

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

СЛЕСАРЕНКО А.П., ПОДКОПАЙ И.В.

На базе совместного применения структурного и вариационного методов решается задача теплопроводности для пластины с источниками энергии с учётом условий идеального теплового контакта на границе разнородных частей пластины. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

1. Введение

Целью данной работы является математическое моделирование в платах радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) вариационно-структурным методом.

Широко распространены устройства, в которых часть тепловой энергии переносится в окружающую среду через конструктивные элементы, выполненные в форме пластин. Примерами таких пластин являются: ребро радиатора, несущие платы в микромодулях, рабочий элемент полупроводникового выпрямителя радиаторного типа, шасси, на котором смонтированы детали (диоды, транзисторы и т.д.). При этом физически оправданным является предположение, что градиент температуры в поперечном сечении пластины равняется нулю [1].

Результаты решения прямых задач теплопроводности представляют собой функциональные ряды по базисным функциям, точно удовлетворяющим граничным условиям.

Относительную погрешность полученных результатов в пределах 3-4% в плане среднеквадратичного рассогласования с результатами натурного теплофизического эксперимента можно получить уже при 10-15-базисных функциях в аналитической структуре решения соответствующей задачи теплопроводности. Это позволяет на новом качественном уровне создавать как банки данных модельных структур тепловых режимов элементов РЭА, так и новые информационные технологии в этом направлении.

2. Постановка задачи исследования

При определённых допущениях отдельные части электронного аппарата можно рассматривать как пластины с системой источников энергии. Рассмотрим несколько пластин квадратной формы с различными расположенными на них системами источников энергии (рис. 1, а - г).

Будем предполагать, что:

- а) источники тепла равномерно распределены по областям, которые они занимают;
- б) тепловые потоки $P_1 = \dots = P_m = P$ рассеиваются в окружающую среду не только кондукцией через границы областей источников энергии, но и конвекцией и излучением с их поверхностей;

в) рассеянием энергии с кромок пластин можно пренебречь по сравнению с рассеянием тепла с остальных поверхностей пластин [1];

г) сумма полных коэффициентов теплоотдачи с поверхностей пластины такова, что $B_i = \frac{\alpha L^2}{\lambda d} = 5$, где

B_i – критерий Био, L – характерный размер пластины, d – толщина пластины, λ – коэффициент теплопроводности пластины;

д) размеры областей H_i (источников) такие, что $\frac{l_i}{L} = 0,1$. Для рис. 1, г L – характерный размер области источника энергии.

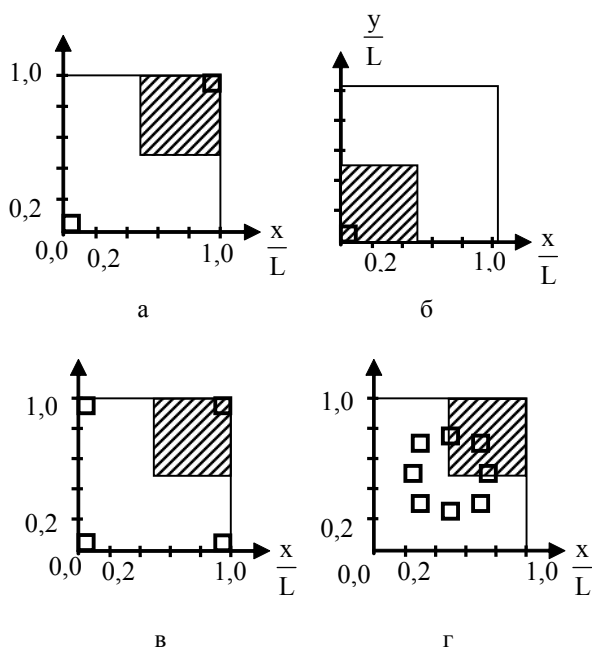


Рис.1. Схема конструктивного элемента в форме пластины с источниками тепловой энергии: а – два источника тепловой энергии; б – один; в – четыре; г – восемь

Коэффициент теплопроводности материала заштрихованной части пластины – λ_1 (область Ω_1), а незаштрихованной части – λ_2 (область Ω_2) (рис. 1, а – г).

Расчёт температурного поля пластины в этих случаях сводится к рассмотрению следующей краевой задачи:

$$\Delta \varphi - \beta^2 \varphi = -F_p, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_{\Gamma_0} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial \varphi(x_{01}, y_{01})}{\partial v_{01}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi(x_{10}, y_{10})}{\partial v_{10}} \right) \bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow y_1}} \varphi(x, y) = \varphi(x_1, y_1), \quad (3)$$

где $(x, y) \in \Omega$, $(x_1, y_1) \in \Gamma_1$, $(x_{01}, y_{01}) \in \Omega_1$, $(x_{10}, y_{10}) \in \Omega_2$, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$; Γ_0 – контур торцов пластины; Γ_1 – контур контакта неоднородных пластин; d – толщина пластины; $\beta = \beta(\alpha, \lambda, d)$; α – полный коэффициент теплоотдачи поверхности пластины; p – номер задачи; v_{01} и v_{10} – направление внутренних нормалей к контуру Γ_1 ; $\varphi = t - t_c$ (t_c – температура окружающей среды).

Используя формулу Грина [2] и учитывая (2), (3), имеем

$$\begin{aligned} (A\varphi, \varphi) &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{\Omega_i} (-\Delta \varphi + \beta^2 \varphi) \varphi d\Omega_i = \\ &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{\Omega_i} (\text{grad} \varphi)^2 d\Omega_i + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{\Omega_i} \beta^2 \varphi^2 d\Omega_i - \\ &\quad - \lambda_1 \int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v_{01}} ds_1 - \lambda_2 \int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v_{10}} ds_1 = \\ &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{\Omega_i} (\text{grad} \varphi)^2 d\Omega_i + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{\Omega_i} \beta^2 \varphi^2 d\Omega_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда, согласно [3], оператор $A\varphi = \lambda(-\Delta \varphi + \beta^2 \varphi)$ – положительно-определённый на линейном непрерывно дифференцируемых функций, которые удовлетворяют условию (2), (3).

Таким образом, рассмотренная задача равнозначна задаче про минимум функционала:

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{\Omega_i} [(\text{grad} \varphi)^2 + \beta^2 \varphi^2 + 2F\varphi] d\Omega_i.$$

3. Структура решения задачи

Согласно [3-5], структура решения данной задачи имеет вид

$$N = \frac{\varphi(u, v) \lambda_1 d}{P} = \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \geq 0, j \geq 0}}^{\infty} C_{ij} X_{ij},$$

$$\begin{aligned} X_{ij}(u, v) &= W(u, v) - \omega_0(u, v) \left[\frac{\partial W(u, v)}{\partial u} \frac{\partial \omega_0(u, v)}{\partial u} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W(u, v)}{\partial v} \frac{\partial \omega_0(u, v)}{\partial v} \right], \end{aligned}$$

$$\omega_0(u, v) = u - u^2 + v - v^2 - 4\sqrt{(u - u^2)^4 + (v - v^2)^4},$$

$$\left. \frac{\partial \omega_0}{\partial v_0} \right|_{\Gamma_0} = 1; \quad \left. \frac{\partial^2 \omega_{01}}{\partial v_{01}^2} \right|_{\Gamma_{01}} = \left. \frac{\partial^2 (u - u^2)}{\partial v_{01}^2} \right|_{\Gamma_{01}};$$

$$\left. \frac{\partial^2 \omega_{02}}{\partial v_{02}^2} \right|_{\Gamma_{02}} = \left. \frac{\partial^2 (v - v^2)}{\partial v_{02}^2} \right|_{\Gamma_{02}};$$

$$\left. \frac{\partial^3 \omega_{01}}{\partial v_{01}^3} \right|_{\Gamma_{01}} = \left. \frac{\partial^3 (u - u^2)}{\partial v_{01}^3} \right|_{\Gamma_{01}} ;$$

$$\left. \frac{\partial^3 \omega_{02}}{\partial v_{02}^3} \right|_{\Gamma_{02}} = \left. \frac{\partial^3 (v - v^2)}{\partial v_{02}^3} \right|_{\Gamma_{02}} , \quad \Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} ,$$

$$W(u, v) = (u \cdot v)^i (u^i + v^i) ,$$

$$u = x + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{|\omega_1| \omega_0^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2} ;$$

$$v = y + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{|\omega_1| \omega_0^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2} ,$$

$$\omega_1(x, y) = 1 - x - y - \sqrt{(0,5 - x)^4 + (0,5 - y)^4} ;$$

$$\left. \frac{\partial \omega_1}{\partial v_1} \right|_{\Gamma_1} = 1 ; \quad \left. \frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial v_{11}^2} \right|_{\Gamma_{11}} = \left. \frac{\partial^2 (u - u^2)}{\partial v_{11}^2} \right|_{\Gamma_{11}} ;$$

$$\left. \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial v_{12}^2} \right|_{\Gamma_{12}} = \left. \frac{\partial^2 (v - v^2)}{\partial v_{12}^2} \right|_{\Gamma_{12}} ;$$

$$\left. \frac{\partial^3 \omega_{11}}{\partial v_{11}^3} \right|_{\Gamma_{11}} = \left. \frac{\partial^3 (u - u^2)}{\partial v_{11}^3} \right|_{\Gamma_{11}} ;$$

$$\left. \frac{\partial^3 \omega_{12}}{\partial v_{12}^3} \right|_{\Gamma_{12}} = \left. \frac{\partial^3 (v - v^2)}{\partial v_{12}^3} \right|_{\Gamma_{12}} , \quad \Gamma_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} .$$

4. Вычислительный эксперимент

Для численного расчёта была взята квадратная пластина со стороной L , с системой источников энергии (H_i) ($i=1,2,\dots,m$), которые занимали на пластине области в виде квадратов со сторонами $l_1 = l_2 = \dots = l_m = 1$ (см. рис. 1, а - г), при этом $\frac{1}{L} = 0,1$; $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{5}$; $\beta_1^2 = 5$; $\beta_2^2 = 1$.

Функция F_p в уравнении (1) для рассмотренных случаев имеет вид:

$$(x, y) \in H_{pi} ; \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_1, (x, y) \in \Omega_1 , \\ \lambda_2, (x, y) \in \Omega_2 ; \end{cases}$$

где $i=1,2,\dots,m$, m – количество источников энергии на пластине.

Вычисление интегралов и решение системы

$$\sum_{\substack{i+j=0 \\ i \geq 0, j \geq 0}}^n C_{ij} \iint_{\Omega} \lambda \left[\frac{\partial X_{ij}}{\partial x} \frac{\partial X_{ks}}{\partial x} + \frac{\partial X_{ij}}{\partial y} \frac{\partial X_{ks}}{\partial y} + \beta^2 X_{ij} X_{ks} \right] d\Omega =$$

$$= \iint_{\Omega} \lambda F_{pm} X_{ks} d\Omega \quad (5)$$

для $n=2$ (т.е. 6 членов ряда) выполняли на ПК. Дифференцирование при этом проводилось точно. Интегрирование проводилось с шагом 2^{-4} , а для интегралов с функцией F – с шагом 2^{-7} . Потраченное на каждую

из задач машинное время было в пределах 5-8 мин. Значения коэффициентов C_{ij} для приближённых решений задач (1)-(4) приведены в таблице.

Номер задачи	C_{ij}					
	C_{00}	C_{10}	C_{20}	C_{01}	C_{11}	C_{02}
1	0,6483	3,6258	-2,5179	1,6752	-4,8831	1,6133
2	0,7854	2,8611	-2,1422	1,5342	-3,7322	1,5064
3	1,1457	3,8809	-2,2028	3,3776	-7,5702	2,6982
4	1,6135	-0,7965	2,7785	0,6241	-0,5433	-1,1628

На рис.2 показана зависимость критерия N от координат $\frac{x}{L}$ и $\frac{y}{L}$.

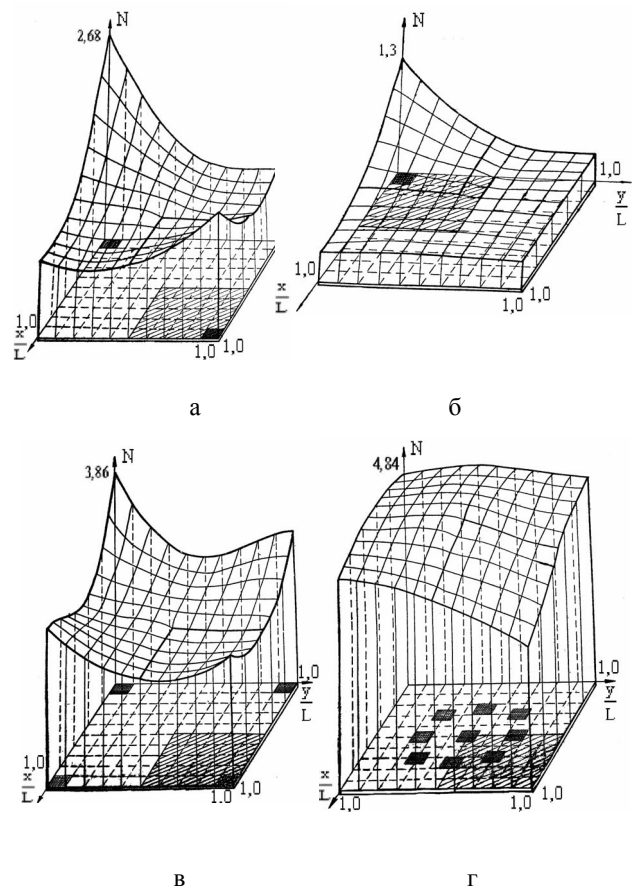


Рис. 2. В пространственной проекции показана зависимость критерия N от координат $\frac{x}{L}$ и $\frac{y}{L}$ для рассмотренных случаев рис. 1, а - г соответственно

5. Выводы

Приближённые аналитические структуры решения задач теплопроводности универсальны по отношению к изменению геометрии кусочно-однородных областей с источниками энергии и изменению границы контакта разнородных областей.

Эти качественные особенности аналитических структур задач теплопроводности позволяют более оперативно проводить многофакторный вычислительный эксперимент в целях выбора таких физических и

геометрических параметров, которые обеспечивают наиболее оптимальный тепловой режим систем с источниками энергии.

Научная новизна данной работы заключается в том, что предложен приближенный аналитический подход к математическому моделированию температурных полей в двухмерных системах с источниками энергии в неоднородных средах.

Практическая значимость проведенных исследований состоит в том, что этот подход позволяет в реальном масштабе времени и при малых затратах машинной памяти эффективно реализовывать алгоритмы диагностики и прогнозирования наиболее теплонапряженных частей плат РЭА из неоднородных материалов в целях более эффективного проектирования систем охлаждения РЭА.

Литература: 1. Дульнев Г.Н., Парфёнов В.Г., Сигалов А.В. Методы расчёта теплового режима приборов. М.: Радио и связь, 1990. 312 с. 2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1957. 512 с. 3. Рвачёв В.Л., Слесаренко А.П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1976. 279 с. 4. Рвачёв В.Л., Слесаренко А.П. Алгебро - логические

и проекционные методы в задачах теплообмена. Киев: Наук. думка, 1978. 140 с. 5. Темников А.В., Слесаренко А.П., Современные приближённые аналитические методы решения задач теплообмена. Самара: Самарский политехнический институт, 1991. 91 с.

Поступила в редколлегию 30.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Редько А.Ф.

Слесаренко Анатолий Павлович, Лауреат государственной премии Украины, ведущий научный сотрудник ИП-Маш им. А.М. Подгорного НАН Украины, д-р физ.-мат. наук, профессор. Научные интересы: математическая физика, дифференциальные и интегральные уравнения. математическое моделирование и вычислительные методы, теплофизика. Адрес: Украина, 61144, Харьков, ул. Уборевича, 14, кв. 24, к.тел. 959518 (р.).

Подкопай Ирина Васильевна, аспирантка НАН Украины Института проблем машиностроения им. А.М. Подгорного, ассистентка кафедры Высшей математики Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры. Научные интересы: математическая физика, дифференциальные и интегральные уравнения. математическое моделирование и вычислительные методы, теплофизика, алгебра. Адрес: Украина, 61020, Харьков, пр. Ильича, 93-А, кв. 22, тел. 7076087 (р.); e-mail: podkopay_ira@mail.ru.