

МНОГОМОДОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СИСТЕМЫ С ТОЧКАМИ ЛОКАЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

ДИКАРЕВ В.А.

Исследуются установившиеся электромагнитные колебания в конечномодовых системах, содержащих точки локального вырождения (ТЛВ). Изучается процесс прохождения ВКБ-волн через такие точки. Получены формулы для коэффициентов «сшивки» ВКБ-асимптотик по разные стороны от ТЛВ. С их помощью выясняется, как перераспределяются амплитуды ВКБ-волн при их прохождении через ТЛВ. Получены формулы для амплитуд ВКБ-волн.

1. Введение и постановка задачи. Редукция уравнения многоволнового канала (УМК)

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений с малым параметром вида

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon)y,$$

для которых не существует ВКБ-решений в целом. Исследуем случай, когда несколько собственных значений главной матрицы УМК совпадают в некоторой точке.

Если при всех значениях $x \in [a, b]$ собственные значения $\lambda_j(x)$ главной матрицы УМК имеют постоянную кратность, то решения УМК допускают простое асимптотическое описание с помощью ВКБ-асимптотик [1,2], имеющих чёткий физический смысл: в системе существует m независимых ВКБ-волн, распространяющихся вправо, и m ВКБ-волн противоположного направления, имеющих скорости $\lambda_j^{-1}(x) + O(\omega^{-1})$. Если же кратность собственных значений постоянна, то исследование УМК осложняется. Точка x_0 , в которой несколько собственных значений совпадают, называется ТЛВ (или точкой поворота). Ниже изучается прохождение ВКБ-волн через точки поворота.

Целью работы является получение формул, позволяющих найти изменения амплитуд ВКБ-волн при их прохождении через ТЛВ.

Задача работы состоит в анализе формул для амплитуд ВКБ-волн. Отметим, что ситуации, физически близкие к изучаемым ниже, возникают в некоторых передающих устройствах (например, радиоволноводах).

Главная матрица УМК A_0 может быть гладким преобразованием F , приведена к диагональной форме.

В дальнейшем будет удобнее работать не с УМК, а с системой, которая получается из УМК заменой $z = Fy$.

Получим выражение для F . Обозначим через $\mu_1^2(x), \dots, \mu_m^2(x)$ собственные значения положительно определённой матрицы $L^{1/2}CL^{1/2}$. Обозначим через $U_0(x)$ матрицу, столбцами которой являются линейно-независимые собственные векторы матрицы LC . Положим

$$J_0 = L^{-1}U_0\Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m). \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что F можно записать в виде

$$F = \begin{pmatrix} U_0 & U_0 \\ J_0 & -J_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Матрица F является гладкой, $\det F \neq 0$,

$$F^{-1}A_0F = \begin{pmatrix} +\Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Действительно, гладкость F следует из (2); условие $\det F \neq 0$ следует из того, что матрица F имеет обратную:

$$F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U_0^{-1} & J_0^{-1} \\ U_0^{-1} & -J_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Проверим справедливость (3). Используя (1), имеем

$$\begin{aligned} F^{-1}A_0F &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U_0^{-1} & \Lambda^{-1}U_0^{-1}L \\ U_0^{-1} & -\Lambda^{-1}U_0^{-1}L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} U_0 & U_0 \\ L^{-1}U_0\Lambda & -L^{-1}U_0\Lambda \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U_0^{-1} & \Lambda^{-1}U_0^{-1}L \\ U_0^{-1} & -\Lambda^{-1}U_0^{-1}L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0\Lambda & -U_0^{-1}\Lambda \\ CU_0 & CU_0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Lambda + \Lambda^{-1}U_0^{-1}LCU_0 & -\Lambda + \Lambda^{-1}U_0^{-1}LCU_0 \\ \Lambda - \Lambda^{-1}U_0^{-1}LCU_0 & -\Lambda - \Lambda^{-1}U_0^{-1}LCU_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрицы LC и $L^{1/2}CL^{1/2}$ подобны. Действительно,

$$LC = L^{1/2}(L^{1/2}CL^{1/2})L^{-1/2}.$$

Поэтому

$$U_0^{-1}LCU_0 = \Lambda^2. \quad (5)$$

Справедливость (3) следует из (4) и (5).

Считаем, что замена $z = Fu$ ужасделана и матрица A_0 имеет диагональный вид (3).

Пусть в точке x_0 сливается несколько собственных чисел $\mu_j(x_0)$ (x_0 – точка поворота). Используя процесс блок-диагонализации [3], сведём исследование к случаю, когда все собственные числа в точке x_0 совпадают. Используя (2) и (4), получаем систему уравнений порядка n :

$$\varepsilon y' - iAy + \varepsilon By. \quad (6)$$

Здесь $\varepsilon = \omega^{-1}$, матрица $A(x)$ вещественна и диагональна, матрица $B = B(x, \varepsilon)$ имеет асимптотическое разложение:

$$B = \sum_{p=0}^{\infty} B_p(x)\varepsilon^p, \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (7)$$

равномерное по x на $[a, b]$.

Предполагается, что все собственные значения $\mu_j(x)$ матрицы $A(x)$ из (6) совпадают в точке x_0 ; при $x \neq x_0$, $x \in [a, b]$ либо $\mu_j(x) \equiv \mu_k(x)$, либо $\mu_j(x) \neq \mu_k(x)$. Обозначим через $r_{j,k} - 1$ порядок нуля функции $\mu_j(x) - \mu_k(x)$ в точке x_0 ; положим

$$r = \max_{j,k} r_{j,k}. \quad (8)$$

Считаем, что диагональные элементы матрицы $B(x, \varepsilon)$ и её элементы, лежащие на пересечении столбцов и строк с номерами j и k , таких, что $\mu_j(x) \equiv \mu_k(x)$, тождественно равны нулю. Выполнения последнего условия можно добиться всегда. В самом деле, не ограничивая общности, можно считать, что одинаковые элементы матрицы $A(x)$ сгруппированы вместе; диагональ матрицы $A(x)$ состоит из серий подряд стоящих, тождественно равных функций $\mu_j(x)$. Элементы разных серий не равны друг другу тождественно.

Обозначим через $M(x, \varepsilon)$ блочно-диагональную матрицу, имеющую ненулевые элементы лишь на пересечении столбцов и строк с номерами, входящими в одну серию. Эти элементы положим равными соответствующим элементам матрицы $B(x, \varepsilon)$. Пусть $R(x, \varepsilon)$ – невырожденная блочно-диагональная матрица той же структуры, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$R' = MR. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что вектор-функция $z = R^{-1}(x)u$ есть решение дифференциального уравнения

$$\varepsilon z' = iA(x)z + C(x, \varepsilon)z, \quad C(x, \varepsilon) = \varepsilon R^{-1}(B - M)R.$$

Учитывая структуру матриц R и M , легко проверить, что матрица $C(x, \varepsilon)$ удовлетворяет тем же требованиям, что и матрица B .

Определение матрицы R из уравнения (9) сводится к решению системы

$$h' = Mh$$

(h – вектор) и квадратурам. Положим

$$\hat{\mu}_1(x) = \int_{x_0}^x \mu_1(\tau) d\tau.$$

Определим фундаментальную систему решений

$$y(l) = y(x, \varepsilon, l) \quad (l = \overline{1, n})$$

системы уравнений (6) начальными условиями

$$y_i(a, l) = \delta_{j,l} \exp[i\varepsilon^{-1} \hat{\mu}_l(a)].$$

Поскольку матрица $A(x)$ диагональна и спектр её имеет постоянную кратность при $x \neq x_0$, то $y(x, l)$ допускает на полуинтервале $[a, x_0)$ разложение в асимптотический ряд ВКБ. Это разложение из-за совпадения μ_k в точке x_0 перестаёт быть асимптотическим для $y(x, l)$ справа от x_0 . Функции $y(x, l)$ являются линейными комбинациями решений системы уравнений (6) $y^+(x, k)$ ($k = 1, \dots, n$) с начальными условиями

$$y_j^+(b, k) = \delta_{j,k} \exp[i\varepsilon^{-1} \hat{\mu}_j(b)],$$

$$y(x, l) = \sum_{k=1}^n c_{k,l} y^+(x, k). \quad (10)$$

Для функций $y^+(x, k)$ легко находятся ВКБ-разложения на полуинтервале $(x_0, b]$. Вычисление коэффициентов $c_{k,l}(\varepsilon)$ для системы (6) является основной целью этого пункта. Зная коэффициенты $c_{k,l}$, можно сшить ВКБ-асимптотики по обе стороны от x_0 и, таким образом, выяснить, как перераспределяются амплитуды ВКБ-волн при их прохождении через точку поворота.

Определение коэффициентов $c_{k,l}$ опирается на теорему о равномерной асимптотике на $[a, b]$ для функций $y(x, l)$. Для $\rho = 2$ эта теорема была доказана в [4]. Для случая системы [6] мы изменим формулировку и приведём сравнительно простое доказательство теоремы Кучеренко. Подчеркнём, что этот подход позволяет найти коэффициенты $c_{k,l}$ и, тем самым, произвести сшивку ВКБ-асимптотик и выяснить, как перераспределяются амплитуды ВКБ-волн при их прохождении через точку x_0 .

Проверим, что $y(l)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений Вольтерра

$$y(l) = \alpha(l) + Ky(l). \quad (11)$$

Здесь $\alpha(l)$ ($l = 1, \dots, n$) – вектор, j -й компонент которого имеет вид

$$\alpha_j(x, l) = \delta_{j,l} \exp[i\varepsilon^{-1} \hat{\mu}_l(x)],$$

а K – матричный интегральный оператор; j -й компонент вектор-функции Ky имеет вид

$$[Ky]_j(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x \exp[i\varepsilon^{-1} (\hat{\mu}_j(x) - \hat{\mu}_j(\tau))] \times B_{j,k}(\tau) y_k(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Чтобы проверить формулу (11), вставим её правую часть в (6) и выпишем j -й компонент получающегося при этом векторного выражения. Учитывая (12), получаем тождество

$$\begin{aligned} & \varepsilon \{ i\varepsilon^{-1} \mu_l(x) \delta_{j,l} \exp[i\varepsilon^{-1} \hat{\mu}_l(x)] + \sum_{k=1}^n B_{j,k}(x) y_k(l, x) + \\ & + i\varepsilon^{-1} \mu_j(x) \sum_{k=1}^n \int_a^x \exp[i\varepsilon^{-1} (\hat{\mu}_j(x) - \hat{\mu}_j(\tau))] \times \\ & \times B_{j,k}(\tau) y_k(l, x) d\tau \} = i\mu_j(x) (\delta_{j,l} \exp[i\varepsilon^{-1} \hat{\mu}_l(x)] + \\ & + \sum_{k=1}^n \int_a^x \exp[i\varepsilon^{-1} (\hat{\mu}_j(x) - \hat{\mu}_j(\tau))] B_{j,k}(\tau) y_k(\tau) + \\ & + \varepsilon \sum_{k=1}^n B_{j,k}(x) y_k(l, x). \end{aligned}$$

Формула (11) проверена.

2. Равномерные асимптотики для системы с точкой локального вырождения

Оператор K , определённый формулой (12), является вольтерровым оператором. Отсюда следует, что решение уравнения (11) есть сумма ряда

$$y(l) = \sum_{m=0}^{\infty} K^m \alpha(l). \quad (13)$$

Здесь K^m – m -я степень оператора K .

Теорема. *Имеет место равенство*

$$y(l) = \sum_{s=0}^{m-1} K^s \alpha(l) + O(\varphi(m, r, \varepsilon)), \quad (14)$$

где функция $\varphi(m, r, \varepsilon)$ равна $\varepsilon^{m/r}$ при $r > 2$ и $\varepsilon^{m/2} (\ln \frac{1}{\varepsilon})^{[m/2]}$, при $r = 2$; $[m/2]$ – целая часть числа $m/2$. Оценка (14) равномерна по x на $[a, b]$.

Теорема непосредственно следует из равенства

$$y(l) - \sum_{s=0}^{m-1} K^s \alpha(l) = (I - K)^{-1} K^m \alpha(l),$$

которое легко получить из (13), если учесть, что оператор $I - K$ имеет ограниченный обратный и следующего неравенства:

$$\max_{x,j} | [K^m \alpha(l)]_j(x) | \leq c_m \varphi(m, r, \varepsilon). \quad (15)$$

Доказательство неравенства (15). Из (12) следует, что компоненты вектора $K^m \alpha(l)$ являются суммами слагаемых вида

$$\begin{aligned} & \exp[i\varepsilon^{-1} (\hat{\mu}_{j_m}(x))] \int_a^x \exp[i\varepsilon^{-1} (\hat{\mu}_{j_{m-1}}(x_m) - \hat{\mu}_{j_m}(x_m))] \times \\ & \times B_{j_m, j_{m-1}}(x_m) dx_m \times \dots \times \\ & \times \int_a^{x_2} \exp[i\varepsilon^{-1} (\hat{\mu}_{j_1}(x_1) - \hat{\mu}_{j_l}(x_1))] B_{j_1, l}(x_1) dx_1 = \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \exp[i\varepsilon^{-1} \hat{\mu}_{j_m}(x)] F_m(x) = \\ & = \exp[i\varepsilon^{-1} \hat{\mu}_{j_m}(x)] \int_a^x \exp[i\varepsilon^{-1} \hat{\mu}(x_m)] G_{m-1}(x_m) dx_m, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_{m-1}(x_m) &= B_{j_m, j_{m-1}}(x_m) F_{m-1}(x_m), \\ \hat{\mu}(x_m) &= \hat{\mu}_{j_{m-1}}(x_m) - \hat{\mu}_{j_m}(x_m). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь и далее для удобства записи не указывается зависимость функций B , G_m , F от ε .

Порядок нуля функции $\mu(x)$ при $x = x_0$, равный, в силу (8), Γ_{j_{m-1}, j_m} , обозначим для удобства через ρ .

Из предположения о матрице B следует, что если $\hat{\mu}(x) \equiv 0$, то тождественно равен нулю и соответствующий элемент матрицы B .

Далее через N будем обозначать константы, не обязательно совпадающие. Доказательство (15) приведём для двух возможных случаев $\rho > 2$ и $\rho = 2$.

Пусть $\rho > 2$. Имеем

$$\begin{aligned} |F_m(x)| &\leq \left| \int_a^{x_0} \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] G_{m-1}(\tau) d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_{x_0}^x \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] G_{m-1}(\tau) d\tau \right| = |J_1| + |J_2|. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим интеграл J_2 в сумме (17). Заметим сначала, что если

$$|x - x_0| \leq \varepsilon^{1/\rho},$$

то

$$|J_2| \leq N\varepsilon^{1/\rho} \max_x |F_{m-1}(x)|. \quad (18)$$

Если же

$$|x - x_0| \geq \varepsilon^{1/\rho}, \quad (19)$$

то, производя интегрирование по частям и учитывая, что функция

$$-i\varepsilon \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] (\hat{\mu}'(\tau))^{-1}$$

является первообразной функции

$$\exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] - i\varepsilon \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] [(\hat{\mu}'(\tau))^{-1}]',$$

имеем

$$\begin{aligned} |J_2| &= \left| \int_{x_0 \pm \varepsilon^{1/\rho}}^x \{ \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] - \right. \\ &- i\varepsilon \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] [(\hat{\mu}'(\tau))^{-1}]' \} G_{m-1}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{x_0 \pm \varepsilon^{1/\rho}}^x i\varepsilon \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] [(\hat{\mu}'(\tau))^{-1}]' G_{m-1}(\tau) d\tau \left. \right| \leq (20) \\ &\leq \left| i\varepsilon \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] (\hat{\mu}'(\tau))^{-1} G_{m-1}(\tau) \right|_{x_0 \pm \varepsilon^{1/\rho}}^x + \\ &+ \left| i\varepsilon \int_{x_0 \pm \varepsilon^{1/\rho}}^x i\varepsilon \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] [G_{m-1}(\tau) (\hat{\mu}'(\tau))^{-1}]' d\tau \right|. \end{aligned}$$

Здесь знак «+» перед $\varepsilon^{1/\rho}$ берется при $x > x_0$, знак «-» при $x < x_0$. Для определённости рассматривается случай $x > x_0$. Случай $x < x_0$ рассматривается аналогично.

Далее нам потребуются следующие неравенства

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}'(x)| &\geq N|x - x_0|^{\rho-1}, \\ |\hat{\mu}''(x)| &\leq N|x - x_0|^{\rho-2}, \end{aligned} \quad (21)$$

имеющие место при соответствующем выборе постоянных N . Их справедливость следует из тейлоровских разложений функций $\hat{\mu}'(x)$ и $\hat{\mu}''(x)$ в окрестности точки x_0 .

Оценим внеинтегральный член в (20). Используя неравенства (21), получаем

$$\begin{aligned} &\left| i\varepsilon \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] [G_{m-1}(\tau)] [(\hat{\mu}'(\tau))^{-1}] \right|_{x_0 \pm \varepsilon^{1/\rho}}^x \leq \\ &\leq \{ |G_{m-1}(x)| |\hat{\mu}'(x)|^{-1} + \\ &+ |G_{m-1}(x_0 + \varepsilon^{1/\rho})| |\hat{\mu}'(x_0 + \varepsilon^{1/\rho})|^{-1} \} \varepsilon \leq (22) \\ &\leq N \max_x |G_{m-1}(x)| \{ |x - x_0|^{1-\rho} + (\varepsilon^{1/\rho})^{1-\rho} \} \varepsilon \leq \\ &\leq N \max_x |G_{m-1}(x)| \{ (\varepsilon^{1/\rho})^{1-\rho} + (\varepsilon^{1/\rho})^{1-\rho} \} \varepsilon = \\ &= N \max_x |G_{m-1}(x)| \varepsilon^{1/\rho}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл в правой части неравенства (20):

$$\begin{aligned} &\left| i\varepsilon \int_{x_0 + \varepsilon^{1/\rho}}^x \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] G_{m-1}(\tau) [(\hat{\mu}'(\tau))^{-1}]' d\tau \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0 + \varepsilon^{1/\rho}}^x \{ |G'_{m-1}(\tau) (\hat{\mu}'(\tau))^{-1}| + \\ &+ |G_{m-1}(\tau) (\hat{\mu}'(\tau))^{-2} \hat{\mu}''(\tau)| \} d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что

$$G'_{m-1}(x) = B'_{j_m, j_{m-1}}(x) F_{m-1}(x) + B_{j_m, j_{m-1}}(x) F'_{m-1}(x),$$

получаем следующую оценку сверху для (23):

$$\begin{aligned} &N \max_x |F'_{m-1}(x)| \varepsilon \int_{x_0 + \varepsilon^{1/\rho}}^x |\hat{\mu}'(\tau)|^{-1} d\tau + \\ &+ N \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon \int_{x_0 + \varepsilon^{1/\rho}}^x |\hat{\mu}'(\tau)|^{-1} d\tau + (24) \\ &+ N \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon \int_{x_0 + \varepsilon^{1/\rho}}^x |\hat{\mu}'(\tau)|^{-2} |\hat{\mu}''(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в (24). Так как, в силу (21), $|\hat{\mu}'(x)|^{-1} \leq N|x - x_0|^{1-\rho}$, то

$$N \max_x |F'_{m-1}(x)| \varepsilon \int_{x_0 + \varepsilon^{1/\rho}}^x |\hat{\mu}'(\tau)|^{-1} d\tau \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq N \max_x |F'_{m-1}(x)| \varepsilon \int_{x_0+\varepsilon^{1/\rho}}^x (\tau-x_0)^{1-\rho} d\tau \leq \\
&\leq N \max_x |F'_{m-1}(x)| \varepsilon \{ (x-x_0)^{2-\rho} + \varepsilon^{1/\rho(2-\rho)} \} \leq \quad (25) \\
&\leq N \max_x |F'_{m-1}(x)| \varepsilon \{ \varepsilon^{1/\rho(2-\rho)} + \varepsilon^{1/\rho(2-\rho)} \} = \\
&= N \max_x |F'_{m-1}(x)| \varepsilon^{2/\rho}.
\end{aligned}$$

На последнем шаге оценивания было использовано условие (19).

Аналогично для второго слагаемого в (24) получаем

$$\begin{aligned}
&N \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon \int_{x_0+\varepsilon^{1/\rho}}^x |\hat{\mu}'(\tau)|^{-1} d\tau \leq \\
&\leq N \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon^{2/\rho}. \quad (26)
\end{aligned}$$

Оценим третье слагаемое в (24). Используя неравенства (21) и условие (19), имеем

$$\begin{aligned}
&N \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon \int_{x_0+\varepsilon^{1/\rho}}^x |\hat{\mu}'(\tau)|^{-2} |\hat{\mu}''(\tau)| d\tau \leq \\
&\leq N \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon \int_{x_0+\varepsilon^{1/\rho}}^x (\tau-x_0)^{2-2\rho} (\tau-x_0)^{\rho-2} d\tau \leq \\
&\leq N \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon \{ (x-x_0)^{1-\rho} + (\varepsilon^{1/\rho})^{1-\rho} \} \leq \quad (27) \\
&\leq N \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon^{1/\rho}.
\end{aligned}$$

Выпишем теперь оценку для интеграла (23). Учитывая (25)–(27) и то, что $|F'_{m-1}(x)| = |B_{jk}| |F_{m-2}(x)|$, получаем

$$\begin{aligned}
&\left| i\varepsilon \int_{x_0+\varepsilon^{1/\rho}}^x \exp[i\varepsilon^{-1}\hat{\mu}(\tau)] [G_{m-1}(\tau)(\hat{\mu}'(x))^{-1}]' d\tau \right| \leq \\
&N \{ \varepsilon^{1/\rho} \max_x |F_{m-1}(x)| + \varepsilon^{2/\rho} \max_x |F_{m-2}(x)| \}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Из (28) и оценки (22) следует, что J_2 оценивается правой частью (28). Интеграл J_1 тоже оценивается правой частью (28). Таким образом, окончательно получаем, что при $\rho > 2$

$$|F_m(x)| \leq N \{ \varepsilon^{1/\rho} \max_x |F_{m-1}(x)| + \varepsilon^{2/\rho} \max_x |F_{m-2}(x)| \}. \quad (29)$$

Теперь для случая $\rho > 2$ неравенство (15) доказывается индукцией по m , так как $\rho \leq r$.

При $\rho = 2$ оценки (25) и (26) изменятся, так как при выполнении интегрирований для получения этих оценок случай $\rho = 2$ приводит к логарифмам. В этом случае правые части неравенств (25) и (26) имеют вид

$$N \max_x |F'_{m-1}(x)| \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Правая часть неравенства (29) теперь запишется так:

$$\begin{aligned}
&N \{ \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon^{1/\rho} + \max_x |F_{m-1}(x)| \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\
&+ \max_x |F_{m-2}(x)| \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Используя (30) и проводя индукцию по m , получаем для случая $\rho = 2$

$$\begin{aligned}
&|F_m(x)| < N \{ \varepsilon^{m/2} + \varepsilon^m (\ln \frac{1}{\varepsilon})^m + \varepsilon^{m/2} (\ln \frac{1}{\varepsilon})^{[m/2]} \} < \\
&< \varepsilon^{m/2} (\ln \frac{1}{\varepsilon})^{[m/2]}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Из неравенства (31) следует справедливость неравенства (15) при $\rho = 2$.

На самом деле доказан более сильный результат. Дело в том, что на каждом шаге оценивания мы получаем величины порядка $(\varepsilon)^{1/r_{j,k}}$, где $r_{j,k}$ – порядок нуля соответствующей функции $\mu(x) = \mu_j(x) - \mu_k(x)$. Это следует использовать при конкретных вычислениях. Однако, мы сохраняем указанную выше формулировку теоремы ввиду её простоты.

3. Заключение

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем. Выведены формулы, дающие возможность определить изменение амплитуд ВКБ-волн при их прохождении через ТЛВ.

Практическая ценность работы состоит в том, что полученные формулы достаточно просты с точки зрения их приложений и применимы к широкому классу многомодовых информационных каналов.

Литература: 1. Агапова И.С., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С. Построение асимптотик систем уравнений многоволнового информационного канала // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып. 143. С. 61-67. 2. Агапова И.С., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С. Эволюция скачков и изломов импульсов при их распространении в информационном канале // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып. 142. С. 57-63. 3. Агапова И.С., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С. Процесс глобальной блок-диагонализации матриц. Ч.1 // Радиоэлектроника и информатика. 2007. С. 24-29. 4. Кучеренко В.В. Асимптотики решения системы

$A \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$ при $h \rightarrow 0$ в случае характеристики переменной кратности //Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974. Т.38, №3. С. 625-662.

Поступила в редколлегию 15.09.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Дикарев Вадим Анатоліевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел. 343-57-03.