



МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

КОЛЕЧКИНА Л.Н., ДВЕРНАЯ Е.А.

Рассматривается задача векторной оптимизации на комбинаторной конфигурации перестановок, анализируются методы решения таких задач. Описывается модифицированный подход решения векторных задач оптимизации, учитывая свойства и структуру множества перестановок. Предлагается алгоритм реализации описанного метода и пример решения.

1. Введение

Необходимость принятия оптимальных решений возникает в самых разнообразных сферах человеческой деятельности [1, 8, 10, 11]. В зависимости от сложности и характера задач этот процесс может быть интерпретирован как решение задачи векторной комбинаторной оптимизации. Такие задачи касаются поиска оптимальных значений целевых функций путем выбора из множества возможных решений.

Многокритериальность или векторность задачи объясняется необходимостью достижения нескольких целей одновременно и выражается в наличии двух или более критериев оптимизации. Часто характер построения множества допустимых решений отображается в комбинаторных свойствах задачи, которая рассматривается на определенной комбинаторной конфигурации [9]. С увеличением количества критериев оптимизации сложность задачи возрастает [2-7], а также возникает необходимость в разработке нового подхода к решению векторных комбинаторных задач. Поскольку общий алгоритм не всегда может быть адаптирован к рассматриваемой постановке задачи, вопрос о постановке задачи и поиске методов ее решений является актуальным.

Данная работа – продолжение исследований в области комбинаторной многокритериальной оптимизации [4-7, 10]. Ее цель – разработка модифицированного подхода к решению многокритериальной задачи на множестве перестановок, построение алгоритма модифицированного подхода, проведение численного эксперимента.

2. Постановка задачи

Как известно, задачу оптимизации нескольких критериев (векторную) можно привести методом свертыва-

ния критериев к однокритериальной. Поэтому постановка задачи состоит в поиске экстремальных значений функции на определенной комбинаторной конфигурации при дополнительных ограничениях. Определение экстремального значения функции без дополнительных ограничений не составляет особого труда, поскольку как максимальное, так и минимальное значение можно найти, упорядочив коэффициенты по возрастанию и определив значение функции в максимальной или минимальной точке конфигурации [8].

Рассмотрим модифицированный подход к решению следующей задачи: пусть задана функция $f = c_j, x_j \rightarrow \text{extr}$ на комбинаторной конфигурации $X = \{x\}$ и заданы дополнительные ограничения $A_{ij}x_j \leq b_j$.

Тогда задача формулируется следующим образом: найти элемент конфигурации, для которого функция достигает экстремального (максимального, минимального) значения и при этом выполняются дополнительные условия задачи (ограничения).

Следует отметить, что вначале проводится поиск решений, отвечающих дополнительным ограничениям, а потом проверяется принадлежность найденного решения рассматриваемой комбинаторной конфигурации [9]. Метод локализации значений функции, усовершенствованный подходом координатного метода, позволяет ограничить число рассматриваемых точек [2, 3]. Этот подход базируется на свойствах точек, которые определяют элементы комбинаторных конфигураций, разложенных на гиперплоскости и представленных в виде структурного графа [3], когда элементы упорядочены, и значение функции на определенном подграфе находится между значениями в крайних вершинах гиперплоскости.

Рассмотрим подпрограмму, которая лежит в основе модифицированного подхода к решению векторных задач оптимизации на комбинаторных конфигурациях.

3. Подпрограмма поиска точек конфигурации (удовлетворяющих ограничениям задачи на основе метода локализации значения функции и координатного метода)

Рассмотрим алгоритм поиска точек конфигурации, удовлетворяющих ограничениям задачи.

Алгоритм модифицированного координатного метода.

Пункт 1. Определяем количество вершин графа комбинаторной конфигурации [3, 4].

Пункт 2. Определяем количество крайних точек в общем графе каждого из подграфов.

Пункт 3. Находим максимальное и минимальное значения заданной целевой функции в крайних точках подграфов общего графа:

$$f(x)_{\max} = c_1x_{k-n+1} + c_2x_{k-n+2} + \dots + c_{n-1}x_{k-1} + c_nx_k,$$

$$f(x)_{\min} = c_nx_1 + c_{n-1}x_2 + \dots + c_2x_{n-k-1} + c_1x_{n-k}$$

Строим структурный граф, который отображает только крайние вершины подграфа: $p_1^i, q_1^{i'}$.

Пункт 4. Определяем значение целевой функции в начальной p_1^i и конечной $q_1^{i'}$ вершинах подграфов. Для поиска значений функции в следующих крайних вершинах воспользуемся технологией координатного метода:

а) для получения координат начальных вершин подграфа с фиксированной координатой m для j -го уровня необходимо выполнить последовательно перестановки элемента $(m-1)$ с $(m-(j+1))$;

б) для получения координат конечных вершин подграфа с фиксированной координатой m для j -го уровня необходимо последовательно выполнить перестановки элемента $(m-1)$ и $(j-1)$;

с) согласно координатному методу значения функции находится по формуле $f(p_1^i) = f(p_k^i) - \Delta$, где $\Delta = (j_k - j_l)(c_k - c_{\mu(l)})$, j_k, j_l – координаты вершины, $c_k, c_{\mu(l)}$ – коэффициенты функции.

Пункт 5. Для каждого структурного подграфа проверяем следующие условия: если для начальной вершины структурного графа выполняется условие $f(p_{jl}^i) \leq b_j$, то весь подграф удовлетворяет ограничению j и включается в множество $D_j \subset X$. Переходим к рассмотрению следующего подграфа или к пункту 10, если все подграфы рассмотрены, иначе переходим к пункту 7.

Пункт 6. Если $f(p_{jl}^i) \geq b_j$ и для конечной вершины выполняется условие $f(q_{jl}^{i'}) \geq b_j$, то рассматриваемый подграф не удовлетворяет условию и не включается в множество $D_j \subset X$. Переходим к рассмотрению следующего подграфа или к пункту 10, если все подграфы рассмотрены; иначе – к пункту 8.

Пункт 7. Если $f(p_{jl}^i) \geq b_j$, а $f(q_{jl}^{i'}) \leq b_j$, то часть элементов подграфа удовлетворяет условию и их поиск осуществляется с помощью углубления в структуру графа. Переходим к пункту 9.

Пункт 8. В подграфе, определенном в пункте 8, фиксируем последнюю из незафиксированных координат. Переходим к пункту 4.

Пункт 9. Формируем множество точек-элементов конфигурации, для которых $X \subset D_j$.

Выполнив этот алгоритм для всех ограничений, получим k множеств $D_i \subset X$, где $i \in N_k$. Находим

пересечение $D^* = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_k$. Теперь для поиска максимального (минимального) значения достаточно найти значение в максимально (минимально) возможных точках каждой из гиперплоскостей.

4. Реализация алгоритма

Рассмотрим пример работы алгоритма.

Пусть задано множество перестановок из 5 элементов. Найти точки конфигурации перестановок, которые удовлетворяют условию

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 32.$$

Используем алгоритм модифицированного координатного метода для поиска точек конфигурации, удовлетворяющих ограничению задачи

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 32.$$

Сделаем перестановку элементов неравенства, чтобы ее коэффициенты были расположены в порядке возрастания:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Получим неравенство

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 32.$$

Рассмотрим соответствующую функцию

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5.$$

Далее определим для этой функции экстремальные значения:

$$g_1(x)_{\max} = g_1(1, 2, 3, 4, 5) = 1 + 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 46;$$

$$g_1(x)_{\min} = g_1(5, 4, 3, 2, 1) = 5 + 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 26$$

Построим структурный граф многогранника перестановок согласно [3] (рис. 1).

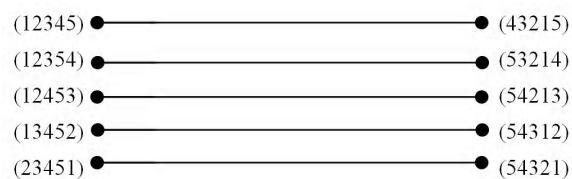


Рис. 1

Левые вершины назовем p_1^i , правые – $q_1^{i'}$. Переход от верхней левой вершины к нижней левой вершине получаем путем следующих перестановок элементов: $a_5 \Leftrightarrow a_4$, $a_5 \Leftrightarrow a_3$, $a_5 \Leftrightarrow a_2$, $a_5 \Leftrightarrow a_1$. Тогда значения разниц согласно координатному методу рассчитываются так: $\Delta_1 = (5-4) \cdot (5-3) = 2$, $\Delta_2 = (4-3) \cdot (5-2) = 3$, $\Delta_3 = (3-2) \cdot (5-1) = 4$,

$\Delta_4 = (2-1) * (5-1) = 4$. Значения функции будут соответственно следующими:

$$\begin{aligned} g_1(p_1^1) &= g_1(1,2,3,4,5) = 46, \\ g_1(p_1^2) &= g_1(1,2,3,5,4) = 46 - \Delta_1 = 46 - 2 = 44, \\ g_1(p_1^3) &= g_1(1,2,4,5,3) = 44 - \Delta_2 = 44 - 3 = 41, \\ g_1(p_1^4) &= g_1(1,3,4,5,2) = 41 - \Delta_3 = 41 - 4 = 37, \\ g_1(p_1^5) &= g_1(2,3,4,5,1) = 37 - \Delta_4 = 37 - 4 = 33. \end{aligned}$$

Переход от верхней правой вершины к нижней правой вершине совершается путем перестановок элементов $a_5 \Leftrightarrow a_1$, $a_5 \Leftrightarrow a_2$, $a_5 \Leftrightarrow a_3$, $a_5 \Leftrightarrow a_4$. Тогда значения разниц будут следующими:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (5-4) * (5-1) = 4, \quad \Delta_2 = (4-3) * (5-1) = 4, \\ \Delta_3 &= (3-2) * (5-2) = 3, \\ \Delta_4 &= (2-1) * (5-3) = 2, \end{aligned}$$

а значения функций изменяются соответственно:

$$\begin{aligned} g_1(q_1^1) &= g_1(4,3,2,1,5) = 39, \\ g_1(q_1^2) &= g_1(5,3,2,1,4) = 39 - \Delta_1 = 39 - 4 = 35, \\ g_1(q_1^3) &= g_1(5,4,2,1,3) = 35 - \Delta_2 = 35 - 4 = 31, \\ g_1(q_1^4) &= g_1(5,4,3,1,2) = 31 - \Delta_3 = 31 - 3 = 28, \\ g_1(q_1^5) &= g_1(5,4,3,2,1) = 28 - \Delta_4 = 28 - 2 = 26. \end{aligned}$$

Полученные данные представим в виде табл. 1.

Таблица 1

G_1^i	p_1^i	$g_1(p_1^i)$	q_1^i	$g_1(q_1^i)$
G_1^5	(12345)	46	(43215)	39
G_1^4	(12354)	44	(53214)	35
G_1^3	(12453)	41	(54213)	31
G_1^2	(13452)	37	(54312)	28
G_1^1	(23451)	33	(54321)	26

Учитывая, что значение функции каждого из подграфов (для которых закреплена последняя координата) находится в пределах от $g_1(p_1^1)$ до $g_1(q_1^1)$, сразу делаем вывод, что точки подграфов G_1^5 и G_1^4 не могут удовлетворить неравенству-ограничению, поскольку для них выполняются неравенства $46 \geq g_1(x) \geq 39$ и $44 \geq g_1(x) \geq 35$ соответственно. Очевидно, что искомые точки содержатся в подграфах G_1^3 , G_1^2 , G_1^1 . Для их нахождения переходим на следующий уровень и строим подграфы G_2^{3i} , G_2^{2i} , G_2^{1i} .

Структурный подграф G_1^3 изображен на рис.2.

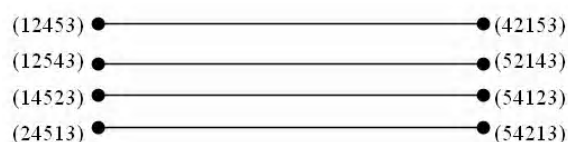


Рис. 2

Для этого подграфа повторяем описанную выше процедуру, последовательно отбрасывая неподходящие подграфы и углубляясь в структуру.

Полученные данные представим в виде табл. 2.

Таблица 2

G_2^{3i}	p_1^i	$g_1(p_1^i)$	q_1^i	$g_1(q_1^i)$
G_2^{35}	(12453)	41	(42153)	38
G_2^{34}	(12543)	40	(52143)	36
G_2^{32}	(14523)	36	(54123)	32
G_2^{31}	(24513)	34	(54213)	31

Из табл. 2 очевидно, что подграфы G_2^{35} и G_2^{34} следует исключить из дальнейшего рассмотрения. Углубление следует проводить в подграфы G_2^{32} и G_2^{31} . Получаем следующие результаты: для подграфа G_3^{32i} – в табл. 3, для подграфа G_3^{31i} – в табл. 4.

Таблица 3

G_3^{32i}	p_1^i	$g_1(p_1^i)$	q_1^i	$g_1(q_1^i)$
G_3^{325}	(14523)	36	(41523)	36
G_3^{324}	(15423)	35	(51423)	35
G_3^{321}	(45123)	32	(54123)	32

Таблица 4

G_3^{31i}	p_1^i	$g_1(p_1^i)$	q_1^i	$g_1(q_1^i)$
G_3^{315}	(24513)	34	(42513)	34
G_3^{314}	(25413)	33	(52413)	33
G_3^{312}	(45213)	31	(54213)	31

Как видим из представленных в графах таблиц, ограничение выполняется для подграфов G_3^{321} , G_3^{312} .

Аналогичные исследования подграфов G_2^{2i} и G_2^{1i} в результате дают следующие подграфы, удовлетворяющие условию: G_3^{241} , G_2^{21} , G_3^{153} , G_3^{152} , G_2^{14} ,

G_2^{13} , G_2^{12} . Следовательно, экстремальное значение функции следует искать среди точек описанных выше подграфов, что значительно сокращает количество в сравнении с полным перебором.

Учитывая перестановку элементов, получаем следующую таблицу условий (табл. 5).

Таблица 5

x1	x2	x5
3	1	5
2	1	5
1	2	4
	1	4
	1	3
1	3	2
	1	2
2	3	1
	2	1

Для этих условий найдем максимальное значение функции $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5$.

Максимальные точки каждой из гиперплоскостей и значения функции в них будут следующими (табл. 6).

Таблица 6

p_1^i	Координаты вершины	Значение функции
p_1^5	(21345)	77
p_1^4	(12354)	76
p_1^i	(13452)	70
p_1^i	(23451)	65

Таким образом, максимальное значение функции $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5$ на множестве перестановок из 5 элементов при ограничении $2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 32$ достигается в точке (2 1 3 4 5) и равняется 77.

5. Выводы

Исследованы сложные векторные задачи на комбинаторной конфигурации перестановок. Научная новизна состоит в предложенном модифицированном подходе к решению сформулированных задач на основе координатного метода и метода локализации функции, сформулированном алгоритме решения для линейной функции на комбинаторной конфигурации

перестановок, для которого проведены численные эксперименты. Модифицированный подход имеет практическую значимость и представляет интерес в дальнейшем для построения и развития структурированного метода для решения задач на различных комбинаторных конфигурациях при наличии дополнительных сложных ограничений.

Литература: 1. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. М.: Физматлит, 2004. 238 с. 2. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 2. С. 50-61. 3. Донец Г.П., Колечкина Л.М. Экстремальные задачи на комбинаторных конфигурациях. Монография. Полтава: ПУЕТ, 2011. 362 с. 4. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одной задаче оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках // Проблемы управления и информатики. 2010. № 2. С. 31-41. 5. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив // Кибернетика и системный анализ. 2011. № 2. С. 88-99. 6. Семенова Н.В., Колечкина Л.М., Нагорная А.М. Розв'язання багатокритеріальних задач комбінаторної оптимізації на множині поліперестановок // Доповіді НАНУ – 2010. № 6. С. 41-48. 7. Колечкина Л.Н. Обоснование структурированного метода локализации значения линейной функции, заданной на комбинаторной конфигурации перестановок // Динамические системы. 2009. № 27. С. 67-80. 8. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 308 с. 9. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977. 320 с. 10. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. 2008. № 3. С. 158-172. 11. Сергиенко И.В., Капшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 287 с.

Поступила в редколлегию 13.07.2011

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Семенова Н.В.

Колечкина Людмила Николаевна, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры информационной деятельности в экономических системах ВНЗ Укоопсоюза «Полтавский университет экономики и торговли». Научные интересы: математическое моделирование, информатика, кибернетика. Адрес: Украина, 36014, Полтава, ул. Ковалю, 3, e-mail: ludapl@ukr.net, +38(050)2034585, +38(0532)666915.

Дверная Елена Анатольевна, ассистент кафедры информационной деятельности в экономических системах ВНЗ Укоопсоюза «Полтавский университет экономики и торговли». Научные интересы: математическое моделирование, информатика, кибернетика. Адрес: Украина, 36014, Полтава, ул. Ковалю, 3, e-mail: rodionovaoa@mail.ru, +38(066)1528169.