УДК 519.7

О ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

М.Ф. Бондаренко[1], Н.П. Кругликова[2], С.А. Пославский[3], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[4]

[1, 2, 4] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

[3] ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

Предпринимается попытка формального описания категории количества. С этой целью на языке алгебры подстановочных операций дается аксиоматическая характеристика понятий натурального числа, счета, сложения, умножения и порядка на множестве натуральных чисел. Идентифицируются первичные понятия теории положительных и произвольных рациональных чисел. Средствами логической математики проводится аксиоматическая характеризация понятий теории действительных чисел и арифметических действий над ними. В статье развиваются идеи, сформулированные в работах [1, 2].

РАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, ПРЕДИКАТ, АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Введение

Вначале остановимся на интуитивном понимании рациональных чисел. Рациональные числа можно наглядно представить как точки на прямой. Нанесем на прямой, двигаясь слева направо, на равных расстояниях друг от друга бесконечный ряд точек 1, 2, 3,..., представляющих собой все натуральные числа. Слева от точки 1 наносим на том же расстоянии точку 0 (рис. 1).

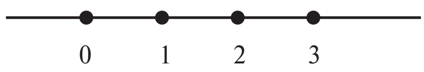

Рис. 1. Наглядное представление рационального числа

Разделим отрезок $0m$, где m — какое-нибудь натуральное число, на n равных частей. Полученный отрезок откладываем вправо от точки 0, его правый конец интерпретируем как положительное рациональное число m/n. На рис. 2 на прямой нанесена точка 3/2, получаемая при m=3 и n=2.

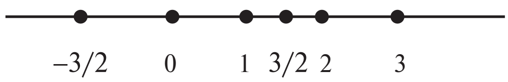

Рис. 2. Множество всех рациональных чисел

Точки, соответствующие всевозможным парам натуральных чисел (m, n), вместе взятые, образуют множество всех положительных рациональных чисел. Откладывая полученный ранее отрезок влево от точки 0, получаем отрицательное рациональное число $-m/n$. На рис. 2 нанесена точка, соответствующая числу –3/2. Положительные и отрицательные рациональные числа, вместе с числом 0, образуют множество всех рациональных чисел. Все натуральные числа являются также положительными рациональными числами. Сложение $x+y$ рациональных чисел x и y определяем как присоединение справа к отрезку, представляющему число x, сдвинутого отрезка, представляющего число y. Вычитание определяем как операцию, обратную сложению. Умножение рационального числа m/n на натуральное p осуществляется его p-кратным сложением с самим собой. При умножении на $-p$ полученный отрезок откладываем в противоположную от точки 0 сторону. Умножение m/n на рациональное число p/q достигается умножением его на целое p с последующим делением полученного отрезка на q частей. Деление рациональных чисел определяем как операцию, обратную умножению. Полагаем, что $x<y$, если точка, представляющая рациональное число x, находится на прямой левее, чем точка, представляющая рациональное число y.

1. Положительные рациональные числа

Приступаем к формальному определению понятия положительного рационального числа. Вводим множество всех положительных рациональных чисел, которое обозначаем символом A. Полагаем, что множество N натуральных чисел с определенными на нем операциями сложения и умножения и отношением строгого порядка уже выбраны. Вводим, далее, предикат $R(x, y, z)$, определенный на $N\times N\times A$. Соответствующее ему отношение интерпретируем как связь между натуральными числами x, y и положительным рациональным числом $z = x/y$. Числа x, y и z связывает уравнение $yz = x$.

Если z рассматривать как натуральное число, то это уравнение будет разрешимо относительно z не при любых натуральных x и y. Требуя, чтобы уравнение $yz = x$ было разрешимо относительно z при любых натуральных x и y, мы, тем самым, расширяем множество натуральных чисел до множества всех положительных рациональных чисел. Предикат $R(x, y, z)$ связывает положительное рациональное число z с породившей его парой натуральных чисел x, y.

Множество A и предикат R на $N\times N\times A$ формально определяем следующими четырьмя свойствами, называемыми *аксиомами положительных рациональных чисел*:

включения

$$\forall\, x,y,z \in N\ \forall z' \in A(yz = x \wedge R(x,y,z') \supset z = z');\quad (1)$$

функциональности

$$\forall\, x,y \in N\ \exists\, !z \in A\ R(x,y,z);\quad 2)$$

сюръективности

$$\forall\, z \in A\ \exists\, x,y \in N\ \ R(x,y,z);\quad (3)$$

равенства дробей

$$\forall\, x,x'y,y' \in N((\exists z \in A\ R(x,y,z) \wedge \wedge R(x',y',z)) \sim xy' = x' = x'y).\quad (4)$$

Содержательно аксиома (1) означает, что если имеется натуральное число z, удовлетворяющее условию $yz = x$, где x, y – произвольно выбранные натуральные числа, и положительное рациональное число z', удовлетворяющее условию $x/y = z'$ (то есть уравнению $yz' = x$), то $z = z'$. Таким образом, отображение $x/y = z'$, когда x нацело делится на y, дает тот же результат, что и решение уравнения $yz = x$, относительно переменной z. Иными словами, если область определения переменной z предиката $R(x, y, z)$ сузить до множества N, то предикат $R(x, y, z)$ превратится в предикат $P(y, z, x)$. Аксиома (2) означает, что предикат $R(x, y, z)$ определяет некоторую функцию $r(x, y) = z$, $r{:}N \times N \to A$. То есть решение уравнения $yz = x$ относительно z всегда существует и единственно в области положительных рациональных чисел. Функция $r(x, y)$ запишется в виде дроби: $r(x, y) = x/y$. Равенство $x/y = z$ означает то же самое, что и условие $R(x, y, z) = 1$. Аксиома (3) означает, что любое положительное рациональное число можно представить в виде дроби. Иначе говоря, функция r сюръективна. Аксиома (4) выражает известное правило, определяющее равенство дробей: при любых натуральных x, x', y, y' значения дробей x/y и x'/y' совпадают в том и только том случае, когда $xy' = x'y$. Множество A, удовлетворяющее аксиомам (1)÷(4), называется *множеством положительных рациональных чисел*. Предикат $R(x, y, z)$ называется *формирователем положительных рациональных чисел*. Он ставит в соответствие каждой паре натуральных чисел x, y единственное положительное рациональное число $z = x/y$.

Лемма 1. *Для любых x, y, $z \in N$ условия $x = y$, $x + z = y + z$ и $xz = yz$ равносильны. Также равносильны условия $x < y$, $x + z < y + z$ и $xz < yz$.*

Доказательство. Для любых x, y, $z \in N$ выполнено в точности одно из условий $x = y$ (а), $x < y$ (б), $y < x$ (в). В случае (а) для любого $z \in N$ имеем $x + z = y + z$ и $xz = yz$. Если верно (б), то существует $x' \in N$, такой что $x + x' = y$ и для любого $z \in N$ $(x + x') + z = y + z$, $(x + z) + x' = y + z$, $x + z < y + z$, а также $(x + x')\, z = yz$, $xz + x'z = yz$, $xz < yz$. Аналогично, в случае (в) для любого $z \in N$ $y+z < x+z$ и $yz < xz$. Поскольку перечисленные случаи взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности, доказательство леммы завершено.

Лемма 2. *Любое непустое множество натуральных чисел содержит минимальный элемент.*

Доказательство. Пусть M – непустое подмножество множества N. Рассмотрим множество $M_1 = \{x \in N | \forall y \in N(y \leq x \supset \neg M(y))\}$. Предположим, что в M нет минимального элемента. Тогда $1 \in M_1$ в силу условия $\neg M(1)$ (иначе 1 – минимальный элемент в M). Пусть теперь $z \in M_1$. Тогда и $(z+1) \in M_1$, так как иначе $(z+1)$ будет минимальным элементом в M. Применяя аксиому индукции, получаем, что M_1 совпадает с N, что невозможно в силу предположения о непустоте множества M. Значит, в M имеется минимальный элемент. Лемма доказана.

Теорема 1 (о существовании множества положительных рациональных чисел и их формирователя). *Пусть (N, Q) – натуральный ряд. Тогда существуют множество A и предикат R на $N \times N \times A$, удовлетворяющие аксиомам положительных рациональных чисел.*

Доказательство. Определим на множестве $M = N \times N$ предикат E условием: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$ $(E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \sim x_1y_2 = x_2y_1)$.

Этот предикат, очевидно, обладает свойствами рефлексивности и симметричности. Покажем, что E транзитивен. Пусть $E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = E((x_2, y_2), (x_3, y_3)) = 1$ для некоторых x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, $y_3 \in N$. Тогда $x_1y_2 = x_2y_1$, $x_2y_3 = x_3y_2$ и поэтому $(x_1y_2)(x_2y_3) = (x_2y_1)(x_3y_2)$, откуда, в силу свойств коммутативности и ассоциативности умножения натуральных чисел, следует $(x_1y_3)(x_2y_2) = (x_3y_1)(x_2y_2)$. Из последнего равенства вытекает, что $x_1y_3 = x_3y_1$ (в силу леммы 1). Поэтому предикат E транзитивен. А значит, E – эквивалентность, которой соответствует разбиение множества M на смежные классы, такое что (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $x_1y_2 = x_2y_1$. Образуем множество A, выбирая из каждого класса по элементу с наименьшим (в данном классе) натуральным числом на второй позиции. Такой выбор возможен в силу леммы 2, и условия, что если (x_1, y_1), (x_2, y_2) эквивалентны и $x_1 \neq x_2$, то $y_1 \neq y_2$ (в силу аксиомы равенства дробей и леммы 1). Если класс эквивалентности содержит элемент вида $(x, 1)$, то в качестве представителя этого класса выбираем x. Далее, для удобства будем отождествлять элементы $(x, 1) \in N \times N$ и $x \in N$ (используя естественную биекцию φ множеств N и $\{(x, 1) | x \in N\}$, $\varphi{:}x \to (x, 1)$). Предикат R на $N \times N \times A$ определим условием: $\forall x,\ y \in N\ \forall\ z' \in A$ $(R(x, y, z') \sim (\forall x', y' \in N\, z' = (x', y') \supset xy' = x'y))$.

Проверяем, что множество A и предикат R удовлетворяют всем аксиомам положительных рациональных чисел. 1) Пусть для некоторых x, y, $z \in N$ выполнено условие $yz = x$. Тогда для любого $z' \in N$, $z' = (x', y')$ условие $R(x, y, z')$ влечет $xy' = x'y$. Используя лемму 1 и свойства коммутативности и ассоциативности умножения натуральных чисел, получаем $(yz)y' = x'y$, $(y'z)y = x'y$, $y'z = x'$, $zy' = x'1$, то есть $E((x', y'), (z, 1)) = 1$. В силу выбора множества A, последнее условие означает, что $(x', y') = (z, 1)$, или $z' = z$. 2) Для любых $x, y \in N$ существует, притом единственный, элемент $z' \in A$, такой что $E((x, y), z') = 1$. Пусть $z' = (x', y')$, тогда $xy' = x'y$ и по определению предиката R получаем $R(x, y, z') = 1$. 3) Пусть $z' \in A$ и $z = (x, y)$. Тогда, в силу очевидного равенства $xy = xy$, имеем $R(x, y, z) = 1$. 4) Для любых $x, x', y, y' \in N$ условие $xy' = x'y$ означает, что $E((x, y), (x', y')) = 1$. Поэтому существует $z' \in A$, такой что $R(x, y, z) = R(x', y', z) = 1$. Проверка выполнения аксиом положительных рациональных чисел для множества A и предиката R завершена. Теорема доказана.

Теорема 2 (о включении натуральных чисел в положительные рациональные). *Все натуральные числа являются также и положительными рациональными числами.*

Теорема означает, что множество положительных рациональных чисел является расширением множества натуральных чисел, то есть что $N \subseteq A$.

Доказательство. Из аксиомы (2) следует, что для любого $z \in N$ существует $z' \in A$, такое что $R(z, 1, z') = 1$. Тогда положив $x = z$, $y = 1$, из аксиомы (1) выводим $z = z'$. Итак, если $z \in N$, то $z \in A$. Теорема доказана.

Теорема 3 (об изоморфности множеств положительных рациональных чисел). *Пусть (N, Q) — натуральный ряд, а множества A, A' и предикаты R, R' на $N \times N \times A$ и $N \times N \times A'$ удовлетворяют аксиомам положительных рациональных чисел. Тогда существует биекция $\varphi: A \to A'$, такая что для любых $x, y \in N$ и $z \in A$ $R(x, y, z) = R'(x, y, \varphi(z))$.*

Смысл теоремы состоит в том, что положительные рациональные числа определяются аксиомами (1)÷(4) в абстрактном смысле однозначно (то есть с точностью до обозначений).

Доказательство. Рассмотрим отношение Φ на $A \times A'$, определяемое следующим образом: для всех $z \in A$ и $z' \in A'$

$$\Phi(z, z') = \exists x, y \in N(R(x, y, z) \wedge R'(x, y, z')).$$

Покажем, что отношение Φ определяет биекцию $\varphi(z) = z'$, отображающую A на A'. Выберем произвольно $z \in A$. По аксиоме (3) существуют $x, y \in N$, такие что $R(x, y, z) = 1$. Из аксиомы (2) следует существование единственного $z' \in A'$, для которого $R'(x, y, z') = 1$. По определению отношения Φ имеем $\Phi(z, z') = 1$. Покажем, что значением z элемент z' определяется однозначно. Предположим, что существует элемент $z'' \in A'$, такой что $\Phi(z, z'') = 1$ и $z'' \neq z'$. Тогда, по определению отношения Φ, существуют $x', y' \in N$, такие что $R(x', y', z) = R'(x', y', z'') = 1$. По аксиоме (4) из $R(x, y, z) = R(x', y', z) = 1$ следует $xy' = x'y$. Но тогда по той же аксиоме (4) существует $z''' \in A'$, такое что $R'(x', y', z''') = R'(x, y, z''') = 1$.

Итак, $R'(x, y, z') = R'(x, y, z''') = R'(x', y', z''') = R'(x', y', z'') = 1$. Тогда, в силу аксиомы (2), $z' = z'''$ и $z''' = z''$, а значит $z'' = z'$, что противоречит предположению. Единственность элемента z' доказана. Итак, для любого $z \in A$ существует единственный $z' \in A'$, такой что $\Phi(z, z') = 1$. Аналогично доказывается для любого $z' \in A'$ существование единственного $z \in A$, такого что $\Phi(z, z') = 1$. Это означает, что Φ определяет биекцию $\varphi: A \to A'$. Теорема доказана.

Переходим к аксиоматическому определению сложения и умножения положительных рациональных чисел. Запись x/y пары чисел x, y, определяющей положительное рациональное число $r(x, y)$, называется *дробью*. Рациональные положительные числа выражаются соответствующими им дробями. Дробей “больше”, чем положительных рациональных чисел. Одно и то же положительное рациональное число можно представить разными дробями. Как узнать, какие дроби выражают одинаковые числа, а какие — разные? Ответ на этот вопрос дает *правило отождествления дробей*, основанное на аксиоме равенства дробей: равенство $x_1/y_1 = x_2/y_2$ равносильно равенству $x_1y_2 = x_2y_1$. Этим условием определяется отношение эквивалентности, разбивающее множество всех дробей на смежные классы. В каждом классе содержатся все дроби, обозначающие одно и то же положительное рациональное число. Эти классы можно принять в роли соответствующих положительных рациональных чисел.

Операции сложения и умножения положительных рациональных чисел определяются следующими правилами: если $x_1/y_1 = z_1$ и $x_2/y_2 = z_2$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1y_2 + x_2y_1)/y_1y_2, \tag{5}$$

$$z_1z_2 = x_1x_2/y_1y_2 \tag{6}$$

для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in N$; $z_1, z_2 \in A$. Важно подчеркнуть, что равенствами (5) и (6) определяются суммы и произведения не самих положительных рациональных чисел, а дробей, соответствующих этим числам. Поэтому необходимо убедится в корректности таких определений.

Определим на $A \times A \times A$ предикат сложения S и предикат умножения P положительных рациональных чисел условиями:

$$\begin{gathered}\forall z_1, z_2, z \in A(S(z_1, z_2, z) \sim (\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in N,\\ R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \supset R(x_1y_2 + x_2y_1, x_1y_2, z)));\end{gathered} \tag{1'}$$

$$\begin{gathered}\forall z_1, z_2, z \in A(P(z_1, z_2, z) \sim (\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in N,\\ R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \supset R(x_1x_2, y_1y_2, z))).\end{gathered} \tag{2'}$$

Чтобы обосновать корректность введения операций сложения и умножения, нужно доказать, что предикты S и P обладают свойством функциональности.

Теорема 4 (о функциональности предикатов сложения и умножения положительных рациональных чисел). *Предикаты S и P на $A \times A \times A$ функциональны, то есть удовлетворяют условиям*:

$$\forall z_1, z_2, \in A \; \exists\, !z \in A \; S(z_1, z_2, z); \tag{3'}$$

$$\forall z_1, z_2, \in A\ \exists\ ! z \in A\ P(z_1, z_2, z). \qquad (4')$$

Доказательство. Выберем произвольно z_1, $z_2 \in A$ и пусть для некоторых x_1, y_1, x_2, $y_2 \in N$ $R(x_1, y_1, z_1) = R(x_2, y_2, z_2) = 1$ (а). По аксиоме функциональности (2) $\exists! z \in A$ $R(x_1y_2+x_2y_1, y_1y_2, z)$ (б). Покажем, что z не зависит от выбора x_1, y_1, x_2, y_2, а зависит только от z_1, z_2. Пусть для некоторых x_1', y_1', x_2', $y_2' \in N$ $R(x_1', y_1', z_1) = R(x_2', y_2', z_2) = 1$ (в). Тогда из аксиомы равенства дробей (4) и (а) следует $x_1y_1' = x_1'y_1$, то есть $(x_1y_2 + x_2y_1)y_1'y_2 = (x_1y_1'y_2 + x_2y_1y_1')y_2 = (x_1'y_1y_2 + x_2y_1'y_1)y_2 = (x_1'y_2 + x_2y_1')y_1y_2$.

Используя снова аксиому (4), получаем $R(x_1'y_2 + x_2y_1', y_1'y_2, z) = R(x_1y_2 + x_2y_1, y_1y_2, z) = 1$. Аналог ично доказываем, что $R(x_1'y_2' + x_2'y_1', y_1'y_2', z) = 1$. С учетом (а), (б), (в), последнее равенство означает, что элемент $z \in A$ определяется из условия (б) однозначно по заданным z_1, $z_2 \in A$ и что $S(z_1, z_2, z) = 1$. Аналогично доказывается функциональность предиката умножения P. Теорема доказана.

Теорема 5 (об ассоциативности сложения положительных рациональных чисел). *Для всех* z_1, z_2, $z_3 \in A$ $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ (*а*).

Доказательство. Для любых z_1, z_2, $z_3 \in A$ и x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, $y_3 \in N$ из условий $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \wedge R(x_3, y_3, z_3)$ и определения (1′) следует $R(x_1y_2+x_2y_1, y_1y_2, z_1+z_2) \wedge R(x_2y_3+x_3y_2, y_2y_3, z_2+z_3) \wedge R((x_1y_2+x_2y_1)y_3 + x_3(y_1y_2), (y_1y_2)y_3, (z_1+z_2)+z_3) \wedge R(x_1(y_2y_3)+(x_2y_3+x_3y_2)y_1, y_1(y_2y_3), z_1+(z_2+z_3))$. В силу ассоциативности сложения, а также ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности умножения натуральных чисел, имеем $(x_1y_2+ x_2y_1) y_3 + x_3(y_1y_2) = (x_1(y_2y_3) + (x_2y_3)y_1) + (x_3y_2)y_1 = x_1(y_2y_3)+(x_2y_3+x_3y_2)y_1$, $(y_1y_2)y_3=y_1(y_2y_3)$. Используя теперь аксиому функциональности (2), непосредственно получаем условие (а). Теорема доказана.

Теорема 6 (о коммутативности сложения положительных рациональных чисел). *Для всех* z_1, $z_2 \in A$ $z_1+z_2 = z_2+z_1$.

Доказательство. Для любых z_1, $z_2 \in A$ и x_1, x_2, y_1, $y_2 \in N$ из условия $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2)$, в силу определения (1′), получаем $R(x_1y_2 + x_2y_1, y_1y_2, z_1 + z_2) \wedge R(x_2y_1 + x_1y_2, y_2y_1, z_2 + z_1)$. В силу коммутативности сложения и умножения натуральных чисел, $x_1y_2 + + x_2y_1 = x_2y_1 + x_1y_2$, $y_1y_2 = y_2y_1$, откуда (по аксиоме функциональности (2)), сразу получаем $z_1+z_2 = z_2+z_1$. Теорема доказана.

Теорема 7 (об ассоциативности умножения положительных рациональных чисел). *Для всех* z_1, z_2, $z_3 \in A$ $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.

Доказательство. Для всех z_1, z_2, $z_3 \in A$ и x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, $y_3 \in N$ из условий $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \wedge R(x_3, y_3, z_3)$ и определения (2′) следует $R(x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2) \wedge R(x_2x_3, y_2y_3, z_2z_3) \wedge R((x_1x_2)x_3, (y_1y_2)y_3, (z_1z_2)z_3) \wedge R(x_1(x_2x_3), y_1(y_2y_3), z_1(z_2z_3))$. В силу ассоциативности умножения натуральных чисел, имеем $(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$, $(y_1y_2)y_3 = y_1(y_2y_3)$. Используя аксиому функциональности (2), получаем $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$. Теорема доказана.

Теорема 8 (о коммутативности умножения положительных рациональных чисел). *Для всех* z_1, $z_2 \in A$ $z_1z_2 = z_2z_1$.

Доказательство. Для любых z_1, $z_2 \in A$ и x_1, x_2, y_1, $y_2 \in N$ из условия $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2)$ и определения (2′) следует $R(x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2) \wedge R(x_2x_1, y_2y_1, z_2z_1)$. В силу коммутативности умножения натуральных чисел, имеем $x_1x_2 = x_2x_1$, $y_1y_2 = y_2y_1$. Отсюда следует (по аксиоме функциональности (2)), что $z_1z_2 = z_2z_1$. Теорема доказана.

Теорема 9 (о дистрибутивности умножения положительных рациональных чисел относительно сложения). *Для всех* z_1, z_2, $z_3 \in A$ $(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3+z_2z_3$ (а).

Доказательство. Для любых z_1, z_2, $z_3 \in A$ и x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, $y_3 \in N$ из условий $R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \wedge R(x_3, y_3, z_3)$ и определений (1′), (2′) следует $R(x_1y_2+x_2y_1, y_1y_2, z_1+z_2) \wedge R((x_1y_2+x_2y_1)x_3, (y_1y_2)y_3, (z_1+z_2)z_3)) \wedge R((x_1x_3)(y_2y_3)+(x_2x_3)(y_1y_3), (y_1y_3)(y_2y_3), z_1z_3 + z_2z_3)$. В силу ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности умножения натуральных чисел, имеем $(x_1x_3)(y_2y_3) + (x_2x_3)(y_1y_3) = ((x_1y_2 + x_2y_1)x_3)y_3$, $(y_1y_3)(y_2y_3) = ((y_1y_2)y_3)y_3$. Применяя аксиому равенства дробей (4), получаем (а). Теорема доказана.

Определим далее отношение порядка на множестве положительных рациональных чисел. *Отношение порядка* $<$ на множестве A определяется правилом: для любых z_1, $z_2 \in A$ ($z_1 = x_1/y_1$, $z_2 = x_2/y_2$, x_1, y_1, x_2, $y_2 \in N$) условие $z_1<z_2$ равносильно условию $x_1y_2 < x_2y_1$. Формально вводим *предикат порядка* $H(x, y)$ на $A \times A$, соответствующий отношению $x < y$, следующим прямым определением:

$$\forall z_1, z_2 \in A(H(z_1, z_2) \sim (\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in N, \\ R(x_1, y_1, z_1) \wedge R(x_2, y_2, z_2) \supset x_1y_2 < x_2y_1)). \qquad (5')$$

Теорема 10 (о сравнимости положительных рациональных чисел). *Для любых* z_1, $z_2 \in A$ *выполнено ровно одно из условий* $z_1 = z_2$, $H(z_1, z_2) = 1$, $H(z_2, z_1) = 1$.

Доказательство. Выберем произвольно z_1, $z_2 \in A$. Тогда существуют x_1, y_1, x_2, $y_2 \in N$, такие что $R(x_1, y_1, z_1) = R(x_2, y_2, z_2) = 1$. По теореме о сравнимости натуральных чисел либо $x_1y_2 = x_2y_1$, либо $x_1y_2 < x_2y_1$, либо $x_2y_1 < x_1y_2$. Рассмотрим, например, случай $x_1y_2 < x_2y_1$ (а). Покажем, что тогда $H(z_1, z_2) = 1$. Пусть x_1', y_1', x_2', $y_2' \in N$, такие что $R(x_1', y_1', z_1) = R(x_2', y_2', z_2) = 1$. Тогда $x_1y_1' = x_1'y_1$ (б) и $x_2y_2' = x_2'y_2$ (по аксиоме равенства дробей). Из леммы 1 и условия (а) получаем $(x_1y_2)(x_1'y_1') < (x_2y_1)(x_1'y_1')$. Пользуясь свойствами коммутативности и ассоциативности умножения натуральных чисел, будем иметь $(x_1'y_2)(x_1y_1') < (x_2y_1')(x_1'y_1)$. Учитывая (б) и снова используя лемму 1, получаем $x_1'y_2 < x_2y_1'$. Продолжая аналогично, приходим к условию $x_1'y_2' < x_2'y_1'$. Это и означает, что $H(z_1, z_2) = 1$. В случае $x_2y_1 < x_1y_2$ подобное рассмотрение приводит к условию $H(z_2, z_1) = 1$. Если же имеет место равенство $x_1y_2 = x_2y_1$, то, по аксиоме равенства дробей (4), $\exists z \in A$ $R(x_1, y_1, z) \wedge R(x_2, y_2, z)$ и тогда, в силу аксиомы функциональности (2), получаем $z_1 = z_2 = z$. Теорема доказана.

Теорема 11 (о соответствиии операций сложения, умножения и отношения порядка на множествах натуральных чисел и положительных рациональных чисел). *Для любых* z_1, z_2, $z \in N$ *условия* $z_1+z_2=z$ (а), $z_1z_2=z$ (б), $z_1<z_2$ (в) *равносильны, соответственно, условиям* $S(z_1, z_2, z)=1$ (а′), $P(z_1, z_2, z)=1$ (б′), $H(z_1, z_2)=1$ (в′), *где S, P, H – предикаты сложения, умножения и порядка на множестве положительных рациональных чисел.*

Смысл этой теоремы состоит в том, что на множестве натуральных чисел вводимые теперь предикаты сложения, умножения и порядка совпадают с введенными ранее.

Доказательство. Пусть z_1, z_2, $z \in N$. Тогда имеем z_1, z_2, $z \in A$ (по теореме 2) и $R(z_1, 1, z_1)=R(z_2, 1, z_2)=$ $=R(z, 1, z)=1$ (г) (см. доказательство теоремы 2). Если выполнено условие (а′), то, согласно (г) и определению (1′), получаем $R(z_1+z_2, 1, z)=1$. Используя аксиому включения (1), выводим отсюда (а). По теореме 4, предикат S обладает свойством функциональности. Поэтому условия (а) и (а′) равносильны. Предположим теперь, что выполнено условие (б′). Тогда (согласно (г) и определению (2′)) получаем $R(z_1z_2, 1, z)=1$, откуда вытекает (б). Используя функциональность предиката P, приходим к выводу о равносильности условий (б) (б′). Пусть, наконец, выполнено условие (в′). Тогда, в силу (г) и определения (5′), получаем (в), а из теоремы о сравнимости положительных рациональных чисел выводим равносильность условий (в) и (в′). Теорема доказана.

Эта теорема позволяет в дальнейшем использовать единые обозначения для операций сложения, умножения и для записи отношения порядка на множествах натуральных чисел и положительных рациональных чисел.

Лемма 3. *Для любых* z_1, $z_2 \in A$ *условия* $z_2<z_1$ и $\exists z \in A$ $z_1=z_2+z$ *равносильны.*

Доказательство. Пусть z_1, $z_2 \in A$ и $z_2<z_1$. Тогда существуют такие x_1, y_1, x_2, $y_2 \in N$, что $R(x_1, y_1, z_1)=$ $=R(x_2, y_2, z_2)=1$ и $x_2y_1<x_1y_2$. В силу определения отношения порядка для натуральных чисел, найдется $u \in N$ такое, что $x_1y_2=x_2y_1+u$. По аксиоме функциональности (2) $\exists! z \in A$ $R(u, y_1y_2, z)$. Тогда из условий $R(x_1, y_1, z_1)=R(x_1y_2, y_1y_2, z_1)=$ $=R(x_2y_1+u, y_1y_2, z_1)=R((x_2y_1+u)y_2, (y_1y_2)y_2, z_1)=$ $=R(x_2(y_1y_2)+uy_2, y_2(y_1y_2), z_1)=1$ и $R(x_2, y_2, z_2)=1$ следует $z_1=z_2+z$. (Здесь были использованы аксиома равенства дробей (4), а также свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности умножения натуральных чисел). Пусть теперь для некоторых z_1, z_2, $z \in A$ выполнено условие $z_1=z_2+z$. Тогда существуют $x_2, y_2, x, \in N$, удовлетворяющие условиям $R(x_2, y_2, z_2)=R(x, y, z)=R(x_2y+$ $+xy_2, y_2y, z_1)=1$. И поскольку $x_2(y_2y)<(x_2y+xy_2)y_2=$ $=x_2(y_2y)+(xy_2)y_2$, то получаем $z_2<z_1$. Лемма доказана.

Теорема 12 (о транзитивности отношения порядка на множестве положительных рациональных чисел). *Для всех* x, y, $z \in A$ *из* $x<y$ *и* $y<z$ *следует* $x<z$.

Доказательство. Пусть x, y, $z \in A$ и $x<y$, $y<z$. Тогда (по лемме 3) существуют u, $v \in A$, такие что $y=x+u$, $z=y+v$. Отсюда вытекает $z=(x+u)+v=x+(u+v)$ (в силу ассоциативности сложения), то есть $x<z$. Теорема доказана.

Дальнейшее развитие теории положительных рациональных чисел выходит за рамки теории интеллекта и поэтому здесь не рассматривается.

2. Произвольные рациональные числа

Пусть задано множество A положительных рациональных чисел, для которых определены операции сложения и умножения. Определим множество B всех *рациональных чисел* и предикат $T(x, y, z)$ на $A \times A \times B$, называемый *формирователем рациональных чисел*, который связывает рациональное число z с задающими его положительными рациональными числами x и y, следующими аксиомами:

включения

$$\forall\, x, y, z \in A, \forall\, z' \in B (y+z=x \wedge T(x, y, z') \supset z=z'); \quad (7)$$

функциональности

$$\forall\, x, y \in A\ \exists\, !z \in B\ \ T(x, y, z); \quad (8)$$

сюръективности

$$\forall\, z \in B\ \exists\, x, y \in A\ \ T(x, y, z); \quad (9)$$

равенства разностей

$$\forall\, x, x', y, y' \in A((\exists\, z \in z T(x, y, z) \wedge T(x', y', z')) \sim \\ \sim x+y'=x'+y). \quad (10)$$

Лемма 4. *Для любых* x, y, $z \in A$ *условие* $x=y$ *равносильно* $x+z=y+z$, *а* $x<y$ *равносильно* $x+z<y+z$.

Доказательство. Для произвольных x, $y \in A$ выполнено в точности одно из условий $x=y$ (а), $x<y$ (б), $y<x$ (в). В случае (а), очевидно, имеем для любых $z \in A$ $x+z=y+z$. Если выполнено условие (б), то по лемме 3 существует $u \in A$, такое что $y=x+u$. Тогда $y+z=(x+u)+z=(x+z)+u$ при любом $z \in A$ и, снова используя лемму 3, получаем $x+z<y+z$. Аналогично, в случае (в) имеем для произвольного $z \in A$ $y+z<x+z$. Поскольку перечислены все возможные случаи и они взаимно исключают друг друга, доказательство леммы завершено.

Теорема 13 (о существовании множества рациональных чисел и их формирователя). *Существуют множество B и предикат T на* $A \times A \times B$, *удовлетворяющие аксиомам рациональных чисел.*

Доказательство. Определим на множестве $M=A \times A$ предикат E условием $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$ $E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \sim (x_1+y_2=x_2+y_1)$. Этот предикат, очевидно, обладает свойствами рефлексивности и симметричности. Покажем, что он транзитивен. Пусть $E((x_1, y_1), (x_2, y_2))=E((x_2, y_2), (x_3, y_3))=1$ для некоторых x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, $y_3 \in A$. Тогда $x_1+y_2=x_2+y_1$, $x_2+y_3=x_3+y_2$ и поэтому $(x_1+y_2)+(x_2+y_3)=$ $=(x_2+y_1)+(x_3+y_2)$, $(x_1+y_3)+(x_2+y_2)=(x_3+y_1)+(x_2+y_2)$. Используя лемму 4, получаем $x_1+y_3=x_3+y_1$, то есть

$E((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = 1$. Поэтому предикат E транзитивен. А следовательно E – эквивалентность, и множество M разбивается на смежные классы так, что (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $x_1+y_2 = x_2+y_1$. В каждом классе имеется, притом единственный, элемент $(x, 1)$, где $x \geq 1$, либо $(1, y)$, где $y \geq 1$. Действительно, если в паре (x_1, y_1) $x_1>y_1$, то по лемме 3 существует $z\in A$, такой что $x_1 = y_1+z$. Тогда $x_1+1 = (y_1+z)+1 = (z+1) + y_1$, то есть выполнено условие $E((x_1, y_1), (z+1,1)) = 1$, а значит $E((x_1, y_1), (x,1)) = 1$, где $x = z + 1 > 1$. Аналогично, если в паре (x_1, y_1) $y_1> x_1$, то существует $y\in A$, $y>1$, такой что $E((x_1, y_1),(1, y)) = 1$. Если же $x_1= y_1$, то, очевидно, выполнено условие $E((x_1, y_1), (1, 1)) = 1$. В случае $E((x, 1), (1, y)) = 1$, где $x\geq 1$, $y\geq 1$, получаем $x+y = 1+1$. Тогда $x = y =1$, иначе либо $x>1$, либо $y>1$, либо верны оба неравенства, и в любом из этих случаев существует $u\in A$, такое что $x + y = (1+1)+ u$, а значит (по лемме 3) $x + y > 1+1$. Если $E((x, 1), (x', 1))=1$ (или $E((1, y), (1, y')) = 1$), то $x+1 = 1+x'$ (соответственно $y+1 = 1+y'$), откуда (по лемме 4) получаем $x = x'$ (соответственно $y = y'$). Сформируем теперь множество B, выбирая из каждого класса эквивалентности такого представителя (x, y), что либо $x\geq 1$ и $y = 1$, либо $x = 1$ и $y\geq 1$. Элементы множества B вида $(x, 1)$, где $x >1$, будем отождествлять с элементами $z\in A$, такими что $x = 1 + z$. (единственность такого представления вытекает из леммы 4). Предикат T на $A\times A\times B$ определим условием $\forall x, y$, то $x+1=1+x'$ $\forall z\in B$ $T(x, y, z) \sim (\forall x', y'\in A\ z = (x', y') \supset x+ y' = x'+y)$. Проверим, что множество B и предикат T удовлетворяют всем аксиомам рациональных чисел. 1) Пусть для некоторых x, y, $z\in A$ $y+z = x$. Для любого $z'\in B$, $z' = (x', y')$ условие $T(x, y, z') = 1$ означает, что $x+y'=x'+y$, тогда $(y+z)+y'=x'+y$, $((z+1)+y')+y=(x'+1)+y$, $(z+1)+y'=x'+1$, то есть $E((z+1), 1), (x', y'))=1$, $z'=z$ (так как элемент $(z+1, 1)\in B$ отождествляется с z). 2) Для любых x, $y\in A$ существует единственный $z\in B$, $z =(x', y')$, такой что $E((x, y), z) = 1$. Тогда $x+y' = x'+y$ и, по определению предиката T, $T(x, y, z) = 1$. 3) Для любого $z\in B$ существуют x, $y\in A$, такие что $z = (x, y)$. Тогда, в силу очевидного равенства $x+y = x+y$, имеем $T(x, y, z)=1$. 4) Для произвольных $x, x', y, y'\in A$ условие $x+y'=x'+y$ означает, что пары (x, y) и (x', y') принадлежат одному смежному классу. Но у каждого такого класса есть свой представитель во множестве B, то есть существует такой $z\in B$, что $T(x, y, z) = T(x', y', z) = 1$. Теорема доказана.

Теорема 14 (о включении положительных рациональных чисел в рациональные). *Все положительные рациональные числа являются также рациональными.*

Теорема означает, что множество рациональных чисел является расширением множества положительных рациональных чисел, то есть что $A \subseteq B$.

Доказательство. Выберем произвольно y, $z\in A$ и пусть $y+z = x$, где $x\in A$. По аксиоме (8) существует, притом единственный, элемент $z'\in B$, такой что $T(x, y, z')$. Но тогда, в силу (7), получим $z = z'$, то есть $z\in B$. Теорема доказана.

Теорема 15 (об изоморфности множеств рациональных чисел). *Пусть A - множество положительных рациональных чисел, а множества B, B' и предикаты T, T' на $A\times A\times B$ и $A\times A\times B'$ удовлетворяют аксиомам* (7)-(10). *Тогда существует биекция* φ: *$B\to B'$, такая что для любых x, $y\in A$ и $z\in B$ $T(x, y, z)= T'(x, y, \varphi(z))$.*

Доказательство. В силу аксиомы (8), для любых x, $y\in A$ $(\exists! z\in B\ T(x, y, z))\wedge(\exists! z'\in B'\ T'(x, y, z'))$. Рассмотрим следующее отношение Φ на $B\times B'$: $\forall z\in B$ $\forall z'\in B'(\Phi(z, z') \sim (\exists x, y\in A\ T(x, y, z)\wedge T'(x, y, z')))$. Покажем, что Φ порождает биекцию $\varphi{:}B\to B'$. В силу (9), для любого $z\in B$ существуют такие x, $y\in A$, что $T(x, y, z)$. По аксиоме (8) $\exists! z'\in B'\ T'(x, y, z')$. Поэтому $\Phi(z, z') = 1$. Покажем, что последнему равенству удовлетворяет единственный $z'\in B'$ (при фиксированном $z\in B$). Предположим, что $z''\in B'$ и $\Phi(z, z'') = 1$.

Тогда, согласно определению отношения Φ, $\exists x', y'\in A(T(x', y', z) \wedge T'(x', y', z''))$. В силу аксиомы (10), из $T(x, y, z) = T(x', y', z) = 1$ следует $x+y' = x'+y$. Тогда, по той же аксиоме, существует $z'''\in B'$, такой что $T'(x, y, z''') = T'(x', y', z''')=1$. Используя аксиому (8), получаем $z''' = z'' = z'$. Поэтому $\forall z\in B\ \exists! z'\in B'$ $\Phi(z, z')$. Аналогично, $\forall z'\in B'\ \exists! z\in B\ \Phi(z, z')$. Поэтому отношение Φ определяет биекцию $\varphi{:}B\to B'$, при этом $T(x, y, z) = T'(x, y, \varphi(z))$ для любых x, $y\in A$ и $z\in B$. Теорема доказана.

Переходим к определению сложения и умножения рациональных чисел. Пусть задано множество A положительных рациональных чисел и операции сложения и умножения на нем. Пусть, кроме того, множество B и предикат T на $A\times A\times B$ удовлетворяют условиям (7)÷(10). Предикат S на $B\times B\times B$ называется *предикатом сложения рациональных чисел*, если для любых z_1, z_2, $z\in B$

$$S(z_1,z_2,z) \sim (\forall\ x_1,x_2,y_1,y_2 \in A\ \ T(x_1,y_1,z_1) \wedge \wedge T(x_2,y_2,z_2) \supset T(x_1+x_2, y_1+y_2, z)). \tag{6'}$$

При выполнении условия (6′) будем писать $z_1+z_2 = z$. Предикат P на $B\times B\times B$ называется *предикатом умножения рациональных чисел*, если для любых z_1, z_2, $z\in B$

$$P(z_1,z_2,z) \sim (\forall\ x_1,x_2,y_1,y_2 \in A\ \ T(x_1,y_1,z_1) \wedge \wedge T(x_2,y_2,z_2) \supset T(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2, z)). \tag{7'}$$

При выполнении условия (7′) будем писать $z_1z_2=z$.

Теорема 16 (о функциональности предикатов сложения и умножения рациональных чисел). *Предикаты S и P на $B\times B\times B$ функциональны, то есть удовлетворяют условиям*:

$$\forall\ z_1,z_2 \in B\ \exists\ !z \in B\ S(z_1,z_2,z); \tag{8'}$$

$$\forall\ z_1,z_2 \in B\ \exists\ !z \in B\ P(z_1,z_2,z). \tag{9'}$$

Доказательство. Выберем произвольно $z_1, z_2 \in B$ и пусть для некоторых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ $T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2) = 1$ (а). По аксиоме функциональности (8) $\exists! z \in B$ $T(x_1+x_2, y_1+y_2, z)$ (б). Покажем, что z не зависит от выбора x_1, x_2, y_1, y_2, а зависит только от z_1, z_2. Пусть для некоторых $x_1', y_1', x_2', y_2' \in A$ $T(x_1', y_1', z_1) = T(x_2', y_2', z_2) = 1$ (в). Тогда из аксиомы равенства разностей (10) и (а) следует $x_1 + y_1' = x_1' + y_1$, $x_2 + y_2' = x_2' + y_2$, то есть $(x_1 + x_2) + (y_1' + y_2') = (x_1' + x_2') + (y_1 + y_2)$ (в силу коммутативности и ассоциативности сложения положительных рациональных чисел). Снова используя аксиомы (8) и (10), получаем $T(x_1'+x_2', y_1'+y_2', z) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z) = 1$. С учетом (а), (б), (в), последнее равенство означает, что по заданным $z_1, z_2 \in B$ элемент $z \in B$, удовлетворяющий условию (б), определяется однозначно, независимо от выбора x_1, x_2, y_1, y_2, и что $S(z_1, z_2, z) = 1$. Функциональность предиката сложения S доказана.

Доказываем функциональность предиката умножения P. Покажем, что для любых $z_1, z_2 \in B$ существует, притом единственный, $z \in B$, такой, что для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \supset T((x_1x_2 + y_1y_2), (x_1y_2 + y_1x_2), z)$. Предположим, что $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_1', y_1', z_1) = 1$ (г), $T(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2, z) = 1$ (д), $T((x_1'x_2+y_1'y_2), (x_1'y_2 + y_1'x_2), z') = 1$ (ж). Покажем, что тогда $z' = z$. Из (г) следует $x_1+y_1' = x_1' + y_1$. Тогда $(x_1+y_1')x_2 = (x_1'+y_1)x_2$, $(x_1'+y_1)y_2 = (x_1+y_1')y_2$. Складывая соответственно правые и левые части последних двух равенств, получаем $(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1'y_2 + y_1'x_2) = (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1'x_2 + y_1'y_2)$. Учитывая (д), (ж), будем иметь $z = z'$ (в силу аксиомы (10)). Отсюда следует, что если $T(x_1, y_1, z_1)$ $T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_1x_2+y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2, z) = 1$, то z не зависит от выбора пары $x_1, y_1 \in A$, а зависит только от z_1 (при фиксированных z_2, x_2, y_2). Аналогично z не зависит от выбора пары $x_2, y_2 \in A$, а только от z_2. Утверждение, сформулированное в начале доказательства, верно. А из этого утверждения, в свою очередь, следует справедливость теоремы, то есть для любых $z_1, z_2 \in B$ существует единственный $z \in B$, такой что $P(z_1, z_2, z)=1$. Этот элемент $z \in B$ определяется условием $T((x_1x_2 + y_1y_2), (x_1y_2 + y_1x_2), z) = 1$, где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ – любые, удовлетворяющие равенству $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) = 1$. Теорема доказана.

При выполнении условий (6′) или (7′) будем писать, соответственно, $z = z_1 + z_2$ или $z = z_1z_2$.

Теорема 17 (об ассоциативности сложения рациональных чисел). *Для всех* $z_1, z_2, z_3 \in B$ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (а).

Доказательство. Для любых $z_1, z_2, z_3 \in B$ и $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_3, y_3, z_3)$ и определения (6′) вытекает $T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \wedge T(x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3) \wedge T((x_1+x_2)+x_3, (y_1+y_2)+y_3, (z_1+z_2)+z_3) \wedge T(x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3), z_1+(z_2+z_3))$. В силу ассоциативности сложения положительных рациональных чисел, имеем $(x_1+x_2)+x_3 = x_1+(x_2+x_3)$, $(y_1+y_2)+y_3 = y_1+(y_2+y_3)$. Тогда, используя аксиому функциональности (8), получаем (а). Теорема доказана.

Теорема 18 (о коммутативности сложения рациональных чисел). *Для всех* $z_1, z_2 \in B$ $z_1 + z_2 = z_2+z_1$.

Доказательство. Для любых $z_1, z_2 \in B$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2)$ и определения (6′) получаем $T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \wedge T(x_2+x_1, y_2+y_1, z_2+z_1)$. Отсюда, используя коммутативность сложения положительных рациональных чисел и аксиому функциональности (8), выводим $z_1+z_2 = z_2+z_1$. Теорема доказана.

Теорема 19 (об ассоциативности умножения рациональных чисел). *Для всех* $z_1, z_2, z_3 \in B$ $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (а).

Доказательство. Для любых $z_1, z_2, z_3 \in B$ и $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_3, y_3, z_3)$ и определения (7′) вытекает $T(x_1x_2+y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2, z_1z_2) \wedge T(x_2x_3+y_2y_3, x_2y_3+y_2x_3, z_2z_3) \wedge T((x_1x_2+y_1y_2)x_3+(x_1y_2+y_1x_2)y_3, (x_1x_2+y_1y_2)y_3+(x_1y_2+y_1x_2)x_3, (z_1z_2)z_3) \wedge T(x_1(x_2x_3 + y_2y_3) + y_1(x_2y_3+y_2x_3), x_1(x_2y_3+y_2x_3) + y_1(x_2x_3+y_2y_3), z_1(z_2z_3))$. В силу ассоциативности и дистрибутивности умножения и сложения положительных рациональных чисел, получаем $(x_1x_2+y_1y_2)x_3 + (x_1y_2+y_1x_2)y_3 = x_1(x_2x_3+y_2y_3) + y_1(x_2y_3+y_2x_3)$, $(x_1x_2+y_1y_2)y_3 + (x_1y_2+y_1x_2)x_3 = x_1(x_2y_3+y_2x_3) + y_1(x_2x_3+y_2y_3)$. Учитывая аксиому функциональности (8), получаем (а). Теорема доказана.

Теорема 20 (о коммутативности умножения рациональных чисел). *Для всех* $z_1, z_2 \in B$ $z_1z_2 = z_2z_1$.

Доказательство. Для любых $z_1, z_2 \in B$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2)$ и определения (7′) получаем $T(x_1x_2+ y_1y_2, x_1y_2+ y_1x_2, z_1z_2) \wedge T(x_2x_1 + y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1, z_2z_1)$. Используя коммутативность сложения и умножения положительных рациональных чисел и аксиому функциональности (8), выводим отсюда $z_1z_2 = z_2z_1$. Теорема доказана.

Теорема 21 (о дистрибутивности умножения рациональных чисел относительно сложения). *Для всех* $z_1, z_2, z_3 \in B$ $(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3+z_2z_3$ (а).

Доказательство. Для любых $z_1, z_2, z_3 \in B$ и $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$ из условия $T(x_1, y_1, z_1) \wedge T(x_2, y_2, z_2) \wedge T(x_3, y_3, z_3)$ и определений (6′), (7′) следует $T((x_1+x_2)x_3+(y_1 + y_2)y_3, (x_1+x_2)y_3 + (y_1+ y_2)x_3, (z_1 + z_2)z_3) \wedge T((x_1x_3+y_1y_3)+(x_2x_3+y_2y_3), (x_1y_3+y_1x_3) + (x_2y_3+ y_2x_3), z_1z_3+ z_2z_3)$. Используя коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность умножения и сложения положительных рациональных чисел, получаем $(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3 = (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3)$, $(x_1+x_2)y_3+ (y_1+y_2)x_3 = (x_1y_3+y_1x_3) + (x_2y_3+y_2x_3)$. Применяя аксиому функциональности (8), выводим отсюда условие (а). Теорема доказана.

Определяем порядок на множестве рациональных чисел. Пусть задано множество A положительных рациональных чисел, а множество B и предикат T на $A \times A \times B$ удовлетворяют аксиомам (7)÷(10).

Предикат порядка $H(x, y)$ на $B\times B$, соответствующий *отношению порядка* $x<y$, вводим прямым определением:

$$\forall z_1,z_2\in B(H(z_1,z_2)\sim(\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in A\ \ T(x_1,y_1,z)\wedge \wedge T(x_2,y_2,z_2)\supset x_1+y_2<x_2+y_1)). \qquad (11)$$

Для доказательства корректности этого определения понадобится следующая

Теорема 22 (о сравнимости рациональных чисел). *Для любых* z_1, $z_2\in B$ *выполнено в точности одно из условий* $z_1=z_2$, $H(z_1, z_2)=1$, $H(z_2, z_1)=1$.

Доказательство. Выберем произвольно z_1, $z_2\in B$. Тогда существуют x_1, x_2, y_1, $y_2\in A$, такие что $T(x_1, y_1, z_1)=T(x_2, y_2, z_2)=1$. По теореме о сравнимости положительных рациональных чисел либо $x_1+y_2=x_2+y_1$ (а), либо $x_1+y_2<x_2+y_1$ (б), либо $x_2+y_1<x_1+y_2$ (в). Пусть, например, выполнено условие (б). Покажем, что тогда $H(z_1, z_2)=1$ (очевидно, что возможности $z_1=z_2$ и $H(z_2, z_1)=1$ исключены). Пусть x_1', x_2', y_1', $y_2'\in A$ – такие, что $T(x_1', y_1', z_1)=T(x_2', y_2', z_2)=1$. Тогда по аксиоме равенства разностей (10) $x_1+y_1'=x_1'+y_1$ (г) и $x_2+y_2'=x_2'+y_2$. Из леммы (3) и условий (б), (г) получаем $(x_1+y_2)+(x_1'+y_1)<(x_2+y_1)+(x_1+y_1')$. Пользуясь свойствами коммутативности и ассоциативности сложения положительных рациональных чисел, имеем $(x_1'+y_2)+(x_1+y_1)<(x_2+y_1')+(x_1+y_1)$. Снова используя лемму 3, получаем $x_1'+y_2<x_2+y_1'$. Продолжая аналогично, приходим к условию $x_1'+y_2'<x_2'+y_1'$. Это означает, что $H(z_1, z_2)=1$. В случае (в) подобное рассмотрение приводит к выводу $H(z_2, z_1)=1$. Если же выполнено условие (а), то, по аксиоме равенства разностей (10), $\exists z\in B\ T(x_1, y_1, z)=T(x_2, y_2, z)=1$ и тогда, в силу аксиомы функциональности (8), получаем $z_1=z_2=z$. Теорема доказана.

Лемма 5. *Для любых* x, $y\in A$ $T(x+y, y, x)=1$.

Доказательство. Согласно аксиоме функциональности (8), для произвольных x, $y\in A$ существует $z\in B$ такой, что $T(x+y, y, z)=1$. Из аксиомы включения (7) и коммутативности сложения положительных рациональных чисел получаем $x=z$. Лемма доказана.

Теорема 23 (о соответствии операций сложения, умножения и отношения порядка на множествах рациональных и положительных рациональных чисел). *Для любых* z_1, z_2, $z\in A$ *условия* $z_1+z_2=z$ (а), $z_1z_2=z$ (б), $z_1<z_2$ (в) *равносильны, соответственно, условиям* $S(z_1, z_2, z)=1$ (а′), $P(z_1, z_2, z)=1$ (б′), $H(z_1, z_2)=1$ (в′), *где* S, P, H – *предикаты сложения, умноженя и порядка на множестве рациональных чисел*.

Доказательство. Пусть z_1, z_2, $z\in A$. По теореме 7, имеем z_1, z_2, $z\in B$, а из леммы 5 получаем $T(z_1+1, -, z_1)=T(z_2+1, 1, z_2)=1$ (г). Если выполнено условие (а′), то, согласно (г) и определению (6′), будем иметь $T((z_1+1)+(z_2+1), 1+1, z)=1$, $T((z_1+z_2)+(1+1), 1+1, z)=1$. Полагая в лемме 5 $x=z_1+z_2$, $y=1+1$ и пользуясь аксиомой функциональности (8), из последнего условия получаем (а). С учетом функциональности предиката S, выводим отсюда равносильность условий (а) и (а′). Предположим теперь, что выполнено условие (б′). Тогда из (г) и определения (7′) получаем $T((z_1+1)(z_2+1)+1\cdot 1, (z_1+1)1+1(z_2+1), z)=1$, $T(z_1z_2+((z_1+z_2)+(1+1)), (z_1+z_2)+(1+1), z)=1$. Пользуясь леммой 5 (полагая в ней $x=z_1z_2$, $y=(z_1+z_2)+(1+1)$) и аксиомой функциональности (8), получаем (б). Учитывая функциональность предиката P, приходим к выводу о равносильности условий (б) и (б′). Пусть, наконец, выполнено условие (в′). Тогда из (г) и определения (11) получаем $(z_1+1)+1<(z_2+1)+1$, $z_1+(1+1)<z_2+(1+1)$, или (с учетом леммы 4) $z_1<z_2$. Отсюда и из теоремы о сравнимости рациональных чисел выводим равносильность условий (в) и (в′). Теорема доказана.

Определяем число нуль. *Нулем* называется любой элемент $0\in B$, такой что для любого $x\in A$ $T(x, x, 0)=1$.

Теорема 24 (о существовании и единственности нуля). *Существует единственный нуль.*

Доказательство Выберем произвольный $x\in A$. Тогда по аксиоме (8) существует, притом единственный, элемент $0\in B$, такой что $T(x, x, 0)$. Пусть $y\in A$ и $y\neq x$. Существует элемент $z\in B$, такой что $T(y, y, z)$. Покажем, что $z=0$. Действительно, из аксиомы (10) следует существование $u\in B$, такого что $T(x, x, u)=T(y, y, u)=1$, поскольку $x+y=y+x$. В силу аксиомы (8), этот элемент единственный, то есть $u=z=0$. Теорема доказана.

Теорема 25 (о свойствах нуля). *Для любого* $x\in B$ 1) $x+0=x$, 2) $x0=0$.

Доказательство. Выберем произвольно $x\in B$ и пусть $T(y, z, x)=1$, где y, $z\in A$. 1) Из $T(y, y, 0)=T(y, z, x)=1$ следует $T(y+y, y+z, 0+x)=1$ (а). Поскольку $y+(y+z)=(y+y)+z$, то, в силу аксиомы (10), существует $x_1\in B$, такой что $T(y+y, y+z, x_1)=T(y, z, x_1)=1$ (б). Используя аксиому (8), получим $x_1=x$, а из (а) и (б) следует $0+x=x$. 2) По определению произведения рациональных чисел, из $T(y, z, x)=T(y, y, 0)=1$ следует $T(yy+zy, yy+zy, x0)=1$. Отсюда вытекает $x0=0$. Теорема доказана.

Определяем понятие противоположного числа**.** Числом, *противоположным* числу $x\in B$, называется любой элемент $-x\in B$, такой что $x+(-x)=0$.

Теорема 26 (о противоположном рациональном числе). *Для любого* $x\in B$ *существует единственное противоположное число* $-x\in B$.

Доказательство. Выберем произвольно $x\in B$, и пусть $T(y, z, x)=1$, где y, $z\in A$. Обозначим через $-x$ такой элемент из B, что $T(z, y, -x)=1$. Тогда выполняется условие $T(y+z, z+y, x+(-x))$, откуда следует, что $x+(-x)=0$. Если существует $x_1\in B$, такой что $x+x_1=0$, то $(x+x_1)+(-x)=0+(-x)$, $(x+(-x))+x_1=-x$, $x_1=-x$. Отсюда вытекает, что для любого $x\in B$ элемент $-x$ определен единственным образом. Теорема доказана.

Введение рациональных чисел не сопровождалось комментариями, поскольку оно осуществлялось по той же методике, что и введение положительных рациональных чисел. Различие состоит лишь в том, что теперь для дальнейшего расширения множества чисел используется не операция умножения, а сложение. Рациональные числа определяются как значения функции $t(x, y) = x–y$, где x и y – положительные рациональные числа. Рациональное число $z = x–y$ появляется в результате решения уравнения $y + z = x$ или, что то же, уравнения $T(x, y, z) = 1$. Разности положительных рациональных чисел отождествляются по правилу: $x–y = x'–y'$ равносильно $x+y' = x'+y$. Сложение и умножение рациональных чисел определяются равенствами: $(x–y)+(x'–y') = (x+x')–(y+y')$; $(x–y)(x'–y') = (xx'+yy') – (xy'+yx')$. Порядок на множестве рациональных чисел определяется правилом: $x–y<x'–y'$ равносильно $x+y'<x'+y$. Число 0 вводится равенством $0 = x–x$, оно не зависит от выбора $x\in A$. Все рациональные числа линейно упорядочены.

Далее понадобятся следующие леммы.

Лемма 6. *Для любых* $z_1, z_2\in B$ *условия* $z_2 < z_1$ *и* $\exists z\in A$ $z_1 = z_2+z$ *равносильны.*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2\in B$ и $z_2 < z_1$. Тогда существуют такие $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A$, что $T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2) = 1$ и $x_2+y_1 < x_1+y_2$. По лемме 3 существует $z\in A$, такой что $x_1+y_2 = (x_2+y_1) + z$, или, в силу коммутативности и ассоциативности сложения положительных рациональных чисел и леммы 4, $x_1+(y_2+1) = (x_2+(z+1)) + y_1$. Тогда из аксиомы равенства разностей следует $T(x_2+(z+1), y_2+1, z_1) = T(x_1, y_1, z_1) = 1$, а поскольку $T(x_2, y_2, z_2) = T(z + 1, 1, z)=1$, то $z_1 = z_2 + z$. Пусть теперь для некоторых $z_1, z_2\in B$, $z\in A$ выполнено условие $z_1=z_2+z$. Тогда существуют $x_1, y_1, x_2, y_2\in A$ такие, что $T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2) = T(z+1, 1, z) = T(x_2 + (z+1), y_2+1, z_1) = 1$. Используя аксиому равенства разностей и лемму 3, получаем отсюда $x_1+(y_2+1) = (x_2+(z+1))+y_1$, $x_1+y_2 = (x_2+y_1)+ z$, $x_2+y_1 < x_1+y_2$, то есть $z_2 < z_1$. Лемма доказана.

Теорема 27 (о транзитивности отношения порядка на множестве рациональных чисел). *Для всех* $x, y, z\in B$ *из* $x < y$, $y < z$ *следует* $x < z$.

Доказательство. Пусть $x, y, z\in B$ и $x < y$, $y < z$. Тогда, по лемме 6, существуют такие $u, v\in A$, что $y = x + u$, $z = y + v$. Отсюда и из теоремы об ассоциативности сложения рациональных чисел следует $z = (x + u) + v = x + (u + v)$. Снова используя лемму 6, получаем $x < z$. Теорема доказана.

Отношение *нестрогого порядка* для рациональных чисел определяем условием $\forall x, y\in B\,((x\le y) \sim ((x<y) \vee (x=y)))$.

Теорема 28 (об упорядоченности множества рациональных чисел). *Множество рациональных чисел с определенным на нем отношением нестрогого порядка является цепью.*

Доказательство. Отношение нестрогого порядка рефлексивно, так как для любого $x\in B$ имеем $x = x$, а значит $x \le x$. Доказываем антисимметричность этого отношения. Пусть $x, y\in B$ и одновременно $x\le y$, $y\le x$, то есть выполнены условия $(x < y) \vee (x = y)$ и $(y<x) \vee (y = x)$. Из теоремы о сравнимости рациональных чисел следует, что такое возможно лишь в случае $x = y$. Поэтому нестрогий порядок обладает свойством антисимметричности. Свойство транзитивности нестрогого порядка выводится из предыдущей теоремы с учетом того, что для любых $x, y, z\in B$ условие $(x < y) \wedge \wedge(y = z)$ или $(x = y) \wedge (y < z)$ влечет $x < z$, а условие $(x = y) \wedge (y = z)$ влечет $x = z$. Наконец, для любых $x, y\in B$ всегда либо $x = y$, либо $x < y$, либо $y < x$ (по теореме о сравнимости рациональных чисел), и поэтому условие $(x\le y) \vee (y\le x)$ выполнено. Теорема доказана.

Лемма 7. *Для всех* $z\in B$ $1z = z$ *и* $(–1)z = –z$.

Доказательство. Для любого $z\in A$ существуют $x, y\in N$, такие что $R(x, y, z)=1$. Тогда, в силу условия $R(1, 1, 1)=1$ и определения умножения, получаем $R(1x, 1y, 1z) = 1$, $R(x, y, 1z) = 1$. По аксиоме (2), отсюда имеем $1z = z$. Пусть теперь $z\in B$, $x, y\in A$ и $T(x, y, z)=1$. Тогда, в силу условия $T(1+1, 1, 1)=1$ и определения умножения, получаем $T((1+1)x+1y, (1+1)y+1x, 1z)=1$. Используя равенство $x+((1+1)y+ x1) = (1+1)\,x+(1+1)y = ((1+1)x+1y)+y$, аксиомы функциональности (8) и равенства разностей (10), получаем $z = 1z$. Доказываем вторую часть леммы. Для любого $z\in B$ имеем $z + (–1)\,z = (1 + (–1))\,z = 0z = 0$. По теореме о противоположном рациональном числе, получаем отсюда $(–1)z = –z$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Для всех* $z\in B$ *условия* $z > 0$ (а), $z\in A$ (б) *и* $(–z) < 0$ (в) *равносильны. Также равносильны условия* $z < 0$ (г) *и* $(–z) > 0$ (д).

Доказательство. В силу леммы 6, условие (а) равносильно условию $\exists z'\in A$ $z = 0+z'$, $z = z'$. Поэтому (а) и (б) равносильны. С другой стороны, по лемме 6, условие (в) выполняется тогда и только тогда, когда существует $z''\in A$, такой что $(–z) + z'' = 0$, то есть $z'' = –(–z) = z$ и верно (а). Доказываем равносильность условий (г) и (д). Для любого $z\in B$ имеем $z + (–z) = 0$, то есть $z < 0$ тогда и только тогда, когда $–z\in A$ (в силу леммы 6), то есть когда $–z > 0$. Лемма доказана.

Определяем понятие обратного числа, Числом, *обратным* числу $z\in B$ $z\ne 0$, называется любой элемент $z^{-1}\in B$, такой что $zz^{-1} = 1$.

Теорема 29 (об обратном рациональном числе). *Для любого* $z\in B$, $z\ne 0$ *существует, притом единственное, обратное число.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $z\in A$. По аксиоме (3), существуют $x, y\in N$, такие что $R(x, y, z)=1$. В силу аксиомы (2) найдется такой $z_1\in A$, что $R(y, x, z_1)=1$. Тогда из условий $R(xy, yx, zz_1) = R(xy, xy, zz_1) = 1$, $(xy)1 = xy$ и аксиомы включения (1) будем иметь $zz_1 = 1$. Предположим, существует такой $z_2\in A$, что $zz_2 = 1$. Тогда из равенства $zz_1 = zz_2$ получаем $z_1(zz_1) = z_1(zz_2)$, $(z_1z)z_1 = (z_1z)z_2$, $1z_1 = 1z_2$, $z_1 = z_2$. Поэтому $z_1 = z^{-1}$ и это обратное число определено для каждого $z\in A$ единственным образом. Пусть теперь $z\in B$ и $z < 0$. Тогда, по лемме 8, $(-z)\in A$ и поэтому существует $(-z)^1\in A$, такой что $(-z)(-z)^{-1}=1$. Используя коммутативность и ассоциативность умножения и лемму 7, получаем $((-1)z)(-z)^{-1} = 1$, $z((-1)(-z)^{-1}) = 1$, $(-(-z)^{-1})z=1$, $z(-(-z)^{-1})=1$, то есть число $-(-z)^{-1}$ является обратным числу z. Доказательство единственности обратного числа для отрицательных рациональных чисел проводится точно так же, как для положительных. Теорема доказана.

Лемма 9. *Для любых* $x_1, y_1, x_2, y_2\in A$ *условие* $(x_2<x_1) \wedge \wedge (y_2<y_1)$ (а) *влечет* $x_2y_2 < x_1y_1$.

Доказательство. Пусть для некоторых $x_1, y_1, x_2, y_2\in A$ верно (а). Тогда, по лемме 3, существуют u, $v\in A$, такие что $x_1 = x_2 + u$, $y_1 = y_2 + v$, и значит $x_1y_1 = x_2y_2 + ((x_2v + uy_2) + uv)$. Снова используя лемму 2, получаем $x_2y_2 < x_1y_1$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Для любых* $x_1, y_1, x_2, y_2\in B$ *условие* $(x_2<x_1) \wedge (y_2<y_1)$ (б) *влечет* $x_2+y_2 < x_1+y_1$.

Доказательство. Пусть для некоторых $x_1, y_1, x_2, y_2\in B$ верно (б). Тогда, по лемме 6, существуют $u, v\in A$, такие что $x_1 = x_2 + u$, $y_1 = y_2 + v$, то есть $x_1 + y_1 = (x_2 + y_2) + (u + v)$. Снова используя лемму 6, получаем $x_2+y_2 < x_1+y_1$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Для любых* $x, y\in B$ *условия* $x < y$ *и* $-y < -x$ *равносильны.*

Доказательство. Если x, $y\in B$ и $x < y$, то невозможно $-x = -y$. Также неверно $-x < -y$, потому что иначе имеем $x+(-x) < y+(-y)$ (по лемме 10), $0<0$ – противоречие. Поэтому условие $x < y$ влечет $-y < -x$, а в силу равенств $-(-x) = x$, $-(-y) = y$ верно и обратное утверждение. Лемма доказана.

Выводы

Полученные здесь результаты по идентификации понятия числа имеют много общего с известными положениями из учения об основаниях арифметики, поэтому необходимо проанализировать различие между ними. В нашей постановке речь идет только об идентификации (то есть о математическом описании) понятия числа, вопрос об обосновании этого понятия не ставится. При решении задачи идентификации объектов все средства формального описания хороши, лишь бы они были надежны; нет необходимости их ограничивать, как это делается в математической логике при обосновании понятий арифметики. Снятие запрета на средства формального описания дает возможность идентифицировать именно ту арифметику, которая фактически используется в математической практике, а не тот ее вариант, который носит название *формальной арифметики*.

Наиболее близкую к формулируемой здесь постановку задачи мы находим в классической работе Ландау [3], опубликованной впервые в 1930 году. Насколько нам известно, до настоящего времени результаты этой работы не пересматривались и не улучшались. Главный недостаток данной работы, оцениваемой нами с точки зрения задачи идентификации (а такая задача в ней не ставится, поскольку речь там идет только об обосновании арифметики), заключается в том, что в ней все аксиомы арифметики записаны на неформализованном логическом языке, то есть. на том языке, который был общепринятым среди математиков в то время, когда эта работа была написана. При решении задачи идентификации этого недостаточно. Для этой цели мы использовали язык алгебры подстановочных операций [1]. Аксиомы (1)-(5), (15), (16), (20) и (21) из первой части настоящей работы, по существу, повторяют формулировки Ландау, различие заключается лишь в языке описания. Аксиомы (1)-(4) из второй части этой работы у Ландау вовсе отсутствуют. Это обусловлено тем, что он вводит положительные рациональные числа прямым определением, как классы эквивалентных дробей (пар натуральных чисел). Однако при использовании языка алгебры подстановочных операций необходимо вводить предикат R, связывающий пары натуральных чисел с положительными рациональными. То же самое относится и к аксиомам (7)-(10), которые определяют множество всех рациональных чисел и предикат T, связывающий их с парами положительных рациональных чисел.

Список литературы: 1. *Баталин, А.В.* О теории натурального ряда [Текст] / *А.В. Баталин, З.В. Дударь, С.А. Пославский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. – С. 135-144. 2. *Баталин, А.В.* О теории рациональных и вещественных чисел [Текст] / *А.В. Баталин, С.А. Пославский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. – С. 155-164. 3. *Ландау, Э.* Основы анализа. [Текст] / *Э. Ландау.*– М.: ИЛ, 1947. – 182 с.

Поступила в редколлегию 20.04.2010

УДК 519.7

Про теорію раціональних чисел / М.Ф. Бондаренко, Н.П. Круглікова, С.О. Пославський, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 140–149.

Категорія кількості представлена поняттями натурального, раціонального та дійсного числа. Мовою алгебри предикатних операцій описані характеристичні властивості цих понять, доказана повнота опису. З визначень понять, які розглянуті виведені їх основні властивості, на яких базується будова математичного аналізу.

Ил. 2. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

On the rational numbers theory / M.F. Bondarenko, N.P. Kruglikova, S.A. Poslavsky, Ju.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 140–149.

The category of a quantity represented by concepts natural, rational and real quantities. In language of algebra of predicate operations the characteristic properties of these concepts are described, the completeness of the descriptions is proved. From definitions of considered concepts their main properties are introduced, on which the building of a calculus bases.

Fig. 2. Ref.: 3 items.