СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

БОНДАРЕНКО М.Ф., РУТКАС А.Г., ЧУЙКО Ф.Л.

Описываются два признака разрешимости вырожденной дискретной системы, являющейся разностной моделью дифференциально-алгебраического уравнения.

В пространстве $\mathbf{C}^m$ рассматривается бесконечная система векторных разностных уравнений

$$A_n u_{n+1} + B_n u_n = f_n\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u_0 = a \qquad (2)$$

и вырожденными, вообще говоря, матрицами A_n, B_n размерности $m \times m$. По другой терминологии (1) называется неявной или вырожденной дискретной системой [1, 6, 7]. Задачи из экономики, биологии, физики, приводящие к вырожденной дискретной системе (1), рассматривались в [7]. Систему (1) можно трактовать как дискретную модель эволюционной системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\big(A(t)u(t)\big) + B(t)u(t) = f(t), \qquad 0 \le t < \infty\,, \qquad (3)$$

в пространстве $\mathbf{C}^m$. Действительно, производя разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ и переходя в уравнении (3) к конечным разностям, получаем систему (1), где $u_n = u(t_n)$, $\quad f_n = f(t_n)$; :

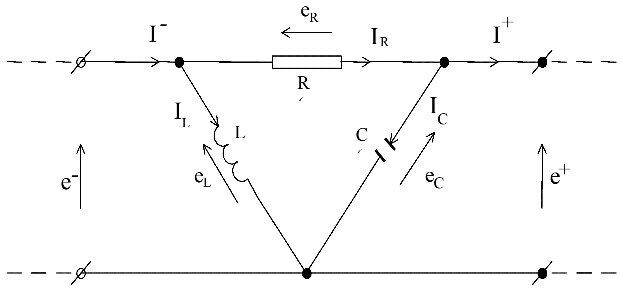
$$A_n = \frac{1}{\Delta_n} A(t_{n+1}), \quad B_n = B(t_n) - \frac{1}{\Delta_n} A(t_n), \qquad (4)$$

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n\,.$$

Классическими физическими объектами, которые описываются уравнениями вида (3) с вырожденными, вообще говоря, матрицами $A(t)$, являются электрические цепи [4,7, 8].

Приведем пример передающей нестационарной цепи, изображенной на рисунке.

На вход цепи подаётся известное входное состояние $\varphi^-(t) = (e^-, I^-)^{tr}(t)$; необходимо найти внутреннее $u(t) = (I_R, I_L, e_C)^{tr}(t)$ и выходное $\varphi^+(t) = (e^+, I^+)^{tr}(t)$ состояние.



Запишем уравнения Кирхгофа и уравнения элементов:

$$I^- = I_R + I_L, \qquad I^+ = I_R - I_C,$$

$$e^- = e_L = e_C + e_R = e^+,$$

$$e_R = R(t)I_R, \qquad e_L = \frac{d}{dt}\big(L(t)I_L(t)\big),$$

$$I_C = \frac{d}{dt}\big(C(t)e_C(t)\big).$$

Исключив из них переменные I^+, e^+, e_R, e_L, I_C, получим систему трех дифференциально-алгебраических уравнений, векторная форма которой имеет вид (3), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & L(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ R(t) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} e^- \\ e^- \\ I \end{pmatrix}; \qquad u(t) = \begin{pmatrix} I_R \\ I_L \\ e_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Известно, что если матрица $A(t)$ вырождена $\big(\det A(t) \equiv 0\big)$, то задача Коши для дифференциального уравнения (3) с начальными условиями $u(0) = a$ может иметь решение лишь при специальных соотношениях между матрицами $A(t), B(t)$, свободным членом $f(t)$ и начальным вектором a [2, 3, 5, 7].

Аналогичные результаты для нестационарной дискретной системы (1) с вырожденными матрицами A_n еще не известны, за исключением некоторых частных случаев с единичными матрицами $B_n = E$ [1, 6]. Начальное условие Коши $u(0) = a$ для уравнения (3) переходит в начальное условие $u_0 = a$ (2) для дискретной системы векторных уравнений (1).

Приведём достаточные условия разрешимости начальной задачи (1), (2) для разностного уравнения с вырожденными, вообще говоря, матрицами A_n, B_n. Для каждого фиксированного $n \in \{0,1,2,\ldots\}$

выберем окружность γ_n в комплексной плоскости так, чтобы все конечные собственные числа пучка матриц $\lambda A_n + B_n$ лежали внутри круга $|\lambda| < \gamma_n$. С помощью контурных интегралов вводим матрицы:

$$P_n^1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} (\lambda A_n + B_n)^{-1} A_n d\lambda; \qquad P_n^2 = E - P_n^1, \tag{6}$$

$$Q_n^1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} A_n (\lambda A_n + B_n)^{-1} d\lambda; \qquad Q_n^2 = E - Q_n^1. \tag{7}$$

Эти матрицы являются проекционными (идемпотентными) и называются *спектральными проекторами пучка* $\lambda A_n + B_n$ *в точке* $\lambda = \infty$. Они порождают прямые разложения пространства $\mathbf{C}^m$:

$$C^m = X_n^1 \dotplus X_n^2, \quad C^m = Y_n^1 \dotplus Y_n^2, \tag{8}$$

$$X_n^k = P_n^k(C^m), \quad Y_n^k = Q_n^k(C^m), \quad k = 1, 2; \qquad n = 0,1,2,\ldots .$$

Разложения (8) приводят пучки $\lambda A_n + B_n$:

$$A_n(X_n^k) \subset Y_n^k, \; B_n(X_n^k) \subset Y_n^k, \tag{9}$$

причем суженные отображения

$$A_n^1 = A_n : X_n^1 \to Y_n^1, \qquad B_n^2 = B_n : X_n^2 \to Y_n^2 \tag{10}$$

являются обратимыми (осуществляют взаимнооднозначные соответствия между указанными парами подпространств).

Спектральные проекторы P_n^k, Q_n^k, *спектральные подпространства* X_n^k, Y_n^k и разложение (8) введены в [4] для более общего случая бесконечномерных банаховых пространств.

Заметим, что в невырожденном случае, когда $\det A_n \neq 0$, спектральные проекторы и спектральные разложения (8) тривиальны, в том смысле, что

$$P_n^1 = Q_n^1 = E, \; P_n^2 = Q_n^2 = 0, \; X_n^1 = Y_n^1 = C^m .$$

Тогда резольвенты пучков голоморфны и убывают при $\lambda \to \infty$, причем порядок убывания равен $\frac{1}{\lambda}$:

$$\left\| (\lambda A_n + B_n)^{-1} \right\| \le \frac{K_n}{|\lambda|}, \qquad |\lambda| > \gamma_n,$$

а резольвенты $(A_n + \mu B_n)^{-1}$ “двойственных” пучков $A_n + \mu B_n$ голоморфны в точке $\mu = 0$. Для вырожденной системы $(\det A_n = 0)$ мы рассмотрим случай простого полюса резольвент $(A_n + \mu B_n)^{-1}$, или случай ограниченных на бесконечности резольвент $(\lambda A_n + B_n)^{-1}$:

$$\left\| (\lambda A_n + B_n)^{-1} \right\| \le K_n, \quad |\lambda| > \gamma_n . \tag{11}$$

Теперь можно сформулировать основной результат о разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 1. *Предположим, что пучки матриц* $\lambda A_n + B_n$ *удовлетворяют условию (11) ограниченности резольвент на бесконечности. Пусть последовательность* $\{\operatorname{rank} A_n\}$ *стационарна, и* $(2m \times m)$ *– матрицы* $\begin{bmatrix} P_n^1 \\ P_{n+1}^2 \end{bmatrix}$ *имеют максимальный ранг m при всех n. Тогда для любого вектора* $a \in C^m$ *такого, что*

$$(B_0 a - f_0) \in \operatorname{Im} A_0 , \tag{12}$$

начальная задача (1), (2) имеет единственное решение $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Для других начальных векторов задача не имеет решения.*

Здесь подпространство $\operatorname{Im} A_0$ обозначает образ отображения A_0. Если $B_n = E$ для всех n, то условие (12) на начальный вектор a имеет вид $(a - f_0) \in \operatorname{Im} A_0$ и совпадает с условием (7) из работы [6]. В этом смысле теорему 1 можно считать обобщением основного результата из [6].

Доказательство. Из обратимости суженных отображений (10) следует, что для каждого n матрицы

$$G_n = A_n P_n^1 + B_n P_n^2 \qquad n = 0,1,\ldots \tag{13}$$

обратимы и справедливы равенства

$$G_n^{-1} A_n P_n^1 = P_n^1, \qquad G_n^{-1} B_n P_n^2 = P_n^2 . \tag{14}$$

Умножая уравнение (1) на проекторы Q_n^1, Q_n^2 и используя вложения (9), получаем пару уравнений:

$$A_n P_n^1 u_{n+1} + B_n P_n^1 u_n = Q_n^1 f_n ,$$

$$A_n P_n^2 u_{n+1} + B_n P_n^2 u_n = Q_n^2 f_n ,$$

эквивалентную (1). Использование (14) дает

$$P_n^1 u_{n+1} + G_n^{-1} B_n P_n^1 u_n = G_n^{-1} Q_n^1 f_n , \quad n = 0,1,\ldots, \tag{15}$$

$$G_n^{-1} A_n P_n^2 u_{n+1} + P_n^2 u_n = G_n^{-1} Q_n^2 f_n , \quad n = 0,1,\ldots . \tag{16}$$

Благодаря условию (11) пучок $\lambda A_n + B_n$ не имеет присоединенных векторов в точке $\lambda = \infty$, поэтому $X_n^2 = \operatorname{Ker} A_n$ и $A_n P_n^2 = 0$. Система (15), (16) принимает вид

$$P_n^1 u_{n+1} = -G_n^{-1} B_n P_n^1 u_n + G_n^{-1} Q_n^1 f_n,$$
$$P_{n+1}^2 u_{n+1} = G_{n+1}^{-1} Q_{n+1}^2 f_{n+1}, \tag{17}$$
$$n = 0,1,2,...$$

При этом пропущенное равенство в (16) при n=0 представляет собой следующее необходимое условие на начальный вектор $u_0 = a$:

$$P_0^2 a = G_0^{-1} Q_0^2 f_0. \tag{18}$$

Это условие равносильно (12). Действительно, после умножения равенства (18) слева на G_0 получается $B_0 P_0^2 a = Q_0^2 f_0$, или $Q_0^2 (B_0 a - f_0) = 0$, и остается учесть, что $Q_0^1 (C^m) = Y_0^1 = \operatorname{Im} A_0$.

Теперь из системы (17) можно последовательно для n=0,1,2 найти значения $u_1, u_2, ...$, отправляясь от начального условия $u_0 = a$, удовлетворяющего условию (12). Если значение u_n уже известно, то (17) представляет собой систему 2m алгебраических уравнений относительно m компонент вектора u_{n+1}.

Введем обозначения

$$\varsigma_n = -G_n^{-1} B_n P_n^1 u_n + G_n^{-1} Q_n^1 f_n,$$
$$\eta_{n+1} = G_{n+1}^{-1} Q_{n+1}^2 f_{n+1}$$

для правых частей (17). Так как

$$\varsigma_n = P_n^1 \varsigma_n, \qquad \eta_{n+1} = P_{n+1}^2 \eta_{n+1},$$

то матрица коэффициентов $\begin{pmatrix} P_n^1 \\ P_{n+1}^2 \end{pmatrix}$ системы (17) размерности $2m \times m$ и расширенная матрица $\begin{pmatrix} P_n^1; & \varsigma_n \\ P_{n+1}^2; & \eta_{n+1} \end{pmatrix}$ размерности $2m \times (m+1)$ имеют одинаковый ранг m при каждом фиксированном n.

Таким образом, значение u_{n+1} однозначно находится по значению u_n. Теорема доказана.

В работах по дифференциально-алгебраическим уравнениям (DAEs) [8] используется понятие индекса уравнения (2), точнее индекса пучка матриц $\lambda A + B$, равного порядку полюса матрицы-функции $(A + \mu B)^{-1}$ в точке $\mu = 0$. Индекс пучка совпадает с максимальной длиной цепочек из собственных и присоединенных векторов пучка $A + \mu B$ в точке $\mu = 0$, или с максимальной размерностью тех клеток в нормальной форме пучка $\lambda A + B$, которые отвечают бесконечным элементарным делителям [3].

Резольвентное условие (11) эквивалентно тому, что индекс пучка $\lambda A_n + B_n$ равен единице. Так как $\operatorname{rank} A_n + \dim \operatorname{Ker} A_n = m$, то стационарность последовательности $\{\operatorname{rank} A_n\}$ равносильна тому, что аннуляторы всех матриц A_n имеют одинаковую размерность.

В условиях теоремы 1 предположение о рангах $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P_n^1 \\ P_{n+1}^2 \end{pmatrix} = m$ эквивалентно условию

$$X_n^2 \bigcap X_{n+1}^1 = \{0\} \qquad n = 0,1,2,...$$

Действительно, если $x \in X_n^2 \bigcap X_{n+1}^1$, то $P_n^1 x = 0, \quad P_{n+1}^2 x = 0$, поэтому из рангового условия следует, что $x = 0$, и наоборот.

Для любого регулярного пучка матриц $\lambda A_n + B_n$ подпространство $X_n^1 = P_n^1 (C^m)$ есть линейная оболочка всех собственных и присоединенных векторов, отвечающих конечным собственным числам. Мы приходим к теореме 2, условия которой эквивалентны условиям теоремы 1, однако в практической проверке отличны от первых.

Теорема 2. *Пусть пучки матриц* $\lambda A_n + B_n$ *имеют единичные индексы, размерности аннуляторов* $\operatorname{Ker} A_n$ *не зависят от n и при каждом n аннулятор* $\operatorname{Ker} A_n$ *имеет нулевое пересечение с линейной оболочкой всех собственных и присоединенных векторов очередного пучка* $\lambda A_{n+1} + B_{n+1}$*, отвечающих конечному спектру. Тогда для всякого начального вектора a, удовлетворяющего условию (12), начальная задача (1), (2) имеет единственное решение* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Для других начальных векторов задача не имеет решения.*

Обратимся к модельному примеру цепи рисунка. Переходя от векторного дифференциального уравнения (3) с матрицами и векторами (5) к конечно-разностным уравнениям, получаем систему (1), элементы которой согласно (4) есть

$$A_n = \frac{1}{\Delta_n}\begin{pmatrix} 0 & L(t_{n+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f_n = \begin{pmatrix} e_n^- \\ e_n^- \\ I_n^- \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\Delta_n} L(t_n) & 0 \\ R(t_n) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

При естественном требовании положительности параметров цепи $L(t)$, $R(t)$, $C(t)$ конечный спектр пучка $\lambda A_n + B_n$ состоит из одного собственного числа $\lambda_n = \frac{L(t_n)}{L(t_{n+1})}$, которому отвечает собственный вектор $(1,-1,-R(t_n))^{tr}$. Спектральные подпространства X_n^2, Y_n^2 являются двумерными, X_n^2 совпадают с аннулятором $\mathrm{Ker}A_n$ и не зависят от n. Здесь m=3, поэтому λ_n – простое собственное число пучка $\lambda A_n + B_n$ и спектральные подпространства имеют вид

$$X_n^1 = \mathrm{span}\begin{pmatrix}1\\-1\\R_n\end{pmatrix}, \qquad X_n^2 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_2\end{pmatrix}\right\},$$

$$Y_n^1 = \left\{\begin{pmatrix}y_1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad Y_n^2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right\}.$$

Ясно, что (18) и все условия теорем 1,2 выполнены. Согласно (12) разностная система (1) для модельной цепи рисунка разрешима тогда и только тогда, когда в начальном условии (2) вектор a имеет вид

$$a = \left(\xi, I_0^- - \xi, e_0^- - R(0)\xi\right)^{tr},$$

где ξ – любое число, вещественное или комплексное.

В заключение рассмотрим дискретную модель нелинейной вырожденной системы. Предположим, электрическая цепь рисунка является нелинейной, и уравнения колебаний элементов имеют вид:

$$u_R(t) = R(t)I_R(t) + f_R(t, I_R);$$

$$u_L(t) = \frac{d}{dt}\left(L(t)I_L(t)\right) + f_L(t, I_L);$$

$$I_C(t) = \frac{d}{dt}\left(C(t)u_C(t)\right) + f_C(t, u_C),$$

здесь f_R, f_L, f_C – нелинейные функции.

Исключая, как и прежде, переменные I^+, e^+, e_R, e_L, I_C, получаем систему трех уравнений:

$$I_R + I_L = I^-,$$

$$\frac{d}{dt}(LI_L) = e^- - f_L(t, I_L),$$

$$RI_R + u_C = e^- - f_R(t, I_R).$$

Их векторная форма есть

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)u(t)\right) + B(t)u(t) = f(t,u), \qquad (19)$$

где A, B, $u(t)$ указаны в (5), а вектор-функция f равна

$$f(t, u_1, u_2, u_3) = \\ = \left(I^-(t); e^-(t) - f_L(t, u_2); e^-(t) - f_R(t, u_1)\right)^{tr}.$$

Переходя к конечным разностям в уравнении (19), получаем дискретную систему с нелинейными правыми частями:

$$A_n u_{n+1} + B_n u_n = f_n(u_n), \qquad (20)$$

где $u_n = u(t_n)$, матрицы A_n, B_n определены формулами (4),(5), а функции $f_n(u)$ – равенствами $f_n(u) = f(t_n, u)$.

Квазилинейная дискретная система (20) является вырожденной в том смысле, что матрицы A_n имеют двумерные аннуляторы. Таким образом, для численного решения уравнения (19) с использованием компьютера необходимо получить теоретический результат о разрешимости вырожденной квазилинейной системы (20) с заданным начальным состоянием $u_0 = a$, и прежде всего, дать описание множества допустимых начальных векторов $\{a\}$, аналогичное условию (12) для линейной системы (1).

Результаты статьи докладывались на 6-й международной конференции «Теория и техника передачи, приема и обработки информации.(Новые информационные технологии)».Туапсе, 1999.

Литература: 1. *Бондаренко М.Ф., Власенко Л.А., Руткас А.Г.* Периодические решения разностных уравнений / / Доп. НАН України. 1999. №1. 2.*Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 222 с. 3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с. 4. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференциальные уравнения, 1975. Т. 11, №11. С. 1996 – 2010. 5. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме.//Доп. НАН України. 1993. №4. С. 11 – 15. 6. *Bondarenko M.F., Rutkas A.G.* On a class of implicit difference equations. //Доп. НАН України. 1988. №7. С.11-15. 7. *Campbell S.L.* Singular systems of differential equations. Risearch notes in mathematics. 40. 1980. Pitman Eublishing Co. New York. 180 p. 8. *Marz R., Tischtendorf C.* Recent results in solving index 2 differential-algebraic equatins in circuit simulation // Humbolt-Universitat zu Berlin. Institut fur Mathematik, Preprint Nr. 96 4. 1996. 22 s.

Поступила в редколлегию 12.02.01

Рецензент: д-р физ.-мат. наук. проф. Дикарев В.А.

Бондаренко Михаил Федорович, д-р техн. наук, проф. академик ВШ, ректор ХТУРЭ. Научные интересы: моделирование, компьютерная математика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 43-30-53.

Руткас Анатолий Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования ХНУ им. В.Н. Каразина. Научные интересы: моделирование, дифференциальные уравнения, компьютерная математика. Адрес: Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4, тел. 21-28-35.

Чуйко Филипп Леонидович, соискатель кафедры математического моделирования ХНУ. Научные интересы: моделирование, программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 27-29-15.