

1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ им. АКАДЕМИКА М.К. ЯНГЕЛЯ

621.3.088.3

УДК 621.372.72:658.541

Р ГАСНТИ 47.13.07

№ 1368-Ук 93

Е.Г.Куник, И.В.Прасол, С.Н.Рыбалко

ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ МАКРОМОДЕЛЕЙ ПРИ ЛИНЕАРИЗАЦИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ СХЕМ

Dep. в ТНТБ Украина 05.07.93

Державна республіканська
науково-технічна
БІБЛІОТЕКА УРСР

Харьков 1993

12с.

Расчет статических режимов сложных электронных схем требует значительных вычислительных затрат. Обычно математическую модель схемы представляют в виде системы нелинейных уравнений, записанной относительно узловых потенциалов или контурных токов. При различных видах многовариантного анализа, таких как оптимизация параметров, снятие передаточных характеристик, расчет предельных режимов, математическую модель схемы упрощают, заменяя ее макромоделью (Мам), записанной относительно потенциалов полюсов - узлов, к которым подключены источники входных сигналов, а также которые участвуют в вычислении критериев, - и напряжений на нелинейных элементах [1]. Это позволяет понизить размерность системы уравнений и уменьшить вычислительные затраты. Еще более упростить расчет схемы позволяет линеаризация нелинейных элементов, т.е. аппроксимация их нелинейных вольт-амперных характеристик (ВАХ) линейными, что выражается в замене нелинейного элемента дифференциальной проводимостью и эквивалентным источником тока. Исключив с помощью метода Гаусса переменные макромоделей, соответствующие напряжениям на нелинейных элементах, можно было бы Мам схемы представить записанной относительно только потенциалов полюсов, однако без оценки и анализа погрешности линеаризации, увеличивающаяся по мере удаления от точки линеаризации, такое упрощение недопустимо. Какие нелинейные элементы можно линеаризовать [2], чтобы исключить из системы уравнений соответствующие переменные без существенного ущерба точности, а для каких элементов оставить их ВАХ нелинейными, можно определить, предварительно решив задачу оценки этой погрешности.

Следует заметить, что интерес представляет величина погреш-

ности расчета потенциалов полюсов при произвольном варьировании входными воздействиями в заданном диапазоне. Задачу определения интервала изменения функции при заданных интервалах изменения аргументов можно решить, воспользовавшись методами интервальной арифметики [3].

Пусть имеется Мам схемы в виде [1].

$$\begin{bmatrix} h_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ -i_H \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где h_{ik} - матрица Мам;

Φ, J - векторы потенциалов и токов полюсов,

$V, i_H = f(V)$ - векторы напряжений и токов нелинейных элементов схемы, f - некоторая функция.

Модель схемы, линеаризованной в точке пространства переменных Мам с координатами (Φ', V') , запишем в виде:

$$\begin{bmatrix} h_{\Phi\Phi} & h_{\Phi V} \\ h_{V\Phi} & h_{VV} + g_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ -i_{отс} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $g_H = \frac{d}{dV} f(V) \Big|_{V=V'}$ - диагональная матрица дифференциальных проводимостей нелинейных элементов;

$i_{отс} = i_H - g V \Big|_{V=V'}$ - вектор значений, отсекаемых линеаризующей прямой на оси токов.

Изменения воздействий обозначим ΔJ .

Тогда модель нелинеаризованной схемы будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} h_{\Phi\Phi} & h_{\Phi V} \\ h_{V\Phi} & h_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi + \Delta\Phi_H \\ V + \Delta V_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J + \Delta J \\ -f(V' + \Delta V_H) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Линеаризованная модель:

$$\begin{bmatrix} h_{\Phi\Phi} & h_{\Phi V} \\ h_{V\Phi} & h_{VV} + g_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi + \Delta\Phi_{Л} \\ V + \Delta V_{Л} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J + \Delta J \\ -i_{отс} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Необходимо определить погрешность расчета потенциалов полю-

сов $\delta\phi = (\phi' + \Delta\phi_{\text{Л}}) - (\phi' + \Delta\phi_{\text{Н}})$ в зависимости от возмущающих входных воздействий:

$$\delta\phi = F(\Delta f). \quad (5)$$

Для этого в системе (4) выразим $V' + \Delta V_{\text{Л}}$ из второго блочно-го уравнения:

$$V' + \Delta V_{\text{Л}} = -(h_{\text{VV}} + g_{\text{Н}})^{-1} i_{\text{отс}} - (h_{\text{VV}} + g_{\text{Н}})^{-1} h_{\text{VФ}}(\phi' + \Delta\phi_{\text{Л}}) \quad (6)$$

и подставим в первое блочное уравнение системы (4):

$$\begin{aligned} (h_{\text{ФФ}} + h_{\text{ФV}}(h_{\text{VV}} + g_{\text{Н}})^{-1} h_{\text{VФ}})(\phi' + \Delta\phi_{\text{Л}}) = \\ = f + \Delta f + h_{\text{ФV}}(h_{\text{VV}} + g_{\text{Н}})^{-1} i_{\text{отс}} \end{aligned} \quad (7)$$

Введя обозначения

$$A = [h_{\text{ФФ}} + h_{\text{ФV}}(h_{\text{VV}} + g_{\text{Н}})^{-1} h_{\text{VФ}}]^{-1},$$

$$B = A [f + h_{\text{ФV}}(h_{\text{VV}} + g_{\text{Н}})^{-1} i_{\text{отс}}],$$

получим следующую зависимость:

$$(\phi' + \Delta\phi_{\text{Л}}) = A \Delta f + B. \quad (8)$$

Проведем подобные преобразования с системой (3):

$$V' + \Delta V_{\text{Н}} = -h_{\text{VV}}^{-1} f(V' + \Delta V_{\text{Н}}) - h_{\text{VV}}^{-1} h_{\text{VФ}}(\phi' + \Delta\phi_{\text{Н}}); \quad (9)$$

$$(h_{\text{ФФ}} + h_{\text{ФV}} h_{\text{VV}}^{-1} h_{\text{VФ}})(\phi' + \Delta\phi_{\text{Н}}) = f + \Delta f + h_{\text{ФV}} h_{\text{VV}}^{-1} f(V' + \Delta V_{\text{Н}}). \quad (10)$$

Если в качестве нелинейного элемента рассматривать диод, ВАХ которого описывается моделью Эберса-Молла:

$$i_{\text{д}} = f(u_{\text{д}}) = i_{\text{о}} \exp\left(\frac{u}{m\phi_{\text{T}}} - 1\right) \quad (11)$$

где $i_{\text{о}}$, m - параметры диода,

ϕ_{T} - тепловой потенциал,

то справедливо равенство

$$f(V' + \Delta V_{\text{Н}}) = f(V') + F \cdot f(\Delta V_{\text{Н}}), \quad (12)$$

где F - диагональная матрица, элементы F_{ii} которой равны $\exp\left(\frac{V'_i}{m\phi_{\text{T}}}\right)$.

Подставим в (10):

$$(h_{\Phi\Phi} + h_{\Phi V} h_{VV}^{-1} h_{V\Phi}) (\Phi' + \Delta\Phi_H) = J + \Delta J + h_{\Phi V} h_{VV}^{-1} f(V') + h_{\Phi V} h_{VV}^{-1} F f(\Delta V_H). \quad (13)$$

Обозначив

$$C = \left[h_{\Phi\Phi} + h_{\Phi V} h_{VV}^{-1} h_{V\Phi} \right]^{-1},$$

$$D = C \left[J + h_{\Phi V} h_{VV}^{-1} f(V') \right],$$

$$E = C h_{\Phi V} h_{VV}^{-1} F,$$

получим

$$\Phi' + \Delta\Phi_H = D + C \Delta J + E f(\Delta V_H). \quad (14)$$

Чтобы получить зависимость (5), вычтем из уравнения (8) уравнение (14)

$$\delta\Phi = B - D + (A - C)\Delta J - E f(\Delta V_H). \quad (15)$$

Так как $B = D = \Phi'$, то это выражение можно упростить:

$$\delta\Phi = (A - C)\Delta J - E f(\Delta V_H). \quad (16)$$

Чтобы решить это уравнение, необходим дополнительный нелинейный анализ. Избежать этого можно, заменив аргумент нелинейной функции на результат расчета по линеаризованной модели. Это внесет дополнительную погрешность, но она будет мала по сравнению с $\delta\Phi$. Кроме того, рассчитанная таким образом погрешность будет больше истинной, что позволит, обозначив

$$K_1 = A - C,$$

$$K_2 = -E,$$

$$K_3 = \left[h_{VV} + g_H + h_{V\Phi} h_{\Phi\Phi}^{-1} h_{\Phi V} \right]^{-1} h_{V\Phi} h_{\Phi\Phi}^{-1},$$

записать уравнение (16) в виде

$$\delta\Phi \leq K_1 \Delta J + K_2 f(\Delta V), \quad (17)$$

где $\Delta V = K_3 \Delta J$.

Воспользоваться законами интервальной арифметики, и введем интервальные векторы $d\Phi$, dJ , dV , $f(dV)$. Выражения (17) можно записать в интервальной форме:

$$d\varphi = K_1 d\delta + K_2 f(\delta r), \quad (18)$$

где $\delta r = K_3 d\delta$.

Если мы отказываемся от линеаризации i -го нелинейного элемента, это значит, что из матрицы K_2 надо вычеркнуть i -й столбец, из вектора $f(\delta r)$ - i -ю строку.

Теперь можно предложить алгоритм определения тех нелинейных элементов, линеаризация которых приводит к превышению допустимой погрешности.

Шаг 1. Рассчитаем матрицы K_1, K_2, K_3 .

Шаг 2. Определим $d\varphi$.

Шаг 3. Если $\max_{i=1, p} |d\varphi_i| \leq \delta\varphi_{\text{доп}}$, идти к шагу 6.

Шаг 4. Найдём k такое, что $\sum_{i=1}^k K_{2ki} f(\delta r_i)$ максимальна и вычеркнем k -й столбец и k -ю строку.

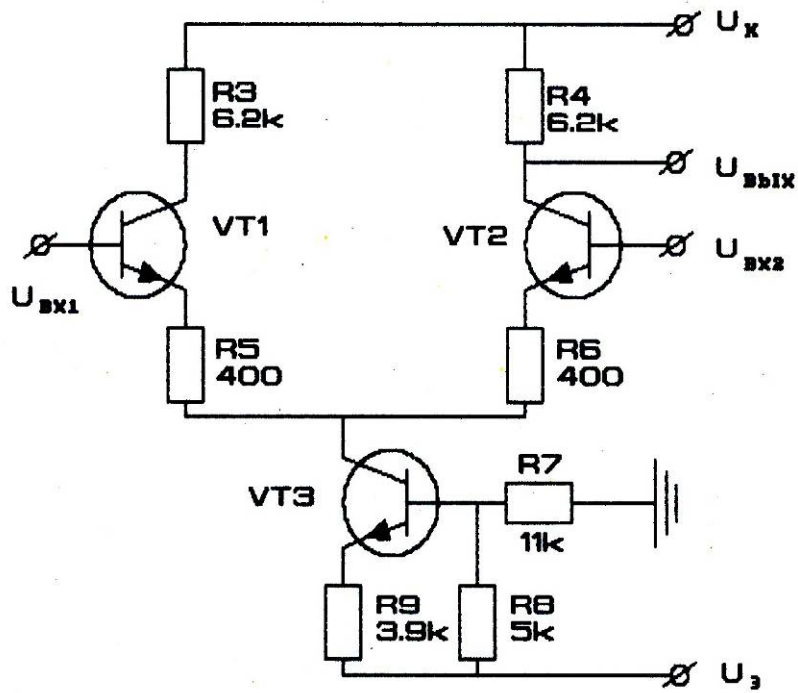
Шаг 5. Идти к шагу 2.

Шаг 6. Конец.

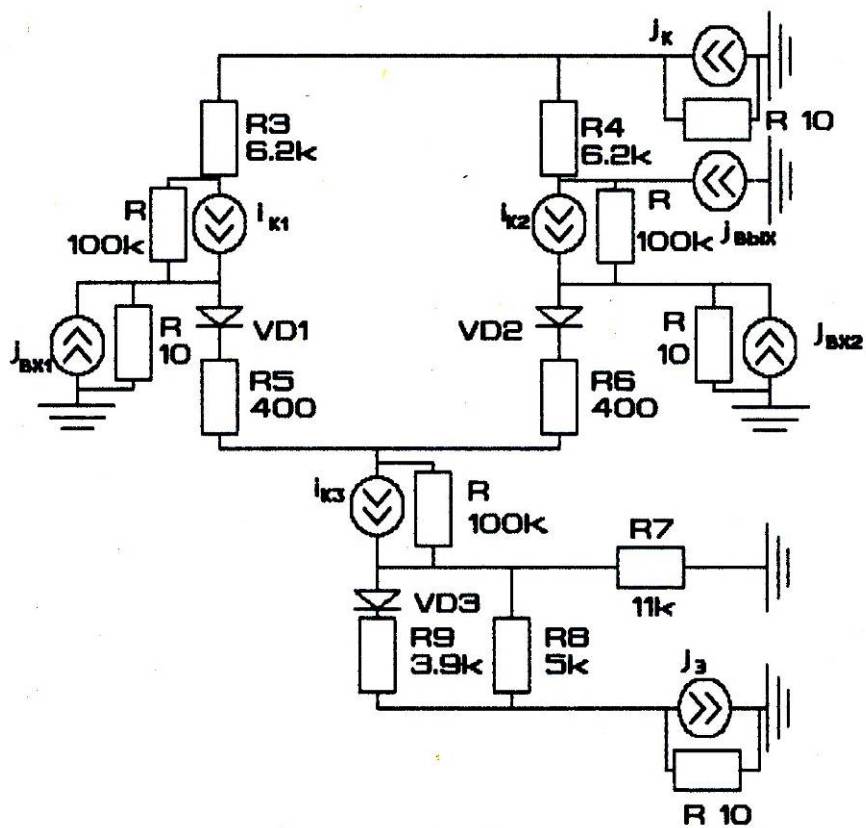
Рассмотрим в качестве примера схему, приведенную на рис.1. Ее эквивалентная схема представлена на рис.2. Параметры транзисторов: $\alpha_N = 0.98$, $i_0 = 0.5$ мкА, $m = 1$; $\Phi_T = 26$ мВ.

Запишем математическую модель схемы в базисе потенциалов полюсов и напряжений на нелинейных элементах:

$$h_{\Phi\Phi} = \begin{bmatrix} 1.001 \cdot 10^2 & -8.416 \cdot 10^{-2} & -8.529 \cdot 10^{-3} & -3.196 \cdot 10^{-3} & -8.416 \cdot 10^{-4} \\ -2.180 \cdot 10^{-2} & 1.000 \cdot 10^2 & -2.053 \cdot 10^{-4} & -9.390 \cdot 10^{-4} & -9.681 \cdot 10^{-3} \\ 1.015 & -1.016 & 1.002 \cdot 10^2 & -3.858 \cdot 10^{-2} & -1.715 \cdot 10^{-1} \\ -6.892 \cdot 10^{-3} & -7.819 \cdot 10^{-3} & -6.490 \cdot 10^{-5} & 1.002 \cdot 10^2 & -7.819 \cdot 10^{-5} \\ -1.079 & 1.078 & -1.715 \cdot 10^{-1} & -4.648 \cdot 10^{-2} & 1.891 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$



Puc.1



Puc.2

$$h_{\Phi V} = \begin{bmatrix} -8.564 \cdot 10^{-2} & 8.500 \cdot 10^{-2} & -8.823 \cdot 10^{-3} \\ 2.201 \cdot 10^{-2} & -2.219 \cdot 10^{-2} & -2.592 \cdot 10^{-3} \\ -1.034 & 1.026 & -1.065 \cdot 10^{-1} \\ 6.957 \cdot 10^{-3} & 7.897 \cdot 10^{-3} & 2.479 \cdot 10^{-1} \\ 1.089 & -1.099 & -1.283 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$h_{V\Phi} = \begin{bmatrix} -1.109 & 1.100 & -1.044 \cdot 10^{-2} & 4.178 \cdot 10^{-2} & 1.100 \cdot 10^{-2} \\ 1.101 & -1.110 & 1.037 \cdot 10^{-2} & 4.742 \cdot 10^{-2} & -1.110 \cdot 10^{-2} \\ -3.872 \cdot 10^{-3} & -4.393 \cdot 10^{-3} & -3.646 \cdot 10^{-5} & 8.438 \cdot 10^{-2} & -4.393 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix};$$

$$h_{\Phi\Phi} = \begin{bmatrix} 1.120 & -1.111 & 1.153 \cdot 10^{-1} \\ -1.111 & 1.121 & 1.309 \cdot 10^{-1} \\ 3.909 \cdot 10^{-3} & 4.436 \cdot 10^{-3} & 2.517 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\Phi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)^T; \quad V^T = (V_{VD1}, V_{VD2}, V_{VD3})^T;$$

$$J^T = (J_{BX1}, J_{BX2}, J_K, J_\Theta, J_{BHX})^T; \quad I_H^T = (I_{VD1}, I_{VD2}, I_{VD3})^T;$$

где $\varphi_1, \varphi_2, J_{BX1}, J_{BX2}$ - потенциалы и токи входов;

$\varphi_3, \varphi_4, J_K, J_\Theta$ - потенциалы и токи узлов, к которым подключены источники питания;

φ_5 - потенциал выходного узла, к нему подключен фиктивный источник тока $J_{BHX}=0$.

Необходимо получить передаточную характеристику схемы для $\varphi_1 = (-0.1 \dots 0.1)В$, при $\varphi_2 = 0$ и при значениях источников питания $\varphi_3 = (14 \dots 16)В$, $\varphi_4 = -15В$, что соответствует векторам токов:

$$J^T = (0, 0, 1500, -1500, 0)^T;$$

$$d\varphi = \begin{bmatrix} [-0.1; 0.1] \\ 0 \\ [-100; 100] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Задана допустимая относительная погрешность $\xi_{доп} = 10^{-3}$.

В результате расчета системы (1), получим:

$$\Phi^T = (9.063 \cdot 10^{-4}; 9.063 \cdot 10^{-4}; 14.985; -14.978; 10.440)^T,$$

$$V^T = (0.18614; 0.18614; 0.2026)^T.$$

Рассчитаем матрицы K_1, K_2, K_3 :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -7.35 \cdot 10^{-6} & 7.29 \cdot 10^{-6} & -5.97 \cdot 10^{-10} & 3.38 \cdot 10^{-7} & 4.29 \cdot 10^{-5} \\ 7.29 \cdot 10^{-6} & -7.36 \cdot 10^{-6} & -6.43 \cdot 10^{-10} & 3.39 \cdot 10^{-7} & -4.34 \cdot 10^{-5} \\ -7.51 \cdot 10^{-7} & -8.98 \cdot 10^{-7} & -1.52 \cdot 10^{-8} & 8.17 \cdot 10^{-6} & -5.31 \cdot 10^{-6} \\ 8.35 \cdot 10^{-7} & 7.40 \cdot 10^{-7} & 1.46 \cdot 10^{-8} & -8.75 \cdot 10^{-6} & 4.37 \cdot 10^{-6} \\ 5.45 \cdot 10^{-2} & -5.51 \cdot 10^{-2} & -4.90 \cdot 10^{-6} & 2.55 \cdot 10^{-3} & 3.20 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 9.51 \cdot 10^{-1} & -3.26 \cdot 10^{-2} & 6.25 \cdot 10^{-2} \\ -3.50 \cdot 10^{-3} & 9.80 \cdot 10^{-1} & 8.40 \cdot 10^{-3} \\ 11.8 & 11.8 & 1.62 \cdot 10^{-1} \\ -9.97 & -9.96 & -5.48 \\ 91.1 & 7.45 \cdot 10^3 & -1.49 \cdot 10^2 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 3.89 \cdot 10^{-4} & -3.85 \cdot 10^{-4} & -3.27 \cdot 10^{-8} & -1.79 \cdot 10^{-5} & -2.27 \cdot 10^{-3} \\ -3.85 \cdot 10^{-4} & 3.89 \cdot 10^{-4} & 3.41 \cdot 10^{-8} & -1.79 \cdot 10^{-5} & 2.29 \cdot 10^{-3} \\ 9.44 \cdot 10^{-7} & 8.16 \cdot 10^{-7} & 1.67 \cdot 10^{-8} & -1.80 \cdot 10^{-5} & 4.82 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Проведем вычисления по формуле (18):

$$d\varphi = \begin{bmatrix} [-2.38 \cdot 10^{-6}; 2.38 \cdot 10^{-6}] \\ [-2.37 \cdot 10^{-6}; 2.37 \cdot 10^{-6}] \\ [-3.97 \cdot 10^{-5}; 3.97 \cdot 10^{-5}] \\ [-3.26 \cdot 10^{-5}; 3.26 \cdot 10^{-5}] \\ [-1.81 \cdot 10^{-2}; 1.81 \cdot 10^{-2}] \end{bmatrix}.$$

Ширина интервального вектора $\omega(d\varphi) = 4.8 \cdot 10^{-2}$, что дает относительную погрешность $\xi = 4.8 \cdot 10^{-3}$. Это больше допустимой погрешности. Воспользовавшись предложенным алгоритмом, можно снизить погрешность, если отказаться от линеаризации диодов VD1 и VD2. Получим:

$$d\varphi = \begin{bmatrix} [-7.99 \cdot 10^{-7}; 7.99 \cdot 10^{-7}] \\ [-7.93 \cdot 10^{-7}; 7.93 \cdot 10^{-7}] \\ [-1.60 \cdot 10^{-6}; 1.60 \cdot 10^{-6}] \\ [-4.69 \cdot 10^{-7}; 4.69 \cdot 10^{-7}] \\ [-5.95 \cdot 10^{-5}; 5.95 \cdot 10^{-5}] \end{bmatrix}.$$

Рассчитанная погрешность меньше допустимой. Следовательно, диод VD3 можно заменить резистором с проводимостью, равной диф-

дифференциальной проводимости диода в точке линеаризации и эквивалентным источником тока. Переменная V_{VD3} может быть исключена из системы уравнений методом Гаусса, и размерность макромоделли может быть понижена.

Далее, допустим, стоит задача исследовать влияние колебаний напряжений питания на коэффициент передачи $K_{\text{пер}} = \frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta U_{\text{вх}}} = \frac{\Delta \varphi_5}{\Delta \varphi_1}$ с погрешностью $\xi_{\text{доп}} = 0.1$. Пусть $\varphi_K \in [12; 15]B$, $\varphi_\Theta \in [-15; -14]B$. Для вычисления $K_{\text{пер}}$ достаточно небольшого интервала изменения $\varphi_{\text{вх}} \in [0; 1]mB$. Воспользуемся формулой (18):

$$d\varphi = \begin{bmatrix} [-6.02 \cdot 10^{-7}; 3.01 \cdot 10^{-7}] \\ [-6.01 \cdot 10^{-7}; 3.03 \cdot 10^{-7}] \\ [-1.59 \cdot 10^{-6}; 8.24 \cdot 10^{-6}] \\ [-8.80 \cdot 10^{-7}; 1.70 \cdot 10^{-7}] \\ [-5.04 \cdot 10^{-5}; 2.57 \cdot 10^{-5}] \end{bmatrix}.$$

Так как ширина интервала $\omega(d\varphi)$ дает относительную погрешность $\xi = 0.099 < \xi_{\text{доп}}$, следовательно, переменные, соответствующие всем трем диодам, можно исключить из системы уравнений методом Гаусса, и расчеты проводить по макромоделли:

$$\begin{bmatrix} 1.00 \cdot 10^2 & -8.59 \cdot 10^{-3} & -3.20 \cdot 10^{-3} & -7.72 \cdot 10^{-4} \\ 9.31 \cdot 10^{-1} & 1.00 \cdot 10^2 & -3.86 \cdot 10^{-2} & -1.71 \cdot 10^{-1} \\ -6.91 \cdot 10^{-3} & -6.50 \cdot 10^{-5} & 1.00 \cdot 10^2 & -7.76 \cdot 10^{-5} \\ 9.89 \cdot 10^{-1} & -1.71 \cdot 10^{-1} & -4.60 \cdot 10^{-2} & 1.81 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} J_{\text{вх1}} \\ J_K \\ J_\Theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.66 \cdot 10^{-3} \\ 2.01 \cdot 10^{-2} \\ -4.59 \cdot 10^{-2} \\ 2.40 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Таким образом, предложенный алгоритм оценки погрешности линеаризации позволяет снизить вычислительные затраты при произ-

вольных вариациях входных воздействий в заданном диапазоне. Смоделировав изменение сопротивления резистора изменением эквивалентного источника тока, данный подход можно использовать при оптимизации параметров электронных схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прасол И.В., Куник Е.Г., Борзенков Б.И. Алгоритмы редукции нелинейных моделей электронных схем // Автоматика и телемеханика, Рига - 1988 г.
2. Бурин Л.И., Стахив П.Г., Теплицкий С.Л. Оценка погрешностей линеаризации при расчете статических режимов электронных схем // Теоретическая электротехника, 1990, вып. 48, с. 79-83.
3. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, 1986 - 223 с.

Печатается в соответствии с решением ученого совета Харь-
ковского ордена Трудового Красного Знамени института радиоэлек-
троники имени академика М.К. Янгеля от "26 " марта 1993 г.