

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
НА МНОЖЕСТВЕ КОМПОЗИЦИЙ ПЕРЕСТАНОВОК

Введение

При построении математических моделей задач компоновки объектов в сложных технических системах возникает необходимость применения методов математического моделирования. Проблема генерации и исследования свойств различных комбинаторных множеств является актуальной при математическом моделировании и решении задач во многих областях, в том числе в геометрическом проектировании, принятии решений. Задачи такого класса возникают при разработке радиотехнических устройств и систем, систем контроля параметров в заданной области [1-3].

В качестве средств описания классов комбинаторных множеств могут быть использованы различные подходы. Это, прежде всего, классические методы, использующие понятия конфигураций Берга и теорию перечисления Пойа [4,5], понятия поликомбинаторного множества [6] и другие. С целью формализации описаний новых комбинаторных множеств на основе описаний известных комбинаторных множеств в работе [7] предложены композиционные образы комбинаторных множеств.

Введение и описание новых комбинаторных множеств предполагает их использование при построении математических моделей классов задач и методов их анализа. Для этого необходимо исследование комбинаторных свойств вводимых множеств. Разработка комбинаторных оптимизационных моделей и методов решения научных и прикладных задач предполагает исследование и применение экстремальных свойств различных классов функций, заданных на комбинаторных множествах.

Целью настоящей работы является решение ряда задач оптимизации на новом классе композиционных образов комбинаторных множеств – композиции перестановок.

Определение композиции перестановок

В статье [8] введено новое комбинаторное множество – композиция перестановок, обозначенное через PW_N . Согласно [8] композиция перестановок представляет собой композиционный образ комбинаторных множеств $P_{nk}, P_{m_1k_1}, P_{m_2k_2}, \dots, P_{m_s k_s}$, порожденный множествами $\{a_1^1, a_2^1, \dots, a_{m_1}^1\}, \{a_1^2, a_2^2, \dots, a_{m_2}^2\}, \dots, \{a_1^n, a_2^n, \dots, a_{m_n}^n\}$. Здесь P_{nk} – множество перестановок из n элементов, k из которых являются различными, $a_i^j \in R^1$, $i \in J_{m_j}, j \in J_n$, $J_s = \{1, 2, \dots, s\}$. Мощность множества PW_N составляет $\text{Card } PW_N = \text{Card } P_{nk} \cdot \text{Card } P_{m_1k_1} \cdot \dots \cdot \text{Card } P_{m_s k_s}$. При этом мощность множества перестановок зависит от кратностей порождающих элементов и определяется соотношением $M = \text{Card } P_{nk} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$, где $n_1, n_2, \dots, n_k$ – кратности различных порождающих элементов множества P_{nk} .

Множество PW_N состоит из элементов вида $w = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n)$, где $\bar{w}_j = (a_{s_1}^j, a_{s_2}^j, \dots, a_{s_{m_j}}^j)$, $j \in J_n$. В наборе $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ k элементов являются различными, среди элементов $a_{s_1}^j, a_{s_2}^j, \dots, a_{s_{m_j}}^j$ ровно k_j различных. Последовательность индексов $(s_1, s_2, \dots, s_{m_j}) \in L_{m_j}$, а $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in L_n$ где через L_k обозначено множество всевозможных перестановок элементов индексного множества J_k .

Множество PW_N представляет собой множество перестановок упорядоченных наборов $\bar{w}_j = (a'_{s_1}, a'_{s_2}, \dots, a'_{s_{m_j}})$. При этом каждый набор $\bar{w}_j$ является элементом комбинаторного множества перестановок $P_{m_j k_j}$, порожденного множеством $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_{m_j}\}$. Таким образом, элементы множества PW_N отличаются друг от друга порядком следования элементов $\bar{w}_j \in P_{m_j k_j}$ и порядком следования элементов $a'_1, a'_2, \dots, a'_{m_j}$ в наборе $\bar{w}_j$, $j \in J_n$.

На основе способа погружения комбинаторных множеств в евклидово пространство [1] в работе [8] выполнено отображение множества PW_N в пространство R^N . Образ множества PW_N в пространстве R^N обозначим $EW_{n, m_1 m_2 \dots m_n}$ или для краткости EW_N . Исследованы свойства композиции перестановок PW_N при отображении f в пространство R^N : $EW_N = f(PW_N)$, $EW_N \subset R^N$. Элементами множества EW_N являются векторы $x \in R^N$ вида: $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$, где $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in L_n$, $e_i = (a'_{s_1}, a'_{s_2}, \dots, a'_{s_{m_i}})$, $(s_1, s_2, \dots, s_{m_i}) \in L_{m_i}$, $i \in J_n$.

В результате погружения множество $EW_N = f(PW_N)$ представляет собой множество векторов в R^N , координаты которых принимают значения всевозможных перестановок векторов $e_i = (e'_1, e'_2, \dots, e'_{m_i}) = (a'_{s_1}, a'_{s_2}, \dots, a'_{s_{m_i}})$, где $(a'_{s_1}, a'_{s_2}, \dots, a'_{s_{m_i}}) \in E_{m_i k_i}$, а множество перестановок $E_{m_i k_i} = f(P_{m_i k_i})$ порождено элементами $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_{m_i}$ [9].

В дальнейших построениях будем считать, что множество PW_N является композиционным образом комбинаторных множеств P_{nk} , $P_{m_1 k_1}$, $P_{m_2 k_2}, \dots, P_{m_n k_n}$, таких что $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$.

Оптимизация линейной функции на композиции перестановок

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^N c_i x_i \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in EW_N \subset R^N$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_N) \in R^N$.

Зададим на множестве векторов e_i , $i \in J_n$, следующее отношение порядка:

$$\begin{aligned} e_i \prec_{\zeta} e_k &\Leftrightarrow (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)_{\zeta} (e'_1, e'_2, \dots, e'_m) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((\sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+s_i} e'_{p_i} + \sum_{i=1}^m c_{(k-1)m+r_i} e'_{q_i} - \sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+\alpha_i} e'_{\gamma_i} - \sum_{i=1}^m c_{(k-1)m+\beta_i} e'_{\delta_i}) \leq 0) \end{aligned} \quad (2)$$

где $i \in J_n$, а последовательность индексов удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \{s_1, s_2, \dots, s_m\}: c_{(j-1)m+s_1} &\geq c_{(j-1)m+s_2} \geq \dots \geq c_{(j-1)m+s_m}, \\ \{p_1, p_2, \dots, p_m\}: e'_{p_1} &\leq e'_{p_2} \leq \dots \leq e'_{p_m}, \{q_1, q_2, \dots, q_m\}: e'_{q_1} &\leq e'_{q_2} \leq \dots \leq e'_{q_m}, \\ \{r_1, r_2, \dots, r_m\}: c_{(k-1)m+r_1} &\geq c_{(k-1)m+r_2} \geq \dots \geq c_{(k-1)m+r_m}, \\ \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}: c_{(j-1)m+\alpha_1} &\geq c_{(j-1)m+\alpha_2} \geq \dots \geq c_{(j-1)m+\alpha_m}, \\ \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}: e'_{\gamma_1} &\leq e'_{\gamma_2} \leq \dots \leq e'_{\gamma_m}, \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}: e'_{\delta_1} &\leq e'_{\delta_2} \leq \dots \leq e'_{\delta_m}, \\ \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}: c_{(k-1)m+\beta_1} &\geq c_{(k-1)m+\beta_2} \geq \dots \geq c_{(k-1)m+\beta_m}. \end{aligned}$$

Смысл введенного отношения порядка состоит в том, что два вектора e_{i_j} и e_{i_k} находятся в отношении $\prec_{\zeta}$, если при транспозиции значений координат $x_{m(j-1)+1}, x_{m(j-1)+2}, \dots, x_{m_j}$ и $x_{m(k-1)+1}, x_{m(k-1)+2}, \dots, x_{m_k}$ точки $x \in EW_N$, принимающих соответственно переупорядоченные

значения координат векторов e_{i_j} и e_{i_k} , значение функции $\varphi(x)$ вида (1) возрастает. Если обозначить значение функции $\varphi(x)$ в точке $x \in EW_N$ до транспозиции и переупорядочения φ_{i_j} , а после этого φ_{i_k} , то $e_{i_j} \prec_c e_{i_k}$, если $\varphi_{i_j} \leq \varphi_{i_k}$.

Отметим некоторые свойства введенного отношения.

Из структуры отношения (1) следует, что любые два вектора $e^{i'}$ и e^{i_k} сравнимы между собой.

Отношение $\prec_c$ рефлексивно, так как

$$\sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+s_i} e_{p_i}^{i'} + \sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+r_i} e_{q_i}^{i'} - \sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+\alpha_i} e_{r_i}^{i'} - \sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+\beta_i} e_{\delta_i}^{i'} = 0.$$

Отношение $\prec_c$ антисимметрично, поскольку для него справедливо соотношение:

$$(e_1^{i'}, e_2^{i'}, \dots, e_m^{i'}) \prec_c (e_1^{i_k}, e_2^{i_k}, \dots, e_m^{i_k}) \& (e_1^{i_k}, e_2^{i_k}, \dots, e_m^{i_k}) \prec_c (e_1^{i'}, e_2^{i'}, \dots, e_m^{i'}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e_1^{i'}, e_2^{i'}, \dots, e_m^{i'}) = (e_1^{i_k}, e_2^{i_k}, \dots, e_m^{i_k}).$$

Это соотношение справедливо, так как неравенства

$$\sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+s_i} e_{p_i}^{i'} + \sum_{i=1}^m c_{(k-1)m+r_i} e_{q_i}^{i_k} - \sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+\alpha_i} e_{r_i}^{i_k} - \sum_{i=1}^m c_{(k-1)m+\beta_i} e_{\delta_i}^{i'} \leq 0, \\ \sum_{i=1}^m c_{(k-1)m+s_i} e_{q_i}^{i_k} + \sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+r_i} e_{p_i}^{i'} - \sum_{i=1}^m c_{(k-1)m+\beta_i} e_{\delta_i}^{i'} - \sum_{i=1}^m c_{(j-1)m+\alpha_i} e_{r_i}^{i_k} \leq 0$$

одновременно выполняются только при $(e_1^{i'}, e_2^{i'}, \dots, e_m^{i'}) = (e_1^{i_k}, e_2^{i_k}, \dots, e_m^{i_k})$.

Отношение $\prec_c$ транзитивно, так как из соотношений $e_{i_j} \prec_c e_{i_k}$, $e_{i_k} \prec_c e_{i_l}$ следует $e_{i_j} \prec_c e_{i_l}$. Это справедливо, так как соотношения $e_{i_j} \prec_c e_{i_k}$, $e_{i_k} \prec_c e_{i_l}$ означают выполнение условий $\varphi_{i_j} \leq \varphi_{i_k}$, $\varphi_{i_k} \leq \varphi_{i_l}$, из которых следует $\varphi_{i_j} \leq \varphi_{i_l}$, а значит $e_{i_j} \prec_c e_{i_l}$.

Поскольку для введенного отношения выполняются свойства рефлексивности, антисимметричности, транзитивности и любые два элемента множества EW_N сравнимы по отношению $\prec_c$, то такое отношение является отношением линейного порядка.

Упорядочим множества e_i , $i \in J_n$, в соответствии с отношением (2). Пусть последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ такова, что

$$e_{i_1} \prec_c e_{i_2} \prec_c \dots \prec_c e_{i_m} \quad (3)$$

где $e_{i_j} = (e_1^{i_j}, e_2^{i_j}, \dots, e_m^{i_j})$, $i_j \in J_n$, $j \in J_n$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Минимум линейной функции $\varphi(x)$ задачи (1) на множестве EW_N достигается в точке

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \in EW_N, \quad (4)$$

где $x_{(j-1)m+r_i}^* = e_{s_i}^{i_j}$, $i \in J_m$, $j \in J_n$, $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ и $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ таковы, что $c_{(j-1)m+s_1} \geq c_{(j-1)m+s_2} \geq \dots \geq c_{(j-1)m+s_m}$ и $e_{r_1}^{i_j} \leq e_{r_2}^{i_j} \leq \dots \leq e_{r_m}^{i_j}$, а последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ удовлетворяет (3).

Доказательство. Предположим противное. Пусть минимум $\varphi(x)$ достигается в точке $y \in EW_N$, отличной от x^* . Значит можно указать такое значение $p = s \cdot m + \alpha$, $\alpha \in J_m$, $s \in J_{n-2}$, что $x_j^* = y_j$, $j \in J_{p-1}$, $x_p^* \neq y_p$. Тогда в соответствии с комбинаторной структурой множества EW_N существует такое $q = t \cdot m + \beta$, $\beta \in J_m$, $t \in J_{n-1}$, $t > s$, что $y_i = x_k^*$,

$i \in \{s \cdot m + 1, s \cdot m + 2, \dots, (s+1)m\}$, а $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ представляет собой перестановку индексов $\{t \cdot m + 1, t \cdot m + 2, \dots, (t+1)m\}$. В векторе y выполним транспозицию координат, принимающих значения векторов e_i и e_j , при этом переупорядочим значения координат векторов e_s и e_t так, чтобы выполнялось условие:

$\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ таковы, что $c_{(t-1)m+s_1} \geq c_{(t-1)m+s_2} \geq \dots \geq c_{(t-1)m+s_m}$,

$\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ таковы, что $e_{p_1}^j \leq e_{p_2}^j \leq \dots \leq e_{p_m}^j$,

$\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ таковы, что $c_{(s-1)m+r_1} \geq c_{(s-1)m+r_2} \geq \dots \geq c_{(s-1)m+r_m}$,

$\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ таковы, что $e_{q_1}^i \leq e_{q_2}^i \leq \dots \leq e_{q_m}^i$.

Полученный вектор обозначим $\bar{y}$. Очевидно, что $\bar{y} \in EW_N$. Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{y}) - \varphi(y) &= \sum_{i=1}^n c_{p-i+1} y_{q-i+1} + \sum_{i=1}^m c_{q-i+1} y_{p-i+1} - \sum_{i=1}^m c_{p-i+1} y_{p-i+1} - \\ &- \sum_{i=1}^m c_{q-i+1} y_{q-i+1} = \sum_{i=1}^m (c_{p-i+1} - c_{q-i+1})(y_{q-i+1} - y_{p-i+1}) = \sum_{i=1}^m (c_{p-i+1} - c_{q-i+1})(x_{p-i+1}^* - y_{p-i+1}). \end{aligned}$$

В соответствии с (3), (4)

$$x_{p-i+k_1}^* = e_{d_1}^i, x_{p-i+k_2}^* = e_{d_2}^i, \dots, x_{p-i+k_m}^* = e_{d_m}^i, y_{p-i+k_1} = e_{b_1}^i, y_{p-i+k_2} = e_{b_2}^i, \dots, y_{p-i+k_m} = e_{b_m}^i,$$

где $c_{p-i+k_1} \geq c_{p-i+k_2} \geq \dots \geq c_{p-i+k_m}$, $e_{d_1}^i \leq e_{d_2}^i \leq \dots \leq e_{d_m}^i$, $e_{b_1}^i \leq e_{b_2}^i \leq \dots \leq e_{b_m}^i$.

При этом, $v > s$, $i_v, i_s \in J_n$, $v, s \in J_n$. Тогда $\varphi(\bar{y}) - \varphi(y) = \sum_{i=1}^m (c_{p-i+1} - c_{q-i+1})(e_{d_i}^i - e_{b_i}^i)$.

Согласно (3), (4) $e_{b_i}^i < e_{d_i}^i$, поэтому $\varphi(\bar{y}) - \varphi(y) \leq 0$. Это противоречит предположению о достижении в точке $y \in EW_N$ минимума функции $\varphi(x)$ задачи (1) и приводит к справедливости утверждения теоремы.

Оптимизация нормы разности на композициях перестановок

Результаты теоремы 1 можно применить при решении следующей задачи:

$$\psi(y) = \|y - d\|^2 \rightarrow \min, y \in EW_N, \quad (5)$$

где $d = (d_1, d_2, \dots, d_N) \in R^N$. Для $\psi(y)$ при $y \in EW_N$ справедливо:

$$\psi(y) = \|y - d\|^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 + \sum_{i=1}^N d_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N d_i y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (e_j^i)^2 + \sum_{i=1}^N d_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N d_i y_i,$$

$$\min_{y \in EW_N} \psi(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (d_i^j)^2 + \sum_{i=1}^N d_i^2 + 2 \min_{y \in EW_N} \sum_{i=1}^N d_i^* y_i,$$

где $d_i^* = -d_i$, $i \in J_n$. В соответствии с теоремой 1 минимум в правой части достигается в точке $y^* \in EW_N$, где $y_{(j-1)m+i}^* = e_{s_j}^i$, $i_j \neq i_s$ при $s \neq j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $i \in J_m$, $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ и $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ таковы, что $c_{(j-1)m+s_1} \geq c_{(j-1)m+s_2} \geq \dots \geq c_{(j-1)m+s_m}$ и $e_{r_1}^i \leq e_{r_2}^i \leq \dots \leq e_{r_m}^i$ а последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет соотношению (3) при $c = d^*$, то есть $e_{i_1}^i < e_{i_2}^i < \dots < e_{i_n}^i$. Тогда решение задачи (5):

$$\min_{y \in EW_N} \psi(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (d_i^j)^2 + \sum_{i=1}^N d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N d_i^* y_i^*. \quad (6)$$

Рассмотрим задачу оптимизации вида

$$\psi(y) = \|y - d\|^2 \rightarrow \max, y \in EW_N, \quad (7)$$

где $d = (d_1, d_2, \dots, d_N) \in R^N$. По аналогии с выводом соотношения (6) получим

$$\max_{y \in EW_N} \|y - d\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (e'_i)^2 + \sum_{i=1}^N d_i^2 + \max_{y \in EW_N} (-2 \sum_{i=1}^N d_i y_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a'_j)^2 + \sum_{i=1}^N d_i^2 - \min_{y \in EW_N} (2 \sum_{i=1}^N d_i y_i)$$

На основании теоремы 1 минимум в правой части равенства достигается в точке $\tilde{y} \in EW_N$, где $\tilde{y}_{(j-1)m+i} = e'_{i_s}$, $i_j \neq i_s$ при $s \neq j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $i \in J_m$, $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ и $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ таковы, что $c_{(j-1)m+i_1} \geq c_{(j-1)m+i_2} \geq \dots \geq c_{(j-1)m+i_n}$ и $e'_{i_1} \leq e'_{i_2} \leq \dots \leq e'_{i_n}$ а последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет соотношению (4) при $c = d$, то есть $e_{i_1} <_d e_{i_2} <_d \dots <_d e_{i_n}$. Тогда

$$\max_{y \in EW_N} \|y - d\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a'_j)^2 + \sum_{i=1}^N d_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N d_i \tilde{y}_i. \quad (8)$$

Предположим теперь, что $d \in R^N$ является элементом множества EW_N . Тогда справедливо соотношение $\sum_{i=1}^N d_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (e'_j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a'_j)^2$. Значит,

$$\max_{y \in EW_N} \|y - d\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (e'_j)^2 - 2 \sum_{i=1}^N d_i \tilde{y}_i = L - 2 \sum_{i=1}^N d_i \tilde{y}_i, \quad (9)$$

где $L = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (e'_j)^2 = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a'_j)^2 = \text{const}$. Рассмотрим функцию $l_d(y) = \sum_{i=1}^N d_i y_i$, где $d \in EW_N$. Покажем, что минимальное значение $l_d(y)$ на множестве EW_N не зависит от выбора вектора коэффициентов $d \in EW_N$ и равно $M = \sum_{i=1}^N d_i \tilde{y}_i$, где $\tilde{y} \in EW_N$ удовлетворяет соотношению (8). С этой целью введем функцию $l_{d^1}(y) = \sum_{i=1}^N d^1_i y_i$, где $d^1 \in EW_N$, $d^1 \neq d$. Поскольку d^1 можно получить из d путем конечного числа транспозиций векторов $e_i = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ и значений e'_j , изменим порядок суммирования слагаемых в выражении для $l_{d^1}(y)$ таким образом, чтобы выполнялось условие $l_{d^1}(y) = \sum_{j=1}^N d^1_j y_j$, $d^1_j = d_j$, $j \in J_N$. Но тогда, поскольку $y \in EW_N$ принимает значения всевозможных перестановок элементов $e_i = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m) = (a'_{s_1}, a'_{s_2}, \dots, a'_{s_m})$, $i \in J_n$, то

$$\min_{y \in EW_N} l_d(y) = \min_{y \in EW_N} l_{d^1}(y) = M \quad (10)$$

что и требовалось показать. Это значит, что для любой точки $d \in EW_N$ расстояние до наиболее удаленной от нее точки множества EW_N является величиной постоянной, ее значение определяется соотношением (9) и равно $D_0 = \sqrt{L - 2M}$, где $L = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (e'_j)^2$, а M определяется соотношением (10). Приведенные рассуждения доказывают справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Диаметр множества EW_N

$$\text{diam } EW_N = \sqrt{2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a'_j)^2 - 2 \sum_{i=1}^N y_i^0 \tilde{y}_i},$$

где y^0 — произвольный элемент множества EW_N , а $\tilde{y} \in EW_N$ удовлетворяет условиям $\tilde{y}_{(j-1)m+i} = e'_{i_s}$, $i_j \neq i_s$ при $s \neq j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $i \in J_m$, $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ и $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$

таковы, что $c_{(j-1)m+s_1} \geq c_{(j-1)m+s_2} \geq \dots \geq c_{(j-1)m+s_m}$ и $e'_{i_1} \leq e'_{i_2} \leq \dots \leq e'_{i_m}$, последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ удовлетворяет соотношению (3) при $c = y^0$, то есть $e_{i_1} \prec_{y^0} e_{i_2} \prec_{y^0} \dots \prec_{y^0} e_{i_m}$.

Рассмотрим пример. Пусть множество $EW_9 = EW_{9,3,3,3}$ порождено множествами $\{4, -2, 2\}$, $\{5, 6, -1\}$, $\{2, -1, 3\}$. Координаты точек множества EW_9 принимают значения всевозможных перестановок элементов $e_1 \in P_3(4, -2, 2)$, $e_2 \in P_3(5, 6, -1)$, $e_3 \in P_3(2, -1, 3)$ вида: $(4, -2, 2, 5, 6, -1, 2, -1, 3)$, $(5, 6, -1, 4, -2, 2, 2, -1, 3)$, ..., $(2, -2, 4, -1, 6, 5, 3, -1, 2)$. Мощность данного множества EW_9 равна $\text{Card } EW_9 = 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! = 1296$.

Пусть на множестве EW_9 задана линейная функция вида (1), вектор коэффициентов которой имеет вид $c = (3, 4, -1, 5, 6, -7, -2, 1, -3)$. Задавая на множестве e' , $i \in J_3$, отношение порядка (2), получим следующее упорядочение: $(2, -1, 3) \prec_c (2, -2, 4) \prec_c (5, -1, 6)$. В соответствии с теоремой 1 минимум линейной функции с вектором коэффициентов c на множестве EW_9 достигается в точке $y^0 = (2, -1, 3, 2, -2, 4, 5, -1, 6)$ и равен -60 .

Для определения диаметра множества EW_9 выберем точку $d = y^0$ и введем соотношение $\prec_{y^0}$ вида (3). В соответствии с этим отношением $(2, 3, -1) \prec_{y^0} (5, 6, -1) \prec_{y^0} (2, 4, -2)$. Диаметр множества EW_9 найдем по теореме 2: $\text{diam } EW_9 = \sqrt{200 + 28} = 15,1$.

Заключение

Таким образом, в работе решен ряд экстремальных задач на новом классе комбинаторных множеств – композиции перестановок. Результаты могут быть использованы при математическом моделировании комбинаторных оптимизационных задач геометрического проектирования, при разработке радиотехнических устройств и систем, систем контроля параметров в заданной области и решении соответствующих задач комбинаторной оптимизации.

Полученные результаты могут послужить основой для построения оптимизационных моделей и методов решения задач со сложной комбинаторной структурой, чем определяется их научная ценность и практическая значимость.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с постановкой и решением на основе описанных результатов классов задач оптимизации на композиционных образах комбинаторных множеств.

Список литературы: 1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268 с. 2. Петровский А.Б. Многокритериальное принятие решений по противоречивым данным: подход теории мультимножеств // Информационные технологии и вычислительные системы. 2004. №2. С. 56–66. 3. Тимофеева Н.К. Об особенностях формирования и упорядочения выборок // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 3. С.179–187. 4. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977. 320 с. 5. Пойа Дж. Комбинаторные вычисления для групп, графов и химических соединений // Перечислительные задачи комбинаторного анализа. М.: Мир, 1979. С. 36–138. 6. Емец О.А., Роскладка А.А., Роскладка Е.В. Применение евклидовых поликомбинаторных множеств к построению моделей оптимизационных задач // Abstracts Second International School on Actuarial and Financial Mathematics (June, 8–12, 1999, Kyiv). Kyiv, 1999. P 20. 7. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В. Композиционные образы комбинаторных множеств и некоторые их свойства // Пробл. машиностроения. 2005. Т.8. № 3. С. 56–62. 8. Гребенник И.В. Классы композиционных образов комбинаторных множеств в математических моделях задач геометрического проектирования // Радиоэлектроника и информатика. 2005. № 3. С. 69 – 73. 9. Стоян Ю.Г., Емец О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: ІСДО, 1993. 188 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 13.03.2007