ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є З УРАХУВАННЯМ ПРОЕКЦІЙНИХ ДАНИХ ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ПРОЦЕСУ ТОМОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ

Білобородов А.А., Кушнарьов А.А.
Науковий керівник — проф. Литвин О.Г.
Харківський національний університет радіоелектроніки
61166, Харків, пр. Леніна,14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36, e-mail: pmkaf@kture.kharkov.ua

The task of restoring a function basing on the projections given is considered. For the solution of the problem the sum Fourier is used. The algorithm of the Fourier coefficients based projection data using piecewise constant functions.

Задача томографічної реконструкції полягає у відновленні функції $f(x,y)$ за відомими проекційними даними γ_k вздовж прямих L_k:

$$\int\limits_{L_k} f(x,y)dl = \gamma_k,\ k = \overline{1,M}\,. \tag{1}$$

Для розв'язання задачі використано метод, запропонований О. М. Литвином у роботі [1]. Згідно з цим методом розв'язок задачі відшукується у вигляді суми Фур'є.

$$f(x,y) \approx S_{N,N}(x,y) = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} F_{k,l}e^{i2\pi(kx+ly)}\,, \tag{2}$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою

$$F_{k,l} = \iint\limits_{D} f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy\,.$$

Будемо наближено знаходити коефіцієнти Фур'є за допомогою даних Радона, тобто проекційних даних – значень інтегралів вздовж спеціально вибраної системи прямих, що перетинають квадрат $D = [0,1]^2$.

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є $F_{k,l}$ за допомогою проекцій розглядаємо окремо випадки щодо знаків *k* та *l*. Зокрема, для випадку $k > 0$ і $l > 0$ робимо заміну змінних $kx + ly = t$, $-lx + ky = v$, звідки $x = x(t,v) = \dfrac{kt - lv}{k^2 + l^2}$, $y = y(t,v) = \dfrac{lt + kv}{k^2 + l^2}$. У результаті область інтегрування D розіб'ється на три підобласті D_1, D_2, D_3, коли $k > l$ або $k < l$, та на дві підобласті D_1, та D_3, якщо $k = l$. Тоді, наприклад, інтеграл I_1 по області D_1 для випадку, коли $k > l > 0$, зводиться до вигляду, в якому використані проекційні дані:

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}_1} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right)e^{-i2\pi t}\left|J\right|dtdv =$$

$$= \int_0^l \frac{e^{-i2\pi t}dt}{k^2+l^2} \int_{-\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv = \left| \begin{array}{l} \int_{-\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv = \\ = F_1(k,l,t) = F_1(t) \\ t = zl;\ dt = ldz; \\ t=0 \Rightarrow z=0;\ t=1 \Rightarrow z=1 \end{array} \right| = l\int_0^1 \frac{F_1(zl)e^{-i2\pi zl}dz}{k^2+l^2} =$$

$$= \frac{l}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi zl}F_1(zl)dz\ .$$

Отриманий інтеграл заміняємо на суму інтегралів, далі функцію $F_1(k,l,zl)$ замінюємо кусково- сталою функцією. Після перетворень отримаємо:

$$I_1 = \frac{l}{k^2+l^2}\sum_{q=0}^{M-1}\int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi izl}F_1(k,l,zl)dz.$$

$$F_1(k,l,zl) \approx \sum_{q=0}^{M-1} F_1\left(k,l,l\cdot\frac{z_q+z_{q+1}}{2}\right)\cdot H_q(\mathrm{z}),\ H_q(\mathrm{z}) = \left[\begin{array}{l} 1, \mathrm{z}\in[\mathrm{z}_q;\mathrm{z}_{q+1}], \\ 0, \mathrm{z}\notin[\mathrm{z}_q;\mathrm{z}_{q+1}]. \end{array}\right.$$

$$I_1 = \frac{l}{k^2+l^2}\sum_{q=0}^{M-1} F_1\left(k,l,l\cdot\frac{z_q+z_{q+1}}{2}\right)\int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi zl}dz.$$

$$I_1 = \frac{l}{k^2+l^2}\cdot\frac{e^{-i2\pi\frac{l}{M}}-1}{-i2\pi l}\cdot\sum_{q=0}^{M-1} F_1\left(k,l,l\cdot\frac{z_q+z_{q+1}}{2}\right)\cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}l}.$$

Аналогічно обчислюються інші інтеграли. Таким чином, розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів Фур'є з урахуванням проекційних даних з використанням кусково-сталих функцій.

Література

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії / О. М. Литвин // Системний аналіз, управління і інформаційні технологіїї: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірка наукових праць. Випуск 125. – Харків: ХДПУ, 2000. – С. 27 – 35.
2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. – М.:Мир, 1990. – 288 с.

3. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. – М.: Мир, 1983. – 352 с.