УДК 519.7

З.В. ДУДАРЬ, С.А. ПОСЛАВСКИЙ, А.В. ПРОНЮК, Ю.П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работах [1, 2] отношения рассматривались как предикаты и как отображения. В данной статье вводится еще одна точка зрения на отношения, которые теперь интерпретируются как *обобщенные пространства.* Взгляд на отношение как на обобщенное пространство приводит к постановке ряда интересных логико-математических задач и к результатам, перспективным для применения во многих областях информатики. Рассмотрим какой-нибудь предикат $S(x_1, x_2, ..., x_m)$, определенный на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ произвольно выбираемых множеств $A_1, A_2, ..., A_m$. Противопоставим последний аргумент x_m предиката S всем его остальным аргументам $x_1, x_2, ..., x_{m-1}$ и обозначим его символом y, а множество A_m обозначим символом B. Множество A_{m-1} обозначим символом A_n, полагая $n=m-1$.Теперь введенный нами ранее предикат превращается в предикат $S(x_1, x_2, ..., x_n, y)$, определенный на декартовом произведении множеств $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times B$.

Рассмотрим отношение $\boldsymbol{S}$, соответствующее предикату S, которое зададим уравнением

$$S(x_1, x_2, ..., x_n, y)=1. \tag{1}$$

Оно связывает переменную y с переменными $x_1, x_2, ..., x_n$. Ничто не мешает рассматривать предмет y как вектор некоторого n-мерного пространства $\boldsymbol{S}$, а значения переменных $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n$, удовлетворяющие условию (1), — как его координаты. Правда, пространство $\boldsymbol{S}$ получается не совсем обычным. В классической математике используются пространства, которые естественно называть *декартовыми.* Характерное их свойство (которым обладает декартова система координат) состоит в том, что каждый вектор декартова пространства определяется единственным координатным представлением (набором координат) и каждому набору координат соответствует единственный вектор. Таким образом, все векторы декартова пространства и их координатные представления связаны взаимно-однозначным соответствием, что позволяет не различать их между собой. Для пространства, заданного уравнением (1), это свойство при любом предикате S, вообще говоря, не выполняется. Именно поэтому оно и называется нами обобщенным.

Сказанное поясним примером. Возьмем предикат

$$S(x_1,\ x_2,\ y) = x_1^a x_2^a y^1 \vee x_1^a x_2^a y^2 \vee x_1^b x_2^a y^2, \qquad \text{(а)}$$

где $x_1,\ x_2 \in \{a,\ b\}$, $y \in \{1,\ 2,\ 3\}$. Обобщенное пространство $\boldsymbol{S}$ задаем уравнением

$$S(x_1,\ x_2,\ y) = 1, \qquad \text{(б)}$$

которое связывает каждый вектор y с его координатами x_1, x_2. Набор координат $(x_1,\ x_2) = (a,\ a)$ определяет два вектора $y=1$ и $y=2$ этого пространства. Набор $(b,\ a)$ определяет один вектор 2, наборы $(a,\ b)$ и $(b,\ b)$ — ни одного. Вектор 1 имеет одно координатное представление $(a,\ a)$, вектор 2 — два $(a,\ a)$ и $(b,\ a)$, вектор 3 — ни одного. Из этого примера явствует, что каждое отношение порождает некое обобщенное пространство, которое представляет из себя связь между векторами y и их координатными представлениями $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$. Таким образом, вводимое здесь понятие пространства естественно рассматривать как обобщение понятия координатной системы, введенного Декартом, которое впоследствии развилось в классической математике в понятие пространства.

Можно усомниться, будет ли естественным называть описанную выше конструкцию пространством. Ведь обычно в математике векторы пространства можно складывать, а здесь о сложении элементов множества B нет и речи. Но в науке незримо присутствует еще и другое — "фольклорное" или интуитивное понятие пространства, под которым понимается любое многомерное образование, т.е. просто координатная система. Когда исследователь встречается с какими-то объектами, представленными, к примеру, на плоскости, то он часто говорит, что они расположены в двумерном пространстве, даже в том случае, если объекты эти не подвергаются действию операции сложения. Представляется, что в его сознании понятие многомерности неразрывно связано с интуитивным понятием пространства. Поэтому любое многомерное образование естественно именовать пространством. Понятие же отношения явно основано на идее многомерности (о чем свидетельствует наличие у него арности), а значит, мы не совершим ничего предосудительного, если отождествим его с понятием пространства.

Возникает вопрос: нужны ли кому-нибудь такие обобщенные пространства, ощущается ли в них практическая потребность? Нам представляется, что такие пространства будут полезны. Понятия отношения и обобщенного пространства равносильны, вместе с тем на понятии отношения зиждется вся логическая математика. Логическая же математика выполняет роль основного языка, с помощью которого формально описываются информационные объекты и процессы. Взгляд на отношение как на обобщенное пространство удобен из-за своей естественности и привычности как для математиков, так и для специалистов по информационным процессам. И те и другие владеют классическим понятием пространства, которое глубоко изучено, обросло удобной и разветвленной терминологией. Опираясь на аналогию между традиционными и обобщенными пространствами, можно будет быстро развивать учение об отношениях как теорию обобщенных пространств.

Чтобы продемонстрировать естественность использования обобщенных пространств при исследовании информационных объектов, рассмотрим их применение для изучения механизма словоизменения в русском языке. Русские тексты составляются из отдельных словоформ. Так, предыдущее предложение состоит из словоформ *русские, тексты* и т. д. Конкретный вид словоформы определяется заданным словом (точнее - его словарной формой) и значениями грамматических признаков. К грамматическим признакам относятся падеж, число, род, лицо, время и т. п. Словоформа *русском*, входящая в словосочетание *в русском языке*, определяется словом *русский*, предложным падежом, мужским родом и единственным числом; словоформа *механизма* характеризуется словом *механизм*, родительным падежом и единственным числом. Словоформу естественно рассматривать как вектор, а набор компонентов, состоящий из слова и грамматических признаков, - как ее координатное представление. К примеру, в качестве координатного представления словоформы y=*механизма* принимаем набор определяющих ее компонентов (x_1, x_2, x_3)=(*механизм*, родительный, единственное). В роли переменной x_1 используется словарная форма слова, в роли x_2 - падеж, x_3 - число.

Во многих случаях словоформа однозначно определяется своим координатным представлением, а оно однозначно определяется своей словоформой. Так, набор компонентов (*механизм*, родительный, единственное) определяет только одну словоформу *механизма*. И обратно, словоформа *механизма* однозначно разлагается в набор компонентов (*механизм*, родительный, единственное). Но так бывает далеко не всегда. К примеру, набор компонентов (*сахар*, родительный, единственное) порождает две словоформы: *сахара (чай без сахара)* и *сахару (дай кусочек сахару)*. Словоформе *собаки* соответствуют два координатных представления: (*собака*, родительный, единственное) и (*собака*, именительный, множественное). Набору компонентов (*терпение*, именительный, множественное) не соответствует ни одной словоформы. Эти примеры наглядно показывают, что механизм русского словоизменения (и не только русского) естественным образом охватывается понятием обобщенного пространства; вместе с тем, в классическое понятие декартова пространства этот механизм не укладывается. Мы полагаем, что существует значительное число информационных объектов, требующих для своего математического описания привлечения понятия обобщенного пространства.

Пусть $S(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ – какой-нибудь предикат на $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B$. Будем говорить, что предикат S *порождает обобщенное пространство* $\boldsymbol{S}$ на декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ над множеством B. В дальнейшем, для краткости, обобщенные пространства будем называть просто *пространствами*. Предикат S называется *характеристическим* для пространства $\boldsymbol{S}$. Множество A называется *координатной системой* пространства $\boldsymbol{S}$. Множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *координатными осями* пространства $\boldsymbol{S}$. Число n называется *размерностью* пространства $\boldsymbol{S}$. Элементы множества A называются *точками* или *ячейками* (в случае, если множество A конечно) координатной системы. Множество B называется *носителем* пространства $\boldsymbol{S}$. Элементы $y \in B$ называются *векторами* пространства $\boldsymbol{S}$. Любая точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая условию (1), называется *координатным представлением* вектора y. Для некоторых применений (например, при изучении механизма естественного языка) векторы $y \in B$ пространства $\boldsymbol{S}$ удобно называть его *предметами,* переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ – *признаками предмета*, значения переменной x_i $(i = \overline{1,n})$ – *оттенками i-го признака*, множество A_i – i-м *полем оттенков*. Пространство $\boldsymbol{S}$ характеризуется связью (1) между его векторами $y \in B$ и точками $x \in A$ его координатной системы. Для декартовых пространств эта связь есть биективное отображение множества A в множество B, поэтому каждое декартово пространство можно с точностью до изоморфизма охарактеризовать его координатной системой. Если же для обобщенного пространства $\boldsymbol{S}$ указать только его координатную систему A без указания предиката S, то характеристика такого пространства будет неполной.

Отображение

$$s\ (x_1, x_2, \dots, x_n) = y \tag{2}$$

A в B, соответствующее [1] предикату S, называется *отображением координатной системы* A пространства $\boldsymbol{S}$ в его носитель B. Оно полностью характеризует пространство $\boldsymbol{S}$. Отношение $\boldsymbol{S}$, заданное условием (1), связывает каждый вектор $y \in B$ с набором (x_1, x_2, ..., x_n) его координат $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$ (одним, многими или ни одним). Отображение (2) каждому набору координат (x_1, x_2, ..., x_n) $\in A$ ставит в соответствие вектор $y \in B$ (один, много или ни одного). Например, отображение

$$s(x_1,\ x_2)=y, \qquad \text{(в)}$$

которое соответствует предикату $S(x_1, x_2, y)$, заданному равенством (а), выразится [1] системой условий:

$$x_1^a x_2^a \supset y^1 \vee y^2;\ x_1^b x_2^a \supset y^2;\ x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^b \supset 0\,. \qquad \text{(г)}$$

Она означает, что набору (a, a) отображение s ставит в соответствие два вектора 1 и 2, набору (b, a) — один вектор 2, наборам (a, b) и (b, b) — ни одного вектора. Отображение

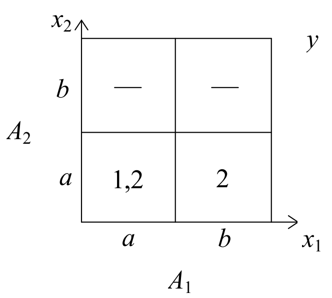
$$s^{-1}(y)=(x_1,\ x_2), \qquad \text{(д)}$$

обратное отображению s, запишется системой условий

$$y^1 \supset x_1^a x_2^a;\ y^2 \supset x_1^a x_2^a \vee x_1^b x_2^a;\ y^3 \supset 0, \qquad \text{(е)}$$

которая означает, что вектору 1 соответствует одно координатное представление (a, a); вектору 2 — два (a, a) и (b, a); вектору 3 — ни одного.

Носителем пространства $\boldsymbol{S}$, заданного предикатом (а), является множество B ={1, 2, 3}, координатными осями служат множества A_1=A_2={a, b}, в роли координатной системы выступает множество A={a, b}^{2}. Пространство $\boldsymbol{S}$ можно наглядно представить в виде графика отображения s (x_1, x_2)=y (рисунок). В левой нижней ячейке графика (x_1, x_2)=(a, a) содержится два вектора 1 и 2; в правой нижней (b, a) — один вектор 2; в остальных ячейках графика нет ни одного вектора. Проектируя вектор 1 на оси x_1 и x_2, находим его единственное координатное представление (a, a); вектор 2 имеет два координатных представления (a, a) и (b, a). Вектор 3 вообще не попал в пределы координатной сетки, поэтому у него нет ни одного координатного представления. Если бы пространство $\boldsymbol{S}$ было декартовым, то все векторы носи-



теля B расположились бы без повторений в точности по одному разу в каждой ячейке координатной системы.

Введем i-й *проекционный предикат* пространства $\boldsymbol{S}$. Под этим именем будем понимать предикат $G_i(y, x_i)$ на $B\times A_i$ $(i=\overline{1,n})$, значения которого при любых $y\in B$ и $x_i\in A_i$ определяются равенством:

$$G_i(y, x_i)=\exists x_1\in A_1\exists x_2\in A_2\ldots\exists x_{i-1}\in A_{i-1}\exists x_{i+1}\in A_{i+1}\ldots\exists x_n\in A_n\,,$$

$$S(x_1, x_2,\ldots, x_i,\ldots, x_n, y)\,. \tag{3}$$

Например, для пространства, заданного предикатом (а), проекционные предикаты запишутся в виде:

$$G_1(y_1, x_1)=x_1^a y^1\vee y^2\,;\quad G_2(y_1, x_2)=x_2^a(y^1\vee y^2)\,. \tag{ж}$$

Предикату $G_i(y, x_i)$ соответствует отображение

$$g_i(y)=x_i \tag{4}$$

из B в A_i, называемое i-м *проектором* пространства $\boldsymbol{S}$. Проекционный предикат $G_i(y, x_i)$ связывает каждую точку $y\in B$ с ее координатой $x_i\in A_i$ (одной, многими или ни одной). Проектор $g_i(y)=x_i$ каждой точке $y\in B$ ставит в соответствие её координату $x_i\in A_i$ (одну, много или ни одной). Например, для пространства, заданного предикатом (а), проекторы $g_1(y)=x_1$ и $g_2(y)=x_2$ запишутся в виде:

$$y^1\supset x_1^a,\ y^2\supset x_1^a\vee x_1^b,\ y^3\supset 0\,; \tag{з}$$

$$y^1\vee y^2\supset x_2^a,\ y^3\supset 0\,. \tag{и}$$

Переходим к рассмотрению внутренней структуры и свойств обобщенных пространств. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные понятия. Предикат $P(x, y)$, определенный на $A\times B$, называется *вполне определенным слева,* если он удовлетворяет условию

$$\forall x\in A\,\exists y\in B\ P(x, y)\,; \tag{5}$$

вполне определенным справа, если он удовлетворяет условию

$$\forall y\in B\,\exists x\in A\ P(x, y)\,; \tag{6}$$

и *вполне определенным*, если он вполне определен слева и справа. Если предикат P на $A\times B$ не является вполне определенным, то его можно превратить во вполне определенный с помощью операции *естественного сужения* области его определения, под которой понимается замена области A областью $A'\subseteq A$, характеризуемой предикатом

$$A'(x) = \exists y \in B\ P(x, y)\ , \qquad (7)$$

и области B — областью $B' \subseteq B$, характеризуемой предикатом

$$B'(y) = \exists x \in A\ P(x, y)\ . \qquad (8)$$

Строки и столбцы таблицы предиката называюся *нулевыми*, если они сплошь заполнены нулями. В процессе естественного сужения области определения предиката из его таблицы исключаются все нулевые строки и столбцы. Нулевые строки и столбцы не несут в себе никакой полезной информации и поэтому могут быть исключены из таблицы предиката без ущерба для полноты его характеристики. В случае необходимости таблицу предиката всегда можно *расширить* до первоначальных размеров, дополнив ее ранее исключенными из нее нулевыми строками и столбцами.

Предикат E, определенный на $A \times A$, называется *рефлексивным*, если он удовлетворяет условию

$$\forall x \in A\ E(x, x)\ , \qquad (9)$$

и *квазирефлексивным*, если он удовлетворяет условию

$$\forall x \in A((\exists y \in A(E(x, y) \vee E(y, x))) \supset E(x, x))\ . \qquad (10)$$

Свойство (10) означает, что после естественного сужения области определения квазирефлексивный предикат E превращается в рефлексивный. Предикат E, определенный на $A \times A$, называется *симметричным*, если он удовлетворяет условию

$$\forall x, y \in A(E(x, y) \supset E(y, x))\ . \qquad (11)$$

Рефлексивный и симметричный предикат называется *толерантным*. Квазирефлексивный и симметричный предикат называется *квазитолерантным*. После сужения области определения квазитолерантный предикат превращается в толерантный.

Теорема об общем виде толерантного предиката. *Пусть E - предикат на $B \times B$. Тогда E есть толерантность в том и только том случае, если существуют множество A и такой предикат F на $B \times A$, что*

а) *для любых x, $y \in B$*

$$E(x, y) = \exists u \in A(F(x, u) \wedge F(y, u))\ ; \qquad (12)$$

б) *для произвольного $x \in B$ выполнено условие $\exists u \in A\ F(x, u)$.*

Доказательство. Из условий а, б следует, что для любых x, $y \in B$ имеют место равенства $E(x, x) = (\exists u \in A F(x, u) \wedge F(x, u)) = (\exists u \in A\ F(x, u)) = 1$ и $E(x, y) = (\exists u \in A F(x, u) \wedge F(y, u)) = (\exists u \in A\ F(y, u) \wedge F(x, u)) = E(y, x)$, т. е. предикат E обладает свойствами рефлексивности и симметричности. Поэтому E — толерантность. Доказываем обратное утверждение. Пусть E — толерантный предикат на $B\times B$. Рассмотрим множество $A=\{(x, y)\in B\times B \mid E(x, y)\}$. Определим предикат F на $B\times A$ равенством $F(x, (v, w))=x^v \vee x^w$, где $x\in B$, $(v, w)\in A$. Тогда при любых x, $y\in B$ будем иметь $E(x, y)=((x, y)\in A)\supset F(x, (x, y))\wedge F(y, (x, y))\supset(\exists\, u\in A\ F(x, u)\wedge F(y, u)))$. Наоборот, если существует элемент $u=(v, w)\in A$ такой, что выполнено условие $F(x, u)\wedge F(y, u)$, то имеем $(x^v \vee x^w)\wedge(y^v \vee y^w)=(x^v y^v \vee \vee x^w y^w)\vee(x^v y^w \vee x^w y^v)=1$. Если удовлетворяется одно из условий $x^v y^v$ или $x^w y^w$, то в силу рефлексивности предиката E получаем $E(x, y)=1$. Если же выполняется условие $x^v y^w \vee x^w y^v$, то $E(x, y)=E(y, x)=1$, так как E — симметричный предикат и $E(v, w)=1$ (поскольку $(v, w)\in A$). Поэтому условие а выполнено. Условие б также удовлетворяется: $F(x, u)=1$, если $u=(x, x)$. Теорема доказана.

Теорема об общем виде квазитолерантного предиката. *Пусть E — предикат на $B\times B$. Тогда E есть квазитолерантность в том и только том случае, если существуют множество A и такой предикат F на $B\times A$, что для любых x, $y\in B$ выполнено равенство* (12).

Доказательство. Пусть предикат E представим в виде (12). Тогда условие симметричности E проверяется так же, как и в предыдущей теореме. Проверим выполнение свойства квазирефлективности. Если для некоторого $x\in B$ существует $y\in B$, так что $E(x, y)=1$, то существует $u\in A$, для которого выполнено условие $F(x, u) \wedge F(y, u)$. Но тогда $\exists u\in A\ F(x, u)\wedge F(x, u)$, откуда следует $E(x, x)$. Значит, E — квазитолерантность. Доказываем обратное утверждение. Пусть E — квазитолерантный предикат на $B\times B$, а $B'\times B'$ — естественное сужение области определения предиката E. Тогда на множестве $B'\times B'$ предикат E будет толерантностью. Из теоремы об общем виде толерантности следует, что существует множество A и предикат F на $B'\times A$ такой, что условие (12) выполнено для любых x, $y\in B'$. Доопределив предикат F на множестве $(B/B')\times A$ нулевыми значениями, получим, что условие (12) выполнено для всех x, $y\in B$. Теорема доказана.

Предикат E_i $(i=\overline{1,n})$, определенный на $B\times B$, где B — носитель пространства $\boldsymbol{S}$, значения которого при любых y_1, $y_2\in B$ определяются равенством

$$E_i(y_1, y_2)= \exists x_i\in A_i(G_i(y_1, x_i)\wedge G_i(y_2, x_i)), \tag{13}$$

называется i-м *предикатом, сопровождающим пространство* $\boldsymbol{S}$. Здесь G_i — i-й проекционный предикат пространства $\boldsymbol{S}$, определенный на $B\times A_i$. Согласно только что доказанной теореме, все предикаты, сопровождающие пространство $\boldsymbol{S}$, являются квазитолерантностями.

Теорема о квазитолерантностях, сопровождающих пространство. а) *Для каждого пространства* $\boldsymbol{S}$ *на* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *над* B *существует единственный набор* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *сопровождающих его квазитолерантностей. б) Для любого набора квазитолерантностей* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *на* $B \times B$ *найдутся множества* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *и пространство* $\boldsymbol{S}$ *на* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *над* B*, для которого предикаты* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *будут сопровождающими.*

Доказательство. Утверждение а является прямым следствием определения сопровождающих квазитолерантностей пространства $\boldsymbol{S}$. Докажем утверждение б. Согласно теореме об общем виде квазитолерантности, для любого квазитолерантного предиката E_i $(i = \overline{1,n})$ на $B \times B$ существуют множество A_i и такой предикат G_i на $B \times A_i$, что при любых $y_1, y_2 \in B$ $E_i(y_1, y_2) = \exists x_i \in A_i (G_i(y_1, x_i) \wedge G_i(y_2, x_i))$.

Положим $S(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} G_i(y, x_i)$ для всех $x_i \in A_i$ $(i = \overline{1,n})$, $y \in B$. Тогда предикат S на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times B$ определяет обобщенное пространство $\boldsymbol{S}$, для которого предикаты $E_1, E_2, \ldots, E_n$ являются сопровождающими квазитолерантностями. Заметим, что указанный выбор множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и пространства $\boldsymbol{S}$ для заданного набора $E_1, E_2, \ldots, E_n$ квазитолерантностей на $B \times B$, вообще говоря, не является единственно возможным. Теорема доказана.

Список литературы. 1. *Дударь З.В., Мельникова Р.В., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Отношения как объекты формульного описания // Проблемы бионики. 1997. Вып. 48. С. 68-77. 2. *Дударь З.В., Самуйлик И.Г., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Отображения как объекты формульного описания // АСУ и приборы автоматики. 1997. Вып. 107. С. 77-87.

Поступила в редколлегию 05.01.99.

Дударь Зоя Владимировна, канд. техн. наук, и.о. зав. кафедрой ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: информатика. Адрес: Украина, 310202, Харьков, пр. Л.Свободы, 39б, кв. 31.

Пославский Сергей Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики ХГУ. Научные интересы: информатика, математическое моделирование информационных процессов. Адрес: Украина, 310000, Харьков, ул. Котлова, 10, кв. 21.

Пронюк Анна Валериевна, аспирантка кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: идентификация процессов человеческого мышления. Адрес: Украина, 310145, Харьков, ул. Космическая, 47, кв. 157.

Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович, д-р техн. наук, профессор кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ, заслуженный деятель науки и техники Украины. Научные интересы: теория и практика искусственного интеллекта. Адрес: Украина, 310058, Харьков, ул. Культуры, 11, кв. 31, тел. 40-94-46.