eta \rightarrow \min_{\substack{q_k, k=\overline{1, m_1}, \\ r_j, j=\overline{1, m_2}}} \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{kj} &= \int_0^L A_k(x) B_j(x) dx, \quad k = \overline{1, m_1}, \quad j = \overline{1, m_2}, \\ \delta_k^{(1)} &= \int_0^L A_k^2(x) dx, \quad k = \overline{1, m_1}, \\ \delta_j^{(2)} &= \int_0^L B_j^2(x) dx, \quad j = \overline{1, m_2}, \\ \sigma_k^{(1)} &= \int_0^L A_k(x) (C(x) - y(x)) dx, \quad k = \overline{1, m_1}, \\ \sigma_j^{(2)} &= \int_0^L B_j(x) (C(x) - y(x)) dx, \quad j = \overline{1, m_2}, \\ \eta &= \int_0^L (C(x) - y(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Задачу оптимизации (34) нужно дополнить ограничениями на управление (7) или другими.

3. Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительных экспериментов в задаче (1) – (7) при разных значениях m были выбраны следующие значения параметров: $L = 1$, $a = 1$, $T = 1$. Положение и скорость точек струны в начальный момент времени $t = 0$ равны $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$ соответственно. Считаем, что управление процессом колебаний осуществляется только за счет колебаний правого конца струны, поэтому функция $\mu_1(t)$ задана, и для нахождения оптимального управления μ необходимо определить функцию $\mu_2(t)$. Во всех следующих вычислительных экспериментах считаем, что функция $\mu_1(t)$ известна: $\mu_1(t) = 0$.

Аппроксимацию управления $\mu_2(t)$ будем искать в виде линейной комбинации смещенных полиномов Лежандра:

$$\mu_2^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^m r_k P_k\left(\frac{2x}{L} - 1\right). \quad (35)$$

Здесь $P_k(t)$ – полином Лежандра степени k . Эти полиномы образуют полную ортогональную в $L_2(-1,1)$ систему полиномов и могут быть вычислены по формуле Родрига [10]:

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k].$$

На управление $\mu_2(t)$ накладывается следующее ограничение (условие согласования краевого и начального условий): $\mu_2(0) = 0$.

Случай 1. Пусть левый конец струны $x=0$ закреплен, а управление заключается в задании при $t \in (0, T]$ режима колебаний правого конца струны $x = L$. Этот случай соответствует следующим значениям параметров в краевых условиях (4) – (5): $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$. При этом собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ а собственные функции}$$

$$\Phi_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Зададим желаемое положение струны в момент времени T функцией $y(x) = x^3(1-x)$.

На рис. 1 – 4 приведены графики аппроксимаций $\mu_2^{(m)}(t)$ оптимального управления режимом колебаний правого конца струны $\mu_2(t)$ вида (35) для $m = 3, 6, 9, 12$.

Как видно из графиков, прослеживается тенденция выхода функций $\mu_2^{(m)}(t)$ на некоторое предельное

значение с ростом m . Так, в ходе вычислений получено, что $\mu_2^{(12)}(t)$ совпадает с $\mu_2^{(11)}(t)$ в норме $L_2(0, T)$ с точностью $0,15 \cdot 10^{-2}$, а значения соответствующих им функционалов отличаются на величину порядка $0,23 \cdot 10^{-18}$. Функцию $\mu_2^{(12)}(t)$ возьмем в качестве приближенного значения оптимального управления процессом колебаний правого конца струны.

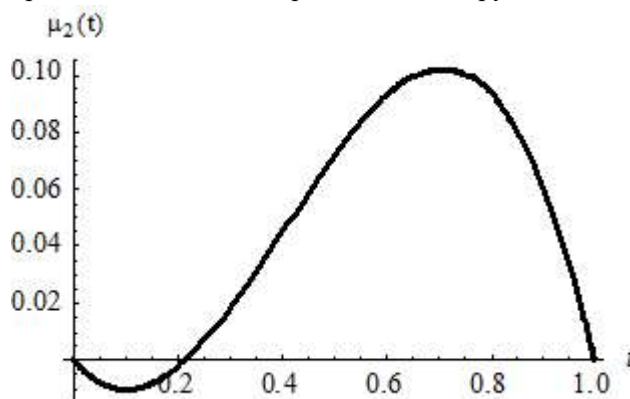


Рис. 1. График аппроксимации $\mu_2^{(3)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

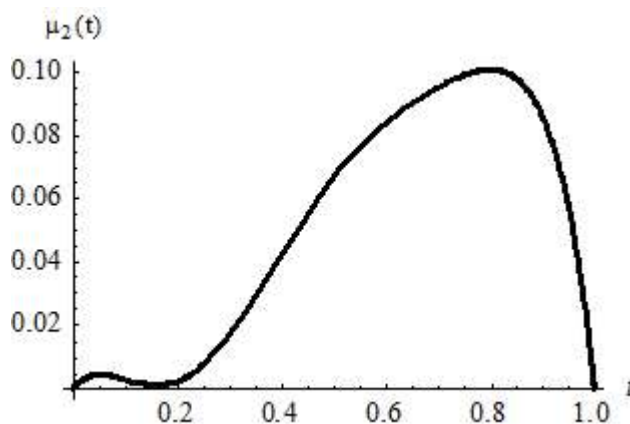


Рис. 2. График аппроксимации $\mu_2^{(6)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

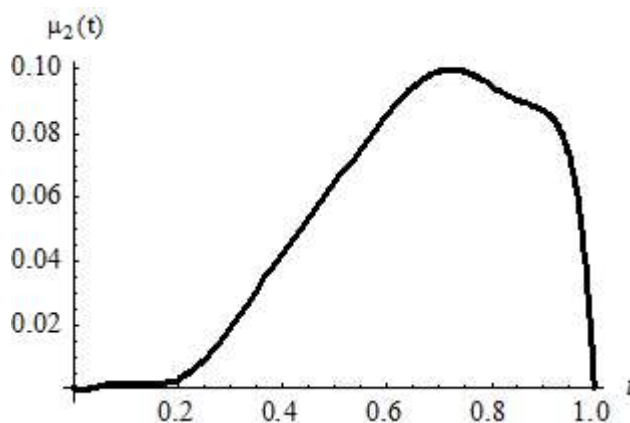


Рис. 3. График аппроксимации $\mu_2^{(9)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

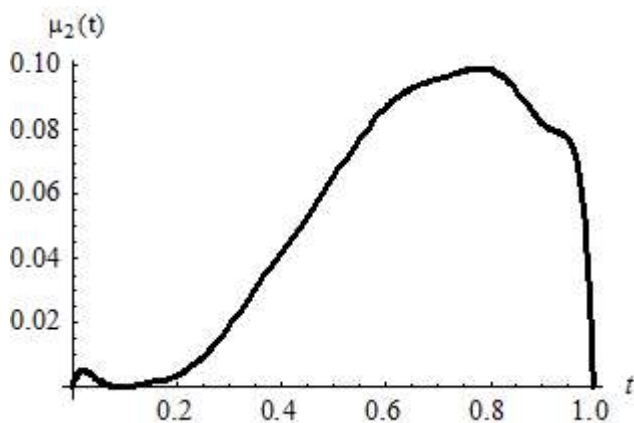


Рис. 4. График аппроксимации $\mu_2^{(12)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

На рис. 5 приведено желаемое $y(x)$ и фактическое $u(x, T)$ положение струны в конечный момент времени $T = 1$ под воздействием управления $\mu_2^{(12)}(t)$, а на рис. 6 – соответствующий этому случаю модуль разности $|u(x, T) - y(x)|$ при $T = 1$. При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,51 \cdot 10^{-2}.$$

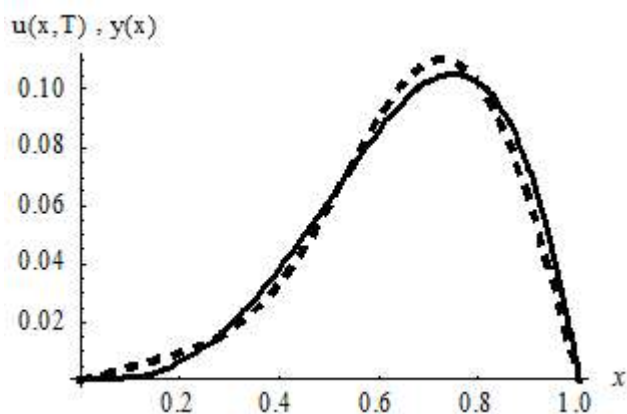


Рис. 5. График желаемого $y(x)$ (сплошная линия) и фактического $u(x, T)$ (пунктирная линия) положения точек струны при управлении $\mu_2^{(12)}(t)$ в момент времени $T = 1$

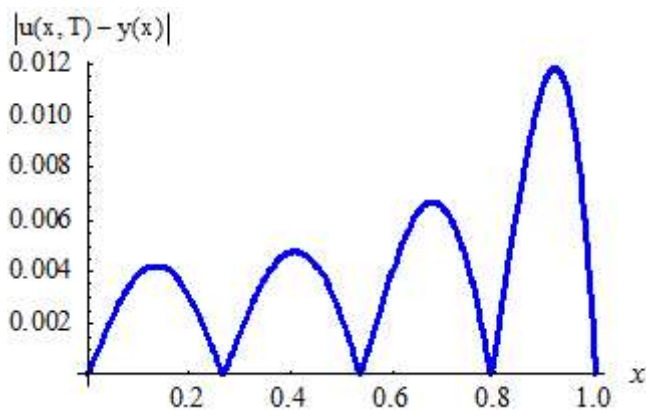


Рис. 6. График $|u(x, T) - y(x)|$

Случай 2. Пусть левый конец струны $x = 0$ закреплен, а управление заключается в задании при $t \in (0, T]$ приложенной к правому концу струны $x = L$ силы. Этот случай соответствует следующим значениям параметров в краевых условиях (4) – (5): $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$. При этом собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2L}\right)^2$, $n = 0, 1, \dots$, а собственные функции $\Phi_n(x) = \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2L}$, $n = 0, 1, \dots$.

Зададим желаемое положение струны в момент времени T функцией $y(x) = x(2 - x)$.

На рис. 7 – 10 приведены графики аппроксимаций $\mu_2^{(m)}(t)$ оптимального управления режимом колебаний правого конца струны $\mu_2(t)$ вида (35) для $m = 3, 6, 9, 12$. Как и в предыдущем случае, из графиков видно, что с ростом m прослеживается тенденция выхода функций $\mu_2^{(m)}(t)$ на некоторое предельное значение. При этом $\mu_2^{(12)}(t)$ совпадает с $\mu_2^{(11)}(t)$ в норме $L_2(0, T)$ с точностью $0,53 \cdot 10^{-1}$, а значения соответствующих им функционалов отличаются на величину порядка $0,19 \cdot 10^{-15}$. С указанной точностью функция $\mu_2^{(12)}(t)$ может быть использована в качестве приближенного значения оптимального управления процессом колебаний правого конца струны.

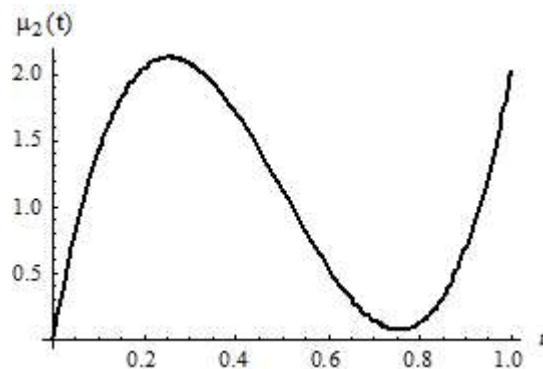


Рис. 7. График аппроксимации $\mu_2^{(3)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

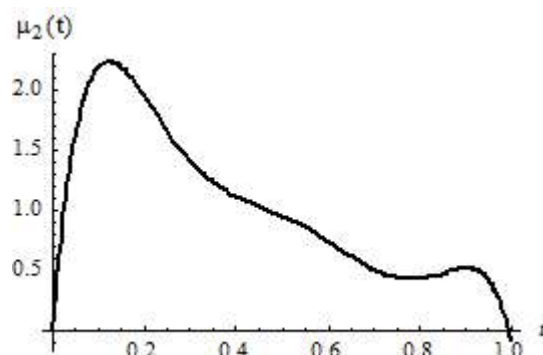


Рис. 8. График аппроксимации $\mu_2^{(6)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

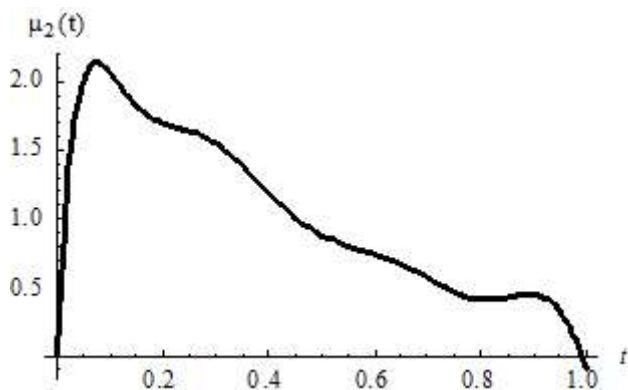


Рис. 9. График аппроксимации $\mu_2^{(9)}(t)$
оптимального управления $\mu_2(t)$

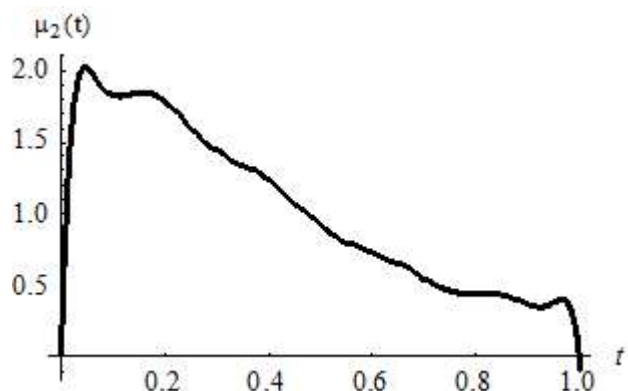


Рис. 10. График аппроксимации $\mu_2^{(12)}(t)$
оптимального управления $\mu_2(t)$

На рис. 11 приведено желаемое $y(x)$ и фактическое $u(x, T)$ положение струны в конечный момент времени $T=1$ под воздействием управления $\mu_2^{(12)}(t)$, а на рис. 12 – соответствующий этому случаю график модуля разности $|u(x, T) - y(x)|$ при $T=1$. При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,20 \cdot 10^{-2}.$$

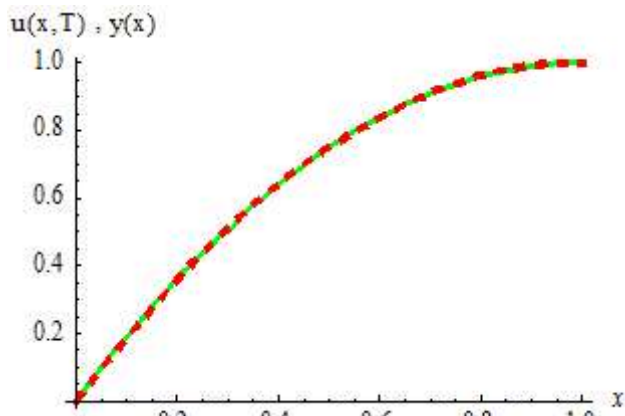


Рис. 11. График желаемого $y(x)$ (сплошная линия) и фактического $u(x, T)$ (пунктирная линия) положения точек струны при управлении $\mu_2^{(12)}(t)$ в момент времени $T=1$

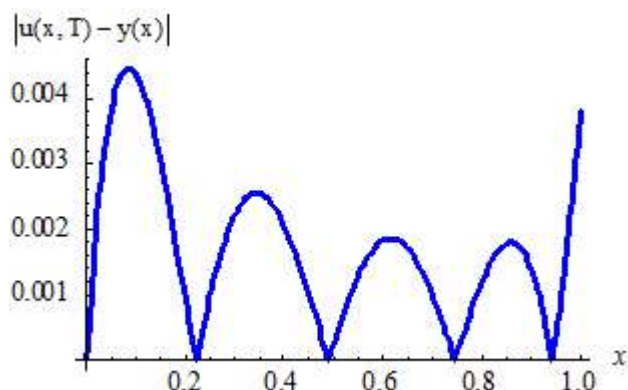


Рис. 12. График $|u(x, T) - y(x)|$

Случай 3. Считаем, что левый конец струны $x=0$ упруго закреплен, а управление заключается в задании при $t \in (0, T]$ режима колебаний правого конца струны $x=L$. Этот случай соответствует следующим значениям параметров в краевых условиях (4)-(5): $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$. При этом собственное значение λ_n , $n = 1, 2, \dots$, определяется как n -й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} L = -\frac{\alpha_1 \sqrt{\lambda}}{\beta_1}$, а собственные функции есть $\Phi_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} (x - L)$, $n = 1, 2, \dots$.

Зададим желаемое положение струны в момент времени T функцией $y(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

На рис. 13 – 16 приведены графики аппроксимаций $\mu_2^{(m)}(t)$ оптимального управления режимом колебаний правого конца струны $\mu_2(t)$ вида (35) для $m = 3, 6, 9, 12$.

В этом случае также видно, что с ростом m наблюдается выход функций $\mu_2^{(m)}(t)$ на некоторое предельное значение. При этом $\mu_2^{(12)}(t)$ совпадает с $\mu_2^{(11)}(t)$ в норме $L_2(0, T)$ с точностью $0,15 \cdot 10^{-1}$, а значения соответствующих им функционалов отличаются на величину порядка $0,11 \cdot 10^{-12}$. Как и в предыдущем случае, функцию $\mu_2^{(12)}(t)$ с указанной точностью возьмем в качестве приближенного значения оптимального управления процессом колебаний правого конца струны.

На рис. 17 приведено желаемое $y(x)$ и фактическое $u(x, T)$ положение струны в конечный момент времени $T=1$ под воздействием управления $\mu_2^{(12)}(t)$, а на рис. 18 – соответствующий этому случаю график модуля разности $|u(x, T) - y(x)|$ при $T=1$. При этом

$$\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, L)} = 0,23 \cdot 10^{-2}.$$

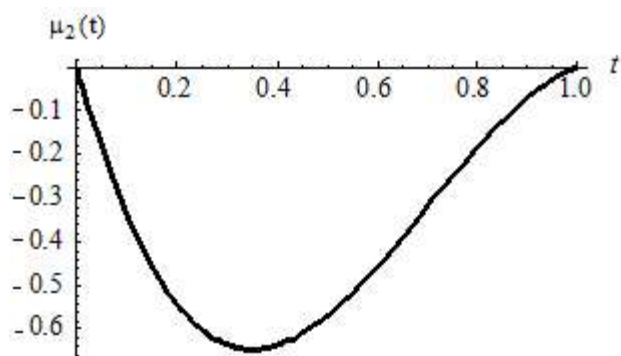


Рис. 13. График аппроксимации $\mu_2^{(3)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

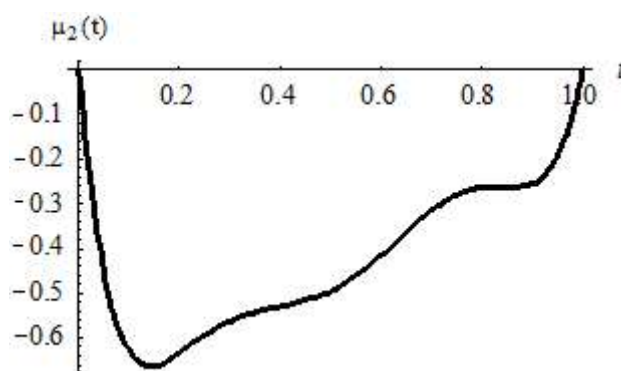


Рис. 14. График аппроксимации $\mu_2^{(6)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

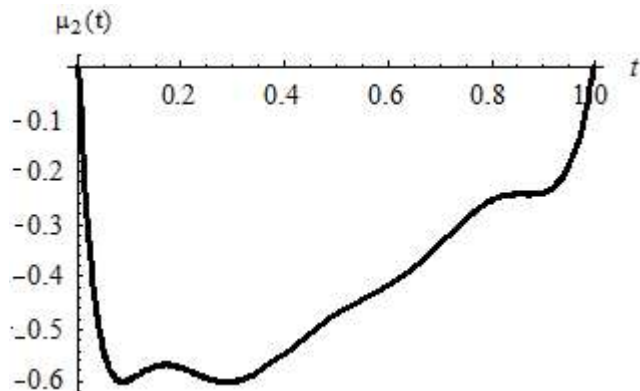


Рис. 15. График аппроксимации $\mu_2^{(9)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

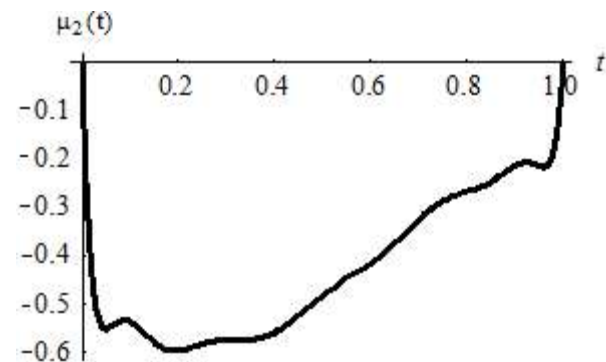


Рис. 16. График аппроксимации $\mu_2^{(12)}(t)$ оптимального управления $\mu_2(t)$

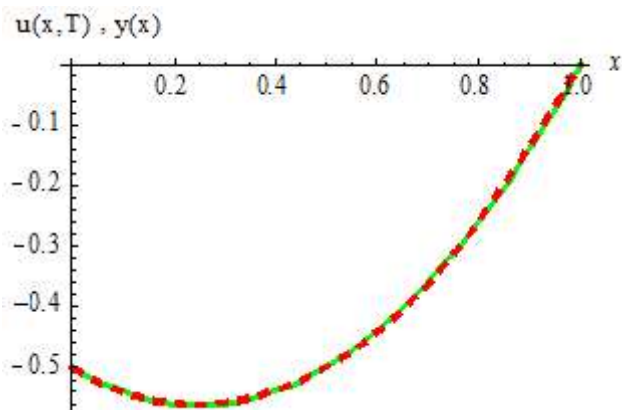


Рис. 17. График желаемого $y(x)$ (сплошная линия) и фактического $u(x, T)$ (пунктирная линия) положения точек струны при управлении $\mu_2^{(12)}(t)$ в момент времени $T=1$

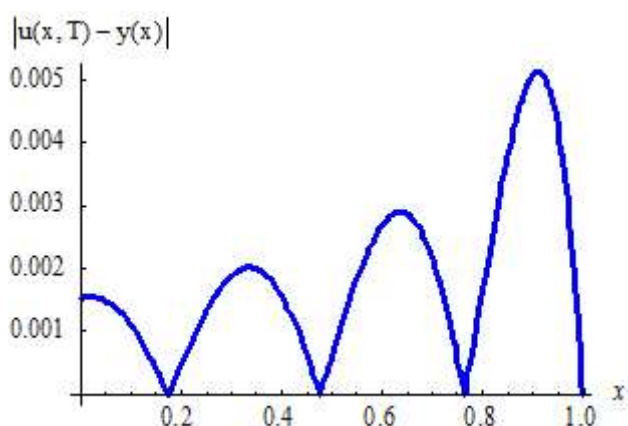


Рис. 18. График $|u(x, T) - y(x)|$

Отметим, что кроме выражения (35) можно использовать также другие виды аппроксимаций управляющего воздействия $\mu_2(t)$, например, в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье, линейной комбинации сплайнов Шенберга [4].

Выводы

Предложен метод приближенного построения оптимального управления процессом колебаний однородной струны за счет задания режима колебаний ее концов. Вычислительные эксперименты проведены для различных режимов колебаний правого конца струны в случае, когда управляющие функции аппроксимируются полиномами Лежандра. Вычислительный эксперимент показал, что с ростом степени аппроксимирующего полинома структура оптимального управления режимом колебаний $\mu_2(t)$ выходит на некоторый предельный режим, свой для каждого типа краевых условий. Предложенный метод отличается от известных методов тем, что начально-краевая задача для волнового уравнения решается аналитически и оптимальное управление также ищется в аналитическом виде. Полученные результаты могут быть использованы при расчете оптимальных программ управления режимом колебаний в физических и технологи-

ческих системах. Этим определяется научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

Литература: 1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 588 с. 2. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с. 3. *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Разгулин А.В.* О методе Фурье для решения одной задачи управления колебанием струны // Вестник МГУ, сер. 15, вычисл. матем. и киберн. 1993. № 2. С. 3–8. 4. *Гибкина Н.В., Подусов Д.Ю., Сидоров М.В.* Оптимальное управление конечным температурным состоянием однородного стержня // Радиоэлектроника и информатика, 2014. №2. С. 9–15. 5. *Егоров А.И.* Управление упругими колебаниями // ДАН УССР, сер. физ.-мат. и техн. наук. 1986. № 5. С. 60–63. 6. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // УМН. 2005. Т. 60. Вып. 6 (366). С. 89–114. 7. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 162 с. 8. *Конец М.М.* Оптимальное управление колебаниями прямоугольной мембраны // Кибернетика и вычисл. техника. 2014. Вып. 177. С. 28–42. 9. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с. 10. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с. 11. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Наука, 2004. 416 с. 12. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с. 13. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с. 14. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.

Transliterated bibliography:

1. *Butkovskiy A.G.* Metodyi upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami. M.: Nauka, 1975. 588 s.
2. *Butkovskiy A.G.* Teoriya optimalnogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami. M.: Nauka, 1965. 474 s.
3. *Vasilev F.P., Kurzhanskiy M.A., Razgulin A.V.* O metode Fure dlya resheniya odnoy zadachi upravleniya kolebaniem struny // Vestnik MGU, ser. 15, vyichisl. matem. i kibern. 1993. #2. S. 3–8.
4. *Gibkina N.V., Podusov D.Yu., Sidorov M.V.* Optimalnoe upravlenie konechnym temperaturnym sostoyaniem odnorodnogo sterzhnya // Radioelektronika i informatika, 2014. #2. S. 9–15.

5. *Egorov A.I.* Upravlenie uprugimi kolebaniyami // DAN USSR, ser. fiz.-mat. itehn. nauk. 1986. #5. S. 60–63. 6. *Ilin V.A., Moiseev E.I.* Optimizatsiya granichnykh upravleniy kolebaniyami struny // UMN. 2005. T. 60. Vyp. 6 (366). S. 89–114.

7. *Komkov V.* Teoriya optimalnogo upravleniya dempfirovaniem kolebaniy prostykh uprugih sistem. M.: Mir, 1975. 162 s.

8. *Kopets M.M.* Optimalnoe upravlenie kolebaniyami pryamougolnoy membrany // Kibernetika i vyichisl. tehnika. 2014. Vyp. 177. S. 28–42.

9. *Lions Zh.-L.* Optimalnoe upravlenie sistemami, opisyivaemyimi uravneniyami s chastnyimi proizvodnyimi. M.: Mir, 1972. 416 s.

10. *Martinson L.K., Malov Yu.I.* Differentsialnyie uravneniya matematicheskoy fiziki. 2-e izd. M.: Izd-vo MG TU im. N.E. Bauman, 2002. 368 s.

11. *Sveshnikov A.G., Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V.* Lektsii po matematicheskoy fizike. M.: Nauka, 2004. 416 s.

12. *Sirazetdinov T.K.* Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami. M.: Nauka, 1977. 480 s.

13. *Tihonov A.N., Samarskiy A.A.* Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 2004. 798 s.

14. *Fursikov A.V.* Optimalnoe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya. Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999. 352 s.

Поступила в редколлегию 12.04.2016

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Гибкина Надежда Валентиновна (N.V. Gybkina), канд. техн. наук, доцент каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, оптимальное управление и его приложения, математическая физика, актуарная и финансовая математика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович (M.V. Sidorov), канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436.

Стадник Анна Викторовна (H.V. Stadnikova), ассист. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, теория R-функций и её приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436.