УДК 519.217.8

РАСПОЛОЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ КВАЗИСТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

ВЕПРИК А.Е.

Рассматривается множество K_n^{ρ} характеристических корней всех квазистохастических матриц n-го порядка с максимальным по модулю элементом ρ. Определяются границы этого множества для произвольных значений ρ и n.

Рассмотрим множество M_n всех стохастических матриц n-го порядка и обозначим через M_n множество характеристических корней всех таких матриц. В работах [1,2] множество M_n определено полностью.

В работе [1] показано, что для $n = 2$ M_n представляет собой отрезок действительной оси [-1,1], а для $n = 3$ – объединение треугольника с вершинами в точках (1,0), $\exp(2\pi i/3)$, $\exp(4\pi i/3)$ и отрезка действительной оси [-1,1].

В работе [2] показано, что для $n > 3$ фигура M_n симметрична относительно действительной оси, заключена в круге $|z|\le 1$ и имеет с окружностью $|z|= 1$ общие точки $\exp(2\pi ia/b)$, где $0 \le a < b \le n$. Граница M_n состоит из этих точек и соединяющих их в круговом порядке криволинейных дуг. Каждая из этих дуг задается одним из следующих параметрических уравнений:

$$\text{I}.\lambda^q(\lambda^p - t)^r = (1-t)^r\ ; \qquad (1)$$

$$\text{II}.(\lambda^b - t)^d = (1-t)^d\lambda^q\ , \qquad (2)$$

где параметр t изменяется в пределах $0 \le t \le 1$, а b,d,p,q,r – натуральные числа, которые определяются следующим образом. Пусть концы некоторой дуги, взятые против часовой стрелки, суть $\exp(2\pi ia'/b')$ и $\exp(2\pi ia''/b'')$. Возможны два случая:

а) $b''[n/b''] \ge b'[n/b']$,

б) $b''[n/b''] \le b'[n/b']$.

Если для некоторой дуги имеет место случай а), то для комплексно-сопряженной дуги имеет место случай б), и наоборот. Поэтому, в силу симметрии M_n, достаточно определить дуги, удовлетворяющие условию а).

Пусть $r_1 = b''$, $r_2 = a''$, $r_3,\dots,r_m$ – последовательность остатков, получающихся при нахождении наибольшего общего делителя чисел b'' и a'' посредством алгоритма Евклида. Если $[n/b''] = 1$ и для некоторого целого s : $r_{2s} = 1$, то дуга, соединяющая точки $\exp(2\pi ia'/b')$ и $\exp(2\pi ia''/b'')$, задается уравнением (1), где $r = r_{2s-1}$, а числа p и q определяются из соотношений

$$a''p \equiv 1 \bmod b''(0 < p < b''),$$
$$a''q \equiv -r \bmod b''(0 \le q < b'').$$

В противном случае дуга, соединяющая точки $\exp(2\pi ia'/b')$ и $\exp(2\pi ia''/b'')$, задается уравнением (2), причем $d = [n/b''], b = b''$, а q определяется из соотношения $a''q \equiv -1 \bmod b''(0 < q < b'')$.

Исследуем самый первый участок границы M_n. Это криволинейная дуга, соединяющая точки (1,0) и $\exp(2\pi/n)$, т. е. в данном случае

$$a' = 0,\quad b' = n,\quad a'' = 1,\quad b'' = n.$$

Тогда $b''[n/b''] = n[n/n] = n$, а $b'[n/b'] = n[n/n] = n$, т.е. данный случай относится к а). Далее, $[n/b''] = [n/n] = 1$ и для целого $s = 1$ $r_2 = 1$ в последовательности остатков алгоритма Евклида $r_1 = n,\ r_2 = n,\dots$. Тогда эта дуга задается уравнением (1), причем $p = n$, а $q = 0$.

Таким образом, для всех $n>3$ участок границы фигуры M_n, соединяющий точки (1,0) и $\exp(2\pi/n)$, удовлетворяет параметрическому уравнению

$$(\lambda - t)^n = (1-t)^n,\ \text{где } 0 \le t \le 1.$$

В этом параметрическом уравнении точке (0,1) соответствует значение параметра $t = 1$, а точке $\exp(2\pi/n)$ – значение параметра $t = 0$:

$$\lambda(0) = \exp(2\pi/n), \lambda(1) = 1.$$

Преобразуем параметрическое уравнение для $\lambda(t)$ к параметрическому уравнению для $\lambda(u)$, где $u = 1 - t$:

$$(\lambda(u) - 1 + u)^n = u^n,\ \text{где } 0 \le u \le 1,$$
$$(\lambda(0) = 1,\ \lambda(1) = \exp(2\pi/n)).$$

Рассмотрим параметрическое уравнение для вспомогательной дуги $z(u) = \lambda(u) - 1 + u$:

$$z(u)^n = u^n,\ \text{где } 0 \le u \le 1.$$
$$(z(0) = 0,\ z(1) = \exp(2\pi/n)).$$

Тогда $\arg z(u) = 2\pi/n,\ |z(u)|=|u|$ для $0 \le u \le 1$.

Таким образом, дуга $z(u)$ представляет собой прямолинейный отрезок, соединяющий точки комплексной плоскости 0 и $\exp(2\pi i/n)$. Координаты точек данного отрезка удовлетворяют параметрическим уравнениям $x(u) = \cos(2\pi/n)u,\ y(u) = \sin(2\pi/n)u$, где $0 \le u \le 1$. Тогда координаты точек отрезка дуги $\lambda(u)$ удовлетворяют параметрическим уравнениям

$$x(u) = (\cos(2\pi/n) - 1)u + 1,\ y(u) = (\sin(2\pi/n))u,$$

где $0 \le u \le 1$.

Таким образом, отрезок дуги $\lambda(u)$ представляет собой отрезок прямой, соединяющий точки комплексной плоскости 1 и $\exp(2\pi i/n)$.

Рассмотрим произвольную ненулевую квазистохастическую матрицу $A \in R^{n\times n}$, т.е. матрицу, элементы которой $a_{ij}(1 \le i, j \le n)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_{ii} \le 0 \quad 1 \le i \le n$;

2) $a_{ij} \ge 0 \quad 1 \le i, j \le n, i \ne j$;

3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad 1 \le i \le n$.

Пусть ρ – максимальный по модулю диагональный элемент матрицы A. Из условия 1 следует, что ρ – максимальный по модулю отрицательный элемент матрицы А, а из условий 2 и 3 следует, что ρ – максимальный по модулю элемент матрицы А.

Построим матрицу следующим образом:

$$B = (A+|\rho|E)/|\rho|,$$

где E – единичная матрица. Элементы матрицы $b_{ij}(1 \le i, j \le n)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $0 \le b_{ij} \le 1$, $1 \le i, j \le n$;

2) $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$, $1 \le i \le n$.

Таким образом, матрица А является стохастической. Найдем границы множества собственных значений квазистохастической матрицы А. Пусть некоторое число λ_0 является характеристическим корнем матрицы А. Тогда оно удовлетворяет характеристическому уравнению матрицы А:

$$|A - \lambda_0 E| = 0,$$

$$||\rho|(B - E) - \lambda_0 E| = 0,$$

$$||\rho|B - (\lambda_0 + |\rho|)E/|\rho|| = 0.$$

Таким образом, число $(\lambda_0 + |\rho|)/|\rho|$ удовлетворяет характеристическому уравнению матрицы В и, следовательно, является характеристическим корнем стохастической матрицы В.

Обозначим множество характеристических корней всех квазистохастических матриц n-го порядка с максимальным по модулю элементом ρ через K_n^ρ. Из сказанного следует, что все элементы множества K_n^ρ получаются из элементов множества M_n умножением на число $|\rho|$ и вычитанием числа $|\rho|$. Таким образом, для квазистохастических матриц n-го порядка с максимальным по модулю элементом ρ справедливы следующие утверждения:

K_2^ρ представляет собой отрезок действительной оси $[-2|\rho|, 0]$. K_3^ρ представляет объединение треугольника с вершинами в точках (0,0), $|\rho|\exp(2\pi i/3) - |\rho|$, $|\rho|\exp(4\pi i/3) - |\rho|$ с отрезком действительной оси $[-2|\rho|, 0]$.

Для $n > 3$ фигура K_n^ρ заключена в круге $|z+|\rho|| \le |\rho|$ и имеет с окружностью $|z+|\rho|| = |\rho|$ общие точки $|\rho|\exp(2\pi i a/b) - |\rho|$, где $0 \le a < b \le n$. Граница K_n^ρ состоит из этих точек и соединяющих их в круговом порядке криволинейных дуг.

Отрезки границы множества K_n^ρ, проходящие через точку комплексной плоскости (0,0), представляют собой отрезки прямых, соединяющих точки $|\rho|\exp(2\pi i(n-1)/n) - |\rho|$ и (0,0), (0,0) и $|\rho|\exp(2\pi i/n) - |\rho|$ соответственно.

Литература: 1.*Дмитриев Н.А., Дынкин Е.Б.* Характеристические корни стохастических матриц // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1946. №10. С.167-184. 2.*Карпелевич Ф.И.* О корнях матриц с неотрицательными элементами // Изв. АН СССР. Серия математчиеская. 1951. № 15.С.361-383.

Поступила в редколлегию 22.09.98

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Веприк Александр Ефимович, научный сотрудник кафедры ПМ ХТУРЭ. Адрес: Украина, Харьков, ул. Командарма Уборевича, 20-А, кв.10, тел. 65-90-38.

УДК 519.217.8

ДОСТИЖЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

ВЕПРИК А.Е.

Рассматривается однородный марковский случайный процесс с непрерывным временем, для которого выполняются условия сходимости к стационарному распределению. Предлагается способ управления параметрами процесса в целях достижения стационарного распределения марковского процесса за конечное время.

Рассмотрим однородный марковский случайный процесс с непрерывным временем x(t) и конечным состоянием n. Такой процесс рассмотрен в [1]. Пусть для этого процесса выполнены условия теоремы о сходимости к стационарному распределению. Тогда существует набор стационарных вероятностей, к которым стремятся с течением времени соответствующие вероятности нахождения данного процесса в его состояниях, причем этот набор единственен. Ставится задача управления значениями параметров однородного марковского случайного процесса в целях ускорения достижения вероятностями нахождения данного процесса в его состояниях стационарных вероятностей. Для решения этой задачи разработан алгоритм управления значениями параметров данного процесса.

Лемма 1. Рассмотрим однородный марковский процесс с конечным числом состояний n и параметрами $\lambda_{ij}(1 \le i, j \le n)$. Пусть для этого процесса выполняются условия теоремы о сходимости к стационарному распределению, причем все стационарные вероятности не равны нулю: $p_i^* \ne 0, \quad 1 \le i \le n.$

Определим матрицу А следующим образом: