

ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ВАРІАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ

Гольдінер Д.І.

Науковий керівник – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Леніна 14, каф. Прикладної математики,
тел. (066) 493-88-39), e-mail: goldiner19@mail.ru

We consider the numerical solution of the boundary value problem for the Dirichlet equation in a rectangular region with discontinuous boundary conditions. To solve this problem, a structural-variational method of R-functions was used. As coordinate functions was taken two-dimensional finite splines. Such choice suppose to significantly increase the accuracy of approximation and the minimizing sequence to converge rapidly to the exact solution of the problem. Calculations was made using the mathematical package MATHEMATICA 9. Integrals that was arisen in the solution, was computed by multiple threads.

Доволі значна частина математичних моделей, що розглядаються при вирішенні проблем, породжених промисловістю, наукою та технікою, зводяться до задач математичної фізики. В наші часи чи не єдиним способом їх розв'язання є чисельні методи та використання ЕОМ. Тому виникла необхідність пошуку рішень, що дають можливість скоротити витрати часу на проведення обчислень.

Ця робота присвячена використанню паралельних обчислень при розв'язанні крайових задач для еліптичних рівнянь.

Розглянемо задачу математичної фізики, що описується однорідним еліптичним рівнянням з неоднорідними крайовими умовами першого роду:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = \sin 3\pi y, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=1} = \sin 4\pi x. \quad (2)$$

Задача (1) має неоднорідні крайові умови, що робить оператор цієї крайової задачі нелінійним. Зробимо заміну:

$$u(x, y) = v(x, y) + \varphi(x, y),$$

де функція $\varphi(x, y) = \frac{(1-x)yx \cdot \sin(4\pi x) + y(1-y)(1-x) \cdot \sin(3\pi y)}{x(1-y) + x(1-x)y + (1-y)(1-x)y} \in L_2(\Omega)$ та

задовольняє неоднорідній крайовій умові (2). Тоді для знаходження функції отримаємо задачу з однорідними крайовими умовами:

$$-\Delta v = \Delta \varphi \quad \forall (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad (3)$$
$$v|_{x=0} = v|_{x=1} = v|_{y=0} = v|_{y=1} = 0.$$

Областю визначення оператора крайової задачі (1), (2) є множина

$D(A) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\} \subset L_2(\Omega)$. Замикання $D(A)$ у нормі, що індукована скалярним добутком $[u, v] = (-\Delta u, v) = \int_0^1 \int_0^1 \Delta u \cdot v dx dy$.

Можна показати [1], що

$$[u, v] = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Відповідно до методу Рітца, наближений розв'язок задачі (3) шукатимемо у вигляді

$$v_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y).$$

В якості координатних функцій використаємо поліном Лежандра.

Для підвищення швидкодії обчислення коефіцієнтів c_{ij} , застосовуємо паралельне обчислення інтегралів, що входять до системи Рітца, використовуючи можливості пакету МАТНЕМАТІСА 9. Це значно пришвидшує процес знаходження наближеного розв'язку.

На рис. 1 наведено графік залежності часу роботи програми від кількості потоків, а також від кількості координатних функцій.

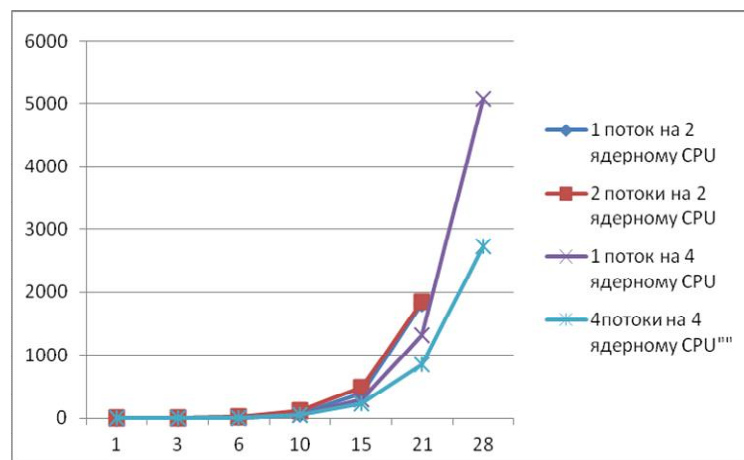


Рис. 1

З результатів можна помітити, що паралельне обчислення дає значні переваги при знаходженні наближеного розв'язку.

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

2. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982.—552 с.

3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 353 с.