

## ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

**В.А. Богомолов, профессор, д.т.н., И.Л. Разницын, доцент, к.ф.-м.н., ХНАДУ,  
М.В. Сидоров, доцент, к.ф.-м.н., ХНУРЕ**

***Аннотация.** Содержится доказательство эквивалентности некоторых реологических моделей теории линейной вязко-упругости. Приведены явные формулы перехода от одной модели к другой.*

***Ключевые слова:** линейная вязко-упругость, обобщенная модель Кельвина, обобщенная модель Максвелла, эквивалентные модели.*

## ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРІЇ ЛІНІЙНОЇ В'ЯЗКО-ПРУЖНОСТІ

**В.О. Богомолов, професор, д.т.н., І.Л. Разніцин, доцент, к.ф.-м.н., ХНАДУ,  
М.В. Сидоров, доцент, к.ф.-м.н., ХНУРЕ**

***Анотація.** Міститься доведення еквівалентності деяких реологічних моделей теорії лінійної в'язко-пружності. Наведено явні формули переходу від однієї моделі до іншої.*

***Ключові слова:** лінійна в'язко-пружність, узагальнена модель Кельвіна, узагальнена модель Максвелла, еквівалентні моделі.*

## ABOUT EQUIVALENCE OF SOME MODELS IN THEORY OF LINEAR ELASTOVISCOUSITY

**V.A. Bogomolov, Professor, Doctor of Technical Science,  
I.L. Raznicyn, Associate Professor, Candidate in Physics and Mathematics, KhNADU,  
M.V. Sidorov, Associate Professor, Candidate in Physics and Mathematics, KNURE**

***Abstract.** Contains proof of equivalence of some rheological models in theory of linear elastoviscosity. Has explicit formulas for transition from one model to another.*

***Key words:** linear elastoviscosity, generalized Kelvin model, generalized Maxwell model, equivalent models.*

### Введение

В теории линейной вязко-упругости рассматриваются реологические модели для наглядности изображаемые схемами, состоящими из соединенных амортизаторов (элементов вязкости) и пружин (элементов упругости). В случае одномерной системы связь между напряжением ( $\sigma$ ) и деформацией ( $\varepsilon$ ) выражается по известным правилам [1] в виде соотношения  $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$ , где  $P$ ,  $Q$  –

дифференциальные операторы от  $D = \frac{d}{dt}$  с постоянными коэффициентами, зависящими от физических параметров модели (то есть от модулей пружин и коэффициентов вязкости амортизаторов).

Две модели, которым соответствуют уравнения  $P_1(D)\sigma = Q_1(D)\varepsilon$  и  $P_2(D)\sigma = Q_2(D)\varepsilon$  будем называть эквивалентными, если выполнены два условия:

$$\deg P_1(s) = \deg P_2(s) \quad (1)$$

$$\frac{Q_1(s)}{P_1(s)} \equiv \frac{Q_2(s)}{P_2(s)}. \quad (2)$$

В [1] указаны типы моделей, состоящих из двух амортизаторов и двух пружин таких, что для каждой модели одного типа существует эквивалентная ей модель другого типа.

Заметим, что вопрос эквивалентности моделей представляет не только теоретический интерес, но имеет также и практическое значение, так как используемые в известных программных средствах модели не всегда соответствуют физическим представлениям пользователей этих средств.

### Цель и постановка задачи

Рассмотрим два типа моделей, схемы которых приведены на соответственно на рис. 1 и рис. 2.

Здесь и далее  $k_{ij} > 0$ ,  $p_{ij} > 0$  – коэффициенты вязкости амортизаторов и модулей пружин соответственно.

Целью настоящей публикации является доказательство (для  $n=1, 2$ ) существования у каждой модели одного типа эквивалентной ей модели другого типа.

### Доказательство для $n=1$

Дифференциальные уравнения моделей имеют вид

$$\begin{aligned} [p_{11} + (k_{11} + k_{12})D]\sigma &= \\ &= [k_{12}D(p_{11} + k_{11}D)]\varepsilon, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} [p_{22} + k_{22}D]\sigma &= \\ &= [D(k_{21}k_{22}D + p_{21}(k_{21} + k_{22}))]\varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Модели эквивалентны, если будет верно тождество

$$\begin{aligned} \frac{k_{12}s(p_{11} + k_{11}s)}{p_{11} + (k_{11} + k_{12})s} &\equiv \\ &\equiv \frac{s(k_{21}k_{22}s + p_{21}(k_{21} + k_{22}))}{p_{21} + k_{22}s}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выполнение тождества (5) равносильно выполнению системы равенств

$$\begin{cases} \frac{k_{12}k_{11}}{k_{11} + k_{12}} = k_{21}, \\ \frac{p_{11}}{k_{11}} = \frac{p_{21}(k_{21} + k_{22})}{k_{21}k_{22}}, \\ \frac{p_{11}}{k_{11} + k_{12}} = \frac{p_{21}}{k_{22}}. \end{cases} \quad (6)$$

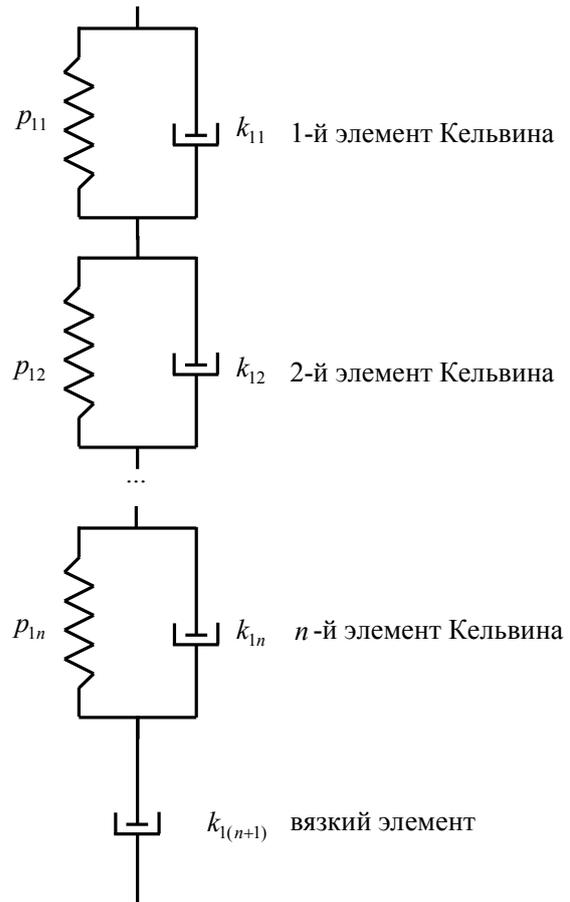


Рис. 1

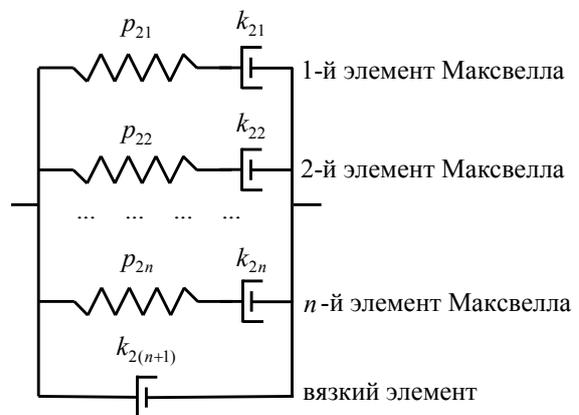


Рис. 2

Система (6) однозначно разрешима, как относительно параметров первой модели

$$k_{11} = \frac{k_{21}(k_{21} + k_{22})}{k_{22}} > 0, \quad k_{21} = k_{21} + k_{22} > 0,$$

$$p_{11} = \frac{p_{21}(k_{21} + k_{22})^2}{(k_{22})^2} > 0,$$

так и относительно параметров второй модели

$$k_{21} = \frac{k_{11}k_{12}}{k_{11} + k_{12}} > 0, \quad k_{22} = \frac{(k_{12})^2}{k_{11} + k_{12}} > 0,$$

$$p_{21} = \frac{p_{11}(k_{12})^2}{(k_{11} + k_{12})^2} > 0.$$

Таким образом, для  $n=1$  доказано следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для любой модели одного типа существует и притом единственная эквивалентная модель другого типа.

#### Доказательство для $n = 2$

Введем такое определение: модель первого (второго) типа будем называть кратной, если выполнено условие  $\frac{p_{11}}{k_{11}} = \frac{p_{12}}{k_{12}} \left( \frac{p_{21}}{k_{21}} = \frac{p_{22}}{k_{22}} \right)$  и некратной в противном случае.

Для кратной и некратной моделей первого типа дифференциальные уравнения соответственно имеют вид

$$[k_{11}k_{12}\lambda + (k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12})D]\sigma = [k_{11}k_{12}k_{13}D(\lambda + D)]\varepsilon, \quad (7)$$

где  $\lambda = \frac{p_{11}}{k_{11}} = \frac{p_{12}}{k_{12}},$

$$[k_{13}D((p_{11} + p_{12}) + (k_{11} + k_{12})D) + (p_{11} + k_{11}D)(p_{12} + k_{12}D)]\sigma = [k_{13}D(p_{11} + k_{11}D)(p_{12} + k_{12}D)]\varepsilon. \quad (8)$$

Для кратной и некратной моделей второго типа дифференциальные уравнения соответственно имеют вид

$$[\mu + D]\sigma =$$

$$=[((p_{21} + p_{22} + k_{23}\mu) + k_{23}D)D]\varepsilon, \quad (9)$$

где  $\mu = \frac{p_{21}}{k_{21}} = \frac{p_{22}}{k_{22}},$

$$[(p_{21} + k_{21}D)(p_{22} + k_{22}D)]\sigma = [k_{23}D(p_{21} + k_{21}D)(p_{22} + k_{22}D) + p_{21}k_{21}D(p_{22} + k_{22}D) + p_{22}k_{22}D(p_{21} + k_{21}D)]\varepsilon. \quad (10)$$

*Замечание 1.* Если поменять местами какие-то элементы Кельвина, то соответствующее дифференциальное уравнение не изменится, поэтому в дальнейшем такие модели отождествляются. Аналогичное утверждение верно и для модели второго типа.

Покажем, что справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Для каждой кратной модели одного типа существует эквивалентная ей кратная модель другого типа.

Действительно, кратные модели первого и второго типа эквиваленты, если верно тождество

$$\frac{k_{11}k_{12}k_{13}s(\lambda + s)}{k_{11}k_{12}\lambda + (k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12})s} \equiv \frac{((p_{21} + p_{22} + k_{23}\mu) + k_{23}s)s}{\mu + s}.$$

которое равносильно выполнению системы равенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}} = k_{23}, \\ \lambda = \frac{p_{21} + p_{22} + k_{23}\mu}{k_{23}}, \\ \frac{k_{11}k_{12}\lambda}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}} = \mu. \end{array} \right. \quad (11)$$

Система (11) разрешима относительно параметров первой модели, более того, она имеет бесчисленное множество решений, которое можно записать так:

$$k_{13} = \frac{p_{21} + p_{22} + k_{23}\mu}{\mu} > 0,$$

$$\lambda = \frac{p_{21} + p_{22} + k_{23}\mu}{k_{23}} > 0,$$

$$k_{11,12} = \frac{t \pm \sqrt{t \left( t - 4k_{23} \left( \frac{k_{23}\mu}{p_{21} + p_{22}} + 1 \right) \right)}}{2} > 0,$$

где произвольное число  $t$  удовлетворяет неравенству  $t \geq 4k_{23} \left( \frac{k_{23}\mu}{p_{21} + p_{22}} + 1 \right)$ .

Аналогично, система (11) разрешима относительно параметров второй модели и множество решений можно записать так:

$$\begin{aligned} k_{23} &= \frac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}} > 0, \\ \mu &= \frac{k_{11}k_{12}\lambda}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}} > 0, \quad p_{21} = t, \\ p_{22} &= \frac{\lambda(k_{13})^2 k_{11}k_{12}(k_{11} + k_{12})}{(k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12})^2} - t > 0, \end{aligned}$$

где произвольное число  $t$  удовлетворяет неравенству  $0 < t < \frac{\lambda(k_{13})^2 k_{11}k_{12}(k_{11} + k_{12})}{(k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12})^2}$ .

Утверждение доказано.

Теперь рассмотрим некратные модели. В этом случае будет справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Для любой некратной модели одного типа существует и притом единственная эквивалентная некратная модель другого типа.

Действительно, модели первого и второго типов будут эквивалентны, если верно тождество:

$$\begin{aligned} & [k_{13}s(p_{11} + k_{11}s)(p_{12} + k_{12}s)]: \\ & : [k_{13}s((p_{11} + p_{12}) + (k_{11} + k_{12})s) + \\ & \quad + (p_{11} + k_{11}s)(p_{12} + k_{12}s)] \equiv \quad (12) \\ & \equiv [k_{23}s(p_{21} + k_{21}s)(p_{22} + k_{22}s) + \\ & \quad + p_{21}k_{21}s(p_{22} + k_{22}s) + p_{22}k_{22}s(p_{21} + k_{21}s)]: \\ & : [(p_{21} + k_{21}s)(p_{22} + k_{22}s)], \end{aligned}$$

которое равносильно выполнению системы равенств

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}} = k_{23}, \\ & k_{13} = k_{21} + k_{22} + k_{23}, \\ & \frac{p_{11}}{k_{11}} + \frac{p_{12}}{k_{12}} = \frac{p_{21}}{k_{21}} + \frac{p_{22}}{k_{22}} + \frac{p_{21} + p_{22}}{k_{23}}, \quad (13) \\ & \frac{k_{13}(p_{11} + p_{12}) + p_{11}k_{12} + p_{12}k_{11}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}} = \frac{p_{21}}{k_{21}} + \frac{p_{22}}{k_{22}}, \\ & \frac{p_{11}p_{12}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}} = \frac{p_{21}p_{22}}{k_{21}k_{22}}. \end{aligned} \right.$$

Проверим, что для модели первого типа существует эквивалентная ей модель второго типа.

Обозначим:

$$\begin{aligned} b &= \frac{p_{21}}{k_{21}} + \frac{p_{22}}{k_{22}} + \frac{p_{21} + p_{22}}{k_{23}}, \\ d &= b^2 - \frac{4p_{21}p_{22}(k_{21} + k_{22} + k_{23})}{k_{21}k_{22}k_{23}} = \\ &= \left( \frac{1}{k_{23}}(p_{21} - p_{22}) + \frac{p_{21}}{k_{21}} - \frac{p_{22}}{k_{22}} \right)^2 + \frac{4p_{21}p_{22}}{(k_{23})^2} > 0, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}(b + \sqrt{d}) > 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(b - \sqrt{d}) > 0, \\ r &= \frac{(k_{22})^2 p_{21} + (k_{21})^2 p_{22}}{k_{21}k_{22}(k_{21} + k_{22})}, \\ w &= \frac{k_{23}(k_{21} + k_{22} + k_{23})}{k_{21} + k_{22}}. \end{aligned}$$

Система (13) имеет относительно параметров первой модели два решения.

Первое решение:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{w\sqrt{d}}{\alpha_1 - r}, \quad k_{12} = \frac{w\sqrt{d}}{r - \alpha_2}, \\ k_{13} &= k_{21} + k_{22} + k_{23}, \\ p_{11} &= \frac{\alpha_1 w\sqrt{d}}{\alpha_1 - r}, \quad p_{12} = \frac{\alpha_2 w\sqrt{d}}{r - \alpha_2}. \end{aligned}$$

Второе решение:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{w\sqrt{d}}{r - \alpha_2}, \quad k_{12} = \frac{w\sqrt{d}}{\alpha_1 - r}, \\ k_{13} &= k_{21} + k_{22} + k_{23}, \end{aligned}$$

$$p_{11} = \frac{\alpha_2 w \sqrt{d}}{r - \alpha_2}, \quad p_{12} = \frac{\alpha_1 w \sqrt{d}}{\alpha_1 - r}.$$

Остается проверить, что все компоненты решений положительны. Это будет верно, если выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} \alpha_1 - r > 0, \\ r - \alpha_2 > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Легко видеть, что система (14) равносильна неравенству

$$(2r - b)^2 < d, \quad (15)$$

разность между левой и правой частью которого можно преобразовать к виду:

$$-\frac{k_{21}k_{22}(k_{21} + k_{22} + k_{23})}{(k_{21} + k_{22})^2 k_{23}} \left( \frac{p_{21}}{k_{21}} - \frac{p_{22}}{k_{22}} \right)^2 < 0.$$

Также заметим, что полученные два решения соответствуют одной модели (см. замечание 1).

Аналогично проверим, что для каждой модели второго типа существует эквивалентная модель первого типа.

Обозначим:

$$\begin{aligned} B &= \frac{k_{13}(p_{11} + p_{12}) + p_{11}k_{12} + p_{12}k_{11}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}}, \\ D &= B^2 - \frac{4p_{11}p_{12}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}} = \\ &= \left[ (k_{13}(p_{11} - p_{12}) + (p_{11}k_{12} - p_{12}k_{11}))^2 + \right. \\ &\left. + 4(k_{13})^2 p_{11}p_{12} \right] : \left[ (k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12})^2 \right] > 0, \\ \beta_1 &= \frac{1}{2}(B + \sqrt{D}) > 0, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}(B - \sqrt{D}) > 0, \\ R &= \frac{p_{12}(k_{11})^2 + p_{11}(k_{12})^2}{(k_{11} + k_{12})(k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12})}, \\ W &= \frac{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}}{(k_{13})^2(k_{11} + k_{12})}. \end{aligned}$$

Система (13) имеет относительно параметров второй модели два решения.

Первое решение:

$$k_{21} = \frac{R - \beta_2}{W\sqrt{D}}, \quad k_{22} = \frac{\beta_1 - R}{W\sqrt{D}},$$

$$k_{23} = \frac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}},$$

$$p_{21} = \frac{\beta_1(R - \beta_2)}{W\sqrt{D}}, \quad p_{22} = \frac{\beta_2(\beta_1 - R)}{W\sqrt{D}}.$$

Второе решение:

$$k_{21} = \frac{\beta_1 - R}{W\sqrt{D}}, \quad k_{22} = \frac{R - \beta_2}{W\sqrt{D}},$$

$$k_{23} = \frac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}},$$

$$p_{21} = \frac{\beta_2(\beta_1 - R)}{W\sqrt{D}}, \quad p_{22} = \frac{\beta_1(R - \beta_2)}{W\sqrt{D}}.$$

Остается проверить, что все компоненты решений положительны. Это будет верно, если выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} \beta_1 - R > 0, \\ R - \beta_2 > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Система (16) равносильна неравенству

$$(2R - B)^2 < D, \quad (17)$$

разность между левой и правой частью которого равна:

$$\begin{aligned} &-4(k_{11})^2(k_{12})^2 \left( \frac{p_{11}}{k_{11}} - \frac{p_{12}}{k_{12}} \right)^2 \times \\ &\times (k_{13}(k_{11} + k_{12}) + k_{11}k_{12}) < 0. \end{aligned}$$

Также заметим, что полученные два решения соответствуют одной модели (см. замечание 1).

Утверждение доказано.

## Выводы

Таким образом, для рассмотренных типов реологических моделей в случае  $n=1$  и  $n=2$  доказано, что для модели одного типа существует эквивалентная модель другого типа. Полученный результат позволяет предположить, что это утверждение верно и при любом  $n$ .

## Литература

1. Бленд Д. Теория линейной вязко-  
упругости. – М.: Мир, 1965. – 200 с.

Рецензент:

Статья поступила в редакцию 00 месяц 2013  
г.